Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

9. Odhadování parametrů

FAKULTA
STROJNÍ
ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2023
/2024

9. Odhadování parametrů

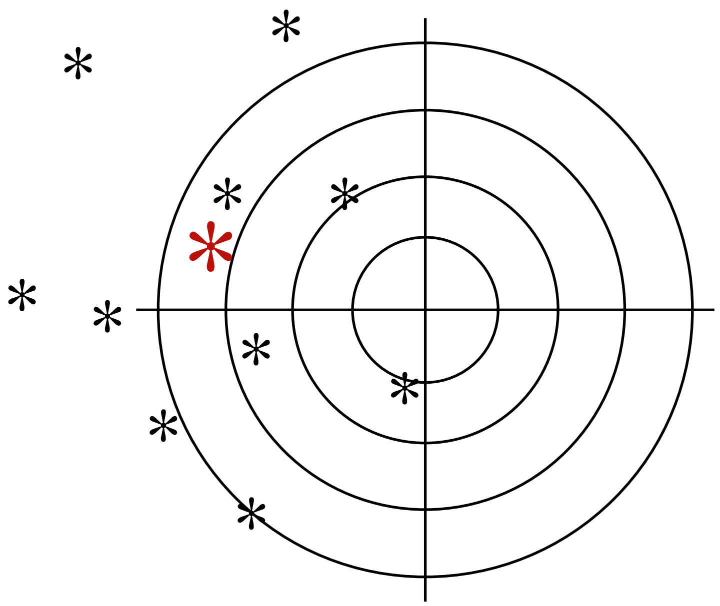
Klíčové pojmy:

- Bodový odhad
- Nestrannost a vychýlenost bodového odhadu
- Konzistentní odhad
- Intervalový odhad
- Koeficient spolehlivosti

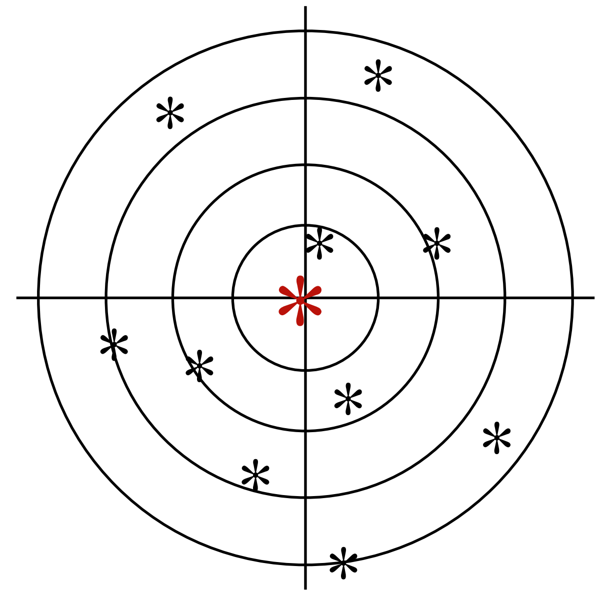
Klíčové vztahy:

- Odhady rozptylu ($\hat{\sigma}$ a s^2) a jejich vlastnosti
- Intervalový odhad pro střední hodnotu
- Intervalový odhad pravděpodobnosti p

