Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

10. Testování hypotéz

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2021/2022

10. Testování hypotéz

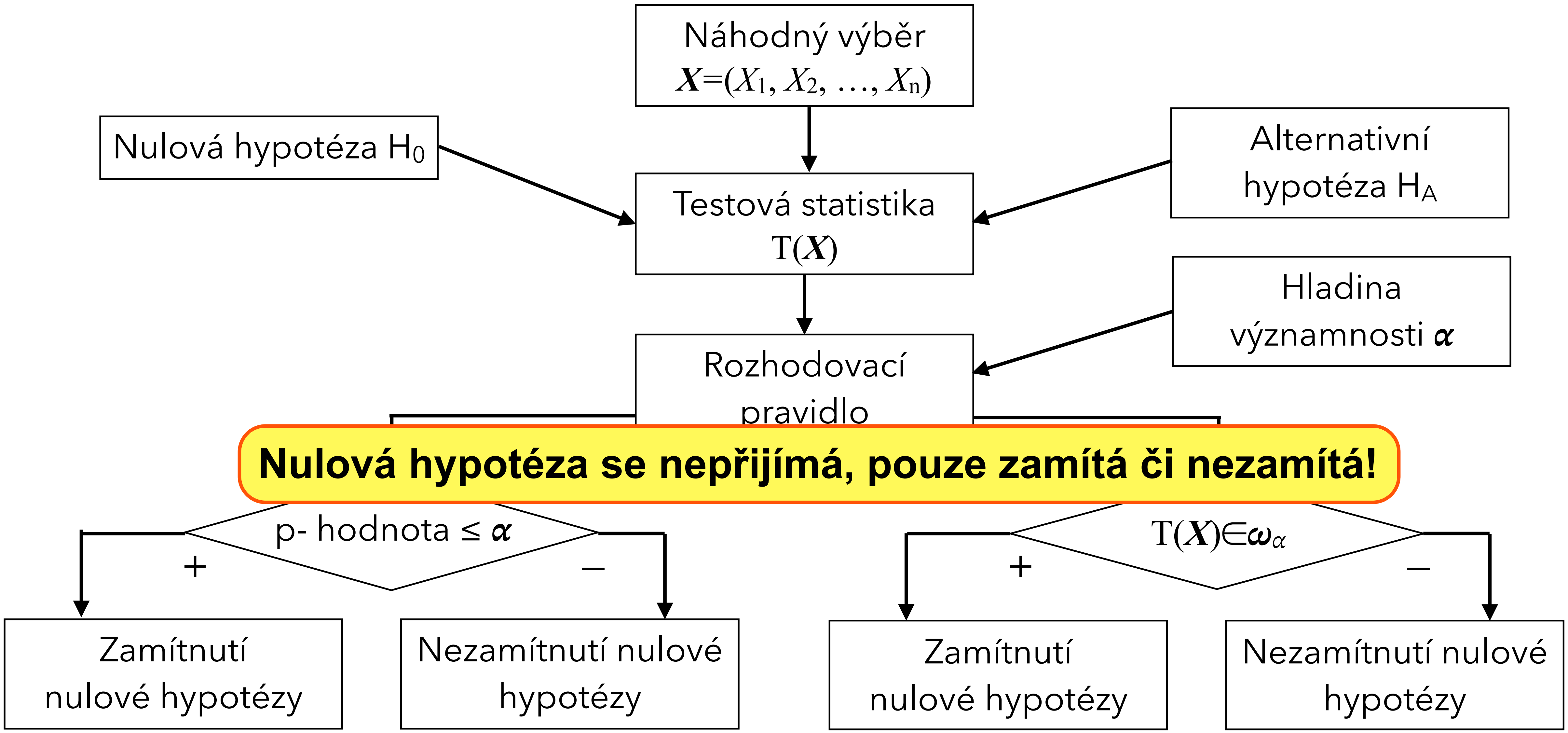
Klíčové pojmy:

- Nulová a alternativní hypotéza
- Hladina významnosti testu
- Chyby 1. a 2. druhu
- p-hodnota

Klíčové vztahy:

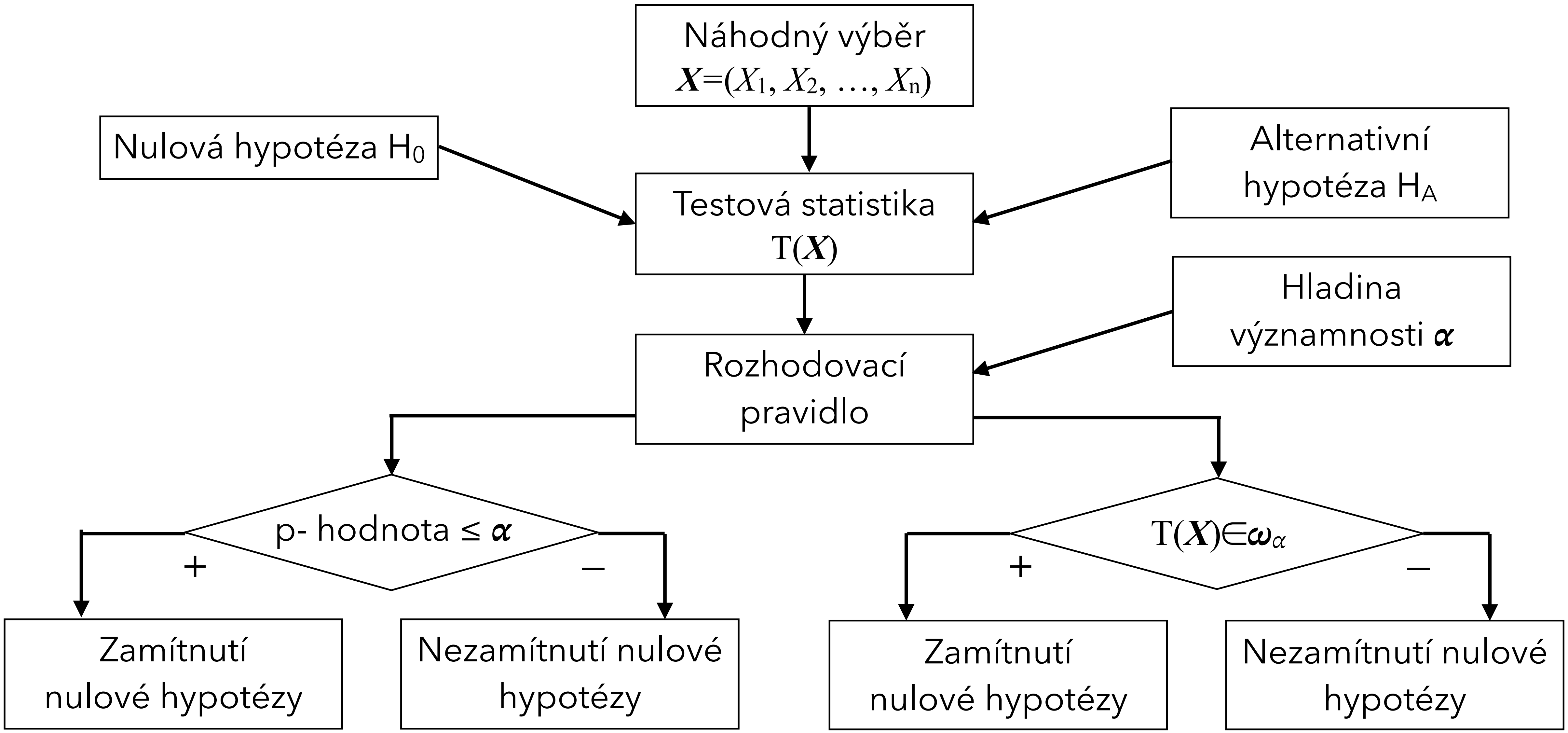
- Jednovýběrové testy (parametrické i neparametrické
- Dvouvýběrové testy při nezávislých výběrech
- Párové testy
- Test ANOVA, podmínky
- Kruskal-Wallis test

Základní algoritmus



Statisticky nelze nic dokázat, pouze zamítnout!

Základní algoritmus



- **Chyba 1. druhu:** Zamítneme nulovou hypotézu, která ve skutečnosti platí.
  P(nastane chyba 1. druhu) = α … **hladina významnosti testu**
- **Chyba 2. druhu:** Nezamítneme nulovou hypotézu, i když ve skutečnosti neplatí.
  P(nastane chyba 2. druhu) = β … **síla testu**

Testování (statistických) hypotéz

Různé statistické testy se liší v testových statistikách a jejich kritických hodnodách:

- testy o parametrech rozdělení pravděpodobnosti (jednovýběrové testy)
- srovnání dvou či více souborů z hlediska jejich charakteristik (dvouvýběrové testy, analýza rozptylu)
- neparametrické testy
- testy o rozdělení pravděpodobnosti (testy dobré shody)
- testy nezávislosti (nekorelovanosti)
- …..

Jednovýběrový test o střední hodnotě

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$H_0: \quad \mu = m_0$ - Nulová hypotéza

$H_A: \quad \mu \neq m_0$ - Alternativní hypotéza

$T = \dfrac{\bar{X} - m_0}{s}\sqrt{n}$ - Testová statistika
- má t-rozdělení o (n-1) stupních volnosti

$\alpha \quad \Rightarrow \quad t_\alpha(n-1)$ - hladina významnosti, kritická hodnota

---

$|T| \geq t_\alpha(n-1)$ - rozhodovací pravidlo

$p = 2\min\{\, F(T),\, 1 - F(T)\,\}$ - p-hodnota

$$\left|\frac{\bar{X} - m_0}{s}\sqrt{n}\right| \geq t_\alpha(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{X} - m_0}{s}\sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1)\rangle$$

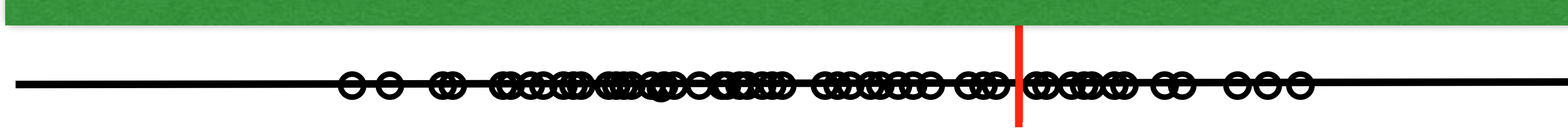
$$\bar{X} - m_0 \notin \langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\rangle$$

$$\boxed{\bar{X} \notin \langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\rangle}$$

Jednovýběrový test o střední hodnotě - příklad

Lze považovat automat za správně seřízený (m_0=25,0g)?

	A	B	C	D	E	F
1	24,52586					
2	24,17119		Minimum:	23,65390	=MIN(A1:A50)	
3	24,54486		Dolníkvartil:	24,20505	=QUARTIL(A1:A50;1)	
4	24,44240		Median:	24,52342	=MEDIAN(A1:A50)	
5	23,93455		Horníkvartil:	24,887985	=QUARTIL(A1:A50;1)	
6	24,20389		Maximum:	25,48924	=MAX(A1:A50)	
7	24,19974		Průměr:	24,54689	=PRŮMĚR(A1:A50)	
8	24,34851		Směr.odch.:	0,45852795	=SMODCH.VÝBĚR(A1:A50)	
9	23,94024		Šikmost:	0,09593675	=SKEW(A1:A50)	
10	24,21022		Špičatost	-0,6732486	=KURT(A1:A50)	
11	24,87474					
12	25,06155		t(n-1,0.95)	2,00957524	=T.INV.2T(0,05;49)	
13	25,48924		SE:	0,13	=D8*D1/SQRT(50)	
14	25,32572					
15	23,71721		CI(mean):	24,87		
16	24,61622			25,13		
17	25,06676					



$$\bar{X} = 24.55,\ \ s^2(X) = 0.21,\ \ s(X) = 0.46,\ \ n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \ \ \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01 \qquad SE = 0.132$$

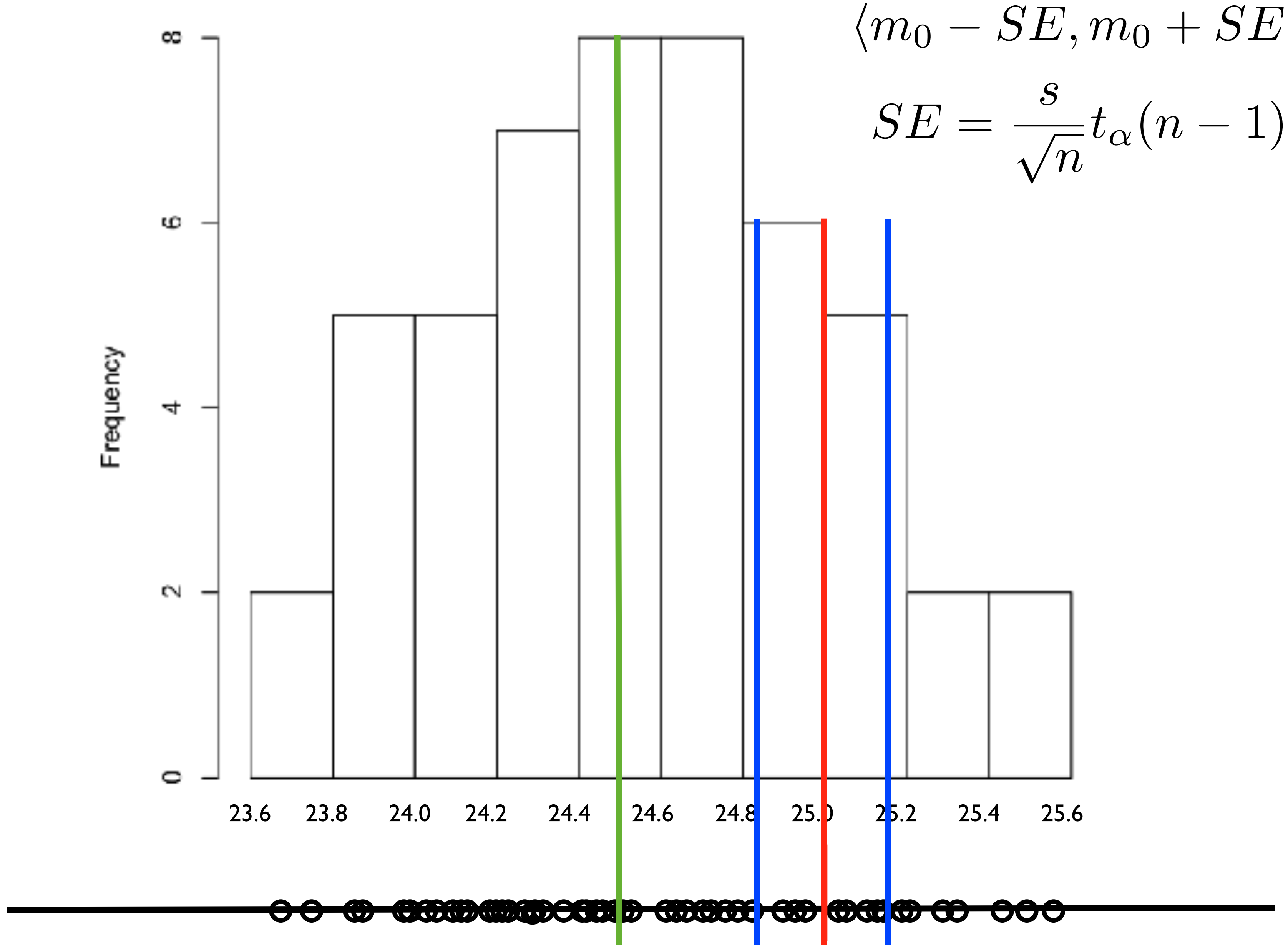
24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Jednovýběrový test o střední hodnotě - příklad

Lze považovat automat za správně seřízený (m_0=25,0g)?

$$\langle m_0 - SE, m_0 + SE \rangle$$

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$$



$\bar{X} = 24.55, \; s^2(X) = 0.21, \; s(X) = 0.46, \; n = 50$

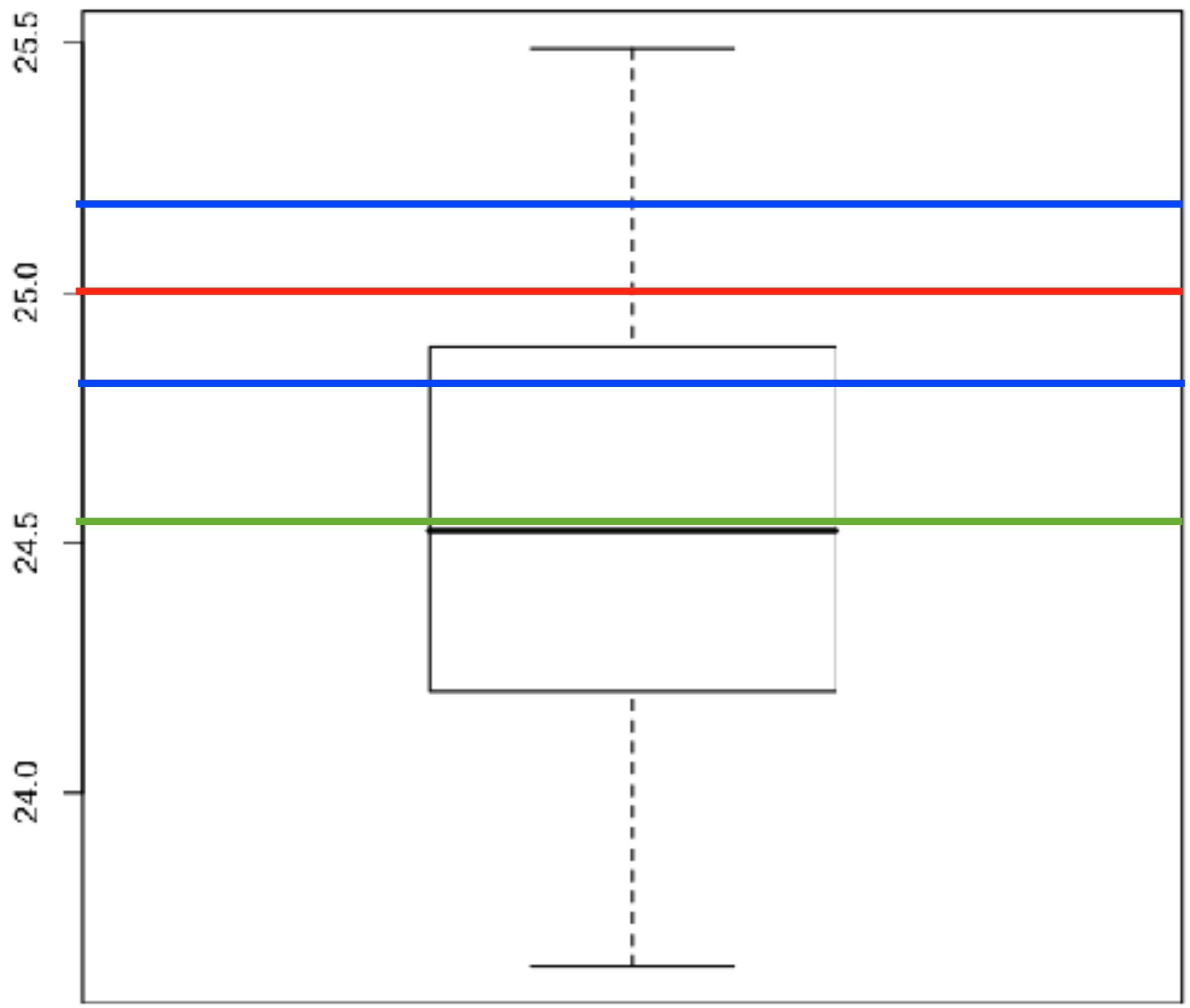
Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$\alpha = 0.05 \;\; \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$ $\qquad SE = 0.132$ $\qquad \bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Jednovýběrový test o střední hodnotě - příklad

Lze považovat automat za správně seřízený (m_0=25,0g)?



