Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

11. ANOVA

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

ak. rok 2021/2022

11. ANOVA

Klíčové pojmy:

- Nulová a alternativní hypotéza
- Hladina významnosti testu
- Chyby 1. a 2. druhu
- p-hodnota

Klíčové vztahy:

- Test ANOVA, podmínky
- Kruskal-Wallis test

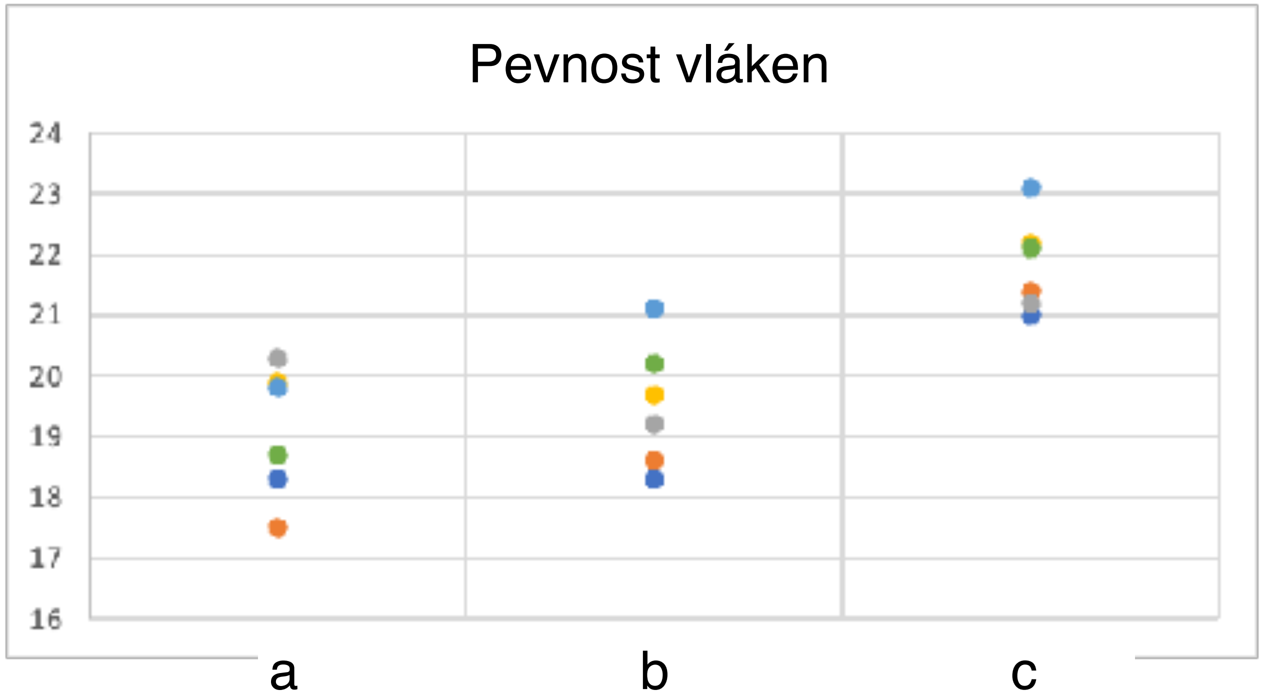
Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu (y).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$

Odezva : pevnost vlákna v tahu
Faktor : výrobce, 3 hodnoty (a,b,c)
Replikace : 6 vzorků od každého výrobce
Počet měření: 3x6 = 18

$$X_1^1, X_2^1, \ldots, X_{n_1}^1, \quad X_1^2, X_2^2, \ldots, X_{n_2}^2, \quad X_1^3, X_2^3, \ldots, X_{n_3}^3,$$



Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu (y).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu: $$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

Odezva : pevnost vlákna v tahu
Faktor : výrobce, 3 hodnoty (a,b,c)
Replikace : 6 vzorků od každého výrobce
Počet měření: 3x6 = 18

$$X_1^1, X_2^1, \ldots, X_{n_1}^1, \quad X_1^2, X_2^2, \ldots, X_{n_2}^2, \quad X_1^3, X_2^3, \ldots, X_{n_3}^3,$$

nulová hypotéza H$_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

alternativní hypotéza H$_A$: $\mu_i \neq \mu_j$ pro některou dvojici i,j (oboustranná)

hladina významnosti $\alpha = 5\%$

Jedna z možností je provést k(k-1)/2 porovnání pomocí dvouvýběrových testů.
ALE: tím se výrazně zvýší hladina významnosti.

Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu (y).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu: $$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

	hladina významnosti v *t*-testu					
počet porovnávání k	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
2	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
3	0,41	0,23	0,13	0,05	0,03	0,003
4	0,58	0,36	0,21	0,09	0,05	0,006
5	0,71	0,47	0,23	0,13	0,07	0,009
10	0,96	0,83	0,63	0,37	0,23	0,034
20	1,00	0,98	0,92	0,71	0,52	0,109
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,000

Jedna z možností je provést k(k-1)/2 porovnání pomocí dvouvýběrových testů.

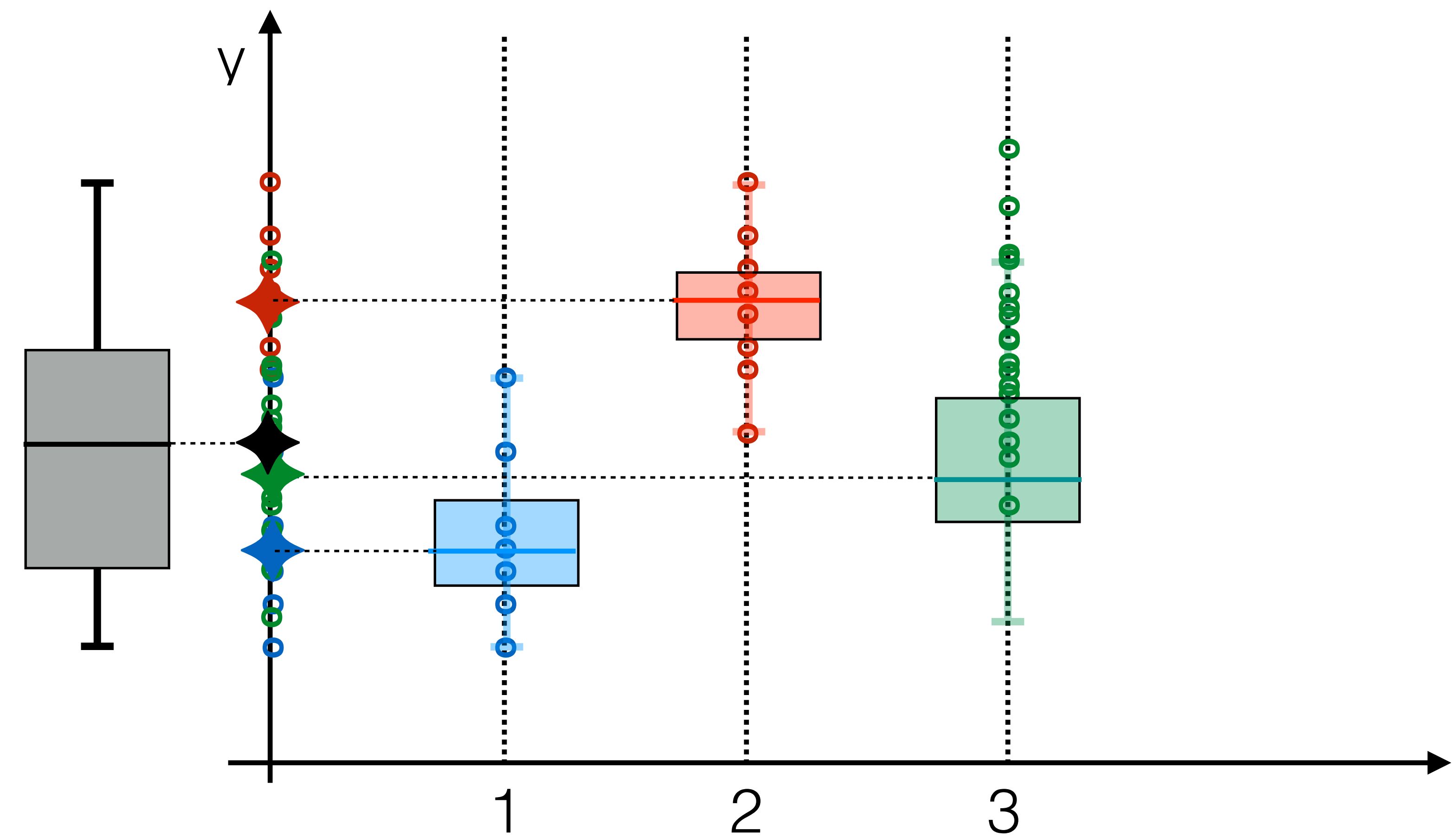
ALE: tím se výrazně zvýší hladina významnosti.

Tedy je třeba provádět tzv. simultánní test.