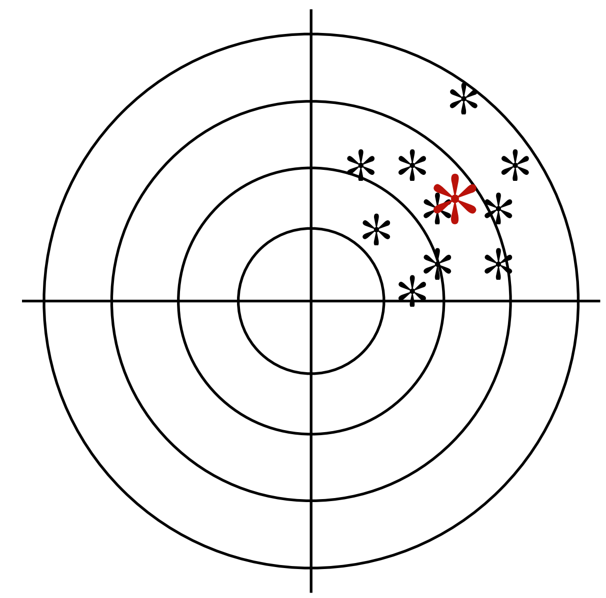
Bodové odhady



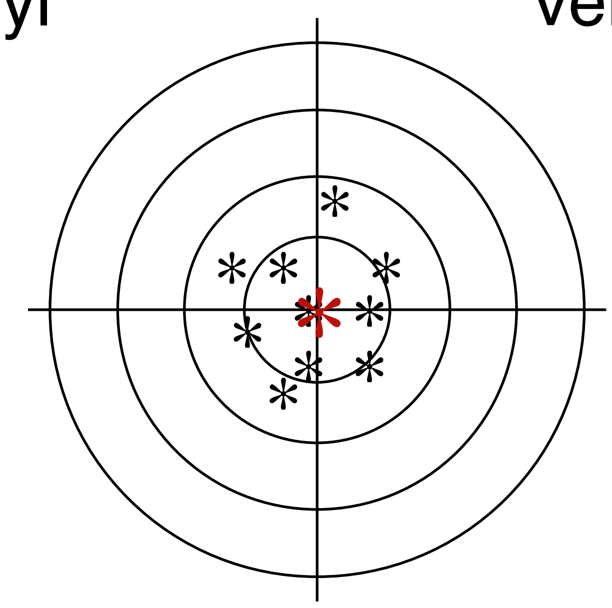
Vychýlený,
velký rozptyl



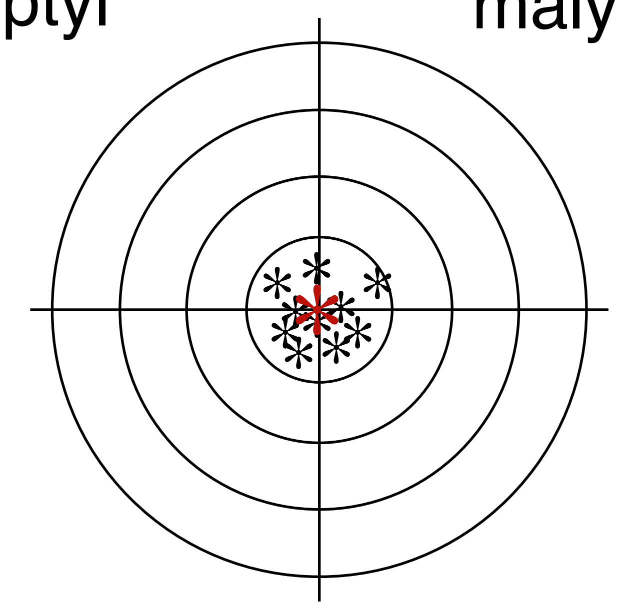
Nevychýlený,
velký rozptyl



Vychýlený,
malý rozptyl



Nevychýlený,
malý rozptyl



Nejlepší nestranný

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Pravděpodobnostní charakteristiky	Výběrové charakteristiky
Střední hodnota $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	Výběrový průměr $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Momenty $\mu_k(X) = E(X - E(X))^k$	Výběrové momenty $m_k(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^k$
Rozptyl $var(X) = E(X - E(X))^2$	Výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$
Kvantily $\tilde{x}_{100\alpha}$	Výběrové kvantily $X_{([np]+1)}$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ - je nevychýlený (nestranný, unbiased)

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n - \mu)^2 = E\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^2}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\Big)^2 =$$

$$\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} E(X_i-\mu)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_i-\mu)(X_j-\mu)\Big) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

- rozptyl konverguje k 0 pro n→∞

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ - je vychýlený (biased)

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\Big) = \frac{1}{n}\Big(E\big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\big) - nE(\bar{X}_n^2)\Big) =$$

$$\frac{n(\sigma^2+\mu^2) - \sigma^2 - n\mu^2}{n} = \boxed{\sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - \big(E(X_i)\big)^2 = E(X_i^2) - \mu^2 \;\Rightarrow E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\frac{1}{n}\sigma^2 = E(\bar{X}_n^2) - \mu^2 \;\Rightarrow E(\bar{X}_n^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ $\quad E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 \quad \Rightarrow \quad E(s^2) = \sigma^2$$

Jak je to s rozptylem těchto odhadů?

$$\mathrm{Var}(s^2) = \mathrm{Var}\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2)$$

Tedy:

rozptyl základního souboru $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je vychýlený, ale má menší rozptyl

výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je nevychýlený, ale má větší rozptyl

Bodové odhady

Odhadujeme neznámý parametr θ. Provedeme i.i.d. výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a jeho pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Najdeme odhadovou statistiku $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tak, aby splňovala některou (nejlépe všechny) z následujících vlastností:

- Nestrannost: $E\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = \theta$
- Vydatnost: $\mathrm{Var}\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big)$ je minimální
- Konzistence: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = 0$

Jak se hledá odhadová statistika?

- Metoda maximální věrohodnosti (maximalizuje věrohodnostní funkci)
- Momentová metoda (srovnává teoretické a výběrové momenty)
- Metoda nejmenších čtverců (minimalizuje čtvercovou odchylku)

Bodové odhady

Metoda maximální věrohodnosti (Maximum likelihood)

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dostaneme pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- uvažujme sdruženou hustotu náhodného vektoru $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, která závisí na neznámém parametru $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$
- s touto funkcí budeme nadále zacházet jako s funkcí neznámé θ a budeme ji nazývat věrohodnostní funkcí: $l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- hledáme $\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} l(\theta; x_1, \ldots, x_n)$ a nazveme je maximálně věrohodným odhadem parametru θ.

Často namísto funkce $l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maximalizujeme logaritmickou věrohodnostní funkci $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln(l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametru Poissonova rozdělení $p(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$

Máme pozorování $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a vytvoříme věrohodnostní funkci

$$l(\lambda;\, k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}$$

Vytvoříme logaritmickou věrohodnostní funkci:

$$L(\lambda;\, k_1, \ldots, k_n) = -n\lambda + \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{n} k_i + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}\right)$$

a hledáme maximum:

$$\frac{\mathrm{d}L(\lambda;\, k_1, \ldots, k_n)}{\mathrm{d}\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

$$-n + \frac{1}{\hat{\lambda}}\sum_{i=1}^{n} k_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}}$$ = ML odhad λ (MLE λ)

Bodové odhady

Momentová metoda

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z nějakého rozdělení s d.f. $F(x;\theta)$, kde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ je k neznámých parametrů
- Spočteme k teoretických momentů $\mu_1, \ldots, \mu_k$ a k výběrových momentů $m_1, \ldots, m_k$
- porovnáním těchto momentů dostaneme k rovnic, z nichž vyjádříme k odhadů neznámých parametrů.

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametrů normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ momentovou metodou.

$$\mu_1 = E(X) = \mu, \qquad \mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

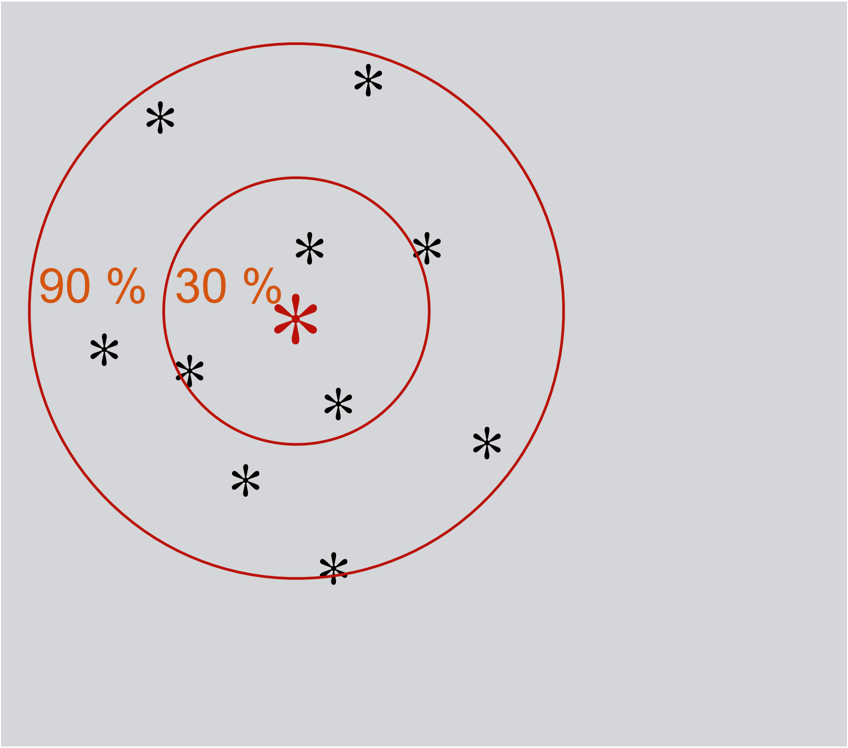
$$m_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

odtud:

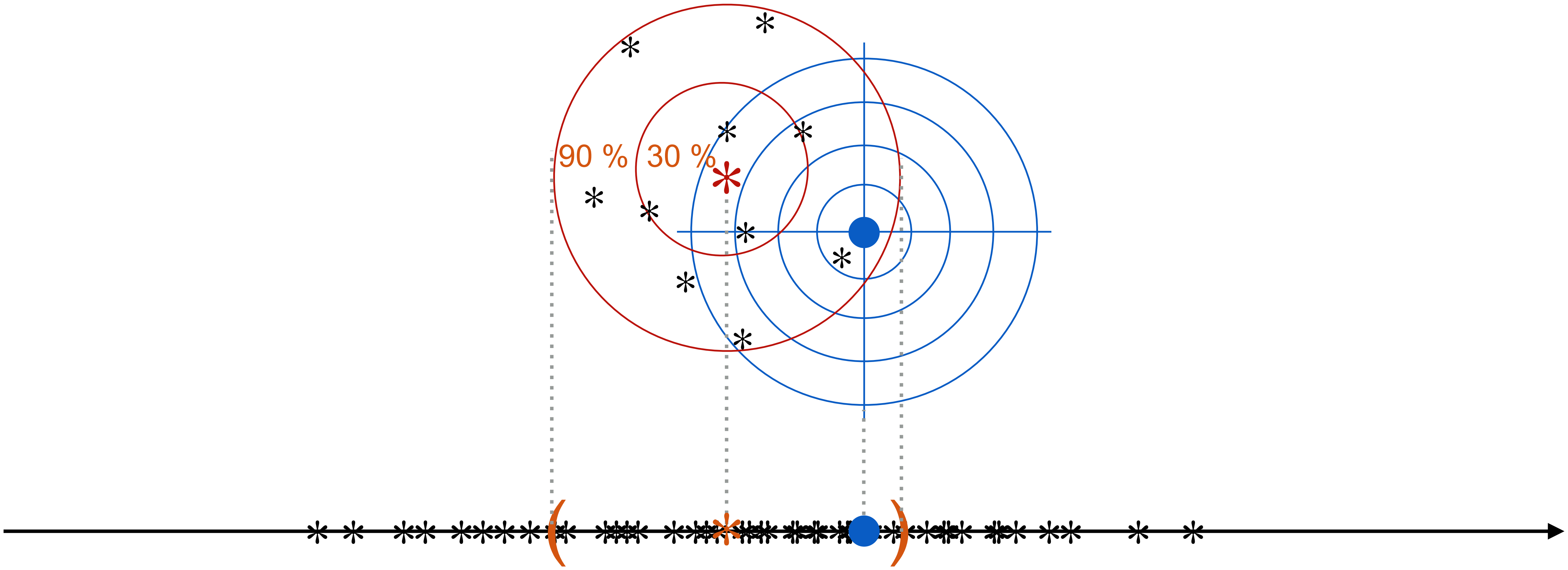
$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

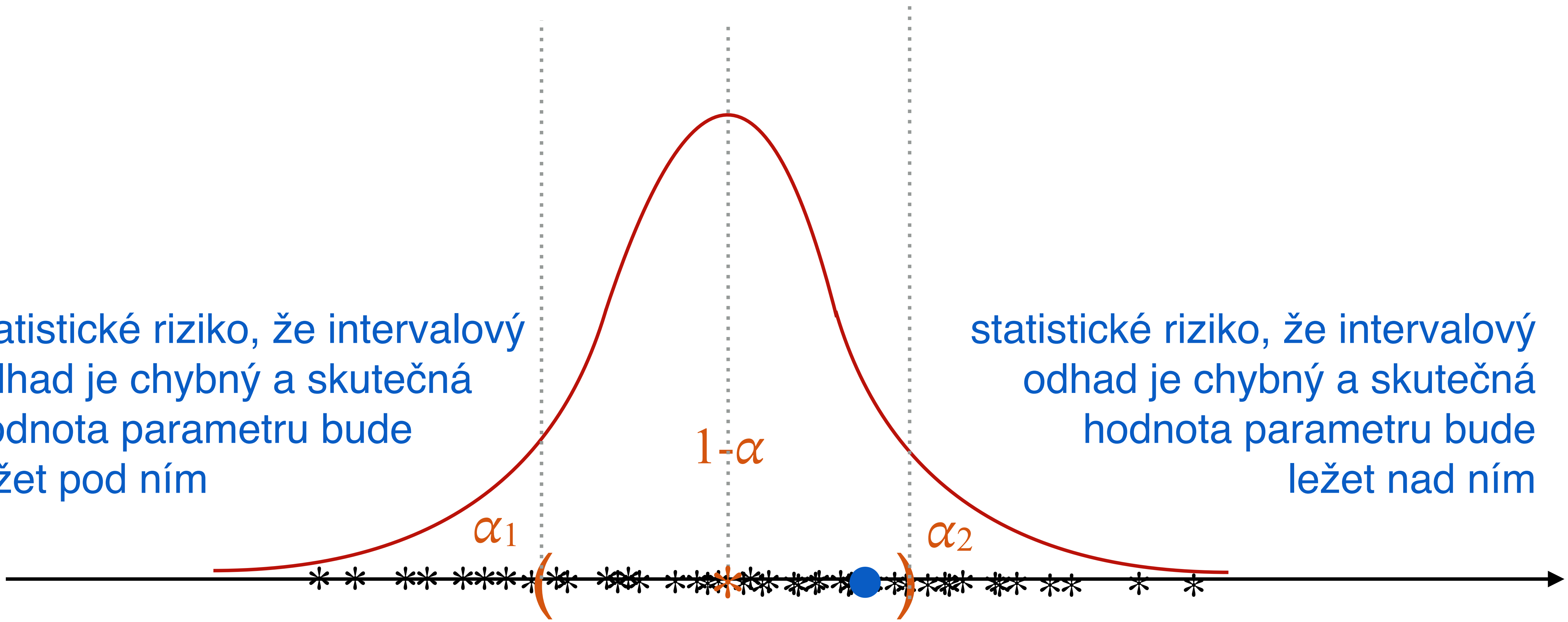
Intervalové odhady



Intervalové odhady



Intervalové odhady



statistické riziko, že intervalový odhad je chybný a skutečná hodnota parametru bude ležet pod ním

