

# Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

## 8. Plánování průmyslových experimentů



# 8. Plánování průmyslových experimentů

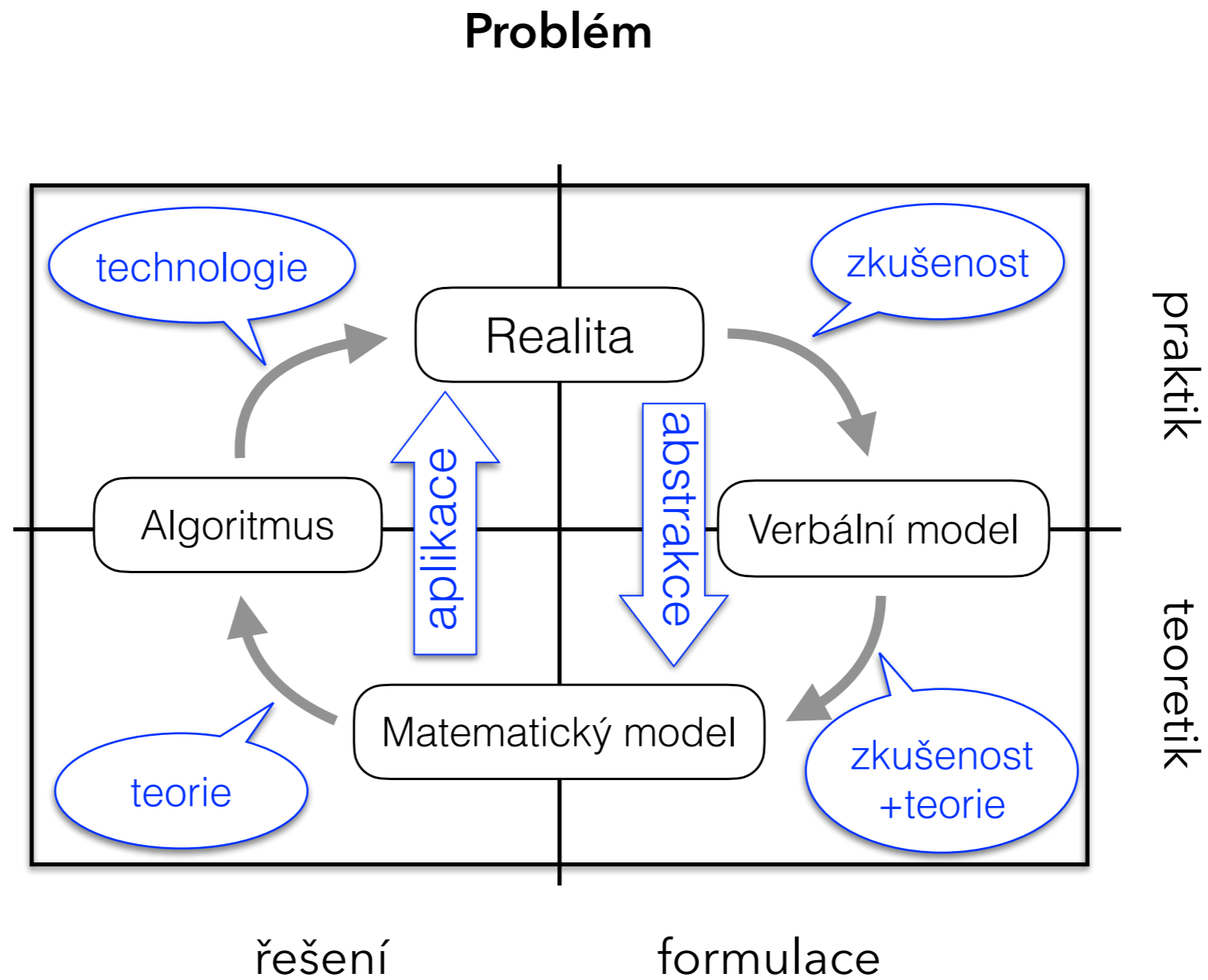
## Klíčové pojmy:

- Návrh experimentu (5 kroků)
- Odezva, faktory (hlavní, vedlejší, blokové)
- Interakce, replikace, znáhodnění
- Ortogonální návrh (matice experimentu)

## Klíčové vztahy:

- Výpočet efektů jednotlivých faktorů a jejich interakcí
- Taguchiho ortogonální návrhy, vnitřní a vnější soustava.

# Řešení problémů



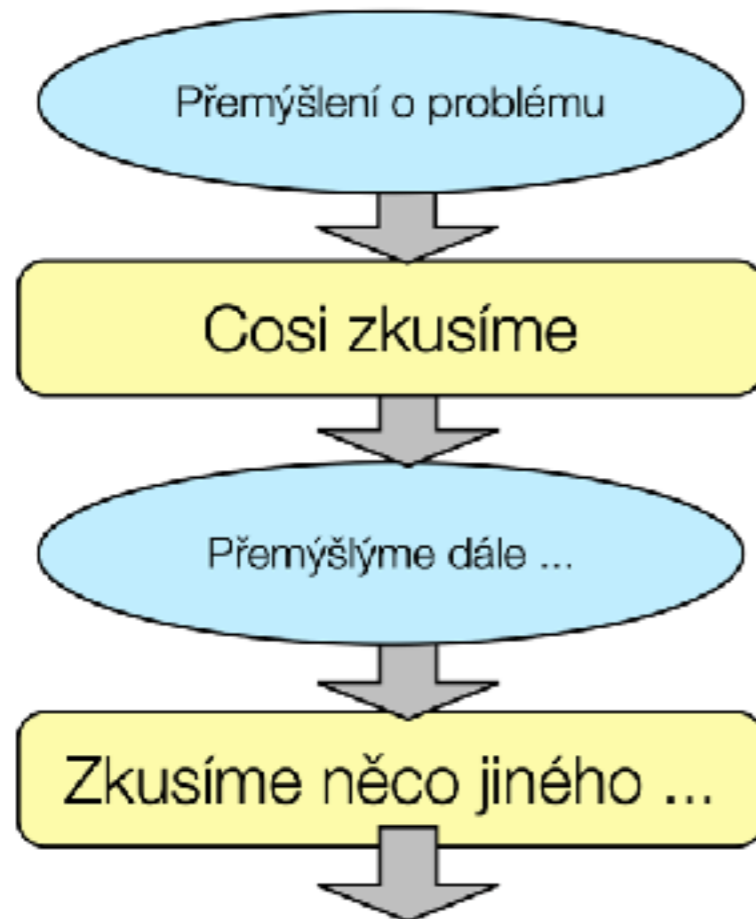
# Trochu historie

- Klasický přístup – R. A. Fisher (20. léta 20. století):
  - návrh experimentu je založen na
    - statistických metodách
    - studiu společných efektů několika proměnných vlivů
    - určení kombinace hodnot faktorů pro optimální výsledek
- Taguchiho přístup (40. léta 20. století)
  - standardizoval a zjednodušil použití technik DOE
  - navrhl koncept zlepšování kvality ve všech fázích návrhu a výroby
- K významnému rozšíření metody DOE v USA a Evropě došlo až v 80. letech 20. století