Srovnání tří a více náhodných veličin

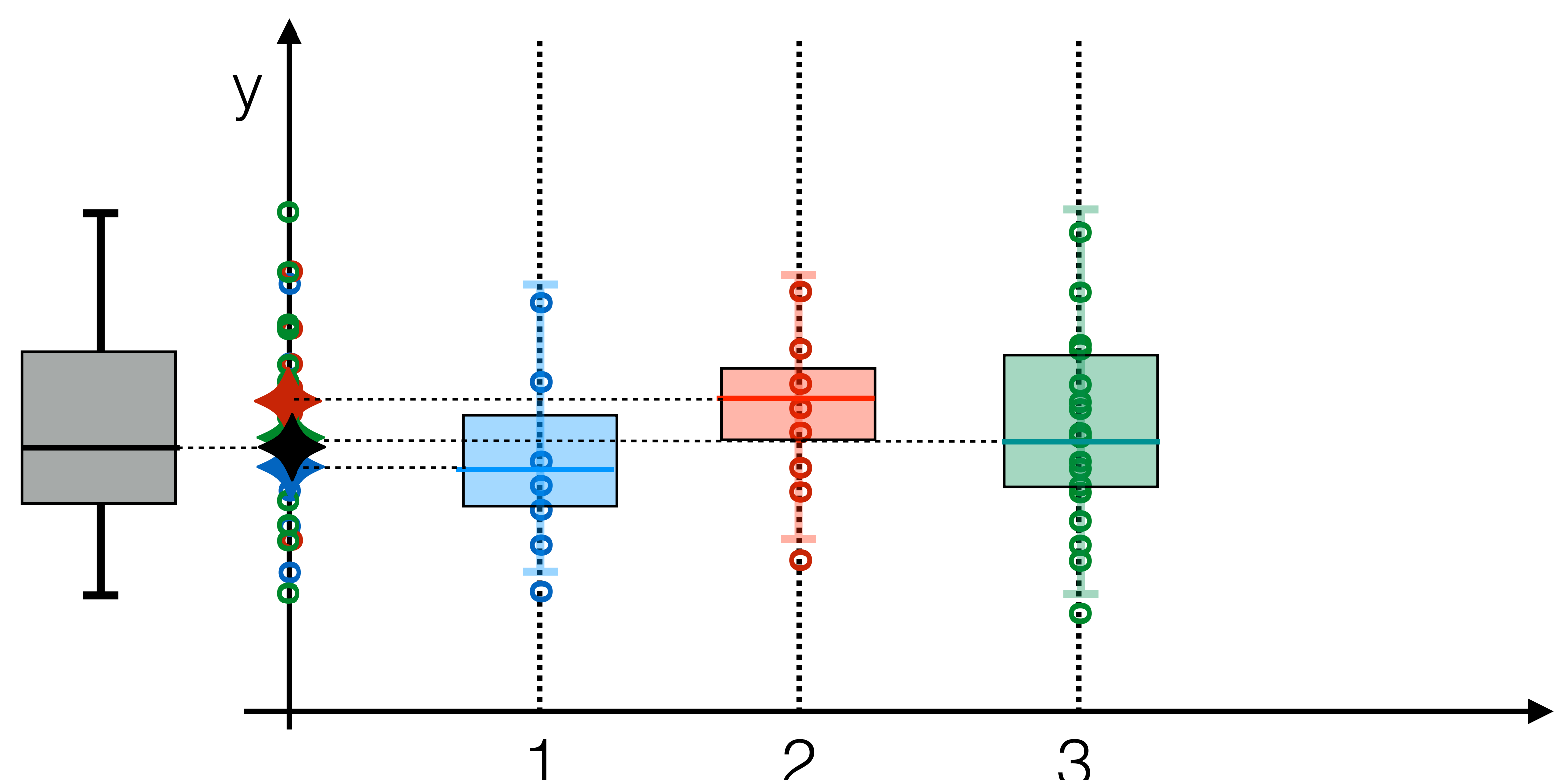
Situace 1:

Rozptyl mezi skupinami je **velký** vzhledem k součtu rozptylů uvnitř skupin => střední hodnoty **jsou různé** => nulovou hypotézu **zamítáme**



Situace 2:

Rozptyl mezi skupinami je **malý** vzhledem k součtu rozptylů uvnitř skupin => střední hodnoty lze považovat **za nerozlišitelné** => nulovou hypotézu **nelze zamítnout**



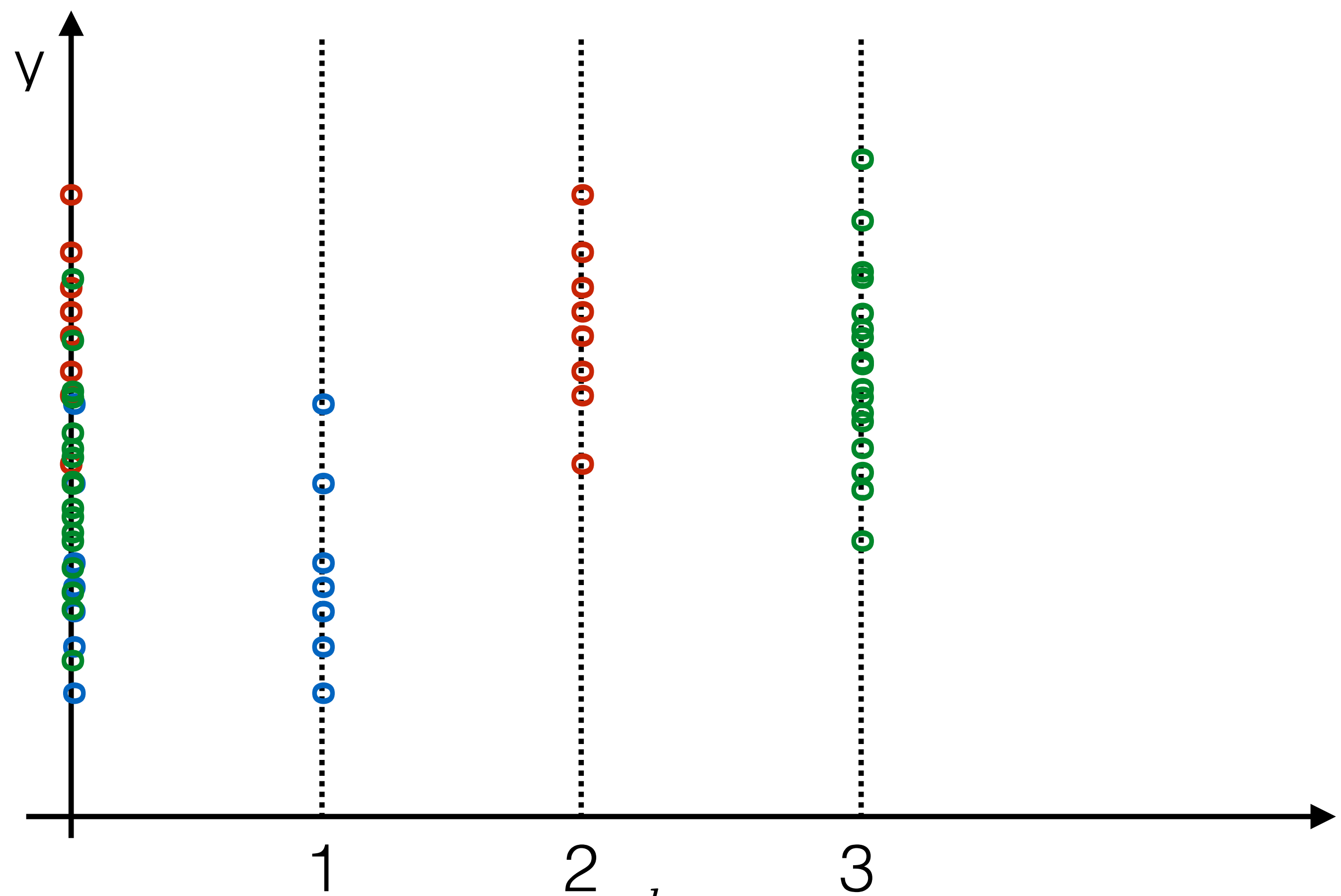
Metoda ANOVA

ANalysis Of VAriance = ANOVA

pro 1 faktor = všechna data rozdělíme do skupin podle jednoho hlediska (úrovní jednoho faktoru)

k úrovní = k skupin

v každé skupině n měření



1) celkový průměr všech naměřených hodnot: $$\bar{y} = \frac{1}{n.k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$$

2) průměry v jednotlivých skupinách: $$\bar{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$$

3) celkový součet čtvercových odchylek: $$SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y})^2$$

4) součet čtvercových odchylek uvnitř skupin $$SS_E = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

5) součet čtvercových odchylek mezi skupinami $$SS_F = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

Metoda ANOVA

Tabulka analýzy rozptylu:

Zdroj variability	Stupně volnosti	Součet čtverců	Průměrný čtverec	Testová statistika	p-hodnota
faktor (mezi skupinami)	k-1	SS_F	$MS_F = \frac{SS_F}{k-1}$	$F = \frac{MS_F}{MS_E}$	
rezidua (uvnitř skupin)	$k(n$-1)	SS_E	$MS_E = \frac{SS_E}{k(n-1)}$		
celkový	kn-1	SS_T			

testová statistika $F = \frac{\frac{SS_F}{k-1}}{\frac{SS_E}{k(n-1)}} = \frac{MS_F}{MS_E}$ má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení o (k-1) a $k(n$-1) stupních volnosti