statistické riziko, že intervalový odhad je chybný a skutečná hodnota parametru bude ležet nad ním

koeficient spolehlivosti

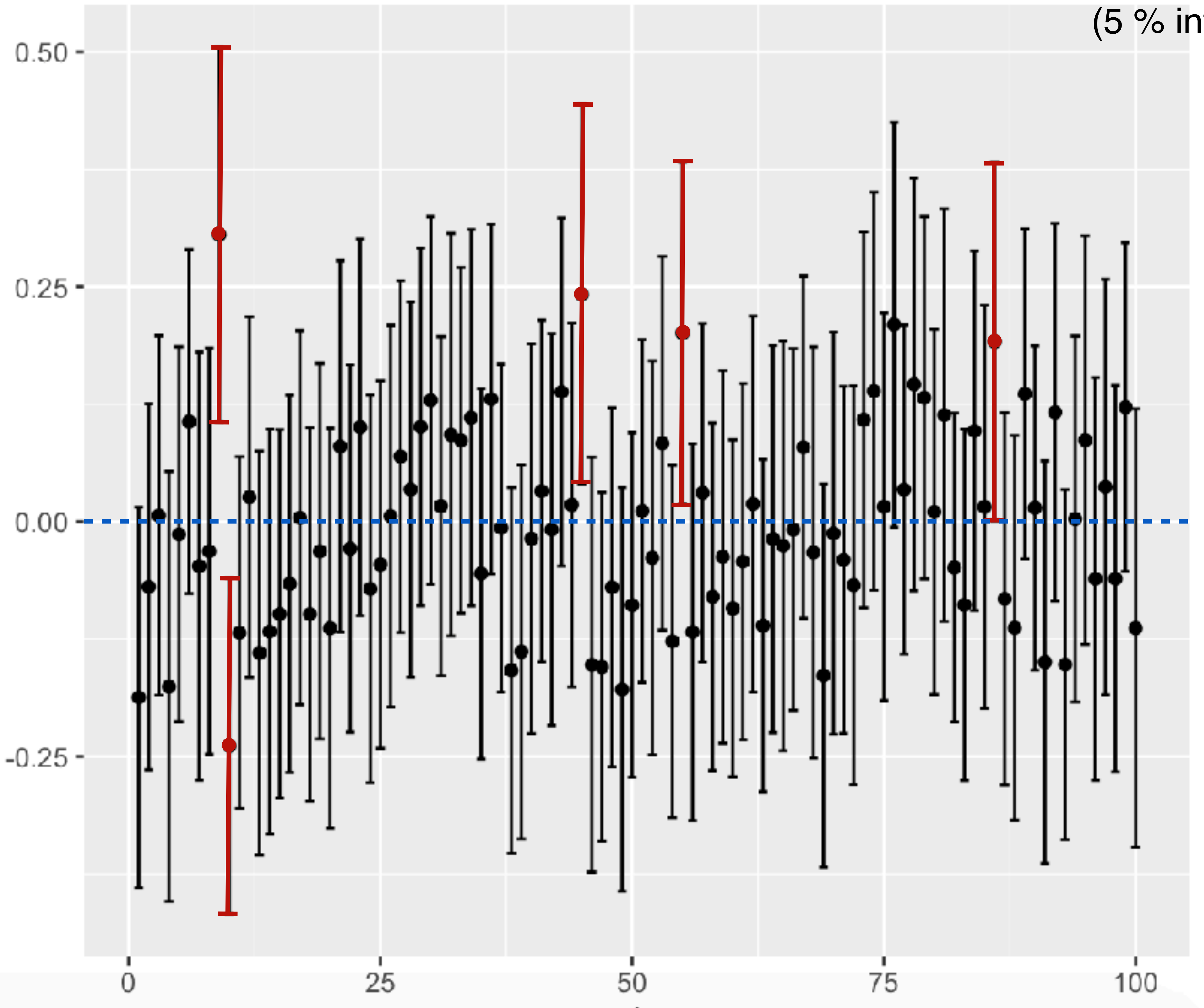
$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ statistické riziko, že intervalový odhad je chybný a skutečná hodnota parametru bude ležet mimo něj

Význam α: simulační příklad v R

```
install.packages("ggplot2")
library("ggplot2")

a <- 0.05
n <- 1000
tn <- qt(1-a/2,n-1)/sqrt(n)
low <- vector(mode="numeric", length=100)
mid <- vector(mode="numeric", length=100)
upp<- vector(mode="numeric", length=100)

for(i in 1:100){
  z=rnorm(n)
  mid[i]=mean(z)
  s=sd(z)
  low[i]=mid[i]-tn*s
  upp[i]=mid[i]+tn*s
}
w <- data.frame(i=c(1:100), L=low, M=mid, U=upp)

ggplot(w, aes(i, M)) + geom_point() + geom_errorbar(aes(ymin = L, ymax = U))
```