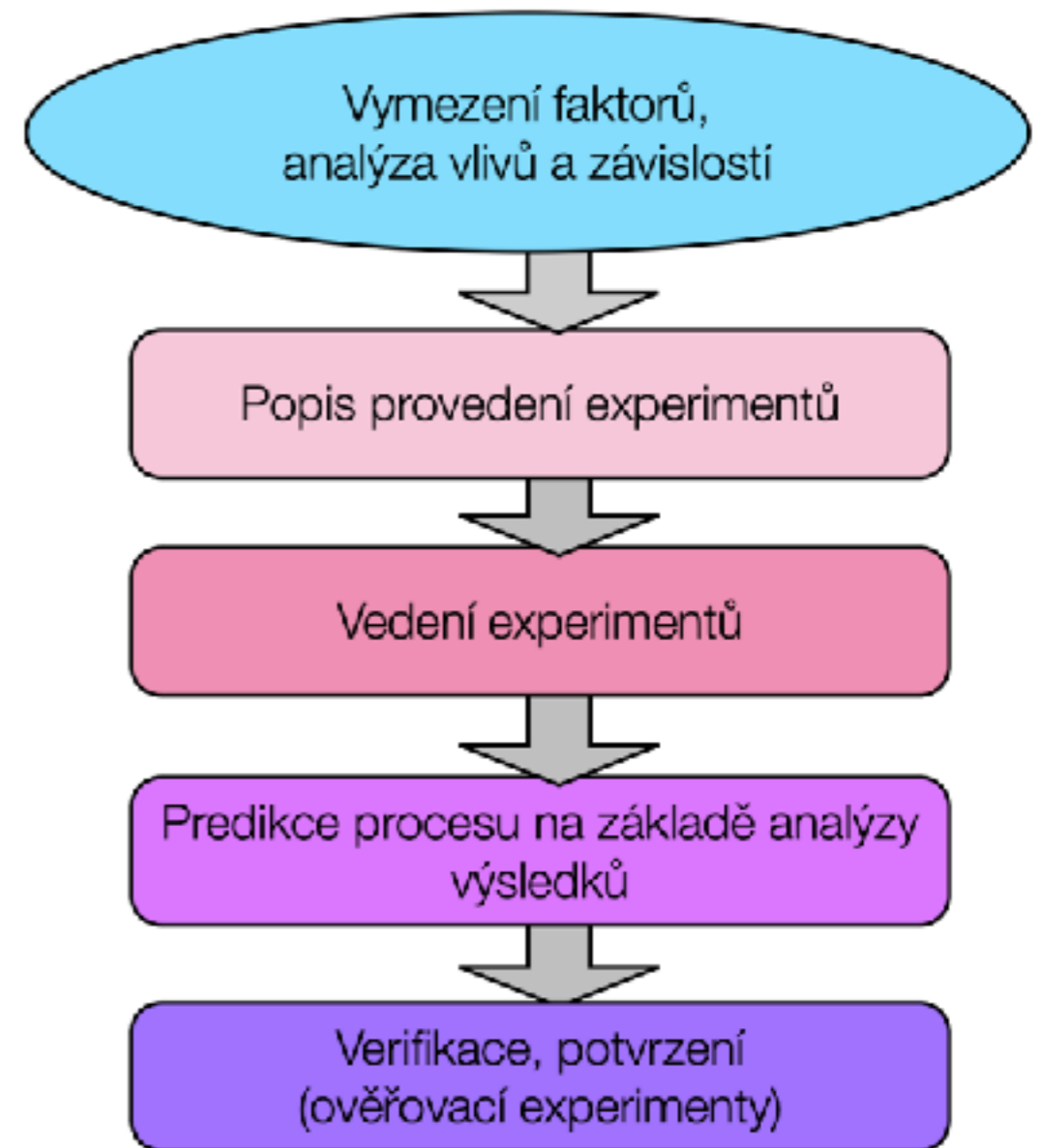


# Co to je DOE?

Metoda „pokusu a omylu“:



- funguje v jednotlivých případech a jen s několika málo lidmi
- často čekáme dlouho na výsledek
- vyžaduje zkušenosti a intuici
- lze ji využít pouze v omezeném okruhu aplikací
- je neefektivní



- týmová práce a společné rozhodování
- vyžaduje být aktivní o objektivně plánovat experimenty
- zahrnuje předvídání a ověřování očekávaných výsledků před provedením experimentu
- klade důraz na optimalitu



# Co to je DOE?

## 5 základních kroků DOE:

### 1. Analýza procesu:

- volba odezvy (spojitá, diskrétní)
- vymezení faktorů
- stanovení měřitelných úrovní faktorů

### 2. Naplánování experimentu

- zvážení časové a ekonomické náročnosti
- musí respektovat normu ČSN ISO 35343-3:2019
- návrh randomizace

### 3. Provedení zkoušek

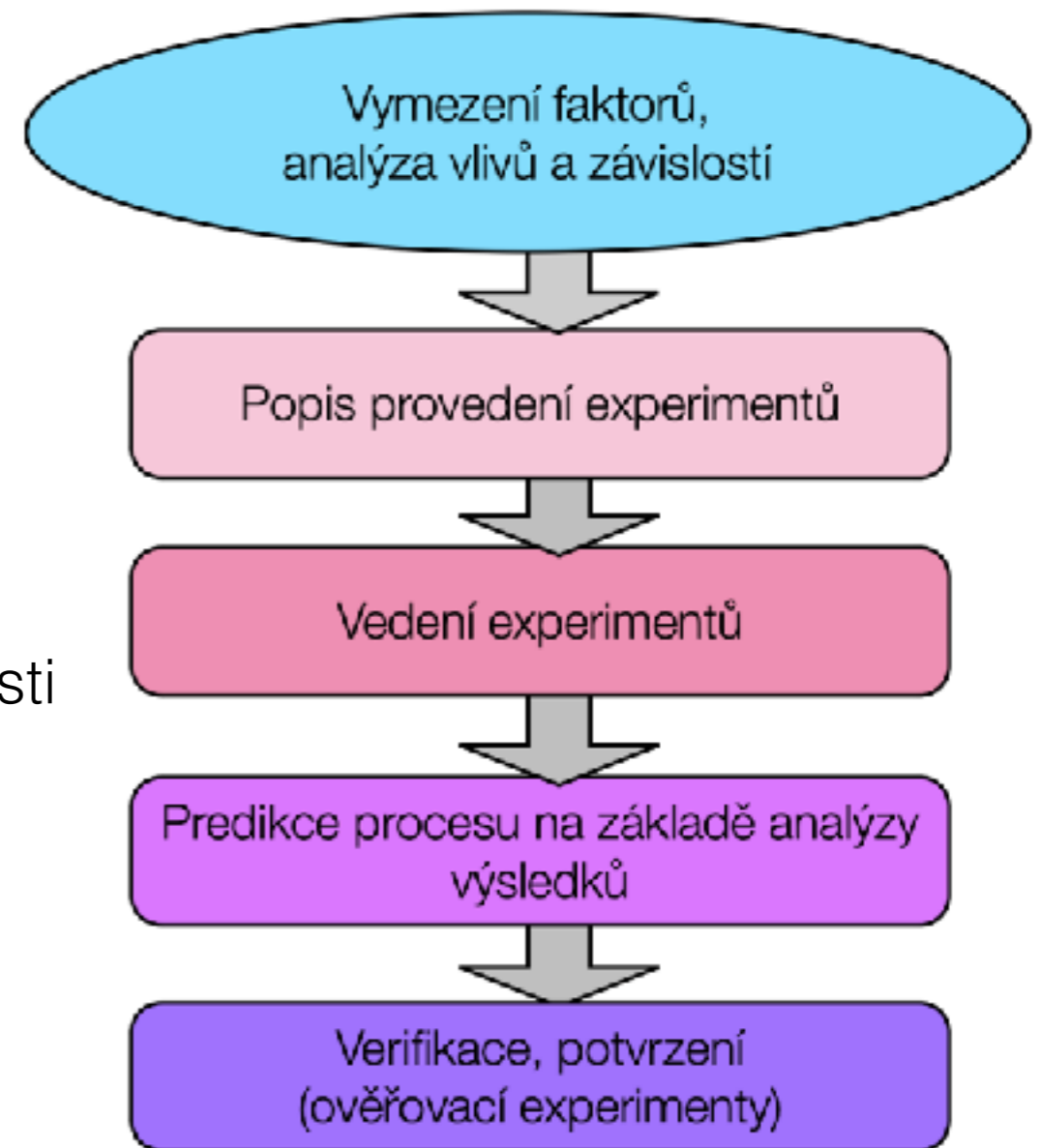
- měření ve stanoveném pořadí
- měření v blocích
- zaznamenávání výsledků