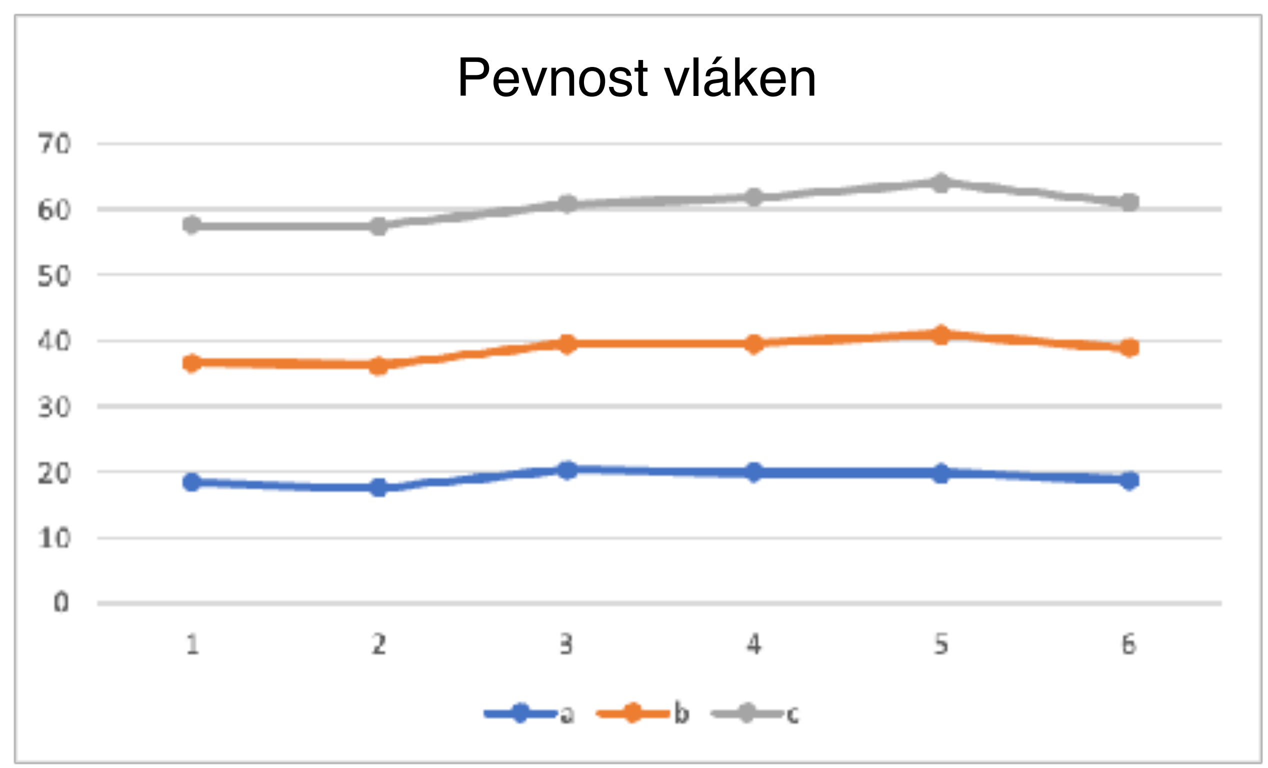
Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu (y).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu: $$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

Odezva : pevnost vlákna v tahu
Faktor : výrobce, 3 hodnoty (a,b,c)
Replikace : 6 vzorků od každého výrobce
Počet měření: 3x6 = 18

	A	B	C
1	a	b	c
2	18,3	18,3	21
3	17,5	18,6	21,4
4	20,3	19,2	21,2
5	19,9	19,7	22,2
6	19,8	21,1	23,1
7	18,7	20,2	22,1



Metoda ANOVA

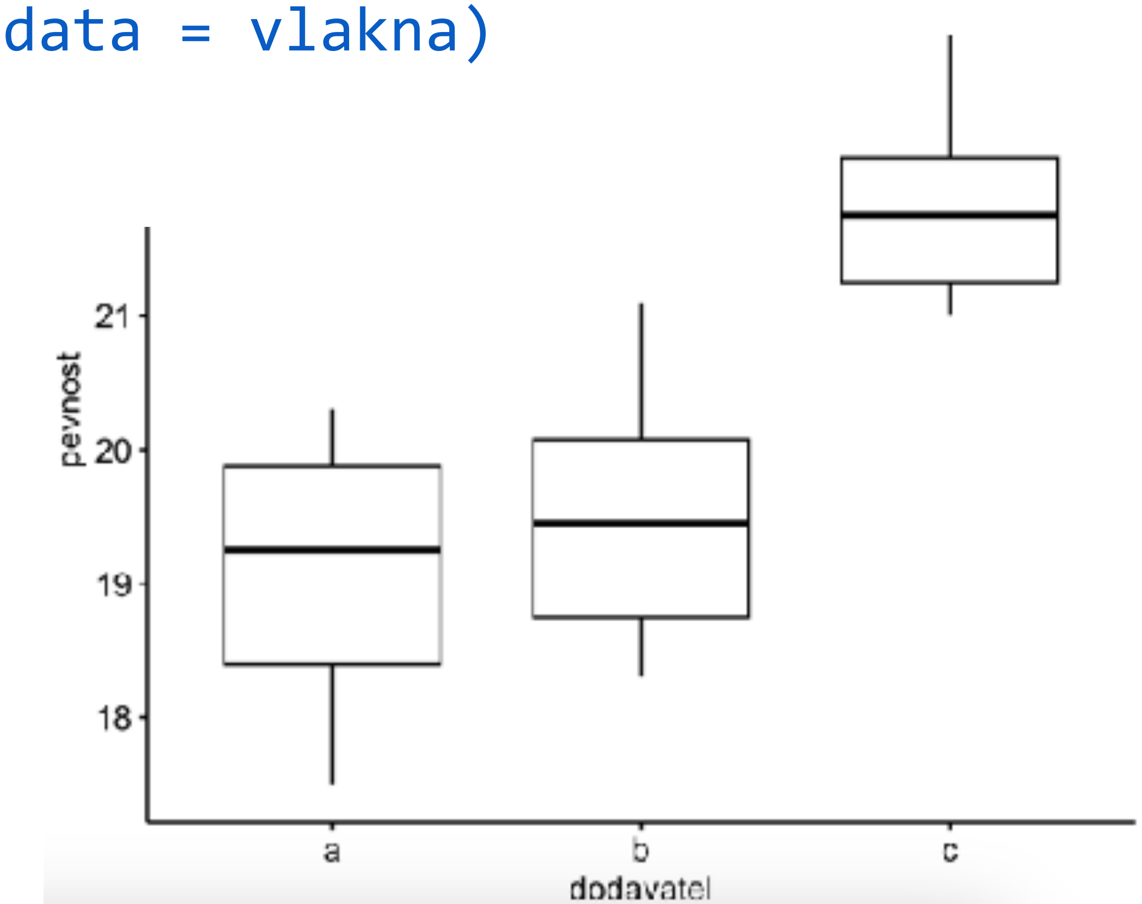
Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	a	b	c								
2	18,3	18,3	21		Anova: Single Factor						
3	17,5	18,6	21,4								
4	20,3	19,2	21,2		SUMMARY						
5	19,9	19,7	22,2		*Groups*	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*		
6	19,8	21,1	23,1		a	6	114,5	19,0833333	1,18566667		
7	18,7	20,2	22,1		b	6	117,1	19,5166667	1,08566667		
8					c	6	131	21,8333333	0,61866667		
9											
10											
11					ANOVA						
12					*Source of Variat.*	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
13					Between Grc	26,2344444	2	13,1172222	13,6164937	0,00042491	3,68232034
14					Within Grou	14,45	15	0,96333333			
15											
16					Total	40,6844444	17				
17											
18											

Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

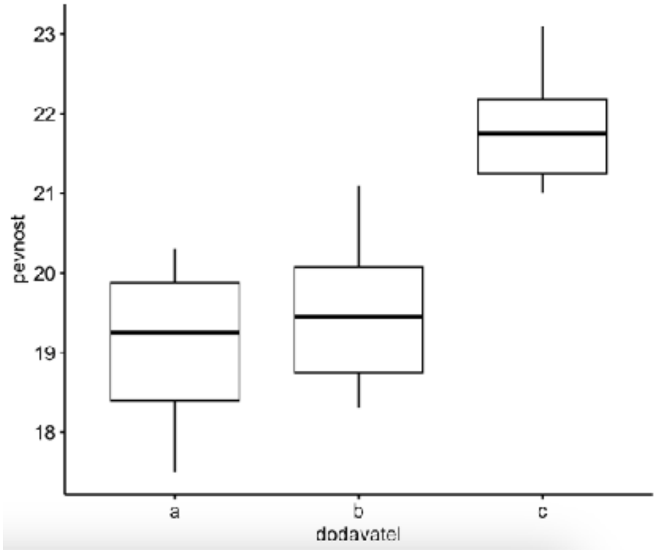
```
> vlakna<- data.frame(read.table("pevnost_vlaken.txt", header=T))
> library(ggplot2)
> ggboxplot(vlakna, x="dodavatel", y=„pevnost")
> anadat<- aov(pevnost~dodavatel, data = vlakna)
```



Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

```
> vlakna<- data.frame(read.table("pevnost_vlaken.txt", header=T))
> library(ggplot2)
> ggboxplot(vlakna, x="dodavatel", y=„pevnost")
> anadat<- aov(pevnost~dodavatel, data = vlakna)
> summary(anadat)
```




```
            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
dodavatel    2  26.23  13.117   13.62 0.000425 ***
Residuals   15  14.45   0.963
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Závěr: nulovou hypotézu zamítáme. Pevnost vláken různých dodavatelů se statisticky významně liší.

Jak se liší dodavatelé mezi sebou?

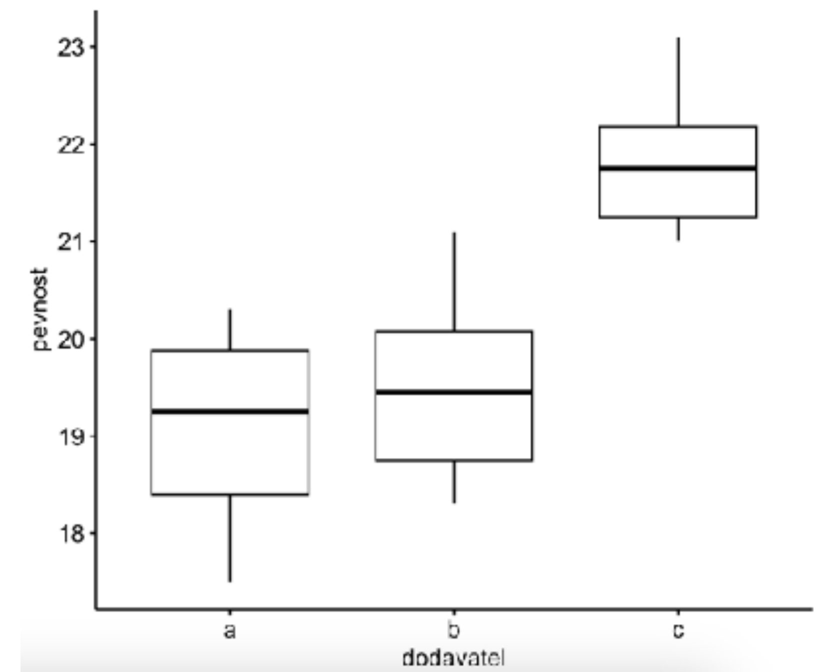
Pokud zamítneme nulovou hypotézu v ANOVA, měli bychom provést tzv. Mnohonásobné porovnání

Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

Metody mnohonásobného srovnávání:

- Tukeyova metoda
- Schefféhο metoda
- Bonferroniho metoda
- Duncanova metoda
- …

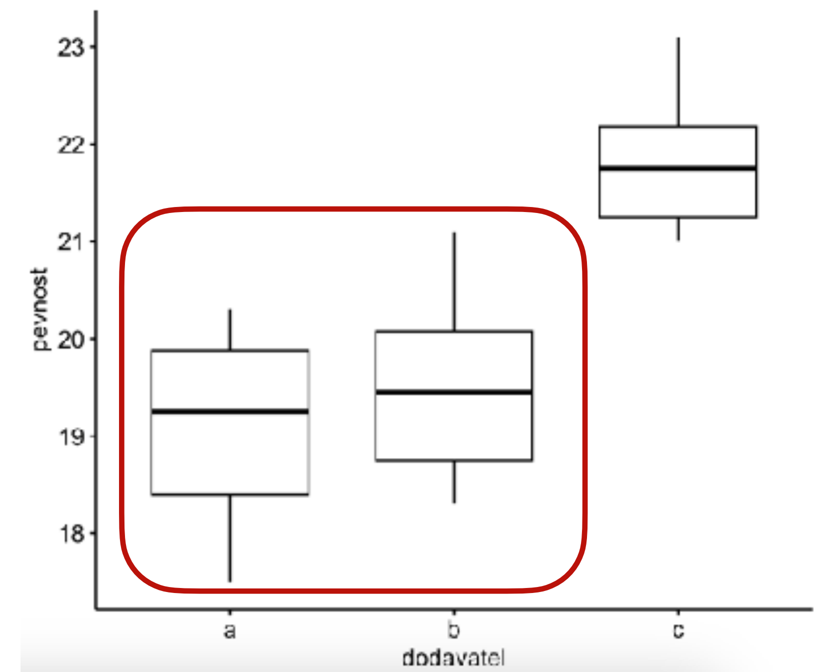


$$T = \frac{|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j|}{S*}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k, \ i \neq j$$

https://is.muni.cz/th/151390/prif_m/diplomova_prace_ed.pdf

Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.



Metody mnohonásobného srovnávání:

- Tukeyova metoda

```
> srovnani.vlakna<-TukeyHSD(anadat)
> srovnani.vlakna
```

```
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = pevnost ~ dodavatel, data = vlakna)

$dodavatel
         diff        lwr      upr     p adj
b-a 0.4333333 -1.0385665 1.905233 0.7296030
c-a 2.7500000  1.2781002 4.221900 0.0005817
c-b 2.3166667  0.8447669 3.788566 0.0026211
```

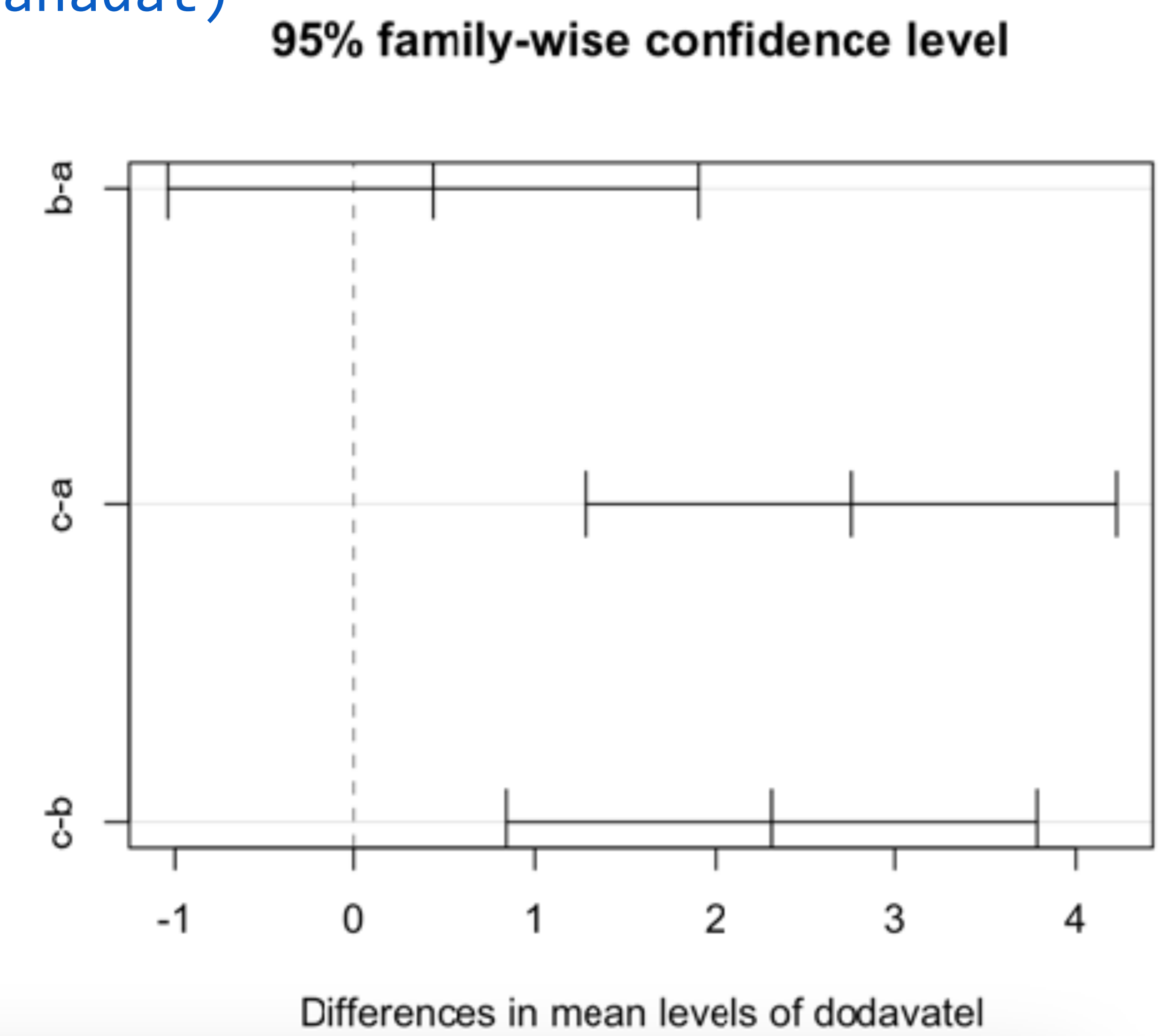
Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

Metody mnohonásobného srovnávání:

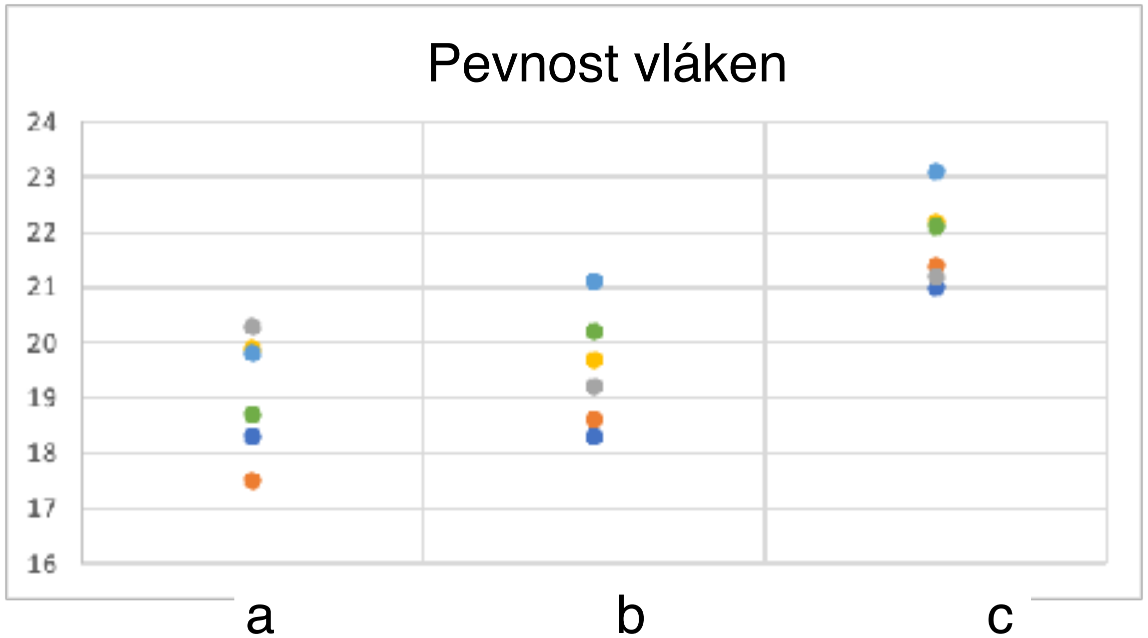
- Tukeyova metoda