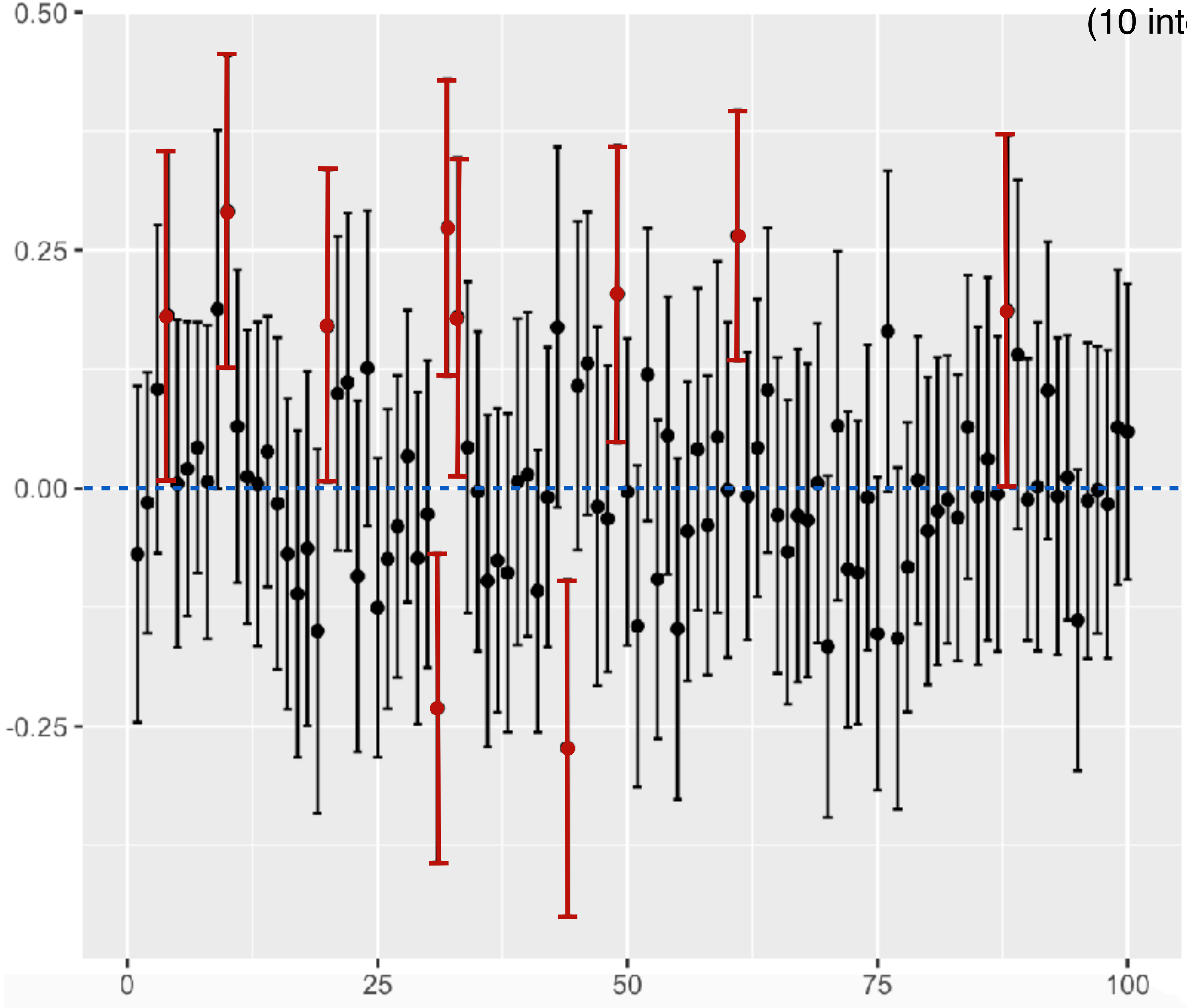
Význam α: simulační příklad v R N=100, μ=0, α=0.05

(5 % intervalů mimo)



Význam α: simulační příklad v R   N=100, μ=0, α=0.10

(10 intervalů mimo)



Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

100(1-α) % intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\ (\ \theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}) = P(-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}) = P(\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu})$$

$$= P(\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n})$$

$$= P(\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}) = 1 - \alpha = P(u_{\alpha/2} \le Z \le u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

100(1-α) % intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

Abychom mohli vytvořit intervalový odhad, je třeba znát (nebo alespoň před-pokládat) rozdělení pravděpodobnosti odhadové statistiky.

Příklady:

- odhad střední hodnoty $\hat{\mu} = \bar{X}_n$: $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ σ^2 známé

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}}, \quad \bar{\mu} = \bar{X} + \boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}}$$

SE -Standard Error

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

100(1-α

Všimněte si, že:

- Čím je rozsah výběru n větší, tím je intervalový odhad užší.
- Čím je menší rozptyl σ^2 (a tedy bodový odhad je přesnější), tím je intervalový odhad užší.
- Čím je vyšší koeficient spolehlivosti 1-α (statistická jistota), tím je intervalový odhad širší.

Abychom mohl
pokládat) rozd

Příklady:

- odhad střední hodnoty $\hat{\mu} = \bar{X}_n$: $\quad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$ $\quad$ σ^2 známé

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, \quad \bar{\mu} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$$

- odhad střední hodnoty $\hat{\mu} = \bar{X}_n$: $\quad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, s^2/n)$ $\quad$ σ^2 neznámé

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \boxed{\frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)}, \quad \bar{\mu} = \bar{X} + \boxed{\frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)}$$

SE -Standard Error

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

100(1-α) % intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

Abychom mohli vytvořit intervalový odhad, je třeba znát (nebo alespoň před-pokládat) rozdělení pravděpodobnosti odhadové statistiky.

Příklady:

- odhad rozptylu s^2: $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

  100(1-α) % intervalový odhad pro σ^2 je: $\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$

  (je nesymetrický!)

- odhad mediánu x_{med} lze vyjádřit pouze přibližně:

$$\left(\tilde{x}_{0.5} - u_{1-\alpha/2}\frac{0,707s}{\sqrt{n}};\ \tilde{x}_{0.5} + u_{1-\alpha/2}\frac{0,707s}{\sqrt{n}}\right)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

100(1-α) % intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

Příklady:

- statistický odhad pravděpodobnosti p: $$\hat{p} = \frac{n_A}{n}$$
  - n-krát pozorujeme alternativní veličinu X a počítáme $Y = \sum X_i$.
  - Je $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ a $\hat{p} = Y/n = \bar{X}$. Potom $E(\hat{p}) = p$, $Var(\hat{p}) = p(1-p)/n$.
  - pro velká n aproximujeme binomické rozdělení normálním, tedy předpokládáme $\hat{p} \sim \mathrm{N}(p, p(1-p)/n)$.
  - Intervalový odhad střední hodnoty potom bude ve tvaru

$$\left(\hat{p} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\ ;\ \hat{p} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