### 4. Analýza výsledků

- vyhodnocení vlivu faktorů a jejich interakcí
- využití matematicko-statistických metod
- optimalizační metody

### 5. Závěry

- Stanovení statisticky významných faktorů a jejich interakcí
- vymezení úrovní faktorů které vedou k optimální odezvě
- vymezení irelevantních faktorů



# Co to je DOE?

## Několik základních pojmů:

- **Experiment** je test nebo série testů (pokusů), provedená za účelem zvýšení kvality produktu nebo procesu, případně zvýšení jejich efektivity. Obvyklými cíli jsou:
  - stanovení charakteristik procesu a jeho optimalizace,
  - vyhodnocení vlastností materiálů,
  - návrh a vývoj produktů,
  - stanovení tolerance komponent a vstupních veličin,
  - .....
- Všechny experimenty jsou navržené experimenty, některé dobře, jiné špatně.
- **Návrh experimentu**
  - zkracuje dobu pro návrh a vývoj nových produktů,
  - zlepšuje fungování stávajících procesů,
  - zvyšuje spolehlivost a zlepšuje kvalitu výrobků,
  - zvyšuje robustnost výrobků a procesů,
  - umožňuje vyhodnocení různých variant, výběr komponent, nastavení parametrů a systémových tolerancí,
  - **zajišťuje splnění podmínek pro použití statistické indukce.**



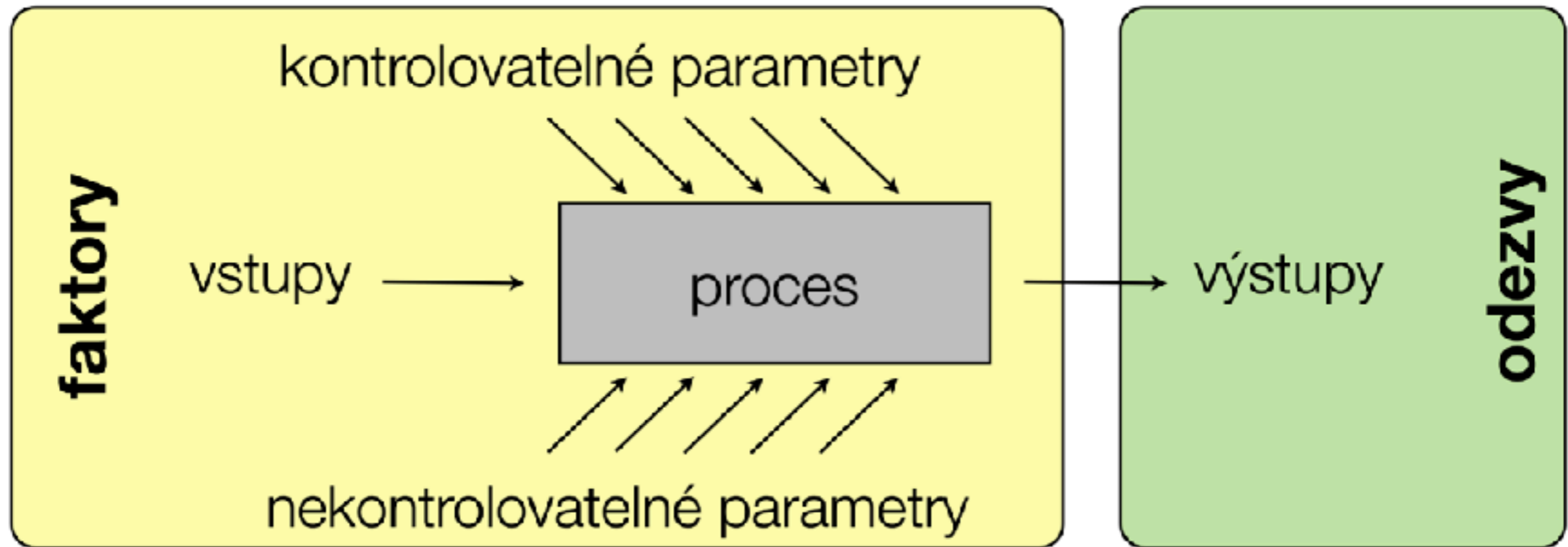
# Co to je DOE?

- **Odezva:** výstupní veličina, je měřitelná a zpravidla spojitá.
- **Náhodný vliv:** způsobuje variabilitu, kterou lze měřit (experimentální chyba), neznáme jeho příčiny, nelze jej odstranit ale lze jej předvídat a je snaha jej co nejvíce snížit.
- **Systematický vliv:** je způsoben známými vlivy (vymežitelnými příčinami), snažíme se jej popsat a kvantifikovat jej. Často se projevuje ve formě trendu, periodicity, posunutí, apod.
- **Faktory:** vstupní veličiny, rozlišujeme podle typu kvalitativní (kategoriální), kvantitativní (diskrétní, spojité), nebo podle významu hlavní, vedlejší, blokové.
- **Interakce:** současné působení několika (alespoň dvou) faktorů.
- **Replikace:** opakování zkoušek za (přibližně) stejných podmínek (úrovní faktorů). Umožňuje měřit náhodnou variabilitu a oddělit ji od variability celkové.
- **Znáhodnění:** stanovení pořadí zkoušek podle náhodného „zamíchání“, které do jisté míry může eliminovat vedlejší vlivy a zajistit vyšší míru "nezávislosti" jednotlivých pokusů.
- **Uspořádání do bloků:** slouží ke snižování náhodné variability (variability náhodné složky). V rámci bloku probíhají zkoušky za přibližně stejných experimentálních podmínek (ale při různých kombinacích úrovní faktorů). Často představuje jednu repliku experimentu.