24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

$\bar{X} = 24.55,\ s^2(X) = 0.21,\ s(X) = 0.46,\ n = 50$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$\alpha = 0.05 \ \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$ $\quad SE = 0.132$ $\quad \bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$

Jednovýběrový test o střední hodnotě - příklad

Lze považovat automat za správně seřízený (m_0=25,0g)?

```
x <- data.matrix(read.table("davkovac.txt"))
t.test(x, mu=25.0, alternative = "two.sided", conf.level=0.95)

        One Sample t-test

  data:  x
  t = -6.9875, df = 49, p-value = 6.937e-09
  alternative hypothesis: true mean is not equal to 25
  95 percent confidence interval:
   24.41658 24.67721
  sample estimates:
  mean of x
   24.54689
```

$\bar{X} \pm SE$

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.2298[illegible]	[illegible]
24.0977[illegible]	[illegible]
24.892[illegible]	[illegible]
24.14259	25.12906

$m_0 \pm SE$

$\bar{X} = 24.55,\ \ s^2(X) = 0.21,\ \ s(X) = 0.46,\ \ n = 50$

Chcemе ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$\alpha = 0.05 \ \ \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$ $\quad SE = 0.132$ $\quad \bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$

Jednovýběrový test o střední hodnotě - příklad

Lze považovat automat za správně seřízený (m_0=25,0g)?

```
x <- data.matrix(read.table("davkovac.txt"))
t.test(x, mu=25.0, alternative = "less")


 One Sample t-test

 data:  x
 t = -6.9875, df = 49, p-value = 3.469e-09
 alternative hypothesis: true mean is less than 25
 95 percent confidence interval:
      -Inf 24.65561
 sample estimates:
 mean of x
  24.54689
```

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

$\bar{X} = 24.55,\ s^2(X) = 0.21,\ s(X) = 0.46,\ n = 50$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$\alpha = 0.05 \ \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$ $\quad SE = 0.132$ $\quad \bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$

Jednovýběrový test o střední hodnotě - příklad

Lze považovat automat za správně seřízený (m_0=25,0g)?

```
x <- data.matrix(read.table("davkovac.txt"))
t.test(x, mu=25.0, alternative = „greater")

 One Sample t-test

 data:  x
 t = -6.9875, df = 49, p-value = 1
 alternative hypothesis: true mean is greater than 25
 95 percent confidence interval:
     24.43818    Inf
 sample estimates:
 mean of x
  24.54689
```

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

$\bar{X} = 24.55, \;\; s^2(X) = 0.21, \;\; s(X) = 0.46, \;\; n = 50$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$\alpha = 0.05 \;\; \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$ $\quad SE = 0.132$ $\quad \bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$

Srovnání dvou výběrů

Dvě nezávislá měření $X : X_1, X_2, \dots, X_n$ $\quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Mohou nastat tři situace:

- oba parametry v obou případech známe
- známe střední hodnoty a neznáme rozptyly
- známe rozptyly a neznáme střední hodnoty
- žádný z parametrů neznáme

Odhady středních hodnot: $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Odhady rozptylů: $$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X - \bar{X})^2, \quad s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum (Y - \bar{Y})^2$$

- test shody rozptylů
- test shody středních hodnot při stejných rozptylech
- test shody středních hodnot při nestejných rozptylech

Dvě závislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$
$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

párová pozorování

- párový test shody středních hodnot

Srovnání dvou náhodných veličin

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření

- Dvouvýběrový t-test

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska jejich střední hodnoty?

Lze považovat střední hodnoty dvou nezávislých měření za shodné při dané hladině významnosti?

Lze od sebe statisticky významně odlišit dvě nezávislá měření podle jejich jejich střední hodnoty?

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

Srovnání dvou náhodných veličin

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření

- Dvouvýběrový t-test

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ → dvouvýběrový t-test se stejnými rozptyly

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ → dvouvýběrový t-test s nestejnými rozptyly

Srovnání dvou náhodných veličin

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření

- Dvouvýběrový t-test se stejnými rozptyly

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2 \Rightarrow s^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = s^2_{\bar{X}} + s^2_{\bar{Y}} = \frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} =$

$$= s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = s^2\left(\frac{m+n}{n.m}\right)$$

dále odhadneme s^2 ze
všech naměřených hodnot: $s^2 = \frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2\right) =$

$$\frac{1}{n+m-2}\left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2\right)$$

tedy: $s^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{n+m}{nm(n+m-2)}\left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2\right)$ a testová statistika

bude mít tvar: $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$

T má t-rozdělení (Studentovo) pravděpodobnosti o $(n+m-2)$ stupních volnosti.

H$_0$ nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \leq t_\alpha(n+m-2)$ kde $t_\alpha(n+m-2)$ je (oboustranná) α-kritická hodnota t-rozdělení o $(n+m-2)$ stupních volnosti.

Srovnání dvou náhodných veličin

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření

- Dvouvýběrový t-test s nestejnými rozptyly

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}}$$

a má rozdělení, které je směsí t-rozdělení o $(n\text{-}1)$ a $(m\text{-}1)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude splněna nerovnost $|T| \leq At_\alpha(n-1) + Bt_\alpha(m-1)$, kde A a B jsou váhy, $A+B=1$.

$$A = \frac{\frac{1}{n}s_X^2}{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}, \qquad B = \frac{\frac{1}{m}s_Y^2}{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}$$

Srovnání dvou náhodných veličin

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných objektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech
- .....

$$X : X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y : Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$\Rightarrow \quad Z_1 = X_1 - Y_1,\ Z_2 = X_2 - Y_2, \ldots,\ Z_n = X_n - Y_n,$$

$$Z \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_Z^2)$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad H_A : \mu_X \neq \mu_Y$$

$$\Rightarrow$$

$$H_0 : \mu_Z = 0 \qquad H_A : \mu_Z \neq 0 \qquad T = \frac{\bar{Z} - a}{s_Z}\sqrt{n}$$

T má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n\text{-}1)$ stupních volnosti.

H$_0$ nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \leq t_\alpha(n-1)$ kde $t_\alpha(n-1)$ je (oboustranná) α-kritická hodnota t-rozdělení o $(n\text{-}1)$ stupních volnosti.

Srovnání dvou náhodných veličin

Jednostranné testy

“dolní” nebo “horní” jednostranná alternativa :

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad\qquad H_0 : \mu_X = \mu_Y$$
$$H_A : \mu_X < \mu_Y \qquad\qquad H_A : \mu_X > \mu_Y$$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude buď
$T < -t_\alpha(n-1)$ nebo $T > t_\alpha(n-1)$
kde $t_\alpha(n-1)$ je (jednostranná) α-kritická hodnota t-rozdělení o $(n$-$1)$ stupních volnosti.

oboustranná α-kritická hodnota je $(1-\alpha/2)$-kvantil $t_{1-\alpha/2}(n-1)$

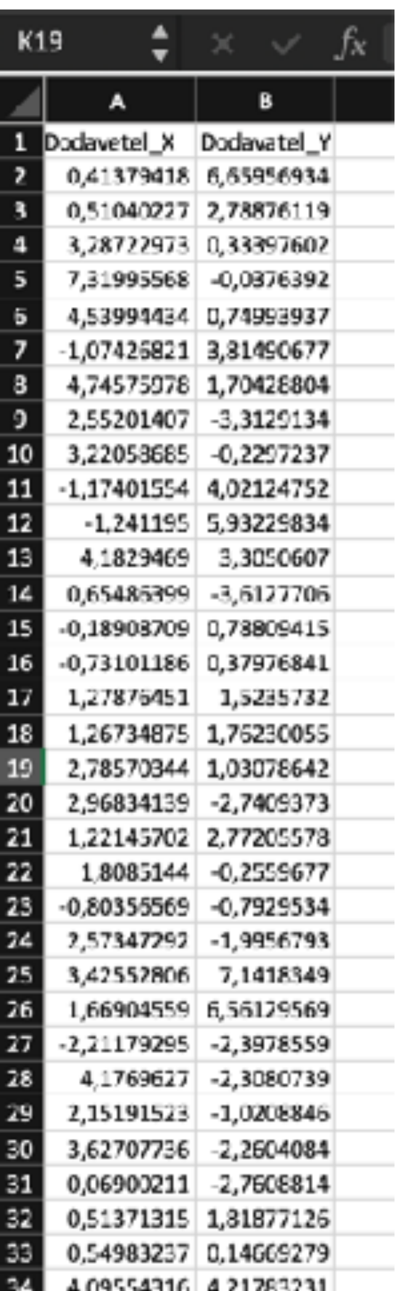
jednostranná α-kritická hodnota je $(1-\alpha)$-kvantil $t_{1-\alpha}(n-1)$

Srovnání dvou náhodných veličin

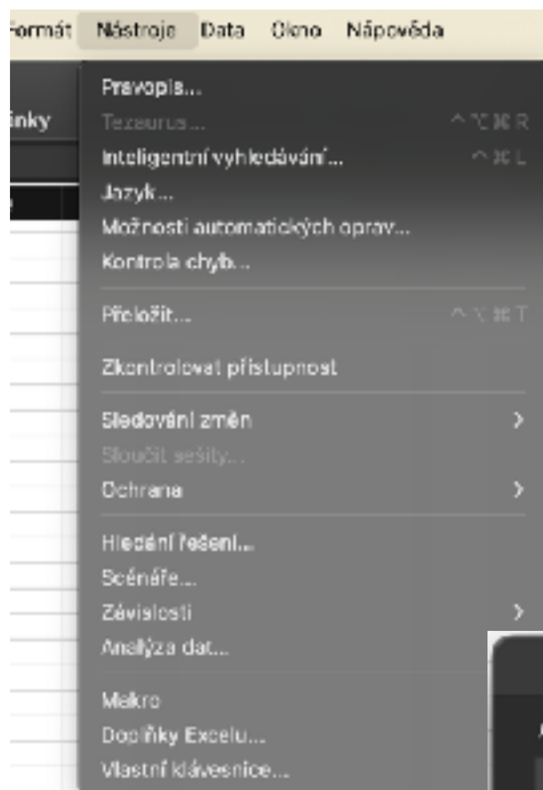
Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

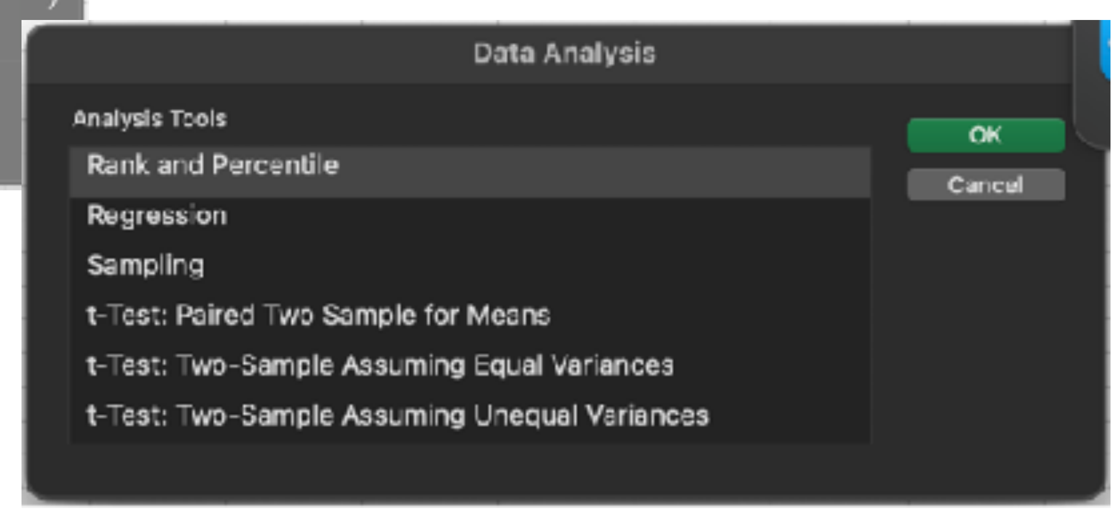
Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Řešení v MS Excel:



	A	B
1	Dodavetel_X	Dodavatel_Y
2	0,41379418	6,65956934
3	0,51040227	2,78876119
4	3,28722973	0,33397602
5	7,31995568	-0,0376392
6	4,53994434	0,74993937
7	-1,07426821	3,81490677
8	4,74575978	1,70428804
9	2,55201407	-3,3129134
10	3,22058685	-0,2297237
11	-1,17401554	4,02124752
12	-1,241195	5,93229834
13	4,1829469	3,3050607
14	0,65486399	-3,6127706
15	-0,18908709	0,78809415
16	-0,73101186	0,37976841
17	1,27876451	1,5235732
18	1,26734875	1,75230055
19	2,78570344	1,03078642
20	2,96834139	-2,7409373
21	1,22145702	2,77205578
22	1,8085144	-0,2559677
23	-0,80355569	-0,7929534
24	2,57347292	-1,9956793
25	3,42552806	7,1418349
26	1,66904559	6,56129569
27	-2,21179295	-2,3978559
28	4,1769627	-2,3080739
29	2,15191523	-1,0208846
30	3,62707736	-2,2604084
31	0,06900211	-2,7608814
32	0,51371315	1,81877126
33	0,54983237	0,14609279
34	4,09554316	4,21263231





Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Řešení v MS Excel:

K19

	A	B
1	Dodavetel_X	Dodavatel_Y
2	0,41379418	6,65956934
3	0,51040227	2,78876119
4	3,28722973	0,33397602
5	7,31995568	-0,0376392
6	4,53994434	0,74993937
7	-1,07426821	3,81490677
8	4,74575978	1,70428804
9	2,55201407	-3,3129134
10	3,22058685	-0,2297237
11	-1,17401554	4,02124752
12	-1,241195	5,93229834
13	4,1829469	3,3050607
14	0,65486399	-3,6127706
15	-0,18908709	0,73809415
16	-0,73101186	0,37976841
17	1,27876451	1,5235732
18	1,26734875	1,76230055
19	2,78570344	1,03078642
20	2,96834139	-2,7409373
21	1,22145702	2,77205578
22	1,8085144	-0,2559677
23	-0,80355569	-0,7929534
24	2,57347292	-1,9956793
25	3,42552806	7,1418349
26	1,66904559	6,56129569
27	-2,21179295	-2,3978559
28	4,1769627	-2,3080739
29	2,15191523	-1,0208846
30	3,62707736	-2,2604084
31	0,06900211	-2,7608814
32	0,51371315	1,81877126
33	0,54983237	0,14609279
34	4,09554316	4,21763231

F-Test Two-Sample for Variances

	Variable 1	Variable 2
Mean	1,88435964	1,4843808
Variance	7,59727603	8,72071529
Observations	120	100
df	119	99
F	0,87117579	
P(F<=f) one-	0,23503862	
F Critical one	0,72967687	

t-Test: Two-Sample Assuming Equal Variances

	Variable 1	Variable 2
Mean	1,88435964	1,4843808
Variance	7,59727603	8,72071529
Observations	120	100
Pooled Varia	8,10746175	
Hypothesizec	0	
df	218	
t Stat	1,03746593	
P(T<=t) one-	0,15033407	
t Critical one	1,65187337	
P(T<=t) two-	0,30066814	
t Critical two	1,9709056	

Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Řešení v R:

> x <- data.matrix(read.table("dodavatelX.txt"))

Dodavatel X:

```
> x
  [1]  0.41379418  0.51040227  3.28722973  7.31995568  4.53994434 -1.07426821
  [7]  4.74575978  2.55201407  3.22058685 -1.17401554 -1.24119500  4.18294690
 [13]  0.65486399 -0.18908709 -0.73101186  1.27876451  1.26734875  2.78570344
 [19]  2.96834139  1.22145702  1.80851440 -0.80356569  2.57347292  3.42552806
 [25]  1.66904559 -2.21179295  4.17696270  2.15191523  3.62707736  0.06900211
 [31]  0.51371315  0.54983237  4.09554316  1.28465289  4.05350899  5.10504379
 [37]  4.25580572  0.79826235 -1.02042629  1.87299786  0.14051938  3.05622839
 [43]  4.74780021  4.54794140 -6.54132331  1.94429658  1.95488616  4.73267571
 [49]  4.83082378  2.95830720  2.99769818 -1.07337799  0.58403864  2.73050678
 [55]  0.28021230 10.49771713  2.36870296  0.60689702  8.42679434  1.29763889
 [61]  1.31289734  1.93230073  5.92597773  1.49746935  6.30721756  3.15585521
 [67]  5.38824907  3.27322441  3.41248356 -0.40437473  3.19350142 -4.06261001
 [73] -1.05763312 -0.39748962  0.86637433  2.02108109 -1.06445976  1.10375263
 [79]  4.51823259 -0.75725877 -0.87173075 -2.19932463  7.70167909  1.48655986
 [85]  4.90757730  5.51652338 -0.34615559  0.01031344  4.57582354  1.17516968
 [91] -0.21932558 -1.27848277  2.97655676  1.44863955  3.67881403  0.30868429
 [97] -2.52052309  0.05248743  0.07728483 -1.12975005  3.99585182  0.79045260
[103]  3.73159608  7.36490361  6.40646375 -1.54228149 -0.65100869  4.04305846
[109]  2.47766853 -3.48957597  6.20840771  0.40560482  0.49118447 -1.48277951
[115] -1.23675030  5.16138353  1.15383008  2.75286404  4.70183189 -2.29877355
```

Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

> y <- data.matrix(read.table(„dodavatelY.txt"))

Dodavatel Y:

```
> y
  [1]  6.65956934  2.78876119  0.33397602 -0.03763918  0.74993937  3.81490677
  [7]  1.70428804 -3.31291341 -0.22972370  4.02124752  5.93229834  3.30506070
 [13] -3.61277063  0.78809415  0.37976841  1.52357320  1.76230055  1.03078642
 [19] -2.74093726  2.77205578 -0.25596771 -0.79295335 -1.99567925  7.14183490
 [25]  6.56129569 -2.39785588 -2.30807391 -1.02088455 -2.26040839 -2.76088135
 [31]  1.81877126  0.14669279  4.21783231 -2.13184320  3.69196005 -2.69614367
 [37] -2.68014820  3.72209577  1.73709472 -0.70580812  0.07337669  2.17063230
 [43]  2.72495294  5.04390706  1.32219033  4.72349163 -0.67638087  2.64424944
 [49]  2.78769261 -2.10997705  4.26042721 -3.50266144  1.72564280 -2.07028305
 [55] -4.59779260 -1.71953774  2.90307934  1.38358058  3.42339203 -1.68000430
 [61]  7.55683608  6.32574310 -2.60318964  3.24511198  0.97390332  2.22611398
 [67]  0.83831831  0.07828888  2.29402602  2.68356827  0.07483911  3.38214384
 [73] -0.59180508  9.07209729 -1.27708114  4.77997853 -0.83918672  6.26383807
 [79]  1.50674691  3.25716693  5.70351834  5.80174051  3.61099316  2.19293272
 [85] -1.46102337 -0.97135778  1.54849399  4.34257358 -1.64886246  2.44942102
 [91]  2.68469434  1.64707956  5.49827517  1.01640668  4.43099277  2.23430799
 [97] -1.74337571  6.43458332  2.94137432 -1.01569579
```