100(1-α) % intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

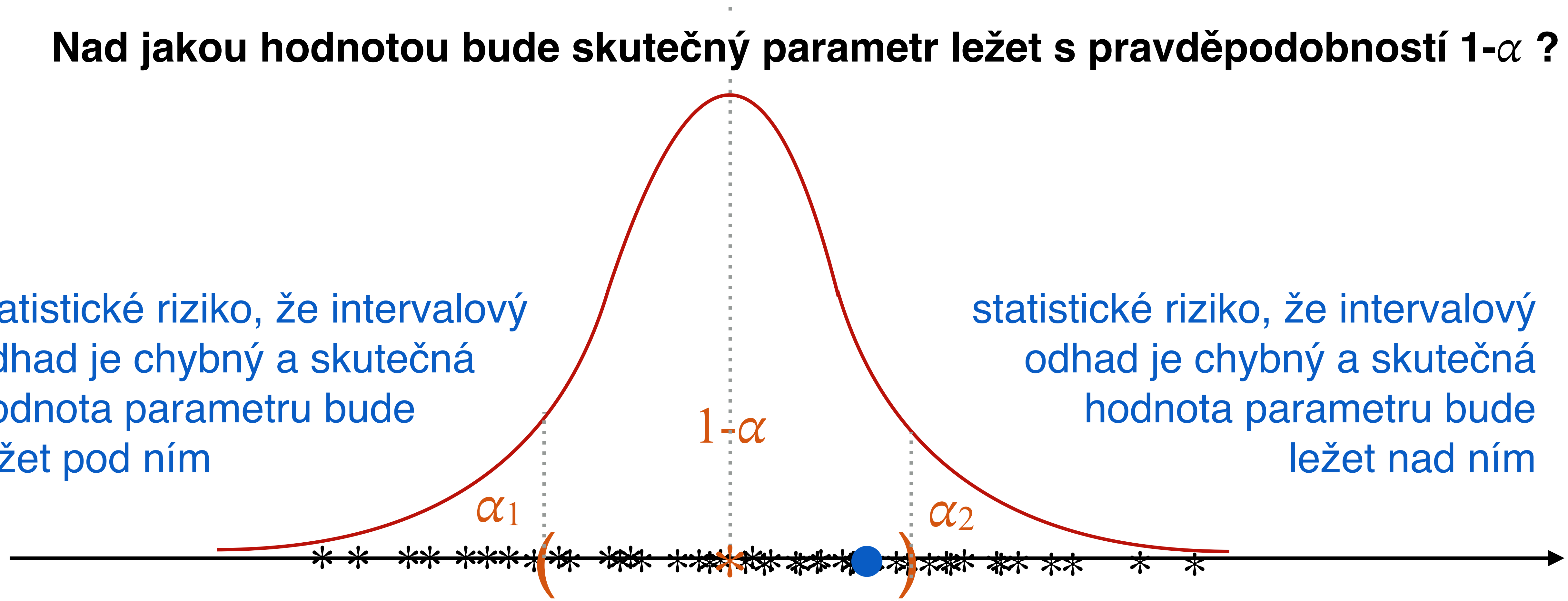
$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

Pokud neznáme rozdělení pravděpodobnosti bodového odhadu, potom použijeme empirické rozdělení a interval spolehlivosti můžeme zkonstruovat pomocí tzv. „syntetického“ výběru (bootstrap):

1. Provedeme výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a jeho pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o rozsahu n.
2. Z hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vybereme náhodně $m \leq n$ hodnot $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$
3. Z hodnot $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ spočteme bodový odhad neznámého parametru $\theta(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$.
4. Body 2 a 3 opakujeme N krát. Tím dostaneme odhady $\theta_1, \ldots, \theta_N$.
5. Posloupnost $\theta_1, \ldots, \theta_N$ uspořádáme podle velikosti (dostaneme uspořádaný výběr) a najdeme výběrové $\alpha/2$ a 1-$\alpha/2$ kvantily $\theta_{\alpha/2}$ a $\theta_{1-\alpha/2}$.

Intervalové odhady

Nad jakou hodnotou bude skutečný parametr ležet s pravděpodobností 1-α ?



statistické riziko, že intervalový odhad je chybný a skutečná hodnota parametru bude ležet pod ním

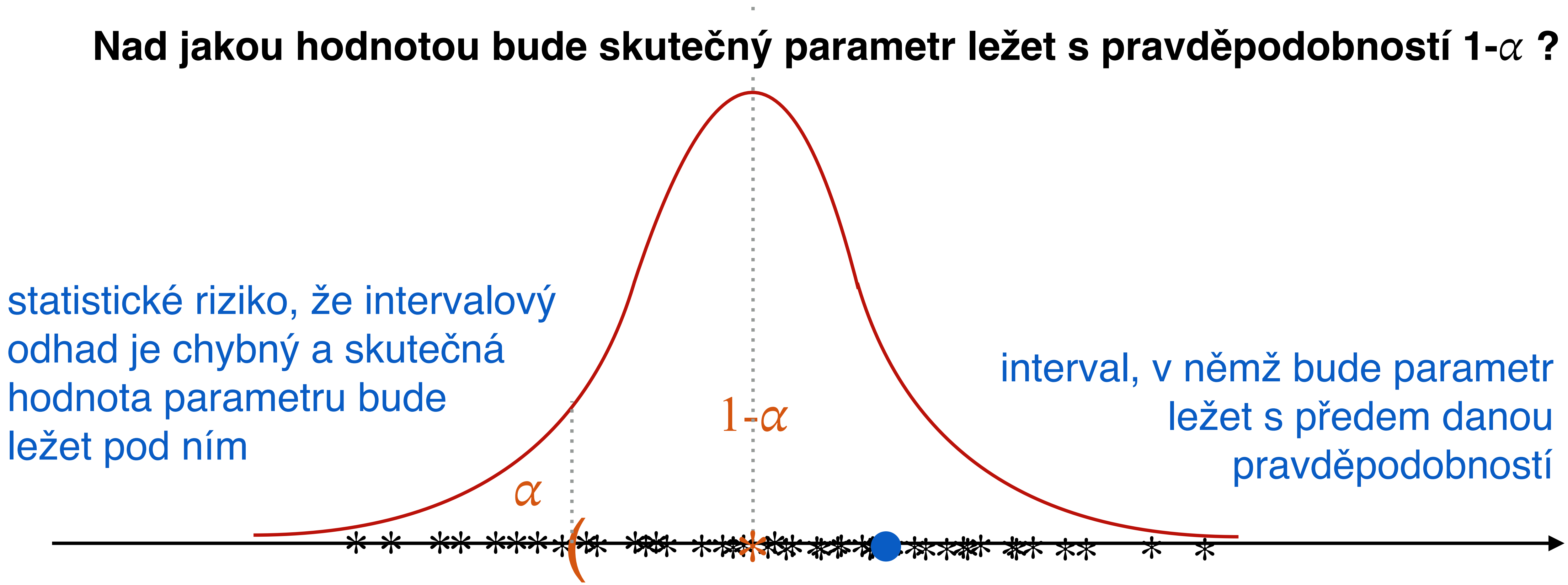
statistické riziko, že intervalový odhad je chybný a skutečná hodnota parametru bude ležet nad ním