# 1. Analýza procesu



postup při přípravě těsta (způsob a doba míchání, kynutí),  
pečení (předehřátí trouby, teplota, doba pečení)

suroviny (mouka, máslo,  
mléko, cukr, ...),  
energie

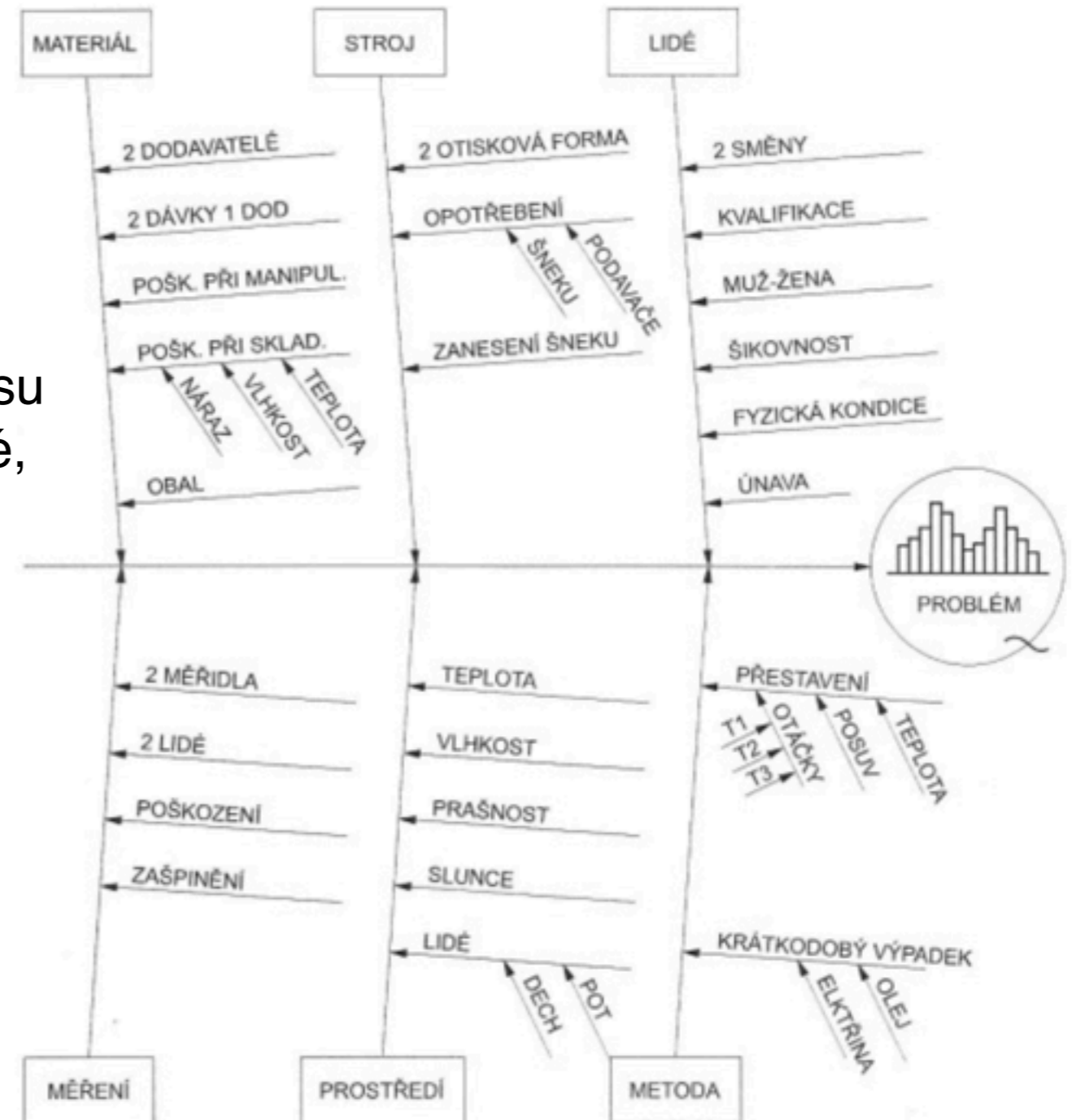


typ trouby, teplota v kuchyni, lidský faktor



# Analýza procesu

- Volba odezvy
  - vychází z formulace problému
  - musí být měřitelná (pozorovatelná)
  - může to být vektor
- Vymezení faktorů
  - vychází z podrobné analýzy procesu (kontrolovatelné, nekontrolovatelné, blokové)



Ishikavův diagram



# Analýza procesu

- Volba odezvy
  - vychází z formulace problému
  - musí být měřitelná (pozorovatelná)
  - může to být vektor
- Vymezení faktorů
  - vychází z podrobné analýzy procesu (kontrolovatelné, nekontrolovatelné, blokové)
  - výběr hlavních faktorů a jejich počtu (jednofaktorové, dvoufaktorové, vícefaktorové experimenty)

Vztahy mezi proměnnými

	Prom1	Prom2	Prom3	Prom4	Prom5	Prom6	Prom7	Prom8	Prom9	Prom10
Prom1	1,00000	0,41751	-0,14240	0,16520	0,18123	-0,12016	-0,01114	0,21660	0,20847	0,22494
Prom2	0,41751	1,00000	-0,08809	0,46050	0,23849	0,03854	0,18485	0,19321	-0,17372	0,25236
Prom3	-0,14240	-0,08809	1,00000	0,53066	-0,09957	0,07507	0,01896	-0,16897	-0,41554	-0,18221
Prom4	0,16520	0,46050	0,53066	1,00000	0,04964	-0,00920	-0,09900	-0,12158	-0,42370	-0,07118
Prom5	0,18123	0,23849	-0,09957	0,04964	1,00000	-0,03731	0,14979	-0,00201	0,06294	0,00679
Prom6	-0,12016	0,03854	0,07507	-0,00920	-0,03731	1,00000	0,18537	-0,10264	-0,05058	-0,07301
Prom7	-0,01114	0,18485	0,01896	-0,09900	0,14979	0,18537	1,00000	-0,14477	-0,12047	0,07507
Prom8	0,21660	0,19321	-0,16897	-0,12158	-0,00201	-0,10264	-0,14477	1,00000	0,02049	0,23242
Prom9	0,20847	-0,17372	-0,41554	-0,42370	0,06294	-0,05058	-0,12047	0,02049	1,00000	0,46218
Prom10	0,22494	0,25236	-0,18221	-0,07118	0,00679	-0,07301	0,07507	0,23242	0,46218	1,00000
Průměry	87,48276	10,93103	40,31034	40,41379	58,06897	55,34483	15,03448	143,03448	28,79310	51,75862
S m. Odch.	32,80094	8,76246	18,94183	17,04514	14,99031	24,18423	10,21023	47,38179	20,60925	29,64511
Poč.přij	29,00000									
Matrix	1,00000									

Korelační matice



# Analýza procesu

- Volba odezvy
  - vychází z formulace problému
  - musí být měřitelná (pozorovatelná)
  - může to být vektor
- Vymezení faktorů
  - vychází z podrobné analýzy procesu (kontrolovatelné, nekontrolovatelné, blokové)
  - výběr hlavních faktorů a jejich počtu (jednofaktorové, dvoufaktorové, vícefaktorové experimenty)
- Volba počtu a hodnot nastavitelných úrovní faktorů pro provedení experimentu:
  - závisí na druhu experimentu: screeningový, regresní, optimalizační, ...
  - v případě screeningových experimentů obvykle volíme dvě úrovně (vyšší, nižší), občas i tři (nižší, střední a vyšší).