```
> srovnani.vlakna<-TukeyHSD(anadat)
> srovnani.vlakna
> plot(srovnani.vlakna)
```



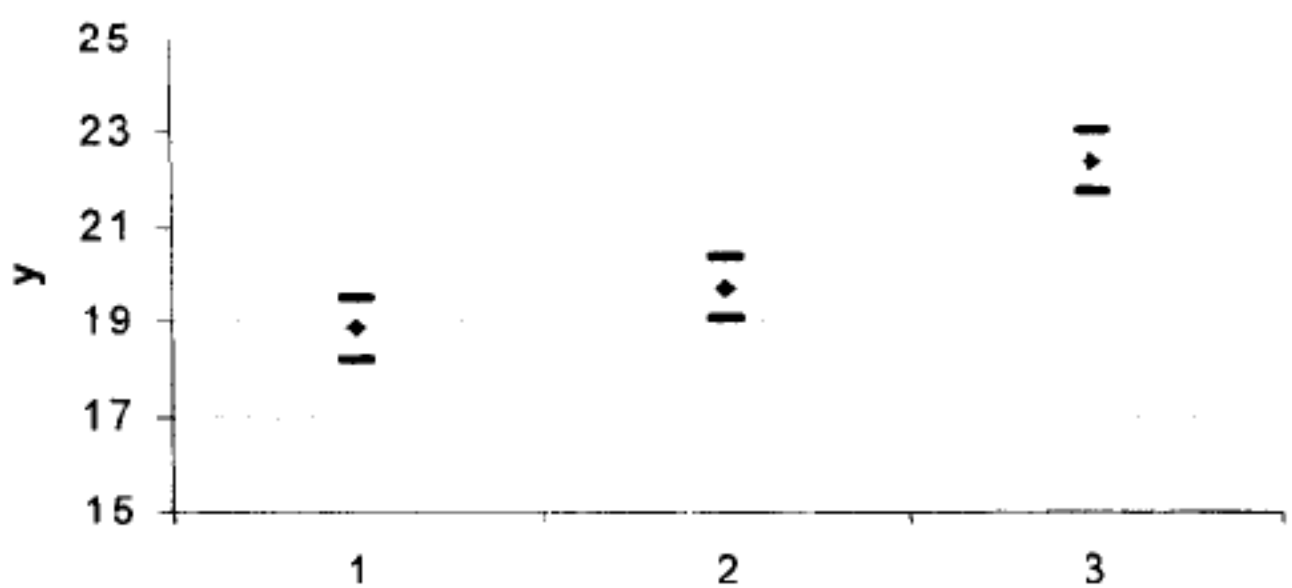
Metoda ANOVA

Příklad: Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.



Bonferroniho metoda mnohonásobného srovnání úrovní faktorů: $\bar{y}_i \pm t_{1-\alpha/2p} \cdot \sqrt{\frac{MS_E}{2 \cdot a}}$

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A_1	18,867	18,217	19,516
A_2	19,700	19,051	20,349
A_3	22,383	21,734	23,033



=> dodavatele 1 a 2 nelze statisticky odlišit, dodavatel 3 je významně lepší (jeho vlákna dosahují statisticky významně vyšší pevnosti než od dodavatelů 1 a 2)

Metoda ANOVA

Ověření podmínek pro použití ANOVA

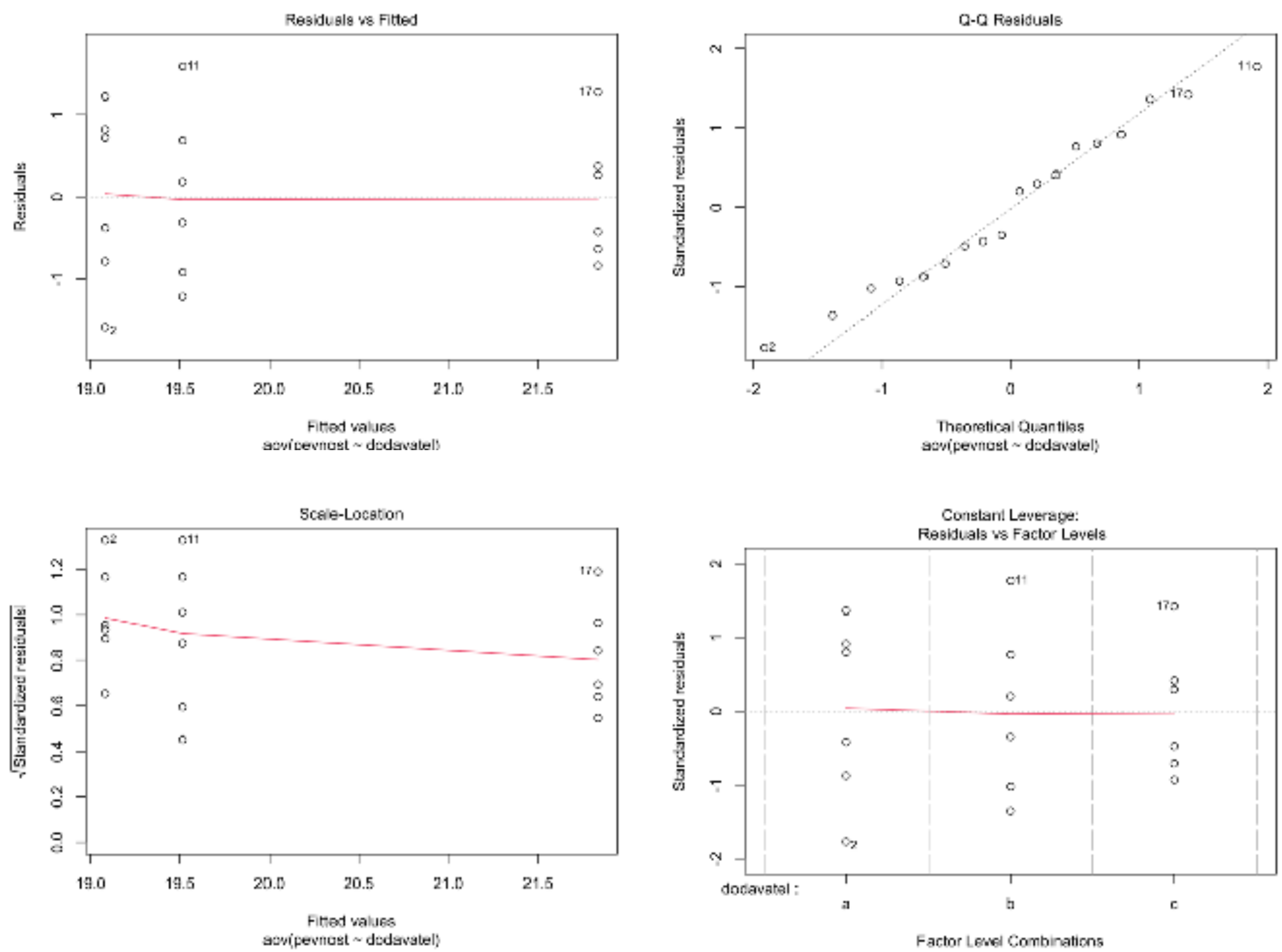
- Reprezentativnost výběru, náhodnost
- Nezávislost pozorování
- Normalita dat
- Stejné rozptyly (homoskedasticita)

Metoda ANOVA

Ověření podmínek pro použití ANOVA - analýza reziduí

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

```
> plot(anadat)
```



Metoda ANOVA - ověření podmínek

Nezávislost měření

Co se stane, když jsou data závislá?

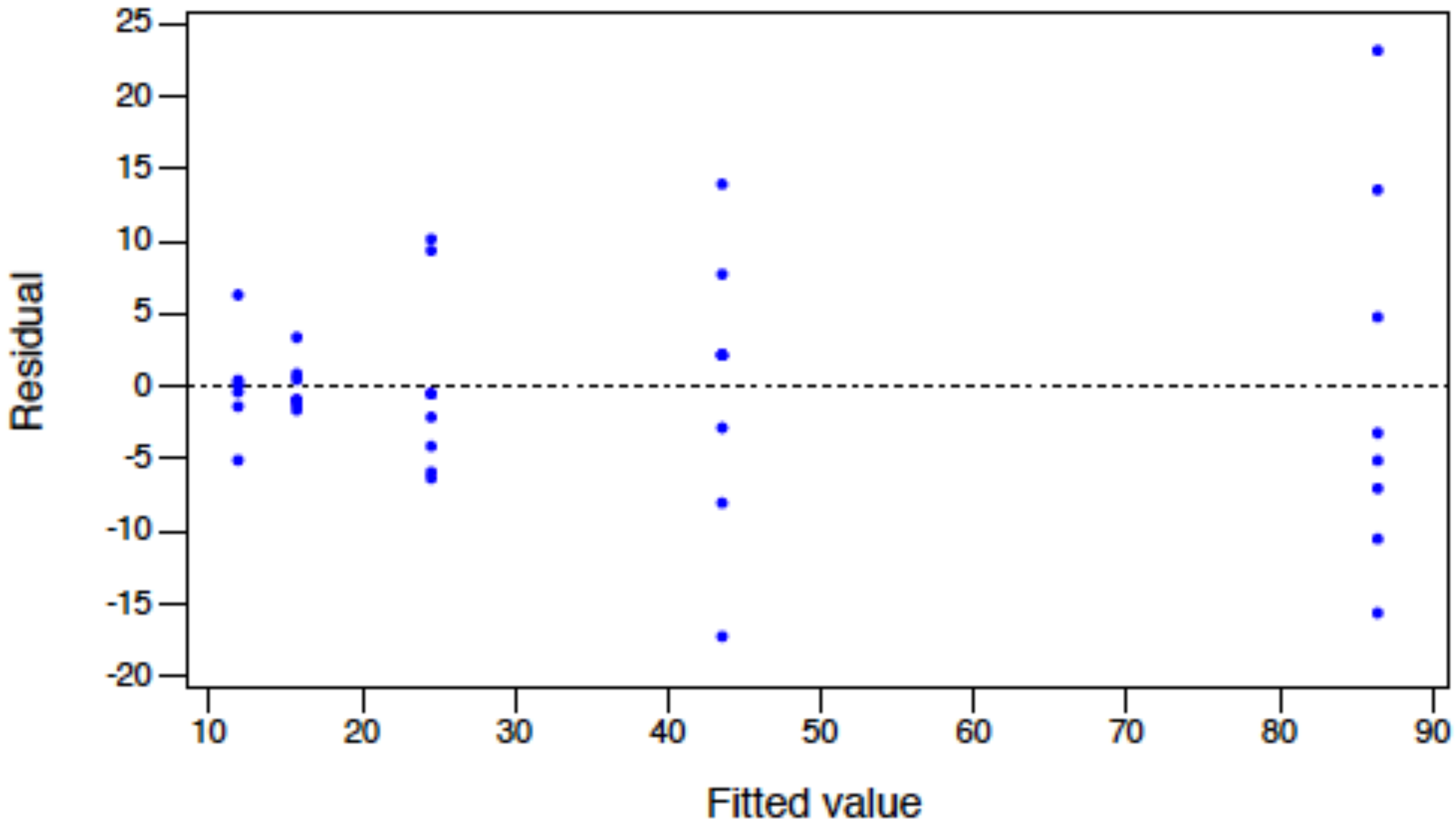
- Největší změnou je to, že rozptyly průměrů se stávají vychýlené (velikost vychýlení závisí na typu závislosti). To způsobí vychýlenost odhadů pro jednotlivé skupiny a pro efekty faktorů a jejich interakcí.
- Vliv randomizace může být na závislých datech různý účinek. Na stejných datech může jedno znáhodnění pořadí zvýšit pravděpodobnost chyby I. druhu, jiné naopak snížit.
- Náhodné seřazení kombinací v blocích také nepomůže, pokud není znáhodněno pořadí měření.

Jak se vypořádat se závislostí dat?

- Použít analýzu časových řad ke zjištění trendu a případné periodicity časové řady měření
- Pomocí autokorelační (parciální autokorelační) funkce zjistit závislosti v čase a určit ARMA model pro časovou řadu měření
- Na základě předchozích kroků provést "očištění" časové řady měření a dále pracovat pouze s rezidui, která by už měla být nezávislá

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Homoskedasticita (konstantní rozptyl)



- O'Brienův test
- Brown-Forsythův test
- Levenův test
- Bartlettův test

první tři jsou založeny na transformaci veličiny z_{ij} a použití ANOVA

vyžaduje předpoklad normality!

Jak lze nehomogenitu rozptylů odstranit?

V podstatě jediný způsob "napravení" nehomogenity rozptylů je transformace.
Alternativou je použití neparametrického testu (Kruskal-Wallis) namísto F-testu v ANOVA

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Homoskedasticita (konstantní rozptyl)

Grp 1	Grp 2	Grp 3	Grp 4	Grp 5	Grp 6
95	112				
123	107				
74	67				
145	98				
64	105				
84	95				
128	79				
79	.				
.	.				
.	.				
.	.				
.	.				