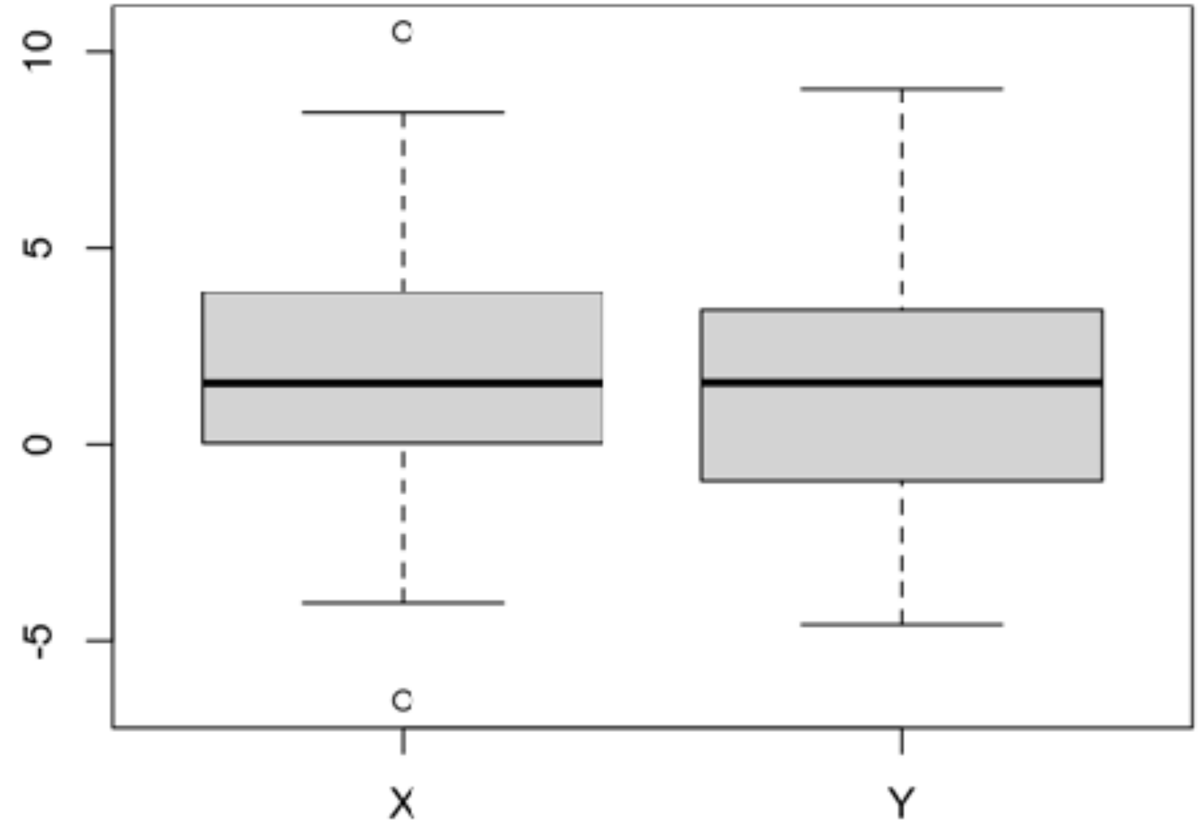
Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

1) Vizualizace dat: Box&Whiskers diagram

```
> boxplot(c(x),c(y), names=c("X","Y"))
```



2) Test normality:

```
> shapiro.test(x)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  x
W = 0.99023, p-value = 0.5554

> shapiro.test(y)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  y
W = 0.98447, p-value = 0.2907
```

Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

3) Srovnání rozptylů: F-test

```
> var.test(x,y)

    F test to compare two variances

data:  x and y
F = 0.8712, num df = 119, denom df = 99, p-value = 0.4701
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.5943383 1.2684711
sample estimates:
ratio of variances
         0.8711758
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme, rozptyly se statisticky významně neliší

Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

4) Srovnání středních hodnot: dvouvýběrový t-test se shodnými rozptyly

```
> t.test(x,y, var.equal=T)

	Two Sample t-test

data:  x and y
t = 1.0375, df = 218, p-value = 0.3007
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3598731  1.1598308
sample estimates:
mean of x mean of y 
 1.884360  1.484381 
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme, střední hodnoty se statisticky významně neliší

Srovnání dvou náhodných veličin

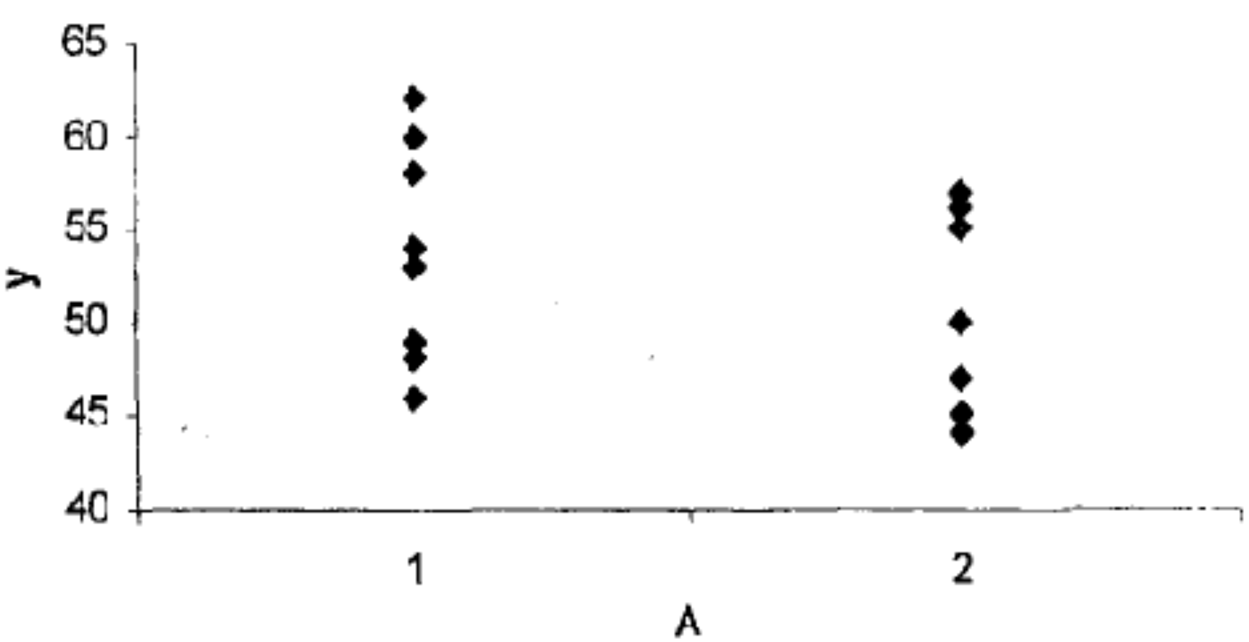
Příklad: Bylo zjišťováno, zda množství vyrobených kusů za hodinu (výkonnost) závisí na typu šicího stroje.

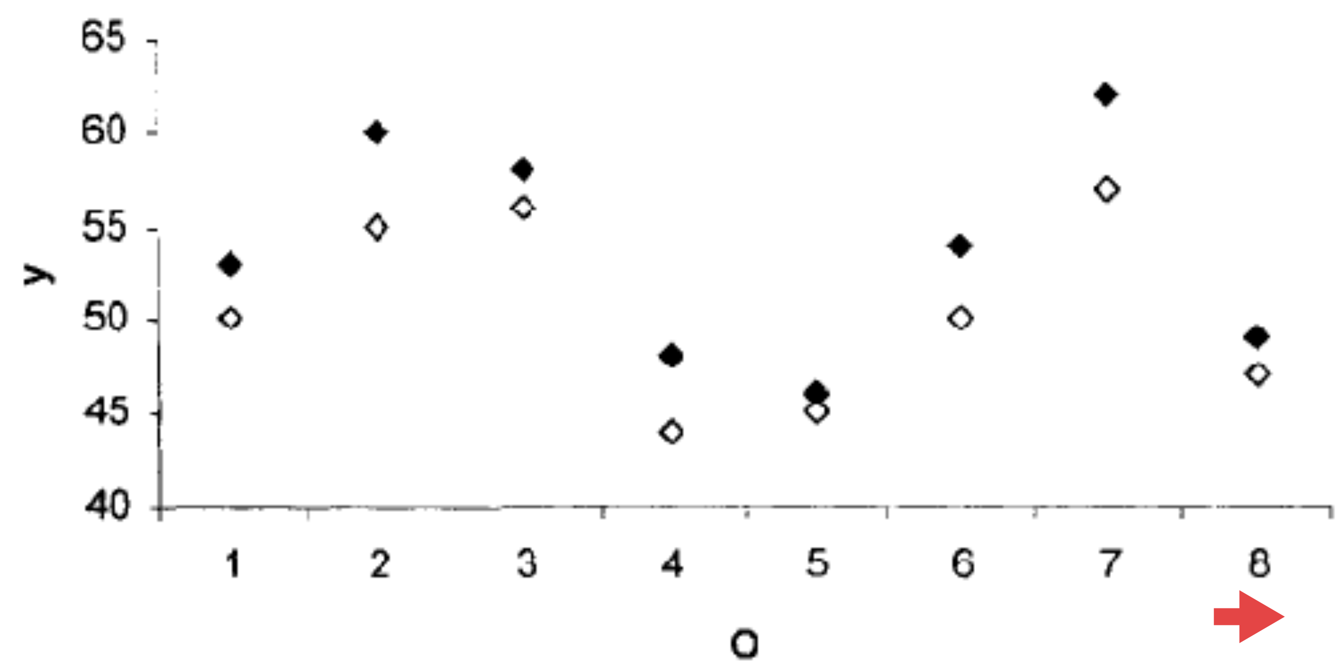
Navrhneme jednofaktorový experiment, 2 úrovně, 8 replikací, 8 bloků => 16 měření

1. Data:

operátor	1	2	3	4	5	6	7	8
stroj A1	53	60	58	48	46	54	62	49
stroj A2	50	55	56	44	45	50	57	47
rozdíl d_j	3	5	2	4	1	4	5	2

2. Grafické znázornění dat:





Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Bylo zjišťováno, zda množství vyrobených kusů za hodinu (výkonnost) závisí na typu šicího stroje.

3. Párový t-test:

$$H_0: \ \mu_{A1} = \mu_{A2}, \quad H_A: \ \mu_{A1} \neq \mu_{A2}$$

$$T = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{r}}}$$

kde

$$\bar{d} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} d_j, \quad s_d^2 = \frac{1}{r-1}\sum_{j=1}^{r}(d_j - \bar{d})^2$$

t-Test: Párový test pro střední hodnoty

	y1	y2
Stř. hodnota	53,75	50,5
Rozptyl	34,5	25,42857
Pozorování	8	8
Pears. korelace	0,974278	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Stupně volnosti	7	
t stat	6,177483	
P(T<=t) (1)	0,000228	
t krit (1)	1,894578	
P(T<=t) (2)	0,000455	
t krit (2)	2,364623	

=> nulovou hypotézu zamítáme, typ stroje ovlivňuje výkonnost, která je statisticky významně vyšší u prvního typu stroje

Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

1) Data:

```
> x <- data.matrix(read.table("pred_cvicenim.txt"))
```

```
> pred_cvicenim
  [1] 12.666378  7.322789 15.021706 13.616913 10.970712  5.464451
  [7]  9.999636 15.693764 13.771444 17.065310  6.940708 15.860749
 [13] 18.019348  6.326531 20.647763 23.005369 14.619170 20.787108
 [19] 14.238225  9.674337 14.763170  9.613791  9.727326  9.146292
 [25] 21.246960 16.200128 15.466065 13.691879  9.032113 10.558392
 [31] 18.258896 14.992416 14.722569 10.579842 10.758363  8.894299
 [37] 13.502299 12.994734 14.775563  9.818535 18.208089  8.438143
 [43]  8.282819 11.090392 15.174881  7.704479  8.917742 10.275903
 [49] 11.488700 16.572150 18.892428 13.544225  9.309845 13.713258
 [55] 12.904993  8.951567  9.041688 10.222305 14.136072  9.222289
 [61] 15.208694 14.627659 15.287092 11.389052  7.716052 14.307632
 [67] 14.647653 18.705963 13.665201  8.025347 13.157791 14.336731
 [73]  9.548584 12.522605 11.876452 12.241549 12.944160 17.637175
 [79]  9.854223 17.877400 15.892081  9.893356  7.791175 11.901961
 [85] 15.605362 13.464186 12.451922 16.090626  8.907932 16.333859
 [91] 13.554146 19.586575 11.765020  9.981692  5.325750 20.168371
 [97] 12.485393 14.349888 14.198229  7.315012 16.787920 10.998550
[103] 10.377856 13.531181 12.258939 11.346062 12.998020  8.498104
[109] 14.195263 15.372914 11.698431 12.929311 11.232474 21.551867
[115] 10.436798 14.430260 18.836296 14.838428 14.450987 10.879682
```

Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

1) Data:

```
>  y <- data.matrix(read.table("po_cviceni.txt"))
```

```
> po_cviceni
  [1] 14.889379  8.627612  9.867455 13.141168  9.249122  8.490774
  [7] 10.217290 10.724403 14.669450 14.243944 10.826905 13.951521
 [13] 14.693401  9.449562 16.425888 16.392689 13.265474 14.704994
 [19] 12.718107 10.395385  8.756276  6.961521 12.688497 10.578342
 [25] 14.294064 13.763032  8.472324 15.605253 11.968936  9.897284
 [31] 14.788205 14.773378 11.723336 11.719464 11.824407 12.914485
 [37] 13.291805 13.272867 12.586791  9.202608 15.817188 11.197137
 [43]  8.974410 10.823942 12.289400 10.483861 11.119684  9.956822
 [49]  9.778551 12.062084 13.449972 15.481139  9.470557 11.143402
 [55] 10.793291  9.786869  8.547580  8.188947 12.532635 10.862473
 [61] 10.547040 13.774638 14.861969 11.180668  9.790466 12.469556
 [67] 11.837173 13.820717 11.476120  9.850563 10.440890 11.015557
 [73] 12.547672 12.041457  9.639740 11.368657 11.431948 15.449064
 [79]  9.110052 15.125478 13.433802 11.807514  9.632299 12.725762
 [85] 10.628523 10.824474 13.389953 10.077884  9.185360 13.697777
 [91] 10.116078 13.036067 14.412094 12.175099  7.835201 16.277825
 [97] 10.967441 10.892966 11.668289  9.340267 15.392018 13.323701
[103]  9.928631 14.378075 10.924935 11.448320 11.836161 13.397990
[109] 13.744963 14.083459 10.668370  9.139692 14.716621 15.173684
[115] 10.493444 14.308470 15.295041 13.748886 14.074436 12.261138
```