Vztahy mezi proměnnými

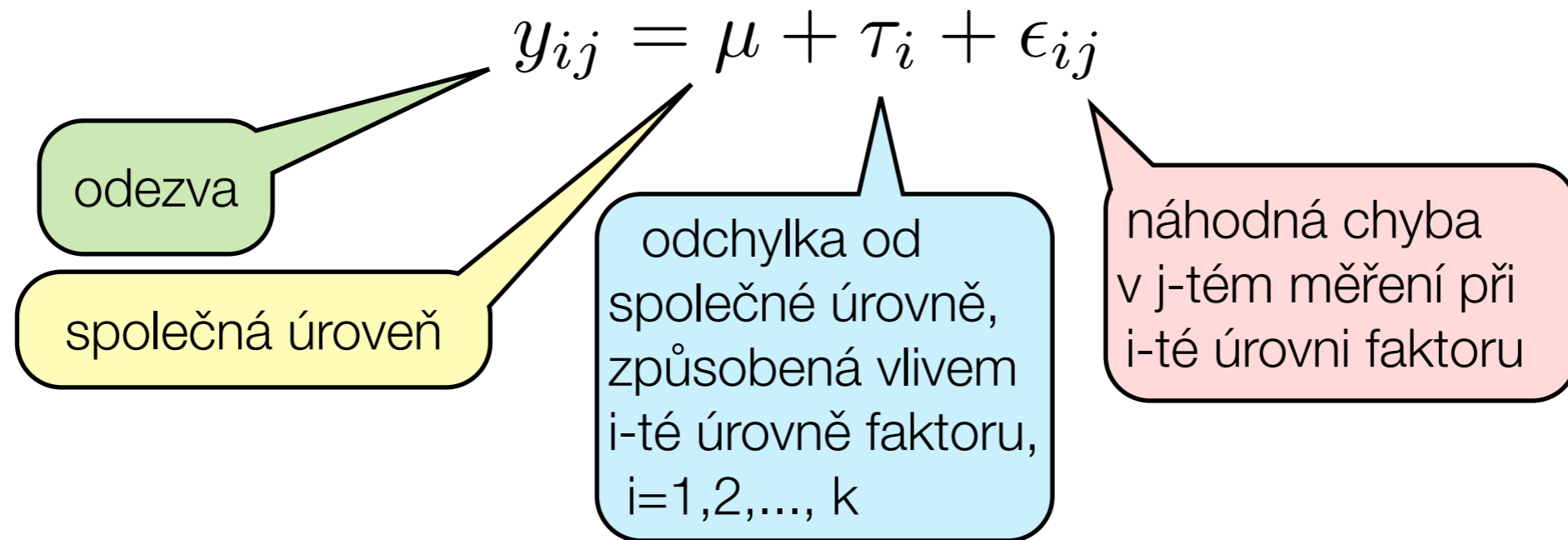
	Prom1	Prom2	Prom3	Prom4	Prom5	Prom6	Prom7	Prom8	Prom9	Prom10
Prom1	1,00000	0,41751	-0,14240	0,16520	0,18123	-0,12016	-0,01114	0,21660	0,20847	0,22494
Prom2	0,41751	1,00000	-0,08809	0,46050	0,23849	0,03854	0,18485	0,19321	-0,17372	0,25236
Prom3	-0,14240	-0,08809	1,00000	0,53066	-0,09957	0,07507	0,01896	-0,16897	-0,41554	-0,18221
Prom4	0,16520	0,46050	0,53066	1,00000	0,04964	-0,00920	-0,09900	-0,12158	-0,42370	-0,07118
Prom5	0,18123	0,23849	-0,09957	0,04964	1,00000	-0,03731	0,14979	-0,00201	0,06294	0,00679
Prom6	-0,12016	0,03854	0,07507	-0,00920	-0,03731	1,00000	0,18537	-0,10264	-0,05058	-0,07301
Prom7	-0,01114	0,18485	0,01896	-0,09900	0,14979	0,18537	1,00000	-0,14477	-0,12047	0,07507
Prom8	0,21660	0,19321	-0,16897	-0,12158	-0,00201	-0,10264	-0,14477	1,00000	0,02049	0,23242
Prom9	0,20847	-0,17372	-0,41554	-0,42370	0,06294	-0,05058	-0,12047	0,02049	1,00000	0,46218
Prom10	0,22494	0,25236	-0,18221	-0,07118	0,00679	-0,07301	0,07507	0,23242	0,46218	1,00000
Průměry	87,48276	10,93103	40,31034	40,41379	58,06897	55,34483	15,03448	143,03448	28,79310	51,75862
Sm.Odch.	32,80094	8,76246	18,94183	17,04514	14,99031	24,18423	10,21023	47,38179	20,60925	29,64511
Poč.přij	29,00000									
Matrix	1,00000									

Korelační matice



# Analýza procesu - matematický model

**Příklad jednofaktorového experimentu:** uvažujeme vliv jediného (hlavního) faktoru který může mít k různých úrovní:



o náhodných chybách  $\epsilon_{ij}$  předpokládáme, že jsou nezávislé, stejně rozdělené s nulovou střední hodnotou a stejným rozptylem  $\sigma^2$ . Speciálně, předpokládáme rozdělení  $N(0, \sigma^2)$

$\mu_i = \mu + \tau_i$  = vliv i-té úrovně faktoru,  $i=1,2,\dots, k$  :



# Analýza procesu - matematický model

**Dvoufaktorový experiment:** uvažujeme vliv dvou (hlavních) faktorů, každý z nich může mít různá počet úrovní:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}$$

**Třífaktorový experiment:** uvažujeme vliv tří (hlavních) faktorů, každý z nich může mít různá počet úrovní:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijk}$$

## Předpoklady modelu:

- stejné podmínky měření
- nezávislost měření
- konstantní rozptyl
- normalita reziduí

nejdůležitější, ale také nejhůře ověřitelná podmínka

často se zdůrazňuje, ale není až tak důležitá, hlavně pro velké soubory

je třeba je zajistit návrhem; uspořádání do bloků, dodatečné faktory, ....

časté porušení předpokladů, které může podstatně ovlivnit naše závěry



## 2. Naplánování experimentu

**Příklad jednofaktorového experimentu:** uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru a tento faktor může mít  $k$  různých úrovní:

- zvolíme počet replikací (opakovaných měření) pro každou úroveň faktoru
- musíme provést  $k \times n$  měření - rozhodneme o případném rozdělení do bloků podle dalšího (vedlejšího) faktoru
- provádíme znáhodnění pořadí měření (bud' přes celý experiment nebo pouze uvnitř bloků)

pořadové číslo měření (replikace)

	1	2	3	...	n
1	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	...	$y_{1n}$
2	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	...	$y_{2n}$
3	$y_{31}$	$y_{32}$	$y_{33}$	...	$y_{3n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$y_{k1}$	$y_{k2}$	$y_{k3}$	...	$y_{kn}$
	blok 1		blok 2		blok r

úroveň faktoru (ošetření)



# Analýza procesu - matematický model

**Příklad jednofaktorového experimentu:** uvažujeme vliv jediného (hlavního) faktoru který může mít  $k$  různých úrovní a jednoho blokového faktoru:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$$

vliv  $i$ -té úrovně  
faktoru,  $i=1,2,\dots, k$ ,

$$\sum_{i=1}^k \tau_i = 0$$

vliv  $j$ -tého bloku,  
 $j=1,2,\dots, r$

$$\sum_{j=1}^r \beta_j = 0$$

$\mu_i = \mu + \tau_i$  = vliv  $i$ -té úrovně faktoru,  $i=1,2,\dots, k$  :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_A : \mu_i \neq \mu_m, \quad 1 \leq i < m \leq k$$