```
               Test for Homogeneity of Variances

   Number of Observations    =  40
   Number of Groups          =  6

   Group Statistics:
   Group       Median      Mean          Std.Dev      N
    1         89.5000   99.0000          29.3355      8
    2         98.0000   94.7143          16.2349      7
    3         96.0000  100.8333          17.7551     12
    4        106.0000  108.2857          10.8737      7
    5        115.0000  118.3333           8.5049      3
    6        134.0000  140.6667          28.5890      3

  The p-value for rejecting = .05
  Test                          F-Ratio   p-value
 Levene                          3.0079    0.0236     Reject H0
 Brown-Forsythe                  2.1035    0.0890     Accept H0
 O'Brien                         2.0498    0.0963     Accept H0
 Bartlett  Chi2 = 8.1337         1.6267    0.1490     Accept H0

 Bartlett's test is chi-square with df =  5
 All F tests are done with df =  5 and  34


 Welch 1 way ANOVA               2.4737    0.1120     Accept H0

 Here, the variances may be unequal. The df are 5, 10.112
```

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Homoskedasticita (konstantní rozptyl)

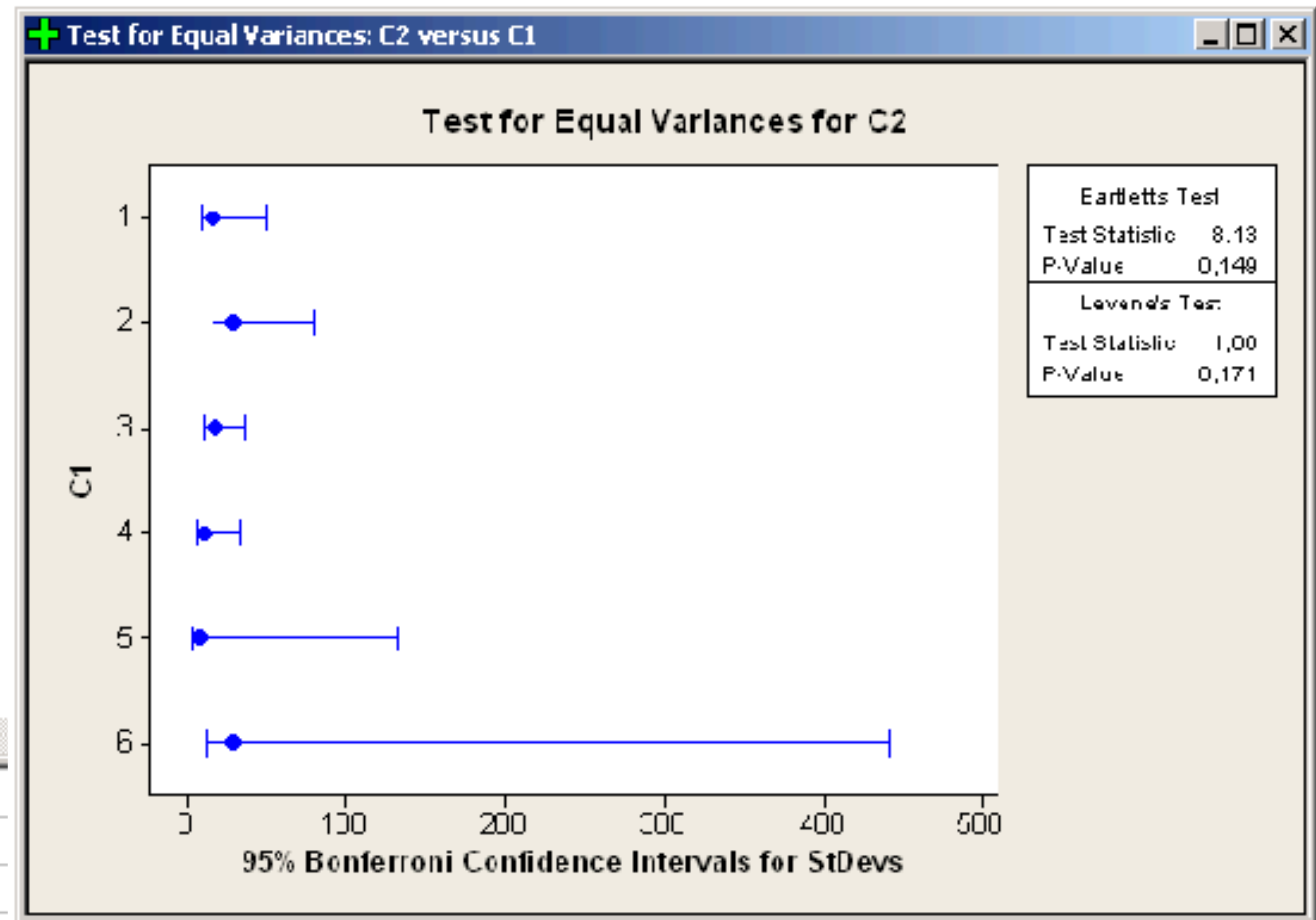
Test for Equal Variances: C2 versus C1

95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

C1	N	Lower	StDev	Upper
1	7	9,1236	15,2349	50,002
2	8	17,0400	29,3343	80,335
3	12	11,2743	17,7551	37,252
4	7	6,1108	10,8737	33,490
5	3	3,6029	7,5049	131,620
6	3	12,2119	23,5890	442,438

Bartlett's Test (normal distribution)
Test statistic = 8,13; p-value = 0,149

Levene's Test (any continuous distribution)
Test statistic = 1,66; p-value = 0,171



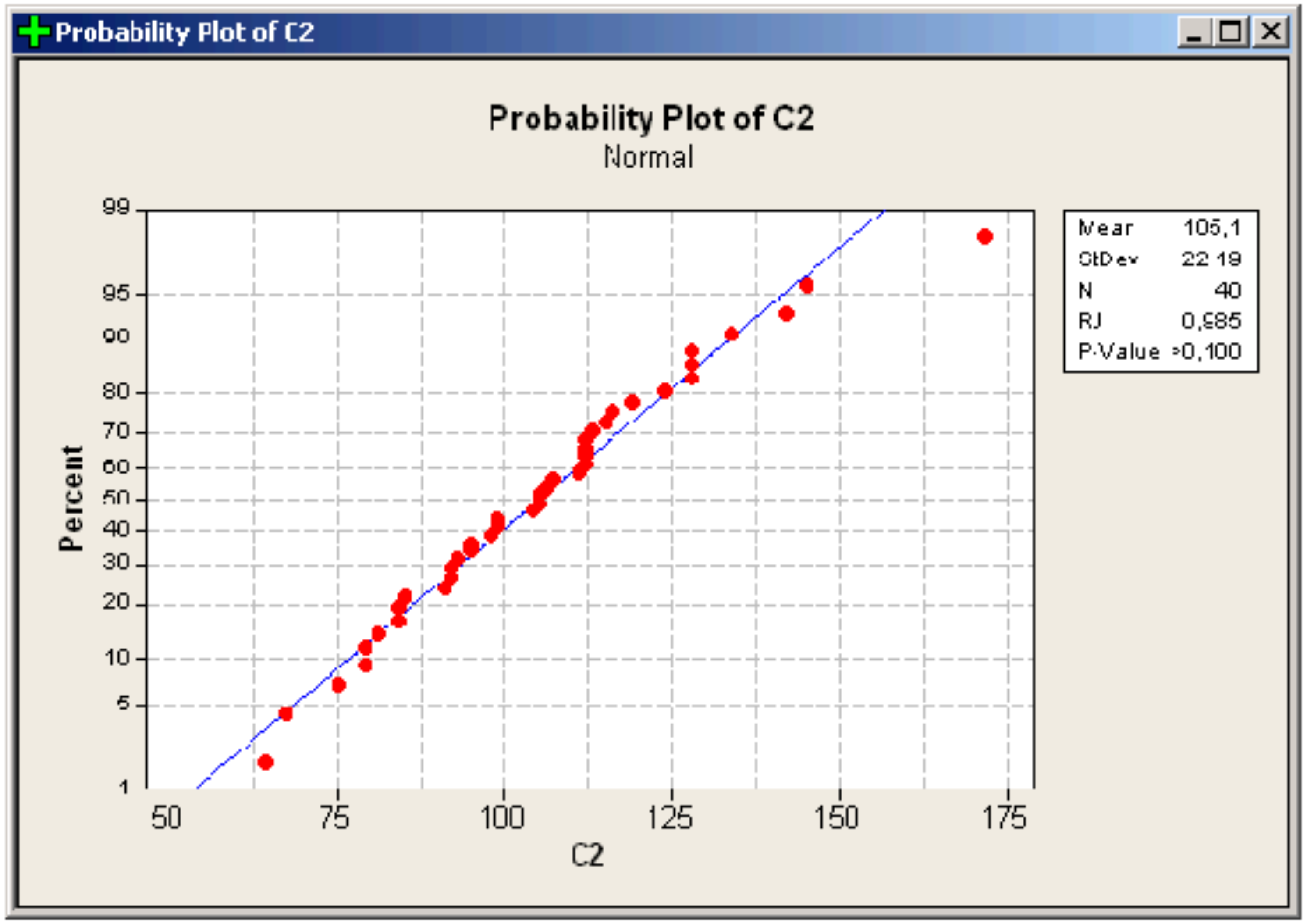
12	2	04
13	2	64
14	2	128
15	2	79
16	3	81
17	3	91
18	3	142
19	3	84
20	3	85
21	3	93
22	3	99
23	3	119
24	3	92

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Normalita reziduí

Testy normality:

- Chí-kvadrát test
- Anderson-Darling
- Shapiro-Wilk (Ryan-Joiner)
- Test normality založený na šikmosti a špičatosti



Metoda ANOVA - ověření podmínek

Normalita reziduí

Testy normality:

- Chí-kvadrát test
- Anderson-Darling
- Shapiro-Wilk (Ryan-Joiner)
- Test normality založený na šikmosti a špičatosti

výběrový koeficient šikmosti:

$$S_k = \frac{M_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2}\right)^3}$$

$$ES_k = 0$$

$$DS_k = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

výběrový koeficient špičatosti:

$$E_k = \frac{M_4}{s^4} - 3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2\right)^2} - 3$$

$$EE_k = \frac{-6}{n+1}$$

$$DE_k = \frac{24\,n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

Hypotézu o normalitě zamítneme na hladině významnosti α, pokud platí alespoň jedna z následujících nerovností:

$$\frac{|S_k|}{\sqrt{DS_k}} \geq u_{1-\alpha/2}, \qquad \frac{|E_k - EE_k|}{\sqrt{DE_k}} \geq u_{1-\alpha},$$

kde $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2).$

Metoda ANOVA - ověření podmínek

Normalita reziduí

Co se stane, když jsou data nenormální? Změní se hladina významnosti.

Jak data "znormalizovat"?