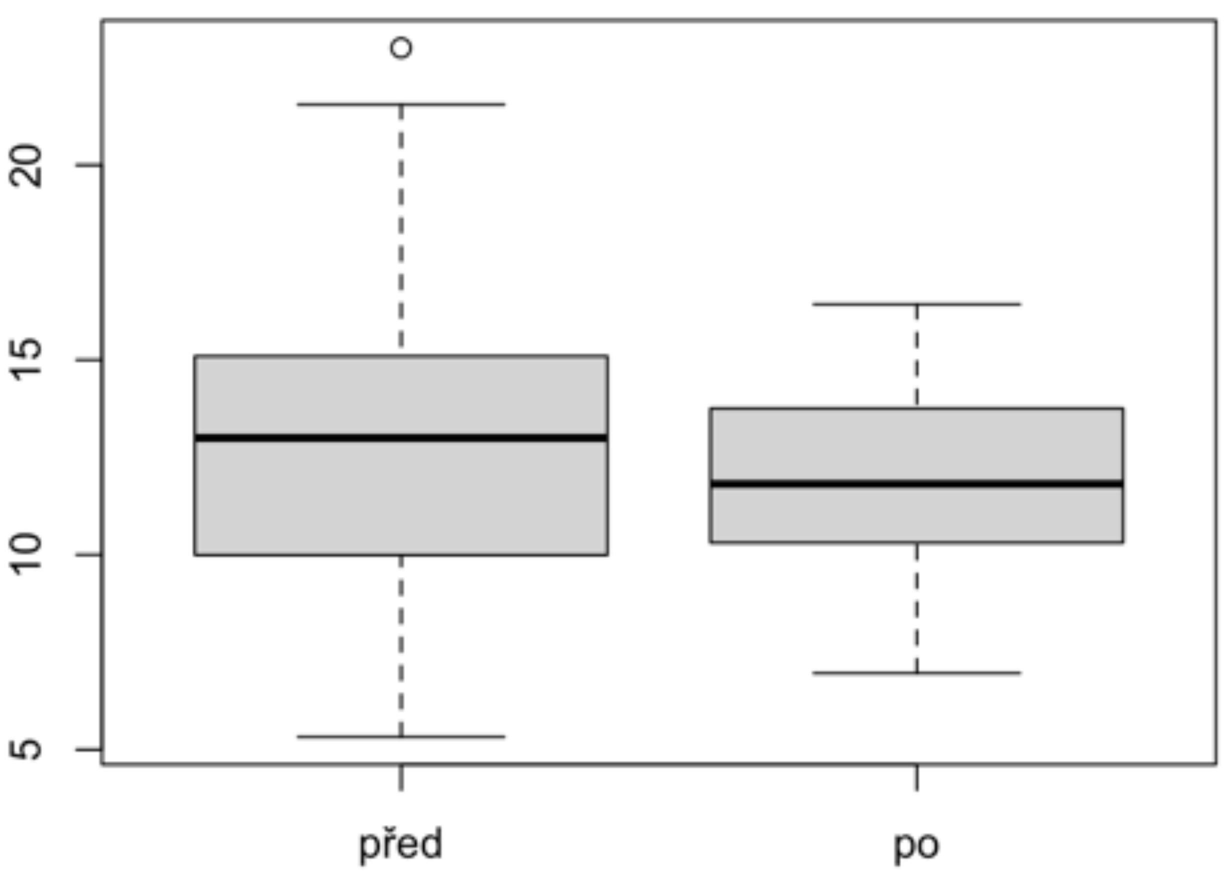
Srovnání dvou náhodných veličin

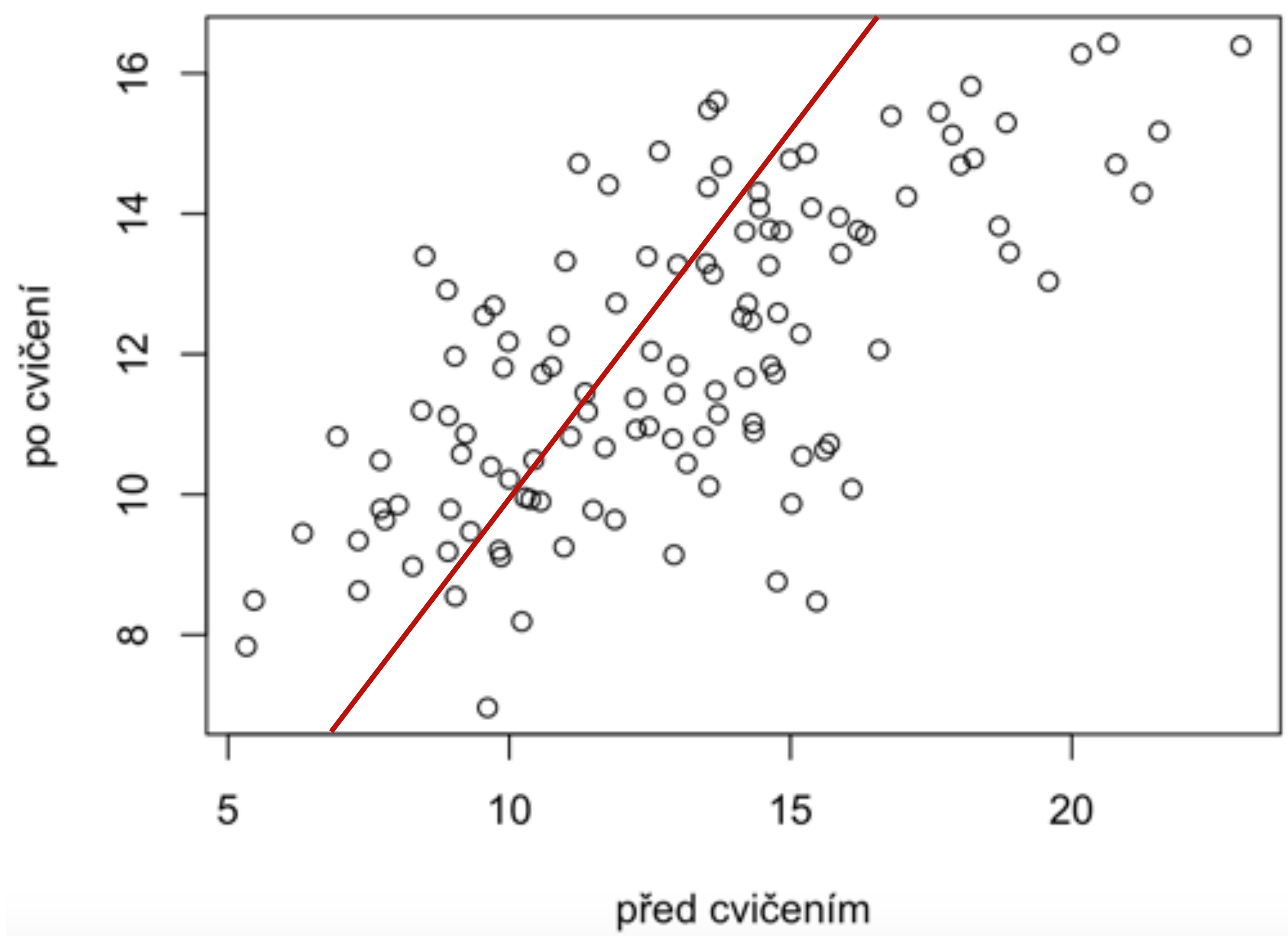
Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

```
> cviceni<- data.frame(x, y, x-y)
```

2) Grafické zobrazení

```
> plot(cviceni[,1], cviceni[,2], xlab="před cvičením", ylab="po cvičení")
> lines(c(6:18), c(6:18), col="red")
> boxplot(cviceni[,1],cviceni[,2])
```



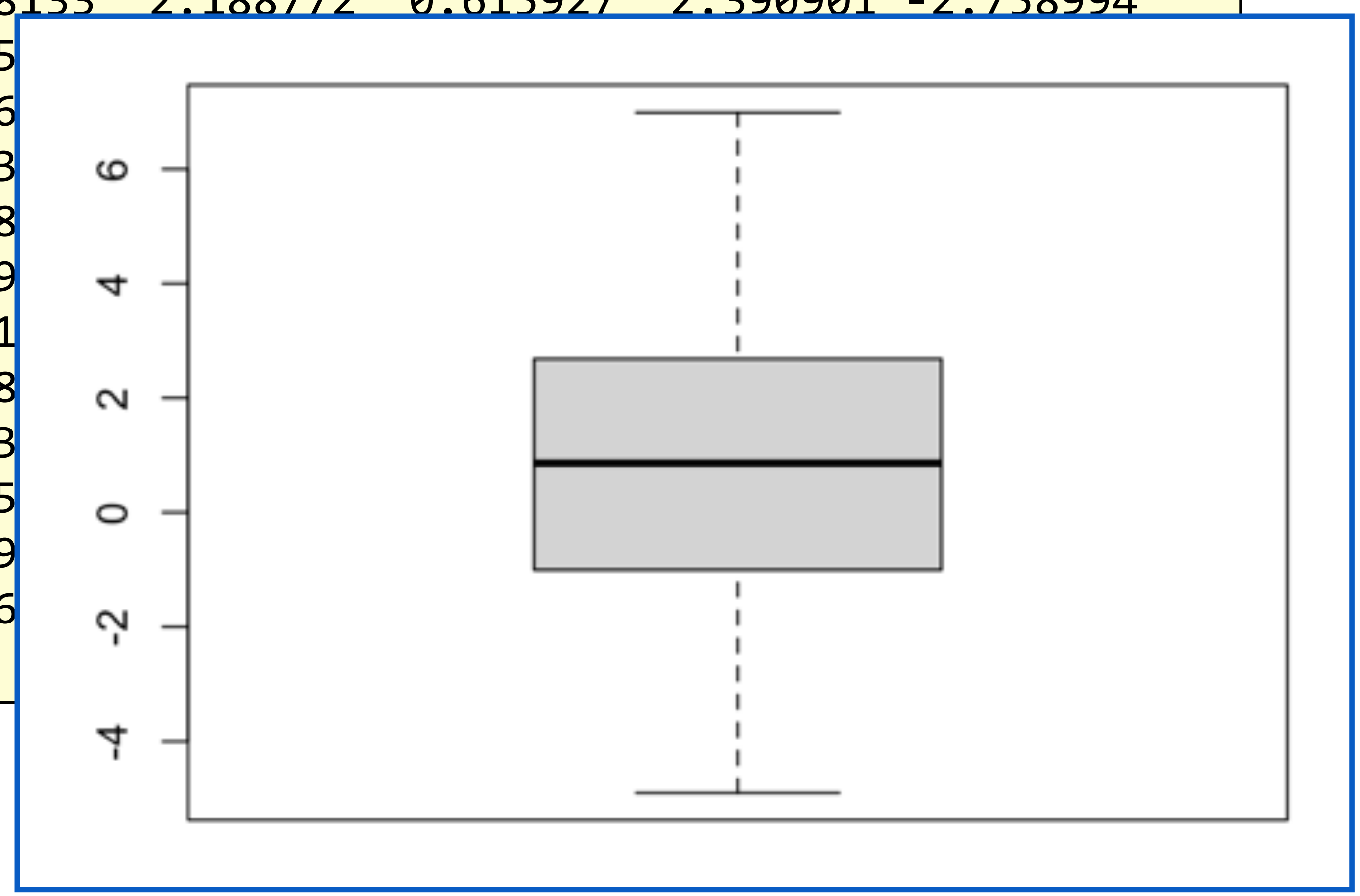


Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

3) Rozdíl:

```
> cviceni[,3]
  [1] -2.223001 -1.304823  5.154251  0.475745  1.721590 -3.026323 -0.217654
  [8]  4.969361 -0.898006  2.821366 -3.886197  1.909228  3.325947 -3.123031
 [15]  4.221875  6.612680  1.353696  6.082114  1.520118 -0.721048  6.006894
 [22]  2.652270 -2.961171 -1.432050  6.952896  2.437096  6.993741 -1.913374
 [29] -2.936823  0.661108  3.470691  0.219038  2.999233 -1.139622 -1.066044
 [36] -4.020186  0.210494 -0.278133  2.188772  0.615927  2.390901 -2.758994
 [43] -0.691591  0.266450  2.885
 [50]  4.510066  5.442456 -1.936
 [57]  0.494108  2.033358  1.603
 [64]  0.208384 -2.074414  1.838
 [71]  2.716901  3.321174 -2.999
 [78]  2.188111  0.744171  2.751
 [85]  4.976839  2.639712 -0.938
 [92]  6.550508 -2.647074 -2.193
 [99]  2.529940 -2.025255  1.395
[106] -0.102258  1.161859 -4.899
[113] -3.484147  6.378183 -0.056
[120] -1.381456
```



> boxplot(cviceni[,3])

Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

4) Párový t-test:

```
> t.test(cviceni[,3], mu=0)

	One Sample t-test

data:  cviceni[, 3]
t = 4.0391, df = 119, p-value = 9.541e-05
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.5089508 1.4878397
sample estimates:
mean of x
0.9983952
```

=> nulovou hypotézu zamítáme, cvičení mělo vliv a rychlost reakce se statisticky významně zvýšila

Srovnání dvou náhodných veličin

a) **dvě nezávislá měření**
b) **párová měření**

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad Y : Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$$

$$\cancel{X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)}$$

Neparametrické testy pro srovnání dvou souborů dat

- jsou založeny na **pořadových statistikách:**

1)Dvouvýběrový Wilcoxonův test

2)Párový (jednovýběrový) Wilcoxonův test
3)Znaménkový test

Srovnání dvou náhodných veličin

Dvouvýběrový Wilcoxonův test $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$

- Sloučíme všechna měření v jeden soubor: $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$
- Uspořádáme jej podle velikosti a potom určíme:
  - R_k^X= pořadí k-tého pozorování X ve spojeném souboru
  - R_l^Y = pořadí l-tého pozorování Y ve spojeném souboru
  - R^X = součet všech R_k^X pro k=1, …, n a R^Y= součet všech R_l^Y pro l=1, …, m

Pro malá n, m (do 30) porovnáváme přímo jednu z hodnot buď R^X nebo R^Y s kritickými hodnotami pro dvouvýběrový Wilcoxonův test (viz např. https://is.muni.cz/th/r5oe7/Bakalarska_prace.pdf), pro velké hodnoty n a m (nad 30) lze jako testovou statistiku použít

$$W = \frac{R^X - E(R^X)}{\sqrt{var(R^X)}}$$

kde $E(R^X) = \frac{n(m+n+1)}{2}, \quad var(R^X) = \frac{mn(m+n+1)}{12}$

Tato statistika má přibližně N(0,1) rozdělení.

Srovnání dvou náhodných veličin

Dvouvýběrový Wilcoxonův test $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

```
> x <- data.matrix(read.table("dodavatelX.txt"))
> y <- data.matrix(read.table("dodavatelY.txt"))
> wilcox.test(x, y, alternative = „two.sided")
```

```
	Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  x and y
W = 6488, p-value = 0.2997
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Srovnání dvou náhodných veličin

Dvouvýběrový Wilcoxonův test $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

```
> x <- data.matrix(read.table("dodavatelX.txt"))
> y <- data.matrix(read.table("dodavatelY.txt"))
> wilcox.test(x, y, alternative = „two.sided"), mu = 0, paired = FALSE,
    exact = NULL, correct = TRUE, conf.int = FALSE, conf.level = 0.95)

	Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  x and y
W = 6488, p-value = 0.2997
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Srovnání dvou náhodných veličin

Párový Wilcoxonův test $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$

- Spočítáme rozdíly $(X_1\text{-}Y_1)$, $(X_2\text{-}Y_2)$, ..., $(X_n\text{-}Y_n)$ a vyloučíme nulové rozdíly
- Uspořádáme je podle velikosti absolutních hodnot a potom určíme:
  - R_k^+= pořadí k-tého kladného rozdílu, R_l^- = pořadí l-tého záporného rozdílu
  - R^+ = součet všech R_k^+ a R^-= součet všech R_l^-

Pro malá n, m (do 30) porovnáváme přímo jednu z hodnot buď R^+ nebo R^- s kritickými hodnotami pro jednovýběrový Wilcoxonův test (viz např. https://is.muni.cz/th/r5oe7/Bakalarska_prace.pdf), pro velké hodnoty n a m (nad 30) lze jako testovou statistiku použít

$$V = \frac{R^+ - E(R^+)}{\sqrt{var(R^+)}}$$

kde $E(R^+) = \frac{n^*(n^*+1)}{4}$, $var(R^+) = \frac{n^*(n^*+1)(2n^*+1)}{24}$ a n* je počet nenulových rozdílú. Tato statistika má přibližně N(0,1) rozdělení.