## 2. Naplánování experimentu

**Příklad jednofaktorového experimentu:** uvažujeme vliv jediného (hlavního) faktoru který má dvě různé úrovně:

1 faktor, 2 úrovně (nezávislá měření):

	1	2	3	...	n
A	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	...	$y_{1n}$
B	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	...	$y_{2n}$

1 faktor, 2 úrovně (závislá měření):

	1	2	3	...	n
A	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	...	$y_{1n}$
B	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	...	$y_{2n}$



## 2. Naplánování experimentu

### Příklad 1: Srovnání pevnosti dvou druhů vláken z hlediska materiálu

Odezva: pevnost vlákna v tahu (v MPa)

Faktor: druh (materiál) vlákna, 2 hodnoty

Počet replikací: 4

Počet měření (vzorků):  $2 \times 4 = 8$

Experiment: 1 faktor, 2 úrovně, nezávislá měření

Znáhodnění (pořadí druhu vlákna při měření): 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2

---

Výsledky měření: 22,3 21,8 21,9 20,4 21,1 21,2 21,3 22,8

	1	2	3	4	průměr	rozptyl
A1	21,8	20,4	21,1	21,3	21,15	0,3367
A2	22,3	21,9	21,2	22,8	22,05	0,4567

Metoda vyhodnocení: Dvouvýběrový t-test



## 2. Naplánování experimentu

### Příklad 2: Srovnání pevnosti dvou druhů vláken z hlediska jejich dodavatelů

Odezva: pevnost vlákna v tahu (v MPa)

Faktor: dodavatel vlákna, 3 hodnoty

Počet replikací: 6

Počet měření (vzorků):  $3 \times 6 = 18$

Experiment: 1 faktor, 3 úrovně, nezávislá měření

Znáhodnění (pořadí vzorku pro měření): 11, 7, 10, 2, 4, 16, 1, 5, 18, 12, 3, 6, 15, 8, 9, 14, 17, 13

---

Výsledky měření: 18.6, 20.9, 18.9, 18.7, 18.5, 22.2, 17.9, 20.2, 21.2, 20.4, 18.4, 19.5, 23.5, 19.3, 20.1, 22.8, 22.3, 22.3

	1	2	3	4	5	6	průměr	rozptyl
A1	17,9	18,7	18,4	18,5	20,2	19,5	18,867	0,6987
A2	20,9	19,3	20,1	18,9	18,6	20,4	19,7	0,82
A3	22,3	22,8	23,5	22,2	22,3	21,2	22,383	0,5737

Metoda vyhodnocení: ANOVA pro 1 faktor



## 2. Naplánování experimentu

**Vícefaktorové experimenty:** uvažujeme vliv dvou nebo více (hlavních) faktorů o dvou nebo třech úrovních:

**Příklad:** dvoufaktorový experiment o dvou úrovních.

Matice experimentu = návrh kombinací úrovní faktorů (ošetření)

test	A	B	AB
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+

**Návrh 2<sup>2</sup>**



## 2. Naplánování experimentu

**Vícefaktorové experimenty:** uvažujeme vliv dvou nebo více (hlavních) faktorů o dvou nebo třech úrovních:

**Příklad:** třífaktorový experiment o dvou úrovních.

Matice experimentu = návrh kombinací úrovní faktorů (ošetření)

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+
4	-	-	+	+	-	-	+
5	+	+	-	+	-	-	-
6	+	-	+	-	+	-	-
7	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+

Návrh  $2^3$



## 2. Naplánování experimentu

**Vícefaktorové experimenty:** uvažujeme vliv dvou nebo více (hlavních) faktorů o dvou nebo třech úrovních:

**Příklad:** třífaktorový experiment o dvou úrovních.

Matice experimentu = návrh kombinací úrovní faktorů (ošetření)  
ortogonální návrh:

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	0	0	0	1	1	1	0
a	1	0	0	0	0	1	1
b	0	1	0	0	1	0	1
c	0	0	1	1	0	0	1
ab	1	1	0	1	0	0	0
ac	1	0	1	0	1	0	0
bc	0	1	1	0	0	1	0
abc	1	1	1	1	1	1	1





## 2. Naplánování experimentu

**Vícefaktorové experimenty:** uvažujeme vliv dvou nebo více (hlavních) faktorů o dvou nebo třech úrovních:

**Příklad:** experimenty  $3^2$  a  $3^3$

test	A	B
1	-	-
b	-	0
B	-	+
a	0	-
ab	0	0
aB	0	+
A	+	-
Ab	+	0
AB	+	+

test	A	B	C
1	-	-	-
c	-	-	0
C	-	-	+
b	-	0	-
bc	-	0	0
bC	-	0	+
B	-	+	-
Bc	-	+	0
BC	-	+	+
a	0	-	-
ac	0	-	0
aC	0	-	+
ab	0	0	-
abc	0	0	0
abC	0	0	+
aB	0	+	-
aBc	0	+	0
aBC	0	+	+
A	+	-	-
Ac	+	-	0
AC	+	-	+
Ab	+	0	-
Abc	+	0	0
Ab	+	0	+
AB	+	+	-
ABc	+	+	0
ABC	+	+	+





## 2. Naplánování experimentu

**Taguchiho ortogonální návrhy experimentů:** jistá standardizace a zjednodušení

- Taguchiho ztrátová funkce = rozptyl sledovaného jakostního znaku
- Taguchiho přístup se dá použít, pokud neuvažujeme interakce (jsou zanedbatelné nebo neexistují)
- Základem jsou designové matice, označované  $L_n(X^y)$ , kde

$n$  = počet řádků

$X$  = počet úrovní

$y$  = počet sloupců v návrhu  
odpovídající počtu faktorů

$L_4$	A	B	C
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

$L_8$	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2



## 2. Naplánování experimentu

**Taguchiho ortogonální návrhy experimentů:** jistá standardizace a zjednodušení

- Taguchiho ztrátová funkce = rozptyl sledovaného jakostního znaku
- Taguchiho přístup se dá použít, pokud neuvažujeme interakce (jsou zanedbatelné nebo neexistují)
- Základem jsou designové matice, označované  $L_n(X^y)$ , kde
  - n = počet řádků
  - X = počet úrovní
  - y = počet sloupců v návrhu odpovídající počtu faktorů

### 2-úrovňové návrhy:

- $L_4(2^3)$  (pro 2-3 faktory o dvou úrovních)
- $L_8(2^7)$  (pro 3-7 faktorů o dvou úrovních)
- $L_{12}(2^{11})$  (pro 4-11 faktorů o dvou úrovních)
- $L_{16}(2^{15})$  (pro 4-15 faktorů o dvou úrovních)

### 3-úrovňové návrhy:

- $L_9(3^4)$
- $L_{18}(2^13^7)$

### 4-úrovňové návrhy:

- $L_{16}(4^5)$



## 2. Naplánování experimentu

**Taguchiho ortogonální návrhy experimentů:** jistá standardizace a zjednodušení

Taguchi rozlišuje dva druhy sledovaných faktorů: - říditelné (lze nastavit jejich úrovně)  
- neřízené, šumové (lze je pouze měřit)

- řízené faktory tvoří tzv. vnitřní ortogonální sestavu
- neřízené faktory tvoří vnější ortogonální sestavu
- provádí se tolik replikací, kolik je kombinací úrovní ve vnější sestavě