koeficient spolehlivosti

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ statistické riziko, že intervalový odhad je chybný a skutečná hodnota parametru bude ležet mimo něj

Intervalové odhady - jednostranné

Nad jakou hodnotou bude skutečný parametr ležet s pravděpodobností 1-α ?



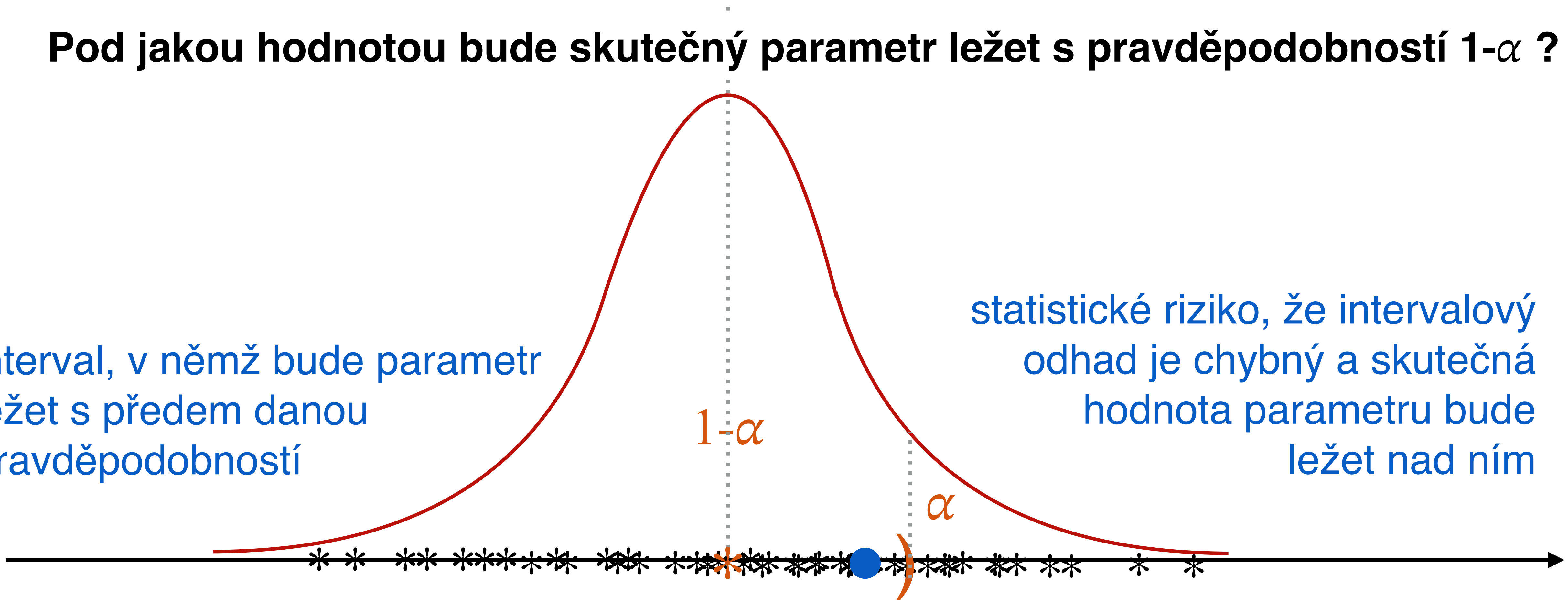
- odhad střední hodnoty $\hat{\mu} = \bar{X}_n$: $\bar{X}_n \sim N(\mu,\ s^2/n)$ σ^2 neznámé

levostranný 100(1-α) % intervalový odhad: $\left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1),\ \infty\right)$

Intervalové odhady - jednostranné

Pod jakou hodnotou bude skutečný parametr ležet s pravděpodobností 1-α ?

interval, v němž bude parametr ležet s předem danou pravděpodobností



statistické riziko, že intervalový odhad je chybný a skutečná hodnota parametru bude ležet nad ním

- odhad střední hodnoty $\hat{\mu} = \bar{X}_n$: $\bar{X}_n \sim N(\mu,\ s^2/n)$ σ^2 neznámé

  levostranný 100(1-α) % intervalový odhad: $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1),\ \infty\right)$

  pravostranný 100(1-α) % intervalový odhad: $\left(-\infty,\ \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)\right)$

Intervalové odhady

Příklad 1: Test spotřeby automobilu

Deklarovaná průměrná spotřeba = 13,5 l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

$$SE = \sqrt{\frac{0,309}{14}} t_{0,95}(13) = 0,15.2,16 = 0,32$$

Tedy intervalový odhad je (13,59; 14,23).

Protože 13,5 $\notin$ (13,59; 14,23), můžeme tvrdit, že naměřená spotřeba se od deklarované *statisticky významně liší*.