Srovnání dvou náhodných veličin

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

```
> x <- data.matrix(read.table("pred_cvicenim.txt"))
> y <- data.matrix(read.table("po_cviceni.txt"))
> wilcox.test(x, y, alternative = "two.sided", mu = 0, paired = TRUE,
       correct = TRUE, conf.level = 0.95)

   Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  x and y
V = 4973, p-value = 0.0004384
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

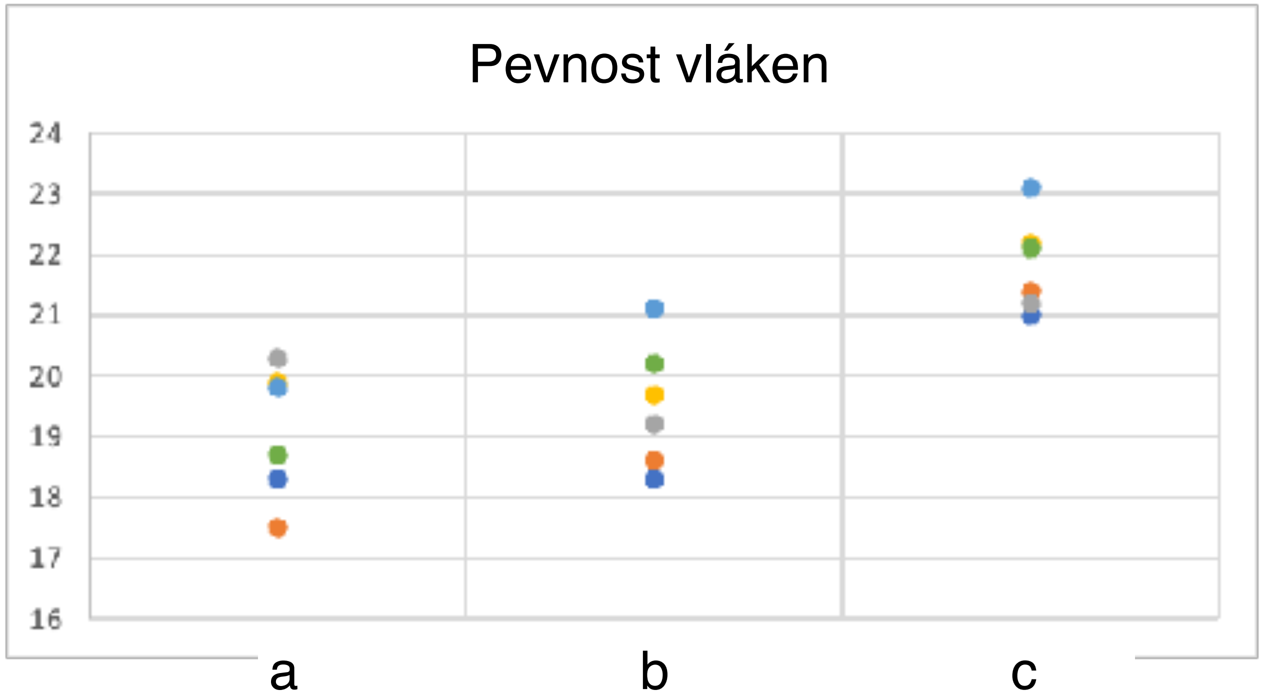
Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu (y).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu: $$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

Odezva : pevnost vlákna v tahu
Faktor : výrobce, 3 hodnoty (a,b,c)
Replikace : 6 vzorků od každého výrobce
Počet měření: 3x6 = 18

$$X_1^1, X_2^1, \ldots, X_{n_1}^1, \quad X_1^2, X_2^2, \ldots, X_{n_2}^2, \quad X_1^3, X_2^3, \ldots, X_{n_3}^3,$$



Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu (y).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$

Odezva : pevnost vlákna v tahu
Faktor : výrobce, 3 hodnoty (a,b,c)
Replikace : 6 vzorků od každého výrobce
Počet měření: 3x6 = 18

$$X_1^1, X_2^1, \ldots, X_{n_1}^1, \quad X_1^2, X_2^2, \ldots, X_{n_2}^2, \quad X_1^3, X_2^3, \ldots, X_{n_3}^3,$$

nulová hypotéza H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

alternativní hypotéza H_A: $\mu_i \neq \mu_j$ pro některou dvojici i,j (oboustranná)

hladina významnosti $\alpha = 5\%$

Jedna z možností je provést k(k-1)/2 porovnání pomocí dvouvýběrových testů.
ALE: tím se výrazně zvýší hladina významnosti.

Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu (y).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$

	hladina významnosti v *t*-testu					
počet porovnávání k	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
2	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
3	0,41	0,23	0,13	0,05	0,03	0,003
4	0,58	0,36	0,21	0,09	0,05	0,006
5	0,71	0,47	0,23	0,13	0,07	0,009
10	0,96	0,83	0,63	0,37	0,23	0,034
20	1,00	0,98	0,92	0,71	0,52	0,109
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,000

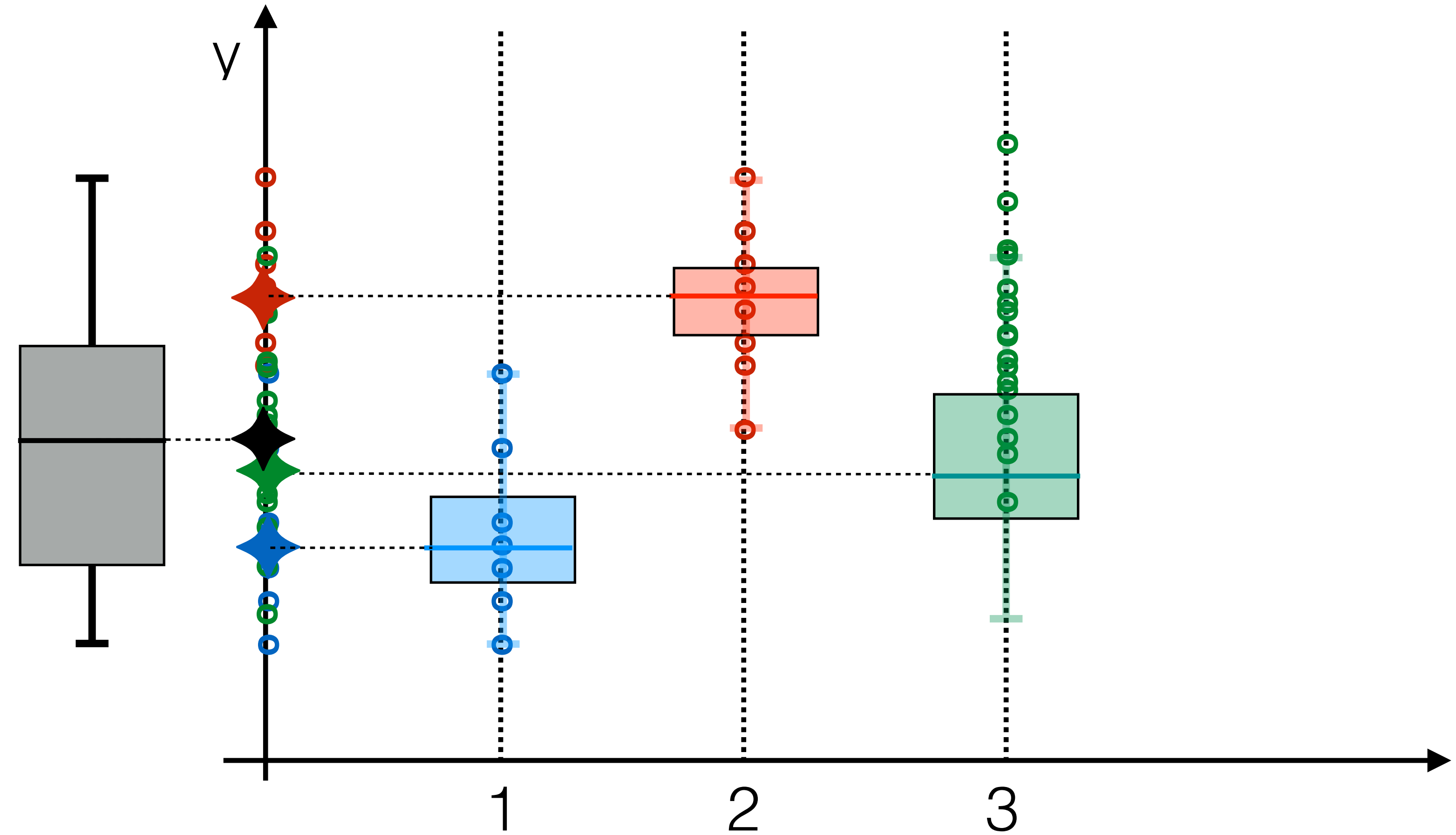
Jedna z možností je provést k(k-1)/2 porovnání pomocí dvouvýběrových testů.

ALE: tím se výrazně zvýší hladina významnosti.

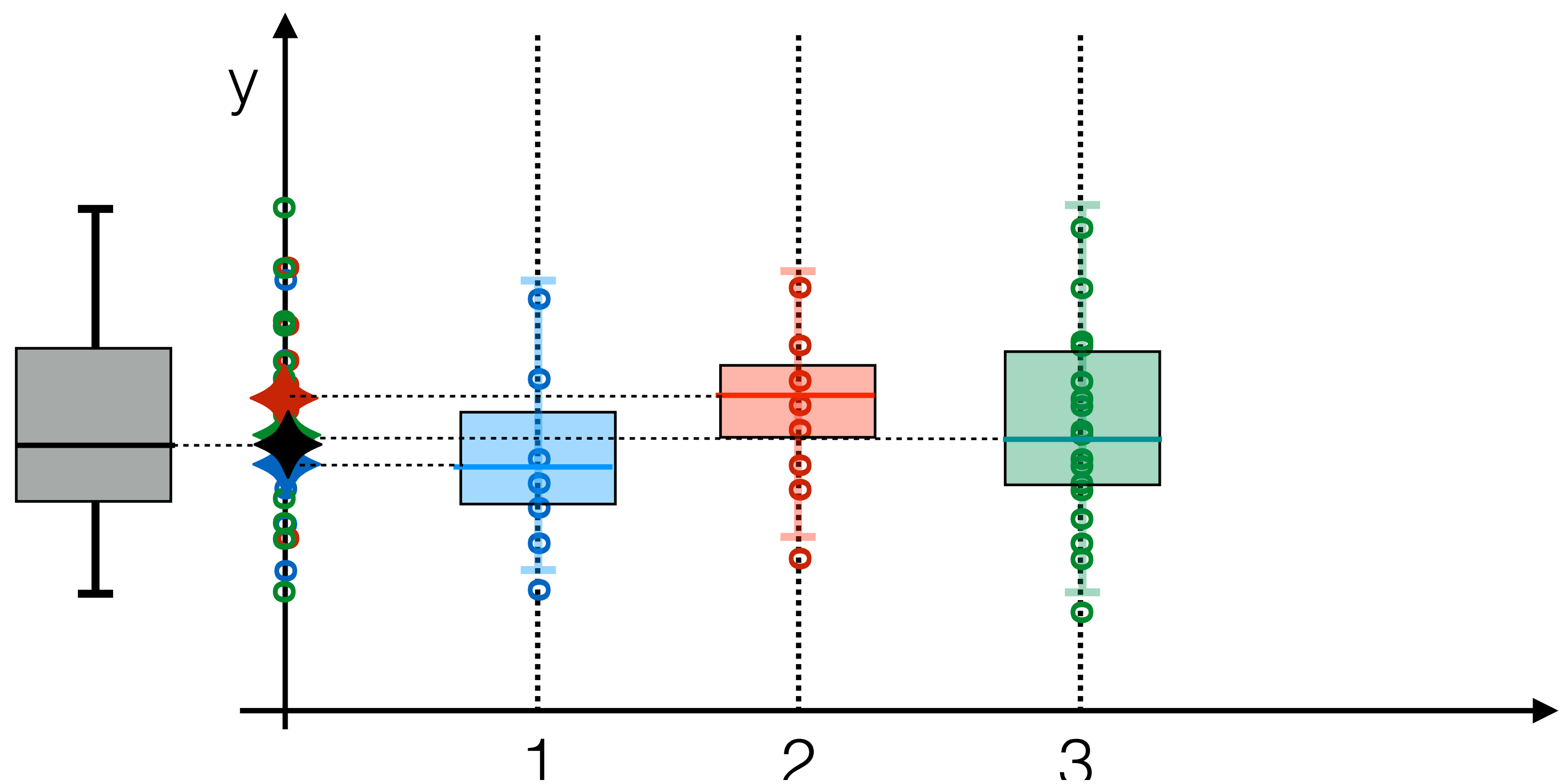
Tedy je třeba provádět tzv. simultánní test.

Srovnání tří a více náhodných veličin

Situace 1:
Rozptyl mezi skupinami je **velký** vzhledem k součtu rozptylů uvnitř skupin => střední hodnoty **jsou různé** => nulovou hypotézu **zamítáme**



Situace 2:
Rozptyl mezi skupinami je **malý** vzhledem k součtu rozptylů uvnitř skupin => střední hodnoty lze považovat **za nerozlišitelné** => nulovou hypotézu **nelze zamítnout**



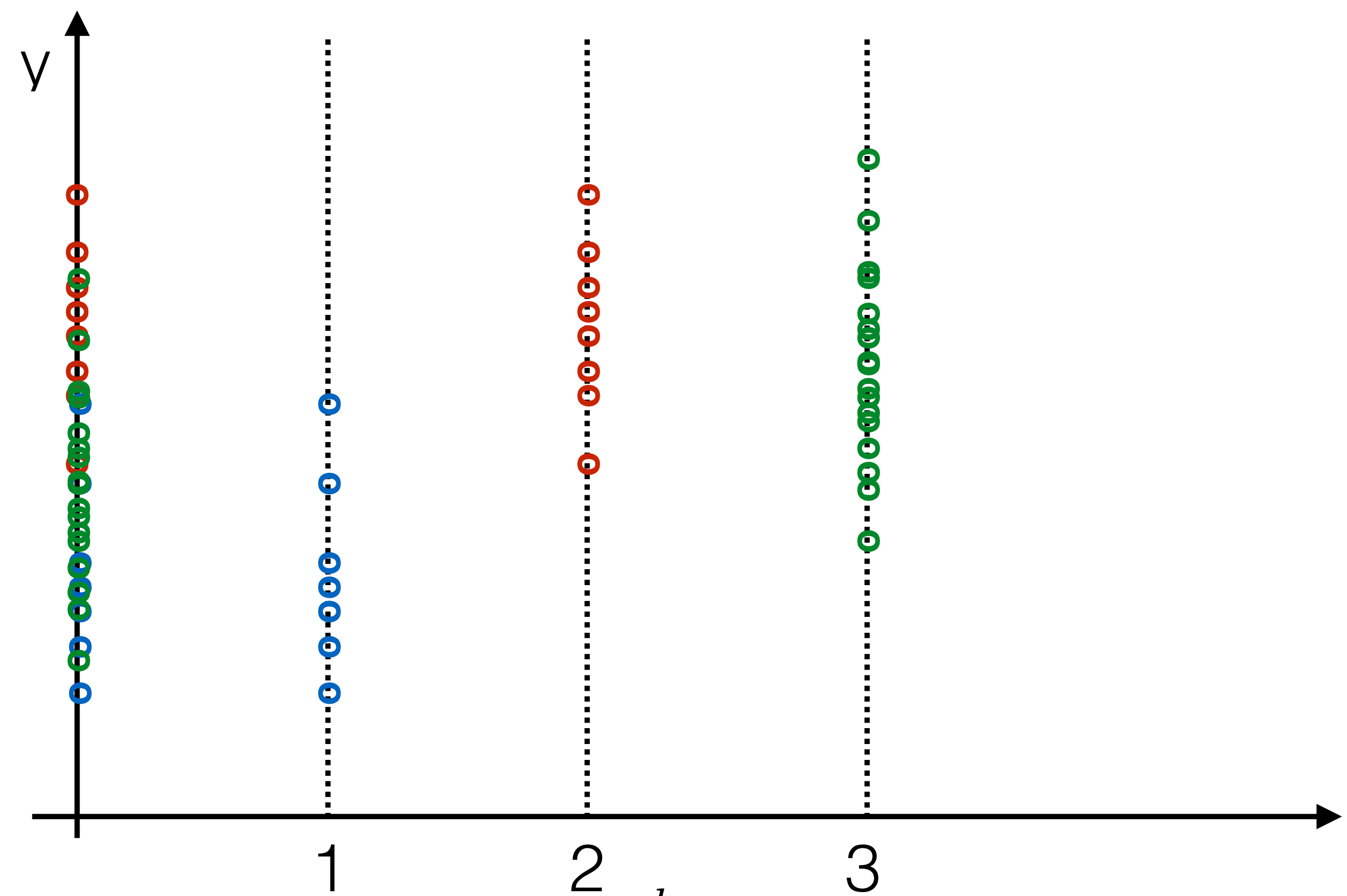
Metoda ANOVA

ANalysis Of VAriance = ANOVA

pro 1 faktor = všechna data roz-dělíme do skupin podle jednoho hlediska (úrovní jednoho faktoru)

k úrovní = k skupin

v každé skupině n měření



1) celkový průměr všech naměřených hodnot: $$\bar{y} = \frac{1}{n.k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$$

2) průměry v jednotlivých skupinách: $$\bar{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$$

3) celkový součet čtvercových odchylek: $$SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y})^2$$

4) součet čtvercových odchylek uvnitř skupin $$SS_E = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

5) součet čtvercových odchylek mezi skupinami $$SS_F = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

Metoda ANOVA

Tabulka analýzy rozptylu:

Zdroj variability	Stupně volnosti	Součet čtverců	Průměrný čtverec	Testová statistika	p-hodnota
faktor (mezi skupinami)	k-1	SS_F	$MS_F = \frac{SS_F}{k-1}$	$F = \frac{MS_F}{MS_E}$	
rezidua (uvnitř skupin)	$k(n$-1)	SS_E	$MS_E = \frac{SS_E}{k(n-1)}$		
celkový	kn-1	SS_T			

testová statistika $F = \frac{\frac{SS_F}{k-1}}{\frac{SS_E}{k(n-1)}} = \frac{MS_F}{MS_E}$ má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení o (k-1) a $k(n$-1) stupních volnosti

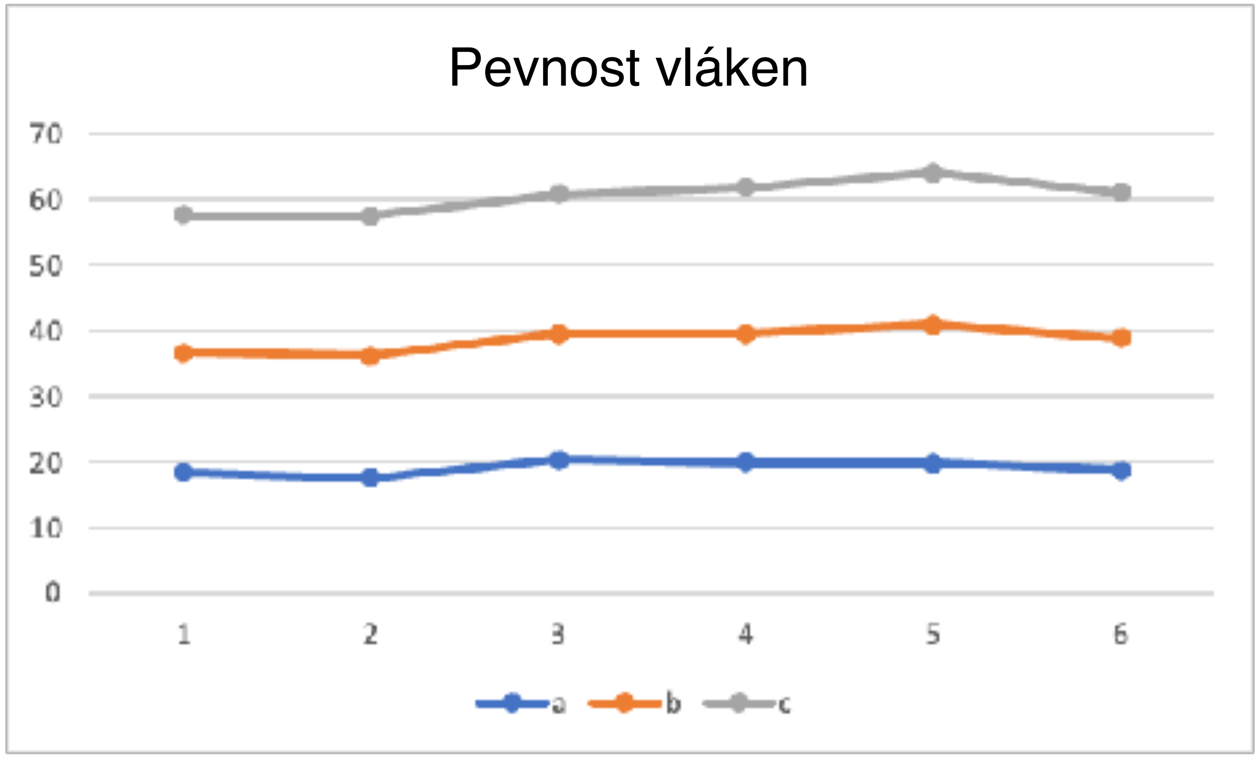
Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu (y).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu: $$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

Odezva : pevnost vlákna v tahu
Faktor : výrobce, 3 hodnoty (a,b,c)
Replikace : 6 vzorků od každého výrobce
Počet měření: 3x6 = 18

	A	B	C
1	a	b	c
2	18,3	18,3	21
3	17,5	18,6	21,4
4	20,3	19,2	21,2
5	19,9	19,7	22,2
6	19,8	21,1	23,1
7	18,7	20,2	22,1



Metoda ANOVA

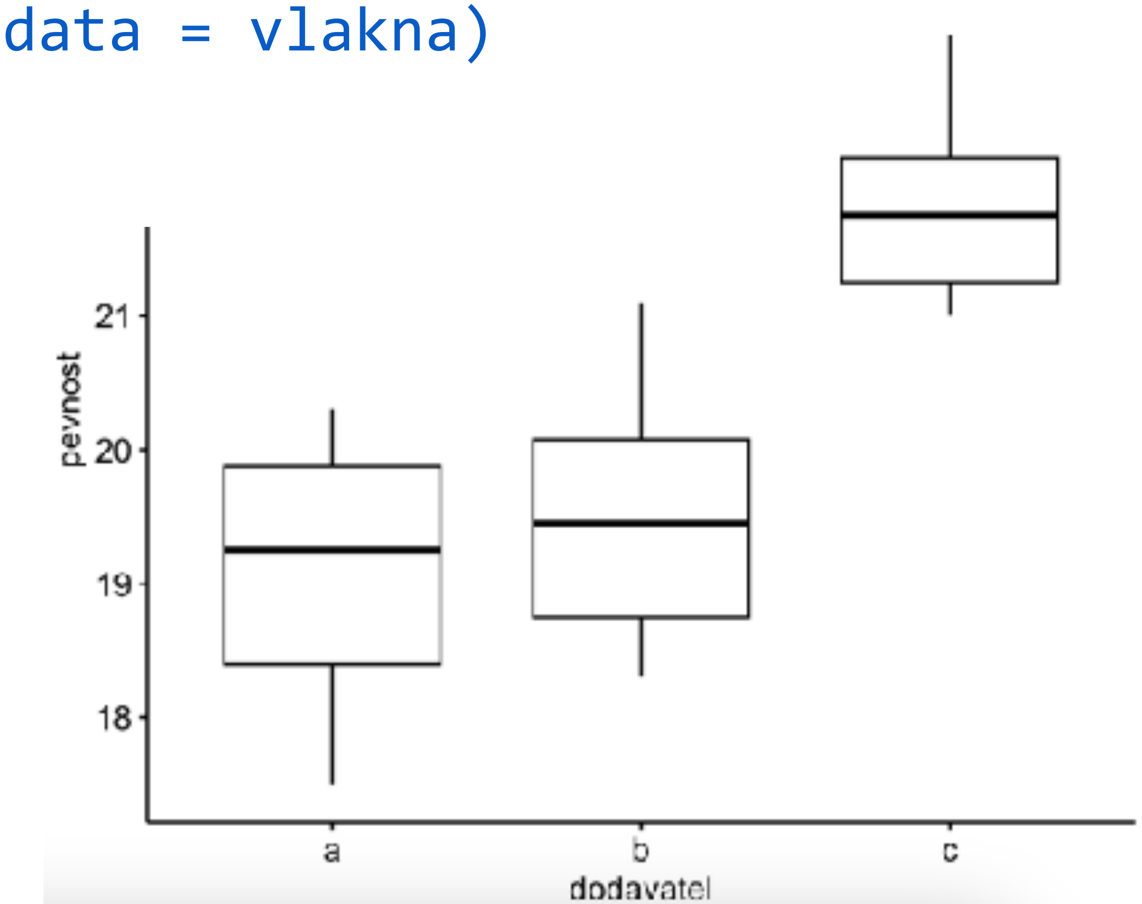
Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	a	b	c								
2	18,3	18,3	21		Anova: Single Factor						
3	17,5	18,6	21,4								
4	20,3	19,2	21,2		SUMMARY						
5	19,9	19,7	22,2		*Groups*	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*		
6	19,8	21,1	23,1		a	6	114,5	19,0833333	1,18566667		
7	18,7	20,2	22,1		b	6	117,1	19,5166667	1,08566667		
8					c	6	131	21,8333333	0,61866667		
9											
10											
11					ANOVA						
12					*Source of Variat.*	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
13					Between Gr	26,2344444	2	13,1172222	13,6164937	0,00042491	3,68232034
14					Within Grou	14,45	15	0,96333333			
15											
16					Total	40,6844444	17				
17											
18											

Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

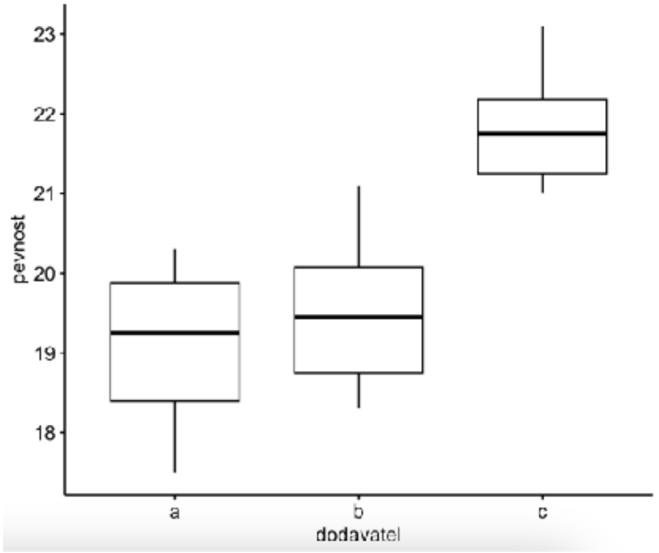
```
> vlakna<- data.frame(read.table("pevnost_vlaken.txt", header=T))
> library(ggplot2)
> ggboxplot(vlakna, x="dodavatel", y=„pevnost")
> anadat<- aov(pevnost~dodavatel, data = vlakna)
```



Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