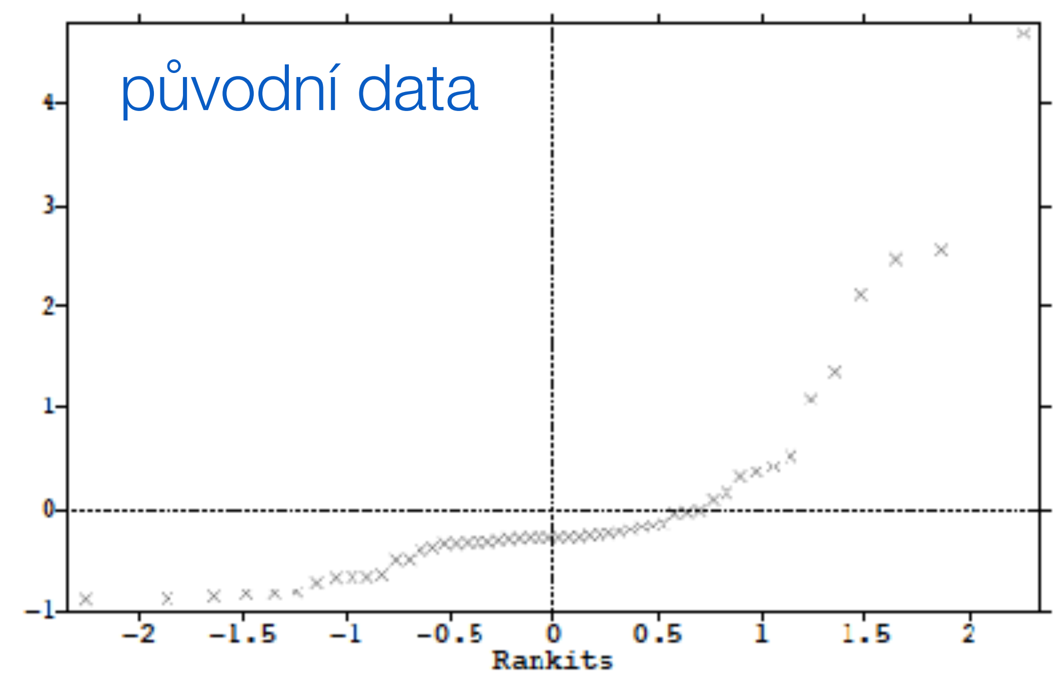
Nejčastější způsob je transformace.

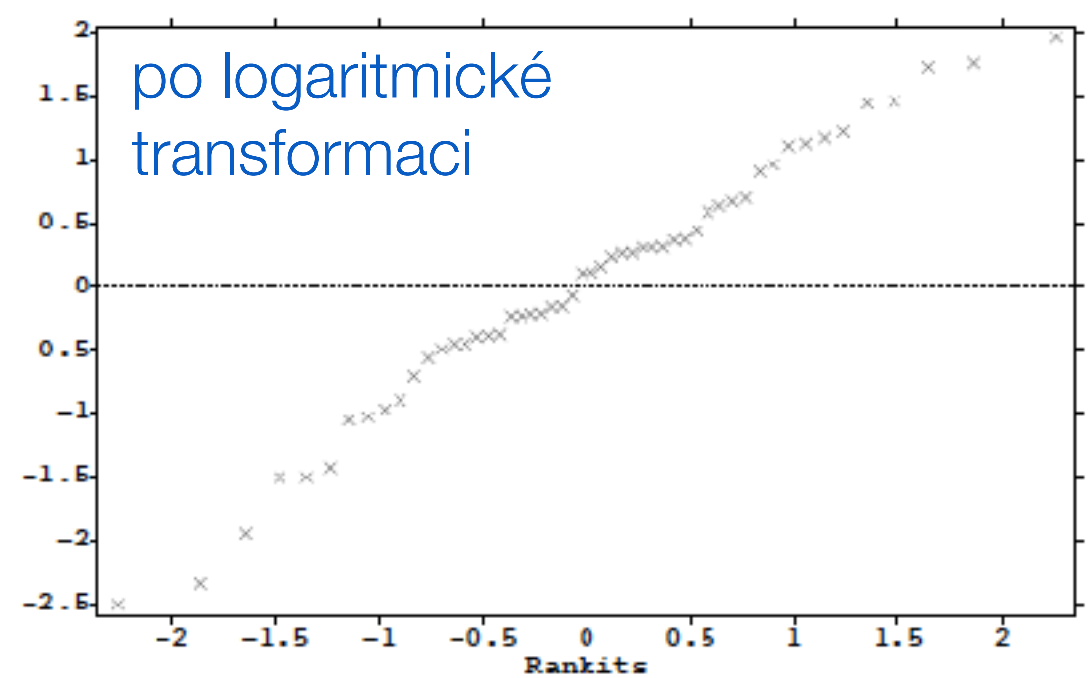
Nejjednodušší je transformace v případě zešikmení původních dat:

- zešikmení napravo: transformace odmocninou, logaritmem nebo jinou mocninou transformací s exponentem menším než 1.
- zešikmení doleva: mocninná transformace s exponentem větším než 1.

Problematický je případ symetrického rozdělení se špičatostí různou od 3.

Zvláštní přístup je třeba zaujmout k odlehlým měřením.





Neparametrická analýza rozptylu

Odezva $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se neřídí normálním rozdělením => nelze použít ANOVA.

Kruskal – Wallisův test

- Je neparametrickou obdobou analýzy rozptylu jednoduchého třídění.
- Slouží k ověření nulové hypotézy H_0, že $k > 2$ nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pochází z jednoho základního souboru.
- Předpokládáme, že tyto náhodné výběry byly pořízeny ze základních souborů se spojitými distribučními funkcemi $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x)$.
- Nulovou hypotézu H_0 můžeme pro všechna x zapsat takto H_0: $F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x)$.

Postup při stanovení testového kritéria:

1) Máme k dispozici $\boldsymbol{k}$ výběrových souborů o četnostech $n_1, n_2, \ldots, n_k$.
2) Všechny výběrové soubory sloučíme do jediného souboru.
3) Každé hodnotě souboru přiřadíme vzestupně pořadové číslo, stejným hodnotám pak pořadí průměrné.
4) Následně sečteme pořadová čísla jednotlivých pozorování pro každý původní výběrový soubor zvlášť a získáme součty $T_1, T_2, \ldots, T_k$

(T_i ; i = 1, …, k, je tedy součet pořadových čísel pro i-tý výběr)

Testová statistika má tvar $KW = \dfrac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \dfrac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$ kde $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

KW má za platnosti H_0 při $n_i \to \infty$ asymptoticky χ^2 – rozdělení o k-1 stupních volnosti.

Neparametrická analýza rozptylu

Odezva $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se neřídí normálním rozdělením => nelze použít ANOVA.

Kruskal – Wallisův test

Testová statistika má tvar:

$$KW = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

kde $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Statistika KW má za platnosti H_0 při $n_i \to \infty$ asymptoticky χ^2 – rozdělení o k-1 stupních volnosti.

Pokud $KW > \chi^2_\alpha(n-1)$, přijímáme hypotézu alternativní, podle které se hodnoty nejméně dvou porovnávaných výběrových souborů od sebe statisticky významně liší.

Jestliže se v posloupnosti zjištěných údajů vyskytnou shodné hodnoty, kterým se přiřazuje průměrné pořadí, je nutno hodnotu KW dělit korekčním faktorem

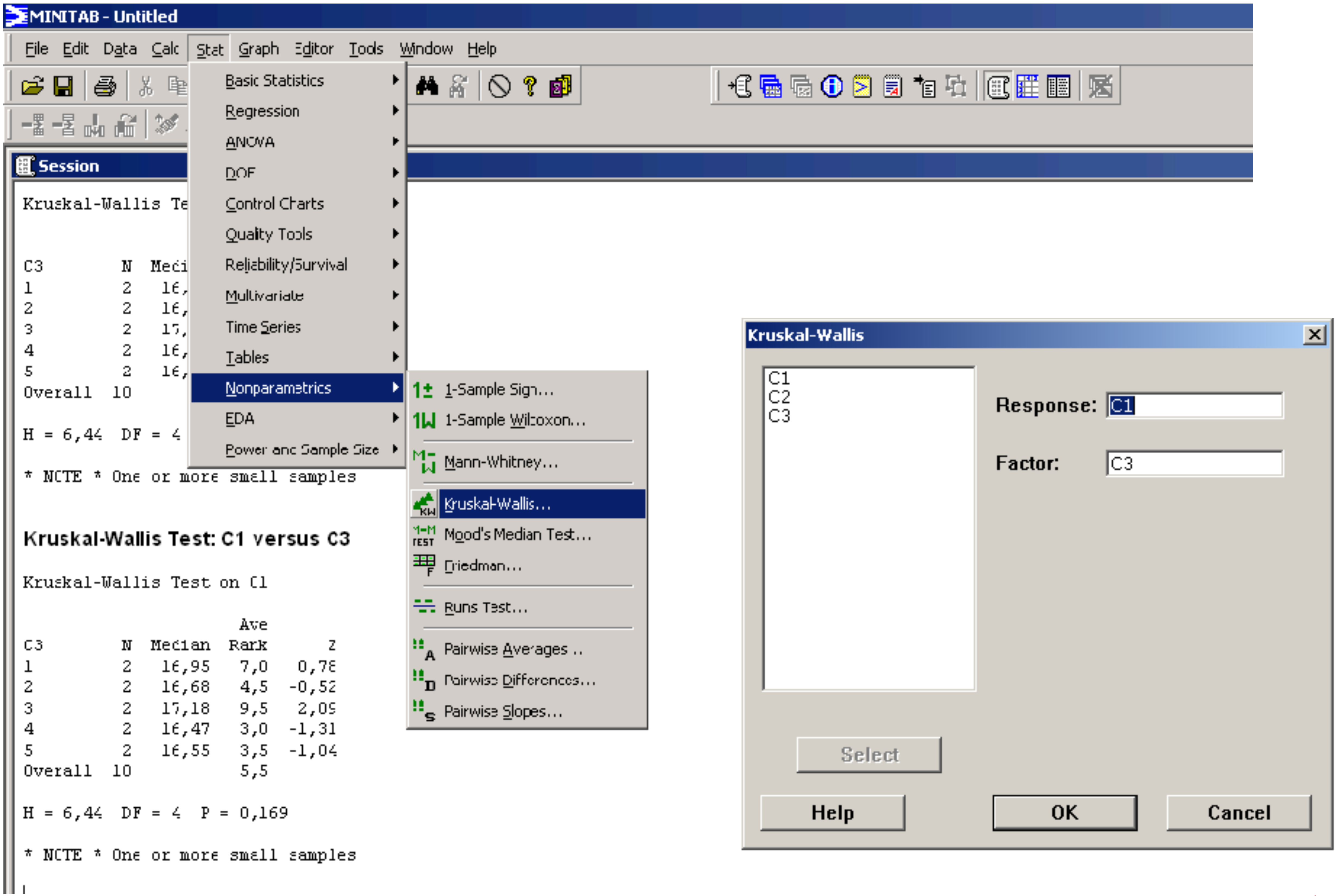
$$K = 1 - \frac{1}{n^3 - n} \sum_{j=1}^{p} (t_j^3 - t_j)$$

kde p je počet tříd se stejným pořadím a t_i počet pořadí v i-té třídě.

Opravené testové kritérium se stanoví jako $KW_{opr} = \dfrac{KW}{K}$

I v tomto případě je třeba použít neparametrické metody mnohonásobného porovnávání (Neményi, Dunna, …)