L <sub>8</sub>	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

vnitřní sestava

vnější sestava

L <sub>4</sub>	X	Y	Z
Q <sub>1</sub>	1	1	1
Q <sub>2</sub>	1	2	2
Q <sub>3</sub>	2	1	2
Q <sub>4</sub>	2	2	1



# Taguchiho ortogonální návrhy experimentů

## Řízené a šumové faktory

sledované faktory: - říditelné (lze nastavit jejich úroveň)  
- neřízené, šumové (lze je pouze měřit)

- řízené faktory tvoří tzv. vnitřní ortogonální sestavu
- neřízené faktory tvoří vnější ortogonální sestavu
- provádí se tolik replikací, kolik je kombinací úrovní ve vnější sestavě

vnější sestava

L <sub>4</sub>	X	Y	Z
Q <sub>1</sub>	1	1	1
Q <sub>2</sub>	1	2	2
Q <sub>3</sub>	2	1	2
Q <sub>4</sub>	2	2	1

L <sub>8</sub>	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

vnitřní sestava

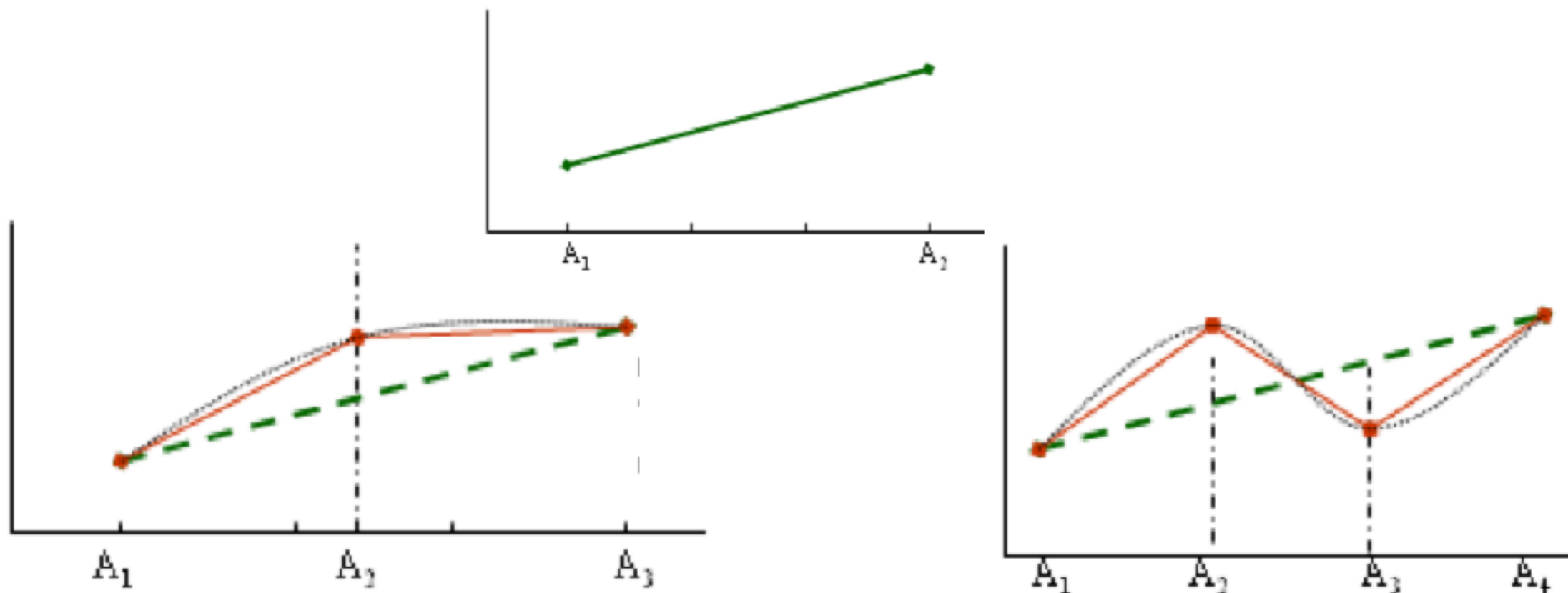
## 2. Naplánování experimentu

### počet faktorů:

- + více faktorů lépe popisuje model
- + můžeme zkoumat vliv více interakcí
- komplikuje se návrh velkým množstvím měření
- složitá a nepřehledná analýza

### počet úrovní:

- 2 nejčastější případ, funguje dobře při lineární závislosti
- 3 máme-li pochybnosti o lineární závislosti odezvy a faktoru
- 4 méně často, komplikovaný návrh, mnoho měření



## 2. Naplánování experimentu

- počet faktorů:**
- + více faktorů lépe popisuje model
  - + můžeme zkoumat vliv více interakcí
  - komplikuje se návrh velkým množstvím měření
  - složitá a nepřehledná analýza
- počet úrovní:**
- 2 nejčastější případ, funguje dobře při lineární závislosti
  - 3 máme-li pochybnosti o lineární závislosti odezvy a faktoru
  - 4 méně často, komplikovaný návrh, mnoho měření
- počet replikací:**
- + více replikací dává lepší obraz variability chyby měření
  - + dostáváme spolehlivější výsledky
  - nebezpečí závislosti na skrytých faktorech
  - narůstá počet měření (cena, čas)
  - při jediné replikaci není možné určit chybu měření vůbec
- počet bloků:**
- + snižují variabilitu chyby měření
  - + umožňují provádět experiment "po částech"
  - snižují počet stupňů volnosti pro odhad chyby měření
  - směšují se s interakcemi vyšších řádů (ztrácíme informaci)



# 3. Provedení zkoušek

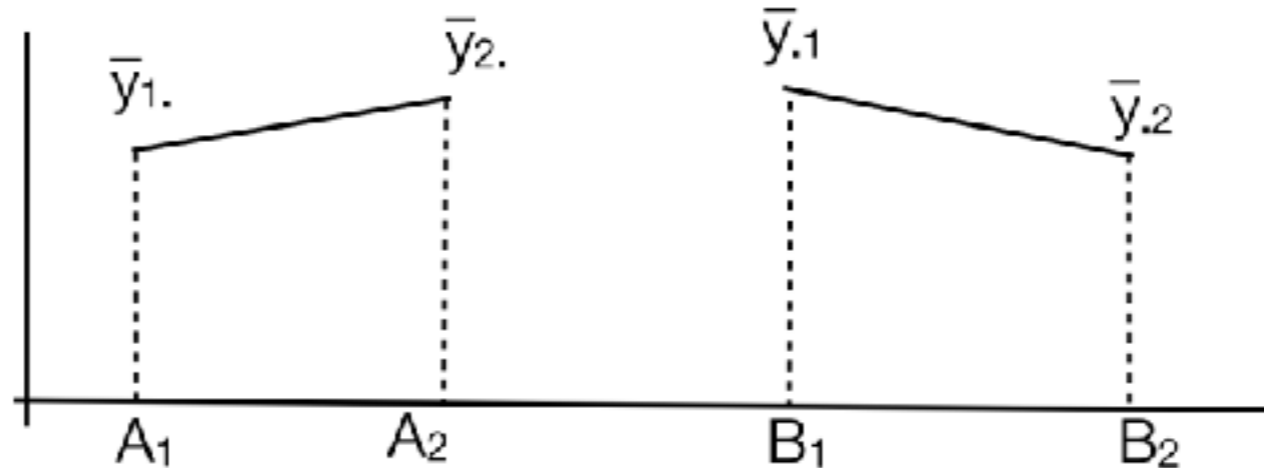
- ...
- měření ve stanoveném pořadí
- měření v blocích
- zaznamenávání výsledků
- ...