```
> vlakna<- data.frame(read.table("pevnost_vlaken.txt", header=T))
> library(ggplot2)
> ggboxplot(vlakna, x="dodavatel", y=„pevnost")
> anadat<- aov(pevnost~dodavatel, data = vlakna)
> summary(anadat)
```




```
             Df  Sum Sq  Mean Sq  F value    Pr(>F)
dodavatel     2   26.23   13.117    13.62  0.000425 ***
Residuals    15   14.45    0.963
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

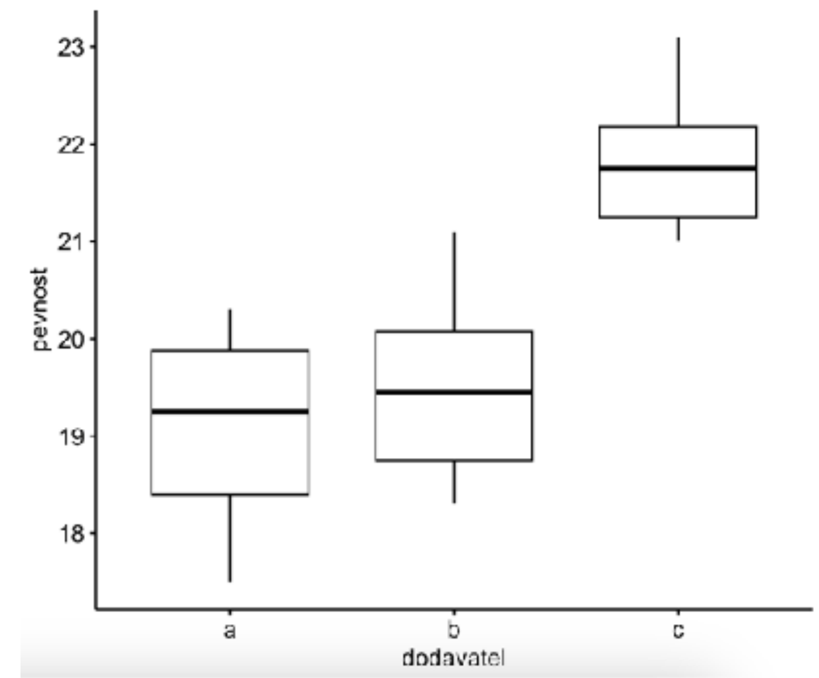
Závěr: nulovou hypotézu zamítáme. Pevnost vláken různých dodavatelů se statisticky významně liší.

Jak se liší dodavatelé mezi sebou?

Pokud zamítneme nulovou hypotézu v ANOVA, měli bychom provést tzv. Mnohonásobné porovnání

Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.



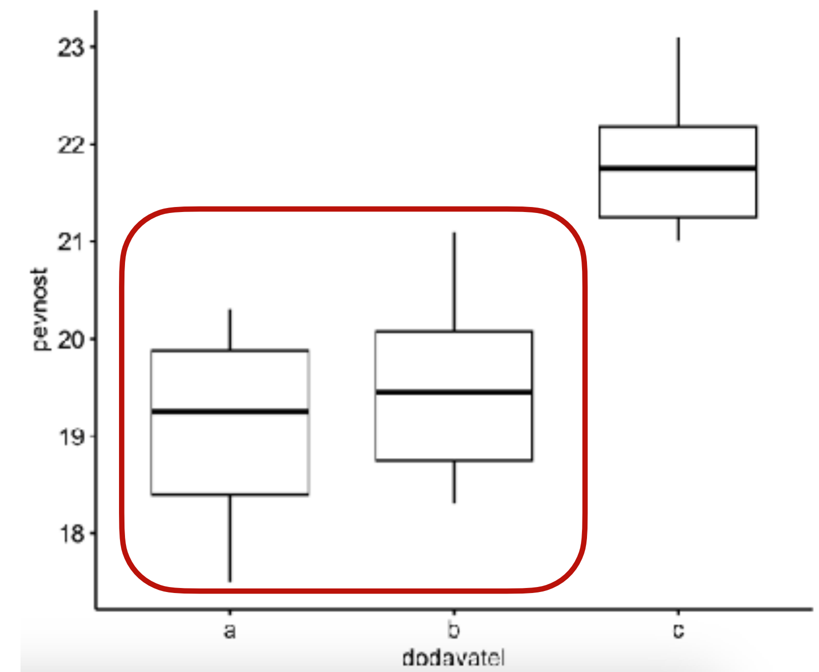
Metody mnohonásobného srovnávání:

- Tukeyova metoda
- Scheffého metoda
- Bonferroniho metoda
- Duncanova metoda
- …

$$T = \frac{|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j|}{S*}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \; i \neq j$$

Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.



Metody mnohonásobného srovnávání:

- Tukeyova metoda

```
> srovnani.vlakna<-TukeyHSD(anadat)
> srovnani.vlakna
```

```
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = pevnost ~ dodavatel, data = vlakna)

$dodavatel
         diff        lwr      upr     p adj
b-a 0.4333333 -1.0385665 1.905233 0.7296030
c-a 2.7500000  1.2781002 4.221900 0.0005817
c-b 2.3166667  0.8447669 3.788566 0.0026211
```

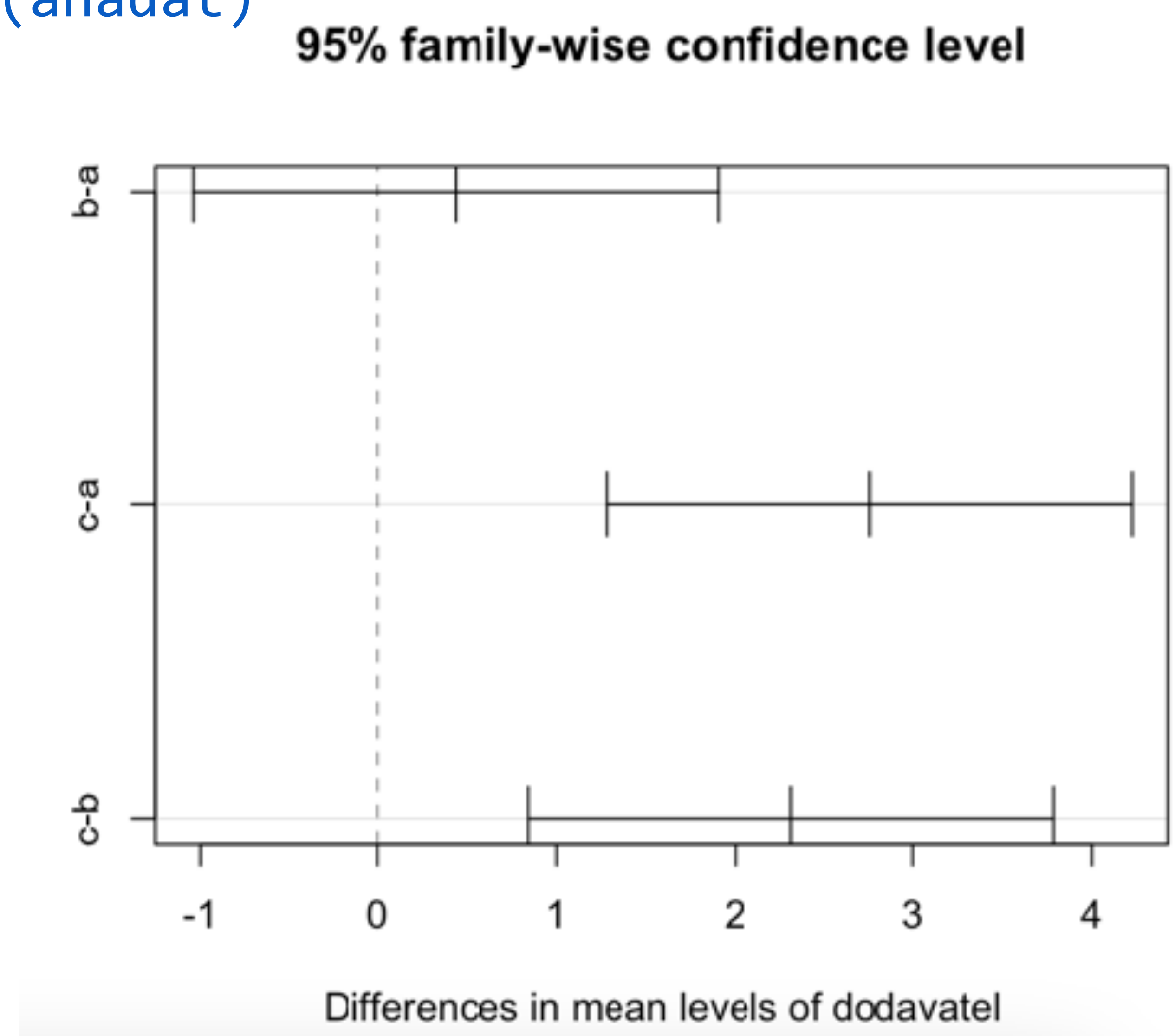
Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

Metody mnohonásobného srovnávání:

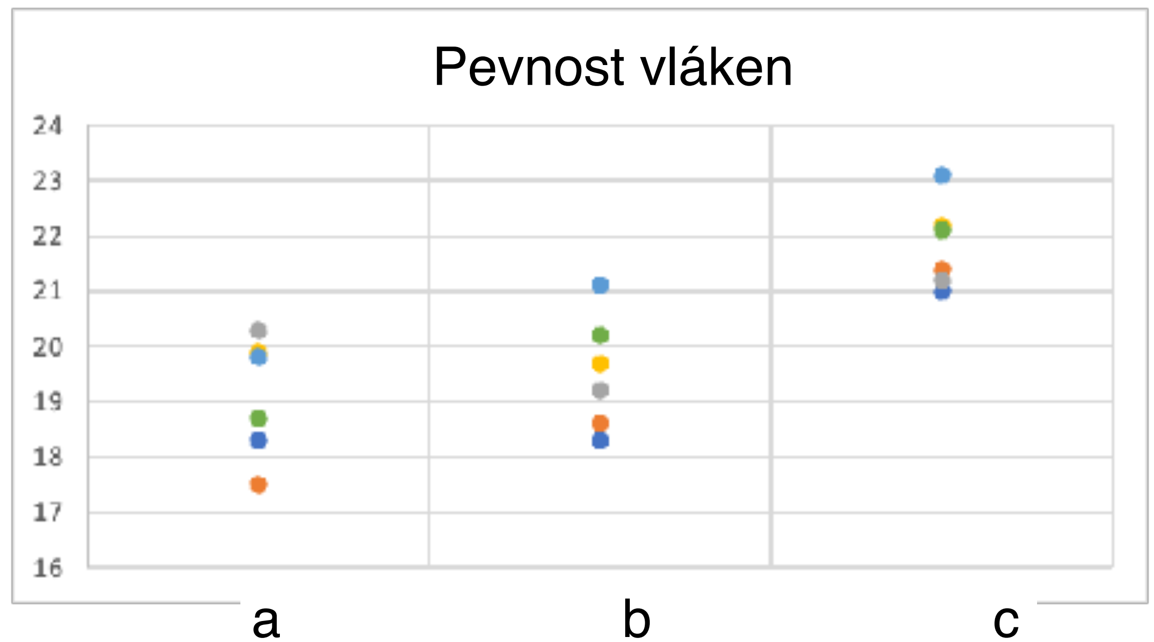
- Tukeyova metoda

```
> srovnani.vlakna<-TukeyHSD(anadat)
> srovnani.vlakna
> plot(srovnani.vlakna)
```



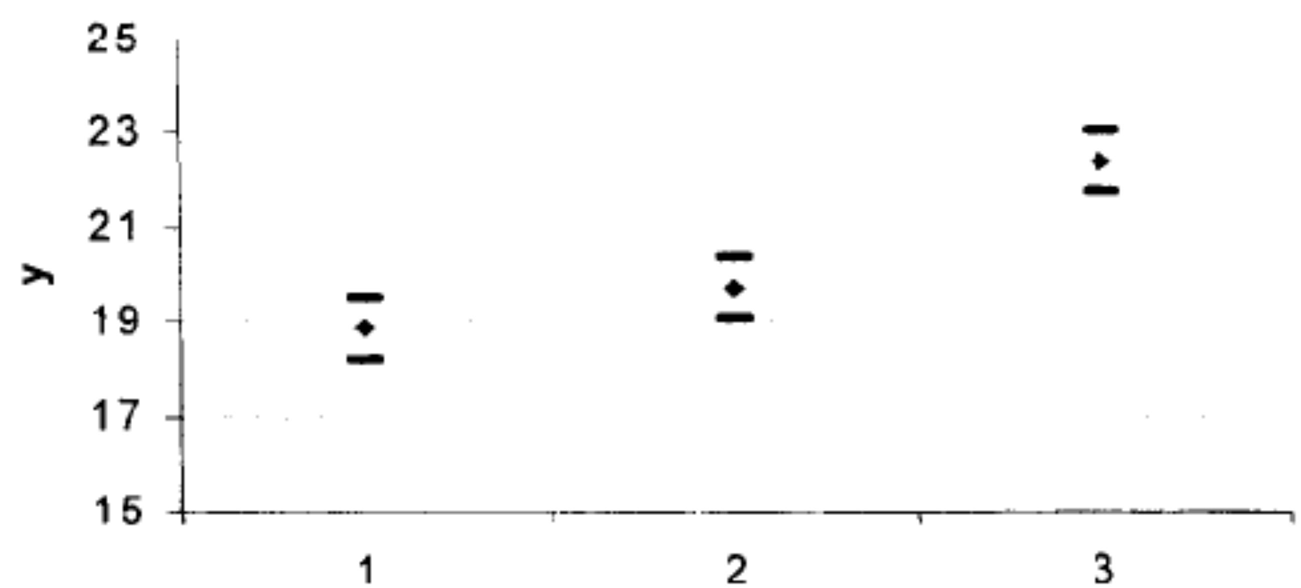
Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.



Bonferroniho metoda mnohonásobného srovnání úrovní faktorů: $\bar{y}_i \pm t_{1-\alpha/2p} \cdot \sqrt{\frac{MS_E}{2 \cdot a}}$

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A_1	18,867	18,217	19,516
A_2	19,700	19,051	20,349
A_3	22,383	21,734	23,033



=> dodavatele 1 a 2 nelze statisticky odlišit, dodavatel 3 je významně lepší (jeho vlákna dosahují statisticky významně vyšší pevnosti než od dodavatelů 1 a 2)

Metoda ANOVA

Ověření podmínek pro použití ANOVA

- Reprezentativnost výběru, náhodnost
- Nezávislost pozorování
- Normalita dat
- Stejné rozptyly (homoskedasticita)

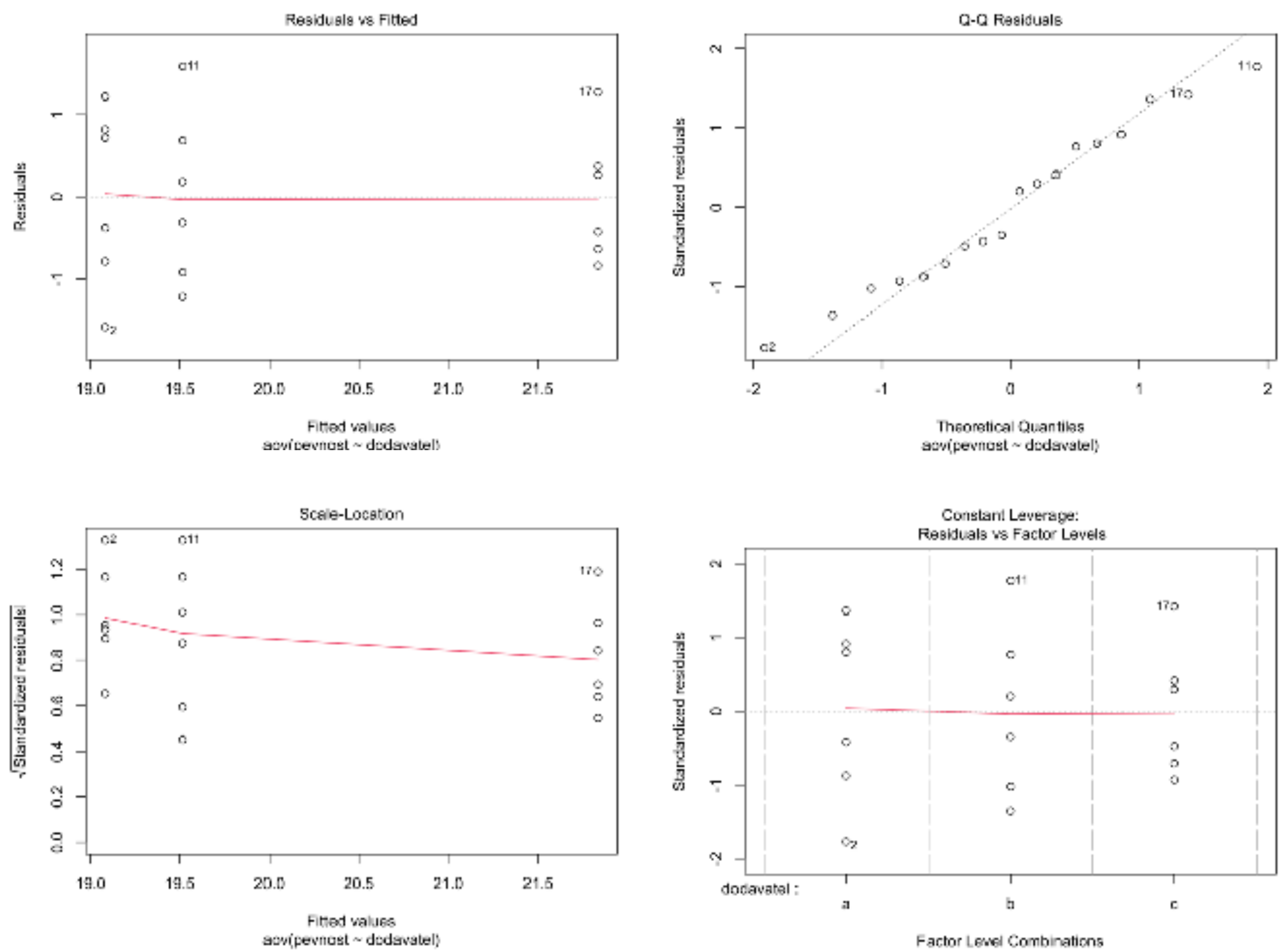
https://is.muni.cz/th/151390/prif_m/diplomova_prace_ed.pdf

Metoda ANOVA

Ověření podmínek pro použití ANOVA - analýza reziduí

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

```
> plot(anadat)
```



Metoda ANOVA - ověření podmínek

Nezávislost měření

Co se stane, když jsou data závislá?