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad 1: Test spotřeby automobilu

```
> setwd("/Users/dohnal/Nextcloud/Vyuka/ZS/R")
> spotreba <- data.matrix(read.table("spotreba.txt"))
> n = length(spotreba)
> a = 0.05
> s = sd(spotreba)
> m = mean(spotreba)
> SE = qt(1-a/2,n-1)*s/sqrt(n)
> ci = c(m-SE, m+SE)
> ci
[1]   13.59333  14.23525
```

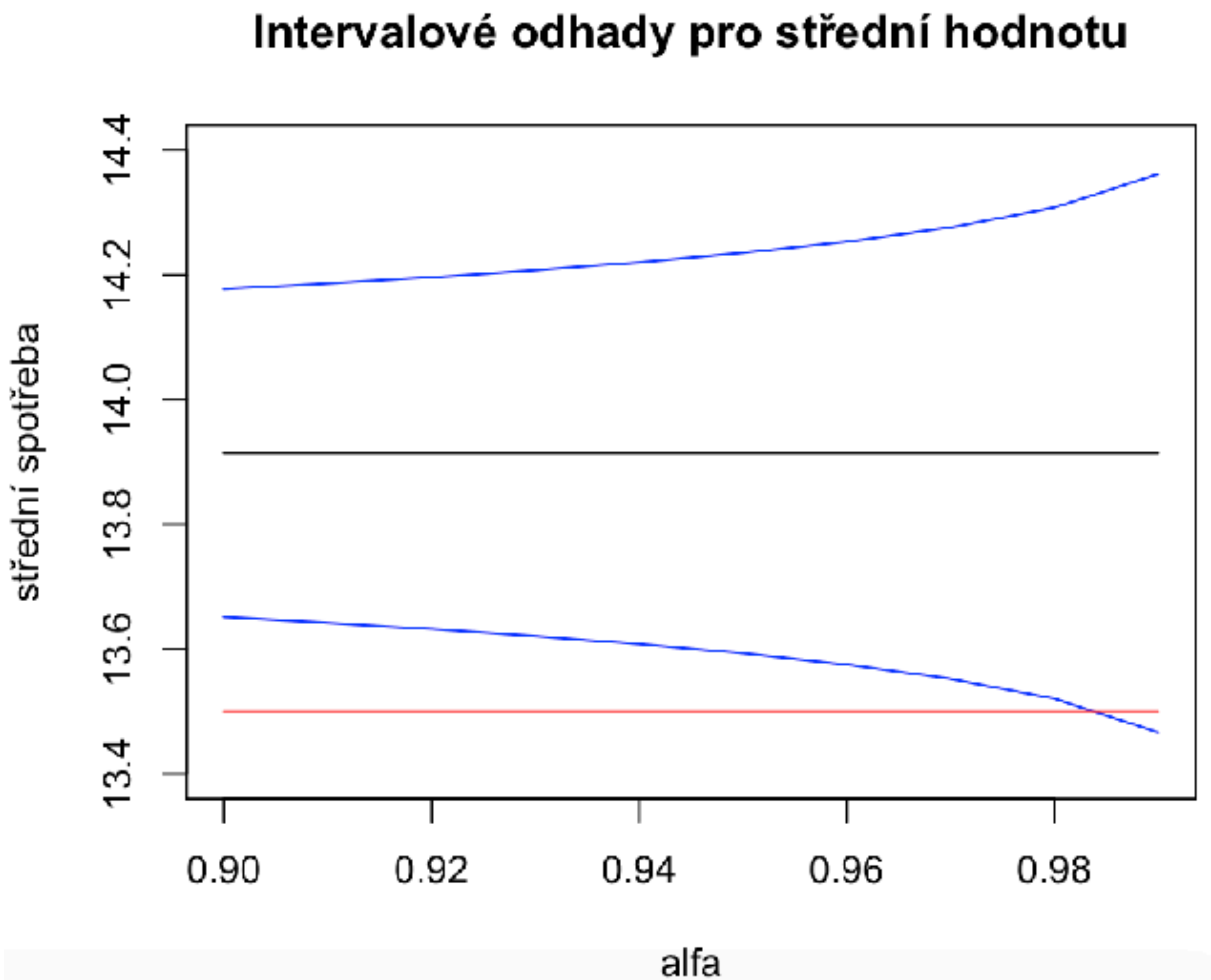
```
> a = 0.10
[2]   13.65118  14.17739
```

```
> a = 0.01
[2]   13.46675  14.36181
```

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad 1: Test spotřeby automobilu



n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad 1: Test spotřeby automobilu

Jednostranné odhady spotřeby na základě pozorování:

- levostranný 100(1-α) % intervalový odhad: $$\left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1),\ \infty\right)$$
- pravostranný 100(1-α) % intervalový odhad: $$\left(-\infty,\ \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)\right)$$

```
> n=length(spotreba)
> a=0.05
> s=sd(spotreba)
> m=mean(spotreba)
> SE=qt(1-a,n-1)*s/sqrt(n)
> m-SE
[1]    13.65118
m+SE
[2]    14.17739
```

Tedy: 1) S pravděpodobností 0.95 lze očekávat vyšší spotřebu než 13.65 l/100 km.
2) S pravděpodobností 0.95 spotřeba automobilu nepřekročí 14.18 l/100 km.

Intervalové odhady - intervaly spolehlivosti

Příklad 2 : Odhad rozsahu výběru pro odhad střední hodnoty při výběru z normálního rozdělení.

Jak velký rozsah pozorování n potřebujeme k tomu, abychom mohli odhadnout střední hodnotu s požadovanou tolerancí ± d?

Uvažujme pozorování náhodné veličiny X s normálním rozdělením $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\left(\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \;;\; \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \right)$$

Polovina šíře intervalu spolehlivosti $d = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$

Odtud: $\boxed{n = \left[\left(\dfrac{\sigma}{d} u_{1-\alpha} \right)^2 \right] + 1}$

Intervalové odhady - intervaly spolehlivosti

Příklad 3 : Statistický odhad pravděpodobnosti poruchy.

Při dlouhodobé kontrole kvality výrobků bylo z celkem 10 000 kontrolovaných kusů nalezeno 325 vadných výrobků.

$\hat{p} = 0.0325$

Dosadíme do vzorce pro intervalový odhad p

$$\left(\hat{p} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\ ;\ \hat{p} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \right)$$

a pro $\alpha = 0.05$ ($u_{0.975} = 1.96$): $\mathrm{SE} \doteq 0.0035$

a tedy lze očekávat, že $\hat{p} \in (\,0.029\ ;\ 0,036\,)$ s pravděpodobností 0.95.