# 4. Analýza výsledků

**Efekt faktoru** = průměrná změna odezvy při změně úrovně faktoru

	B1	B2
A1	y11	y12
A2	y21	y22

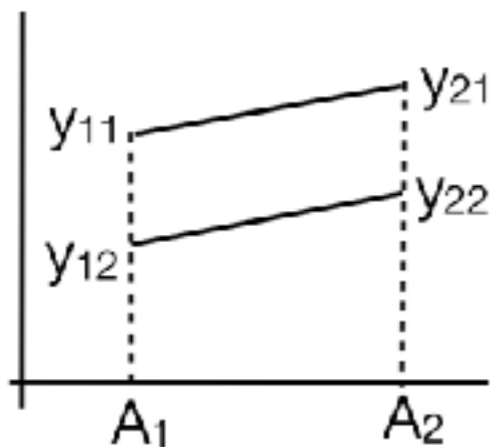


$$\hat{A} = \frac{y_{21} + y_{22}}{2} - \frac{y_{11} + y_{12}}{2}$$

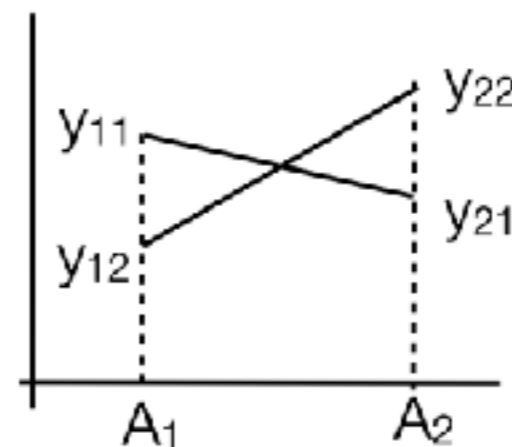
$$\hat{B} = \frac{y_{12} + y_{22}}{2} - \frac{y_{11} + y_{21}}{2}$$

**Interakce mezi faktory** = společné působení dvou faktorů na velikost odezvy

Nastává, je-li rozdíl v odezvě mezi dvěma úrovněmi jednoho faktoru výrazně jiný při různých úrovních druhého faktoru, např.  $y_{21} - y_{11}$  a  $y_{22} - y_{12}$ .



bez interakce



s interakcí





# 4. Analýza výsledků

Model 2<sup>2</sup> (bez replikací)

test	A	B	AB	y
1	-	-	+	y <sub>11</sub>
2	+	-	-	y <sub>21</sub>
3	-	+	-	y <sub>12</sub>
4	+	+	+	y <sub>22</sub>

	B1	B2
A1	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>
A2	y <sub>21</sub>	y <sub>22</sub>

$$\hat{A} = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-}$$

$$\bar{y}_{A+} = \frac{y_{21} + y_{22}}{2}$$

$$\bar{y}_{A-} = \frac{y_{11} + y_{12}}{2}$$

$$\hat{B} = \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-}$$

$$\widehat{AB} = \bar{y}_{AB+} - \bar{y}_{AB-}$$

$$\bar{y}_{AB-} = \frac{y_{21} + y_{12}}{2}$$

$$\bar{y}_{AB+} = \frac{y_{11} + y_{22}}{2}$$



# 4. Analýza výsledků

Model 2<sup>2</sup> (se 2 replikacemi)

test	A	B	AB	y
1	-	-	+	y11, y12
2	+	-	-	y21, y22
3	-	+	-	y31, y32
4	+	+	+	y41, y42

	B1	B2
A1	y11, y12	y31, y32
A2	y21, y22	y41, y42

$$\hat{A} = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-}$$

$$\bar{y}_{A-} = \frac{y_{11} + y_{12} + y_{31} + y_{32}}{4}$$

$$\bar{y}_{A+} = \frac{y_{21} + y_{22} + y_{41} + y_{42}}{4}$$

$$\hat{B} = \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-}$$

$$\widehat{AB} = \bar{y}_{AB+} - \bar{y}_{AB-}$$

$$\bar{y}_{AB-} = \frac{y_{21} + y_{22} + y_{31} + y_{32}}{4}$$

$$\bar{y}_{AB+} = \frac{y_{11} + y_{12} + y_{41} + y_{42}}{4}$$



# 4. Analýza výsledků

**Příklad:** Účinek koncentrace a teploty na viskozitu výsledného produktu

**Odezva:** doba reakce do dosažení požadované viskozity

**Faktory:** koncentrace (A), teplota (B), 2 úrovně

**Úrovně faktorů:** A: 42 %, 48 %; B: 175°C, 196°C

**Počet replikací:** 2 => **Počet měření:**  $2^2 \times 2 = 8$

	A	B	y
1	+	-	9.3
2	-	+	5.5
3	-	+	6.5
4	-	-	9.0
5	+	+	1.3
6	-	-	9.0
7	+	+	1.8
8	+	-	8.0

test	A	B	AB
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+



# 4. Analýza výsledků

**Příklad:** Účinek koncentrace a teploty na viskozitu výsledného produktu

**Odezva:** doba reakce do dosažení požadované viskozity

**Faktory:** koncentrace (A), teplota (B), 2 úrovně

**Úrovně faktorů:** A: 42 %, 48 %; B: 175°C, 196°C

**Počet replikací:** 2 => **Počet měření:**  $2^2 \times 2 = 8$

	A	B	y
1	+	-	9.3
2	-	+	5.5
3	-	+	6.5
4	-	-	9.0
5	+	+	1.3
6	-	-	9.0
7	+	+	1.8
8	+	-	8.0

test	A	B	AB	y	y
1	-	-	+	9.0	9.0
2	+	-	-	9.3	8.0
3	-	+	-	5.5	6.5
4	+	+	+	1.8	1.3



# 4. Analýza výsledků

**Příklad:** Účinek koncentrace a teploty na viskozitu výsledného produktu

Odezva: doba reakce do dosažení požadované viskozity

Faktory: koncentrace (A), teplota (B), 2 úrovně

Úrovně faktorů: A: 42 %, 48 %; B: 175°C, 196°C

Počet replikací: 2 => Počet měření: 2<sup>2</sup>x2 = 8

$$\hat{A} = \frac{9.3 + 8 + 1.8 + 1.3}{4} - \frac{9 + 9 + 5.5 + 6.5}{4}$$
$$= \frac{-9.6}{4} = -2.4$$

$$\hat{B} = \frac{-9 - 9 - 9.3 - 8 + 5.5 + 6.5 + 1.8 + 1.3}{4}$$
$$= -5.05$$

$$\widehat{AB} = \frac{+9 + 9 - 9.3 - 8 - 5.5 - 6.5 + 1.8 + 1.3}{4}$$
$$= -2.05$$

test	A	B	AB	y	y
1	-	-	+	9.0	9.0
2	+	-	-	9.3	8.0
3	-	+	-	5.5	6.5
4	+	+	+	1.8	1.3
	-2.4	-5.05	-2.05		



# 4. Analýza výsledků

Více v následujících hodinách o matematicko-statistických metodách ...