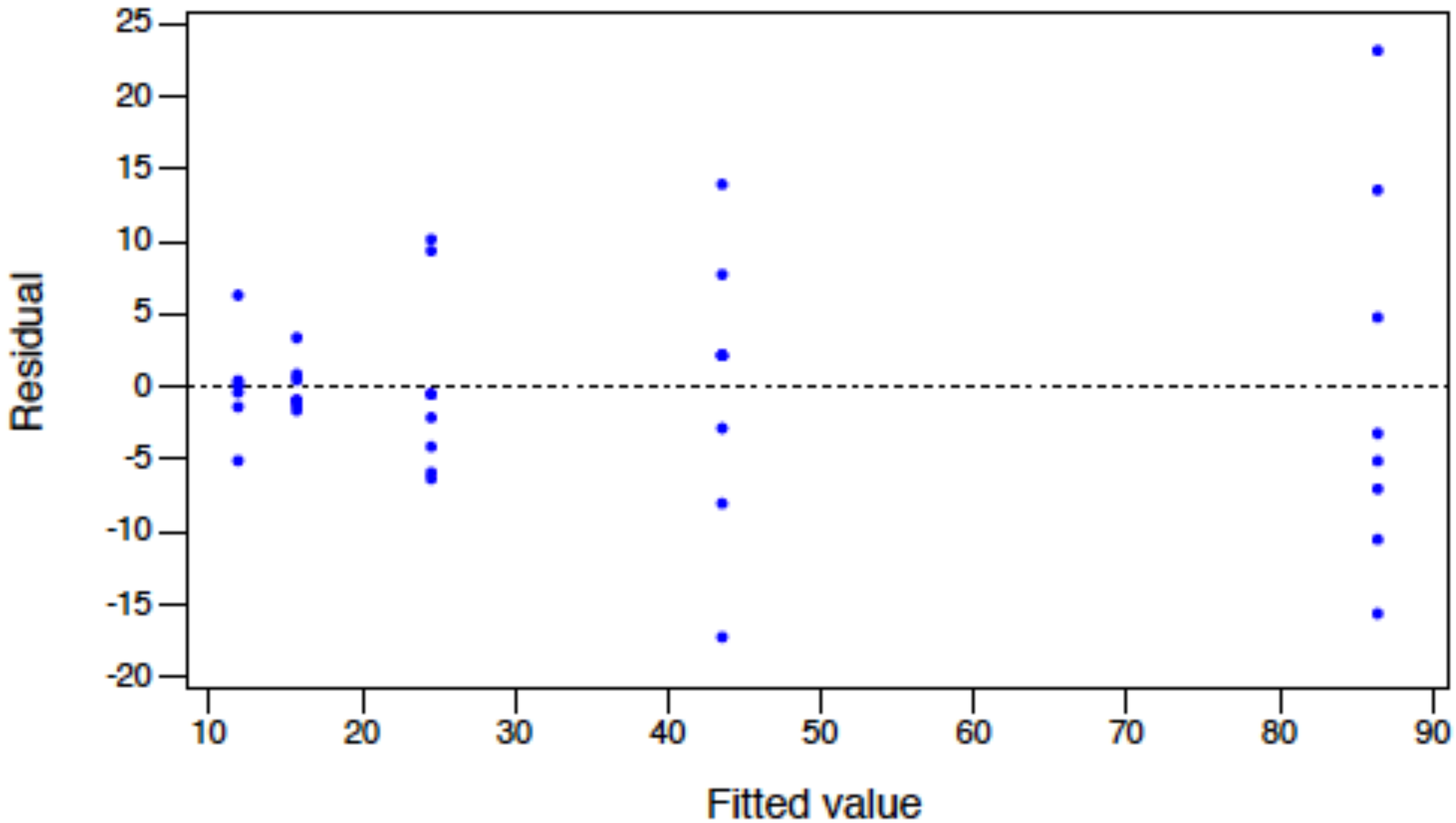
- Největší změnou je to, že rozptyly průměrů se stávají vychýlené (velikost vychýlení závisí na typu závislosti). To způsobí vychýlenost odhadů pro jednotlivé skupiny a pro efekty faktorů a jejich interakcí.
- Vliv randomizace může být na závislých datech různý účinek. Na stejných datech může jedno znáhodnění pořadí zvýšit pravděpodobnost chyby I. druhu, jiné naopak snížit.
- Náhodné seřazení kombinací v blocích také nepomůže, pokud není znáhodněno pořadí měření.

Jak se vypořádat se závislostí dat?

- Použít analýzu časových řad ke zjištění trendu a případné periodicity časové řady měření
- Pomocí autokorelační (parciální autokorelační) funkce zjistit závislosti v čase a určit ARMA model pro časovou řadu měření
- Na základě předchozích kroků provést "očištění" časové řady měření a dále pracovat pouze s rezidui, která by už měla být nezávislá

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Homoskedasticita (konstantní rozptyl)



- O'Brienův test
- Brown-Forsythův test
- Levenův test
- Bartlettův test

první tři jsou založeny na transformaci veličiny z_{ij} a použití ANOVA

vyžaduje předpoklad normality!

Jak lze nehomogenitu rozptylů odstranit?

V podstatě jediný způsob "napravení" nehomogenity rozptylů je transformace.
Alternativou je použití neparametrického testu (Kruskal-Wallis) namísto F-testu v ANOVA

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Homoskedasticita (konstantní rozptyl)

Grp 1	Grp 2	Grp 3	Grp 4	Grp 5	Grp 6
95	112				
123	107				
74	67				
145	98				
64	105				
84	95				
128	79				
79	.				
.	.				
.	.				
.	.				
.	.				

```
               Test for Homogeneity of Variances

   Number of Observations   =  40
   Number of Groups         =  6

   Group Statistics:
   Group       Median      Mean          Std.Dev      N
    1         89.5000    99.0000        29.3355       8
    2         98.0000    94.7143        16.2349       7
    3         96.0000   100.8333        17.7551      12
    4        106.0000   108.2857        10.8737       7
    5        115.0000   118.3333         8.5049       3
    6        134.0000   140.6667        28.5890       3

  The p-value for rejecting = .05
  Test                         F-Ratio   p-value
 Levene                         3.0079    0.0236     Reject H0
 Brown-Forsythe                 2.1035    0.0890     Accept H0
 O'Brien                        2.0498    0.0963     Accept H0
 Bartlett   Chi2 = 8.1337       1.6267    0.1490     Accept H0

 Bartlett's test is chi-square with df =  5
 All F tests are done with df =  5 and  34


 Welch 1 way ANOVA              2.4737    0.1120     Accept H0

 Here, the variances may be unequal. The df are 5, 10.112
```

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Homoskedasticita (konstantní rozptyl)

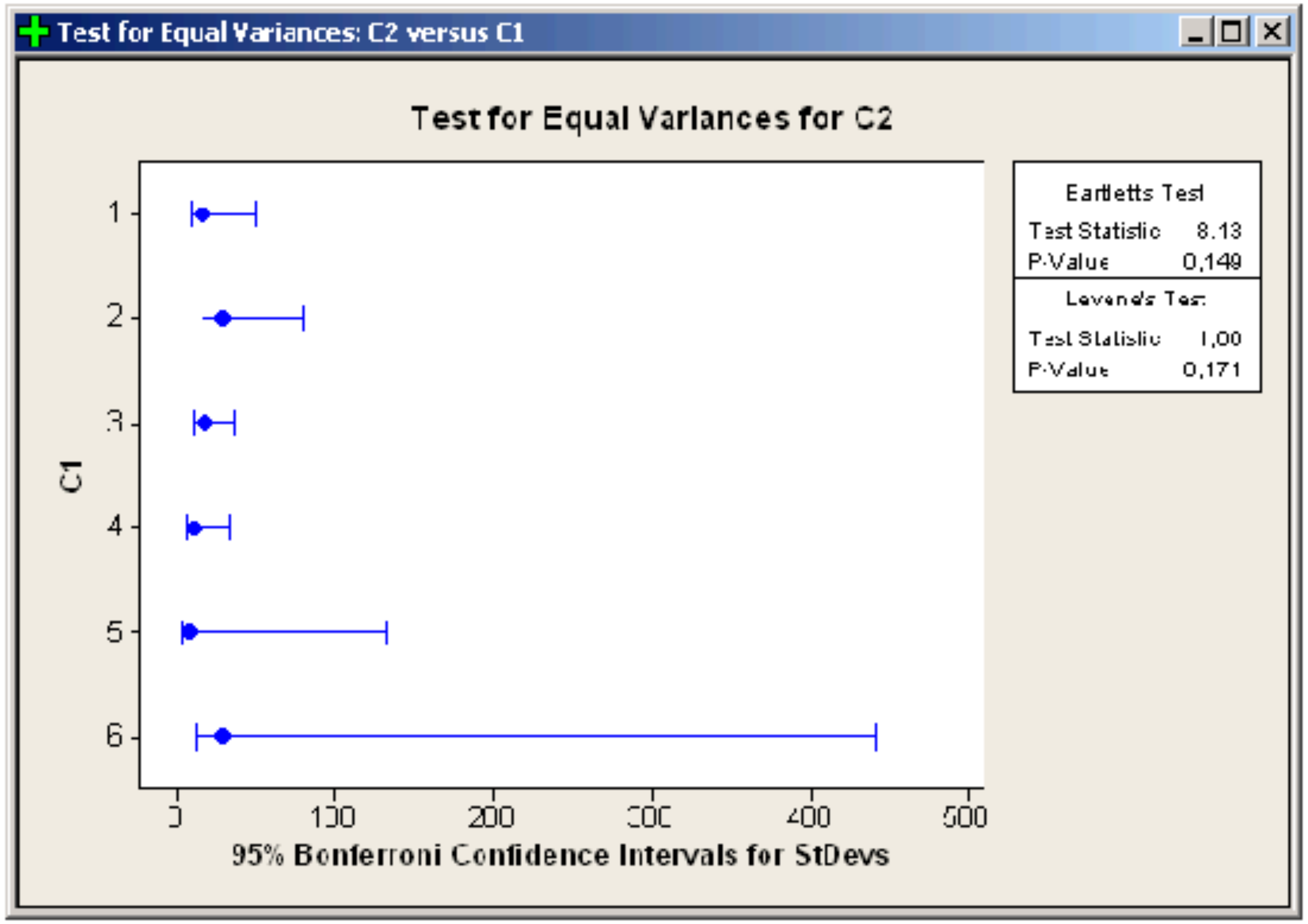
Test for Equal Variances: C2 versus C1

```
95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

C1   N     Lower     StDev     Upper
 1   7    9,1236   15,2349    50,002
 2   8   17,0400   29,3343    80,335
 3  12   11,2743   17,7551    37,252
 4   7    6,1108   10,8737    33,490
 5   3    3,6029    9,5049   131,620
 6   3   12,2119   23,5890   442,438


Bartlett's Test (normal distribution)
Test statistic = 8,13; p-value = 0,149


Levene's Test (any continuous distribution)
Test statistic = 1,66; p-value = 0,171
```



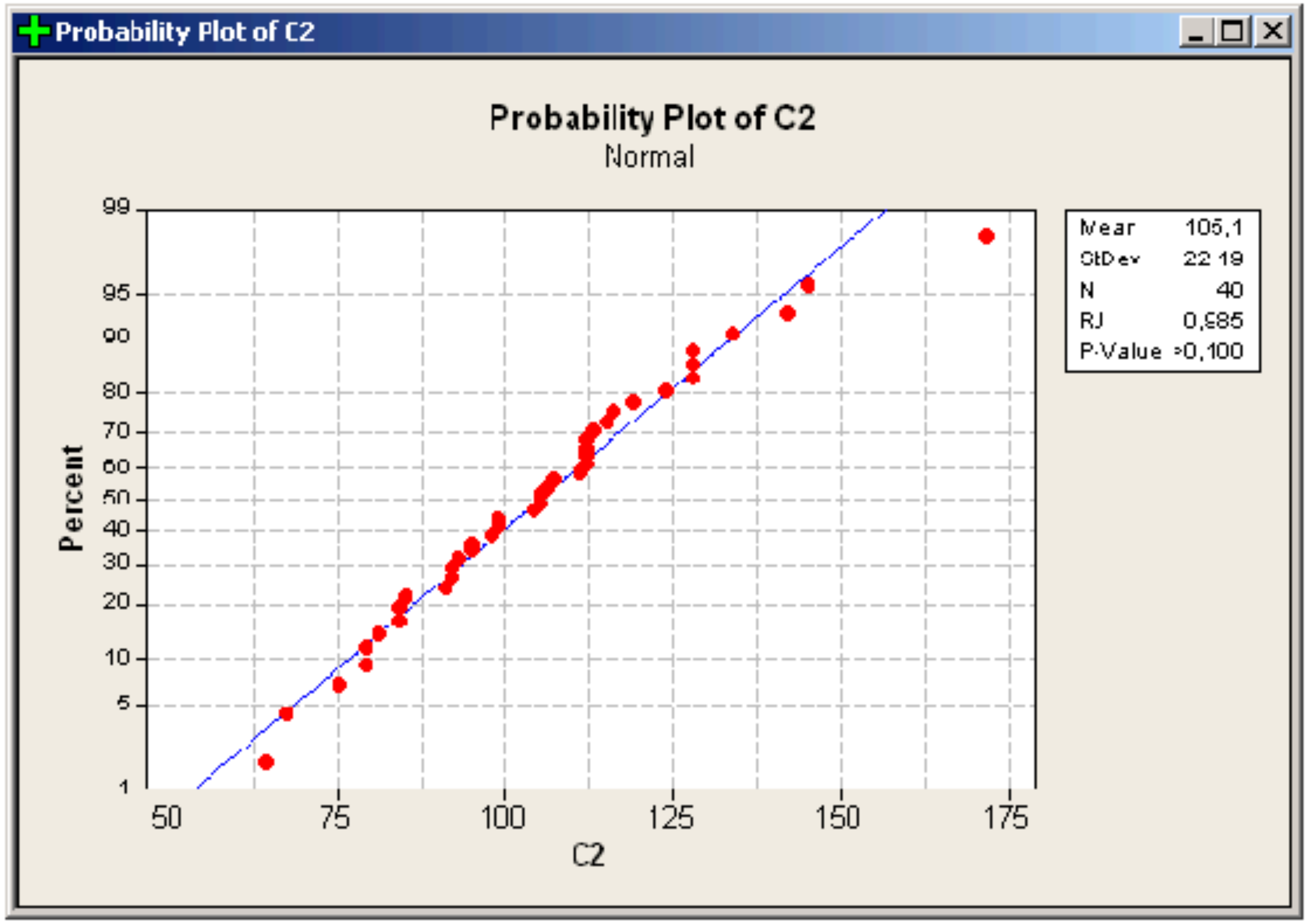
12	2	104
13	2	64
14	2	128
15	2	79
16	3	81
17	3	91
18	3	142
19	3	84
20	3	85
21	3	93
22	3	99
23	3	119
24	3	92

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Normalita reziduí

Testy normality:

- Chí-kvadrát test
- Anderson-Darling
- Shapiro-Wilk (Ryan-Joiner)
- Test normality založený na šikmosti a špičatosti



Metoda ANOVA - ověření podmínek

Normalita reziduí

Testy normality:

- Chí-kvadrát test
- Anderson-Darling
- Shapiro-Wilk (Ryan-Joiner)
- Test normality založený na šikmosti a špičatosti

výběrový koeficient šikmosti:

$$S_k = \frac{M_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2}\right)^3}$$

$$ES_k = 0$$

$$DS_k = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

výběrový koeficient špičatosti:

$$E_k = \frac{M_4}{s^4} - 3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2\right)^2} - 3$$

$$EE_k = \frac{-6}{n+1}$$

$$DE_k = \frac{24\,n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

Hypotézu o normalitě zamítneme na hladině významnosti α, pokud platí alespoň jedna z následujících nerovností:

$$\frac{|S_k|}{\sqrt{DS_k}} \geq u_{1-\alpha/2}, \qquad \frac{|E_k - EE_k|}{\sqrt{DE_k}} \geq u_{1-\alpha},$$

kde $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2).$

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Normalita reziduí

Co se stane, když jsou data nenormální? Změní se hladina významnosti.

Jak data "znormalizovat"?

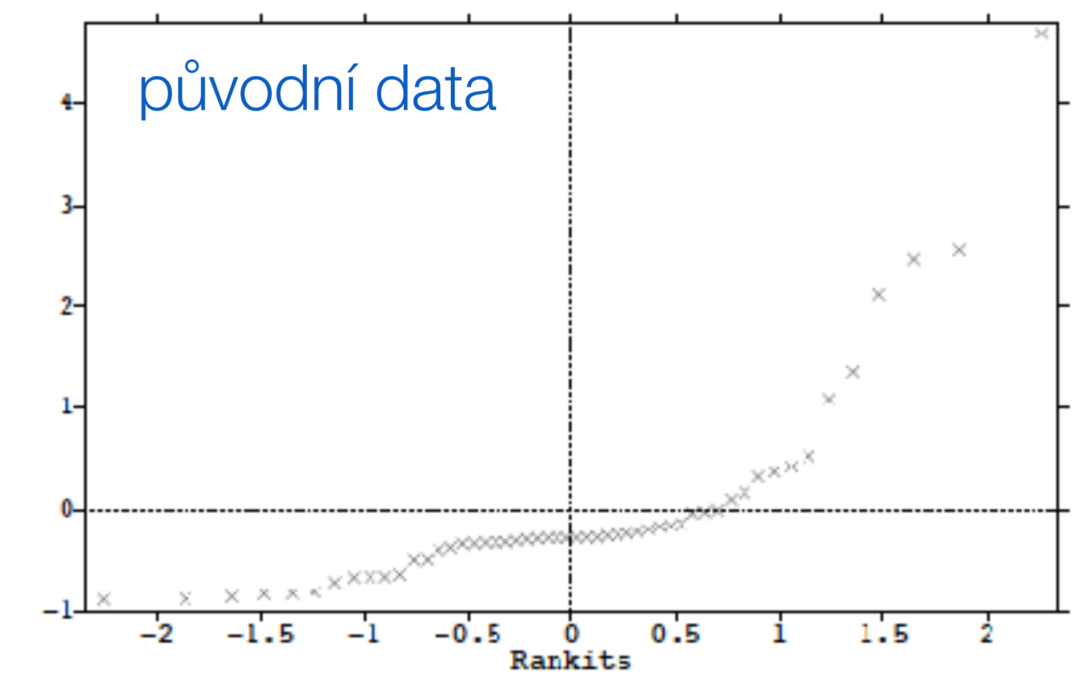
Nejčastější způsob je transformace.

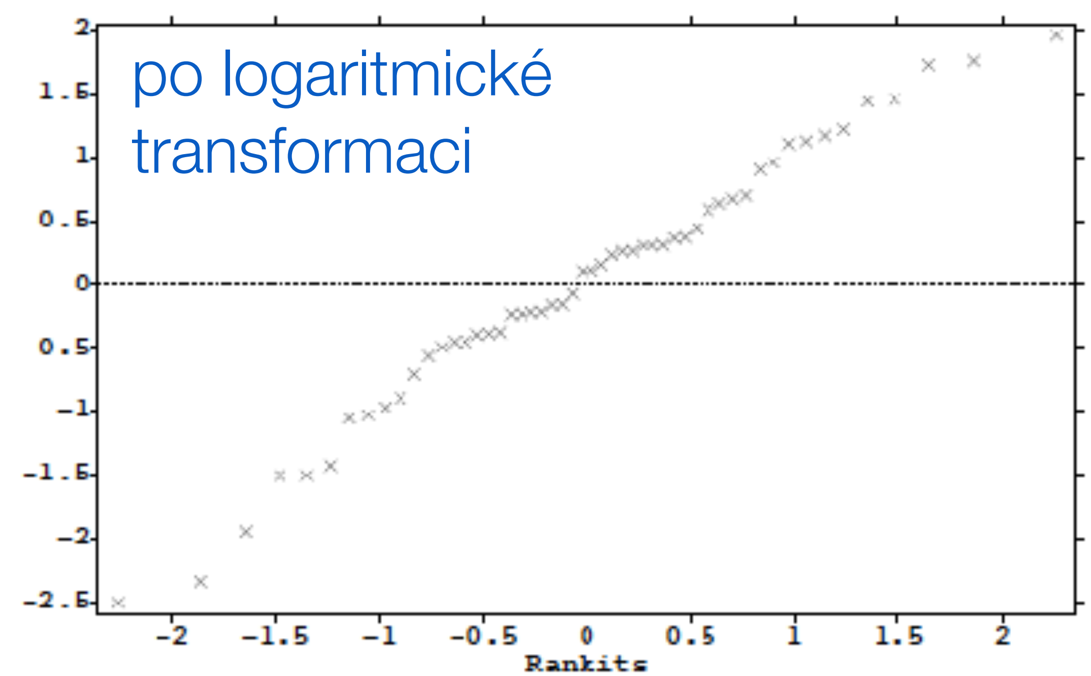
Nejjednodušší je transformace v případě zešikmení původních dat:

- zešikmení napravo: transformace odmocninou, logaritmem nebo jinou mocninou transformací s exponentem menším než 1.
- zešikmení doleva: mocninná transformace s exponentem větším než 1.

Problematický je případ symetrického rozdělení se špičatostí různou od 3.

Zvláštní přístup je třeba zaujmout k odlehlým měřením.





Neparametrická analýza rozptylu

Odezva $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se neřídí normálním rozdělením => nelze použít ANOVA.

Kruskal – Wallisův test

- Je neparametrickou obdobou analýzy rozptylu jednoduchého třídění.
- Slouží k ověření nulové hypotézy H_0, že $k > 2$ nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pochází z jednoho základního souboru.
- Předpokládáme, že tyto náhodné výběry byly pořízeny ze základních souborů se spojitými distribučními funkcemi $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x)$.
- Nulovou hypotézu H_0 můžeme pro všechna x zapsat takto H_0: $F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x)$.

Postup při stanovení testového kritéria:

1) Máme k dispozici $\boldsymbol{k}$ výběrových souborů o četnostech $n_1, n_2, \ldots, n_k$.
2) Všechny výběrové soubory sloučíme do jediného souboru.
3) Každé hodnotě souboru přiřadíme vzestupně pořadové číslo, stejným hodnotám pak pořadí průměrné.
4) Následně sečteme pořadová čísla jednotlivých pozorování pro každý původní výběrový soubor zvlášť a získáme součty $T_1, T_2, \ldots, T_k$

(T_i ; i = 1, …, k, je tedy součet pořadových čísel pro i-tý výběr)

Testová statistika má tvar $KW = \dfrac{12}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dfrac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$ kde $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

KW má za platnosti H_0 při $n_i \to \infty$ asymptoticky χ^2 – rozdělení o k-1 stupních volnosti.

Neparametrická analýza rozptylu

Odezva $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se neřídí normálním rozdělením => nelze použít ANOVA.

Kruskal – Wallisův test

Testová statistika má tvar:

$$KW = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

kde $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Statistika KW má za platnosti H_0 při $n_i \to \infty$ asymptoticky χ^2 – rozdělení o k-1 stupních volnosti.

Pokud $KW > \chi^2_\alpha(n-1)$, přijímáme hypotézu alternativní, podle které se hodnoty nejméně dvou porovnávaných výběrových souborů od sebe statisticky významně liší.

Jestliže se v posloupnosti zjištěných údajů vyskytnou shodné hodnoty, kterým se přiřazuje průměrné pořadí, je nutno hodnotu KW dělit korekčním faktorem

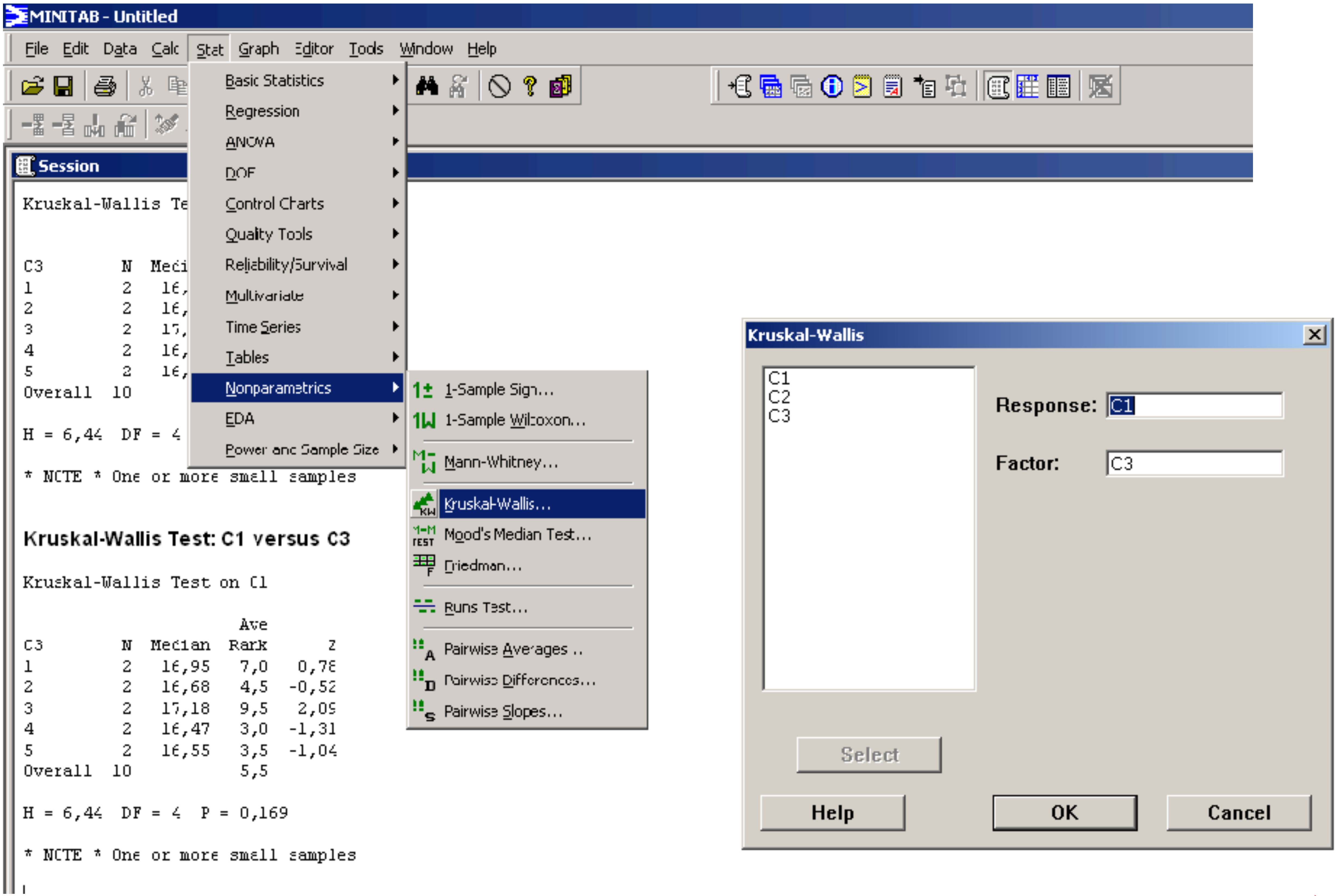
$$K = 1 - \frac{1}{n^3 - n} \sum_{j=1}^{p} (t_j^3 - t_j)$$

kde p je počet tříd se stejným pořadím a t_i počet pořadí v i-té třídě.

Opravené testové kritérium se stanoví jako $KW_{opr} = \dfrac{KW}{K}$

I v tomto případě je třeba použít neparametrické metody mnohonásobného porovnávání (Neményi, Dunna, …)

Neparametrická analýza rozptylu



Neparametrická analýza rozptylu

Úloha: Ověřit, zda výnosy silážní kukuřice jsou ovlivněny rozdílnou dávkou NPK v hnojivu.

- Odezva: výnos v t/ha
- Faktor: způsob hnojení (4 úrovně lišící se dávkou NPK)

Provedeme polní experiment, v němž budeme sledovat výnosy pro čtyři varianty hnojení silážní kukuřice rozdílnou dávkou NPK v hnojivech, označené jako V_1 až V_4. Každá varianta bude ověřována na 8 parcelách a budou měřeny výnosy sklizené hmoty v tunách na hektar.

H_0: výnosy jednotlivých variant jsou shodné
H_1: výnosy jednotlivých variant jsou rozdílné

Hypotéza o normalitě napozorovaných dat byla zamítnuta. Proto použijeme Kruskal-Wallisův test.

Neparametrická analýza rozptylu

varianta	Výnos kukuřice v t z hektaru na parcele číslo:								součet T_i
	1	2	3	4	5	6	7	8	
V_1	1,29	1,19	1,23	1,33	1,27	1,29	1,31	1,20	
pořadí	23,5	8,5	15	28,5	20	23,5	27	11,5	157,5
V_2	1,30	1,33	1,29	1,37	1,35	1,25	1,38	1,29	
pořadí	26	28,5	23,5	31	30	18,5	32	23,5	213
V_3	1,20	1,24	1,25	1,24	1,20	1,21	1,28	1,17	
pořadí	11,5	16,5	18,5	16,5	11,5	14	21	7	116,5
V_4	1,03	1,14	1,09	1,20	1,07	1,19	1,01	1,05	
pořadí	2	6	5	11,5	4	8,5	1	3	41

- $$KW = \frac{12}{32 \cdot 33}\left(\frac{157{,}5^2}{8} + \frac{213^2}{8} + \frac{116{,}5^2}{8} + \frac{41^2}{8}\right) - 3 \cdot 33 = 22{,}3473$$
- Vzhledem k výskytu stejných údajů (bylo použito průměrné pořadí) použijeme korekční faktor: $K = 1 - \frac{(2^3-2)+(4^3-4)+(2^3-2)+(2^3-2)+(4^3-4)+(2^3-2)}{32^3-32} = 0{,}9956$
- $KW_{opr.} = \frac{22{,}3473}{0{,}9956} = 22{,}446$ $\quad \chi^2_{0{,}05\,(3)} = 7{,}815$ $\quad \chi^2_{0{,}01\,(3)} = 11{,}34$

Opravené testové kritérium $KW = 22{,}446 > \chi^2$ => na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ i $0{,}01$ přijímáme alternativní hypotézu, podle které se průkazně liší hodnoty výnosu nejméně ve 2 třídách.

Neparametrická analýza rozptylu

varianta	Výnos kukuřice v t z hektaru na parcele číslo:								součet T_i
	1	2	3	4	5	6	7	8	
V_1	1,29	1,19	1,23	1,33	1,27	1,29	1,31	1,20	
pořadí	23,5	8,5	15	28,5	20	23,5	27	11,5	157,5
V_2	1,30	1,33	1,29	1,37	1,35	1,25	1,38	1,29	
pořadí	26	28,5	23,5	31	30	18,5	32	23,5	213
V_3	1,20	1,24	1,25	1,24	1,20	1,21	1,28	1,17	
pořadí	11,5	16,5	18,5	16,5	11,5	14	21	7	116,5
V_4	1,03	1,14	1,09	1,20	1,07	1,19	1,01	1,05	
pořadí	2	6	5	11,5	4	8,5	1	3	41

```
> vynosy<- data.frame(read.table("vynosy.txt", header=T))
> kruskal.test(vynos ~ varianta, data=vynosy)

	Kruskal-Wallis rank sum test

data:  vynos by varianta
Kruskal-Wallis chi-squared = 22.446, df = 3, p-value = 5.268e-05
```

Opravené testové kritérium $KW = 22{,}446 > \chi^2$ => na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ i $0{,}01$ přijímáme alternativní hypotézu, podle které se průkazně liší hodnoty výnosu nejméně ve 2 třídách.

Neparametrická analýza rozptylu

Podrobnější vyhodnocení Neményiho metodou:

Spočteme tabulku diferencí mezi součty pořadí pro výnosy kukuřice při jednotlivých variantách hnojení $T_i - T_j$

Kritické hodnoty:

$D_{0,05} = 96,4 \quad (N = 8, K = 4)$

$D_{0,01} = 116,8 \quad (N = 8, K = 4)$

třída T_j / třída T_i	diference $T_i - T_j$		
	V_2	V_3	V_4
V_1	55,5	41	116,5 [x]
V_2		96,5 [x]	172 [xx]
V_3			75,5

Statisticky významně se liší hodnoty výnosů kukuřice mezi variantami hnojení V_2,V_4 a to na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ (diference $T_i - T_j$ jsou označeny [xx]). Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ se dále statisticky významně liší hodnoty výnosů kukuřice mezi variantami hnojení V_1,V_4 a V_2,V_3.

Neparametrická analýza rozptylu

```
> pairwise.wilcox.test(vynosy$vynos, vynosy$varianta)


Pairwise comparisons using Wilcoxon rank sum test with continuity
correction

data:  vynosy$vynos and vynosy$varianta

   V1     V2     V3
V2 0.1133 -      -
V3 0.1544 0.0079 -
V4 0.0079 0.0056 0.0080
```

Statisticky významně se neliší hodnoty výnosů kukuřice pouze mezi variantami hnojení V_1, V_2 a V_1, V_3. Statisticky významně se liší varianta V_4 od všech ostatních a varianty V_2, V_3. To vše už na hladině významnosti $\alpha = 0{,}008$.

Neparametrická analýza rozptylu

Test extrémních odchylek hodnot odezvy

V řadě pozorovaných hodnot se někdy objeví hodnota extrémně se lišící od ostatních, tzn. výrazně vybočuje z rozpětí ostatních naměřených hodnot.
Je třeba posoudit, zda je tato odchylka pouze náhodná nebo zda je uvedená hodnota zatížena „hrubou chybou“.
Pro objektivní posouzení této otázky existuje skupina testů, které se nazývají *„testy extrémních odchylek“*.

Dixonův test

Pozorovaná hodnota, která se extrémně liší od ostatních, je zřejmě buď nejmenší hodnotou ($x_{(1)}$) nebo největší hodnotou ($x_{(n)}$).

Nulová hypotéza H_0 tvrdí, že ($x_{(1)}$), resp. ($x_{(n)}$), je vybrána ze stejného normálně rozděleného základního souboru jako ostatní hodnoty.
Pro posouzení, zda hodnota ($x_{(1)}$) nebo hodnota ($x_{(n)}$) je zatížena hrubou chybou, užíváme testovacího kritéria

$$Q_1 = \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}} \quad \text{nebo} \quad Q_n = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$$

Jestliže vypočtená hodnota Q_1, resp. Q_n , překročí kritickou hodnotu $Q_{1\alpha} = Q_{n\alpha}$ (nalezenou v tabulkách pro Dixonův test, hladinu významnosti α a rozsah souboru n), zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti α a hodnotu ($x_{(1)}$), resp. ($x_{(n)}$), jako údaj zkreslený hrubou chybou, ze souboru vyloučíme.
Tzn. že nulová hypotéza se zamítá, pokud platí $Q_1 > Q_{\alpha(n)}$. nebo $Q_n > Q_{\alpha(n)}$.

Neparametrická analýza rozptylu

Odezva $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se neřídí normálním rozdělením => nelze použít ANOVA.

Friedmanův test

- Je neparametrickou obdobou analýzy rozptylu dvojného třídění (pro dva faktory - například pro jeden hlavní a druhý blokový).
- Předpokládejme, že máme měření y_{ij}, kde *i* je označení bloku, j je označení úrovně faktoru (ošetření). Pro každou dvojici (i,j) máme jedno měření.
- Označme

k - počet úrovní faktoru
n - počet bloků
r_{ij} - pořadí naměřené hodnoty odezvy y_{ij} v bloku i
$\bar{r}_{.j}$ - průměrné pořadí odezvy při úrovni j přes všechny bloky $\bar{r}_{.j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ij}$
$\bar{r}$ - průměrné pořadí přes všechny úrovně a přes všechny bloky $\bar{r} = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} r_{ij}$

Položme $SS_t = n\sum_{j=1}^{k}(\bar{r}_{.j} - \bar{r})^2$ a $SS_e = \frac{1}{n(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(r_{ij} - \bar{r})^2$

Testová statistika má tvar $Q = \frac{SS_t}{SS_e}$

(Pro velká n a k ($n > 15$, $k > 4$) má přibližně chí-kvadrát rozdělení o k-1 stupních volnosti)

Neparametrická analýza rozptylu