Neparametrická analýza rozptylu



Neparametrická analýza rozptylu

Úloha: Ověřit, zda výnosy silážní kukuřice jsou ovlivněny rozdílnou dávkou NPK v hnojivu.

- Odezva: výnos v t/ha
- Faktor: způsob hnojení (4 úrovně lišící se dávkou NPK)

Provedeme polní experiment, v němž budeme sledovat výnosy pro čtyři varianty hnojení silážní kukuřice rozdílnou dávkou NPK v hnojivech, označené jako V_1 až V_4. Každá varianta bude ověřována na 8 parcelách a budou měřeny výnosy sklizené hmoty v tunách na hektar.

H_0: výnosy jednotlivých variant jsou shodné
H_1: výnosy jednotlivých variant jsou rozdílné

Hypotéza o normalitě napozorovaných dat byla zamítnuta. Proto použijeme Kruskal-Wallisův test.

Neparametrická analýza rozptylu

varianta	Výnos kukuřice v t z hektaru na parcele číslo:								součet
	1	2	3	4	5	6	7	8	T_i
V_1	1,29	1,19	1,23	1,33	1,27	1,29	1,31	1,20	
pořadí	23,5	8,5	15	28,5	20	23,5	27	11,5	157,5
V_2	1,30	1,33	1,29	1,37	1,35	1,25	1,38	1,29	
pořadí	26	28,5	23,5	31	30	18,5	32	23,5	213
V_3	1,20	1,24	1,25	1,24	1,20	1,21	1,28	1,17	
pořadí	11,5	16,5	18,5	16,5	11,5	14	21	7	116,5
V_4	1,03	1,14	1,09	1,20	1,07	1,19	1,01	1,05	
pořadí	2	6	5	11,5	4	8,5	1	3	41

- $$KW = \frac{12}{32 \cdot 33}\left(\frac{157{,}5^2}{8} + \frac{213^2}{8} + \frac{116{,}5^2}{8} + \frac{41^2}{8}\right) - 3 \cdot 33 = 22{,}3473$$
- Vzhledem k výskytu stejných údajů (bylo použito průměrné pořadí) použijeme korekční faktor: $K = 1 - \frac{(2^3-2)+(4^3-4)+(2^3-2)+(2^3-2)+(4^3-4)+(2^3-2)}{32^3-32} = 0{,}9956$
- $KW_{opr.} = \frac{22{,}3473}{0{,}9956} = 22{,}446$ $\quad \chi^2_{0{,}05\,(3)} = 7{,}815$ $\quad \chi^2_{0{,}01\,(3)} = 11{,}34$

Opravené testové kritérium $KW = 22{,}446 > \chi^2$ => na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ i $0{,}01$ přijímáme alternativní hypotézu, podle které se průkazně liší hodnoty výnosu nejméně ve 2 třídách.

Neparametrická analýza rozptylu

varianta	Výnos kukuřice v t z hektaru na parcele číslo:								součet
	1	2	3	4	5	6	7	8	T_i
V_1	1,29	1,19	1,23	1,33	1,27	1,29	1,31	1,20	
pořadí	23,5	8,5	15	28,5	20	23,5	27	11,5	157,5
V_2	1,30	1,33	1,29	1,37	1,35	1,25	1,38	1,29	
pořadí	26	28,5	23,5	31	30	18,5	32	23,5	213
V_3	1,20	1,24	1,25	1,24	1,20	1,21	1,28	1,17	
pořadí	11,5	16,5	18,5	16,5	11,5	14	21	7	116,5
V_4	1,03	1,14	1,09	1,20	1,07	1,19	1,01	1,05	
pořadí	2	6	5	11,5	4	8,5	1	3	41

```
> vynosy<- data.frame(read.table("vynosy.txt", header=T))
> kruskal.test(vynos ~ varianta, data=vynosy)

    Kruskal-Wallis rank sum test

data:  vynos by varianta
Kruskal-Wallis chi-squared = 22.446, df = 3, p-value = 5.268e-05
```

Opravené testové kritérium $KW = 22{,}446 > \chi^2$ => na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ i $0{,}01$ přijímáme alternativní hypotézu, podle které se průkazně liší hodnoty výnosu nejméně ve 2 třídách.

Neparametrická analýza rozptylu

Podrobnější vyhodnocení Neményiho metodou:

Spočteme tabulku diferencí mezi součty pořadí pro výnosy kukuřice při jednotlivých variantách hnojení $T_i - T_j$

třída T_j / třída T_i	diferencí $T_i - T_j$		
	V_2	V_3	V_4
V_1	55,5	41	116,5 ^{x}
V_2		96,5 ^{x}	172 ^{xx}
V_3			75,5

Kritické hodnoty:

$D_{0,05} = 96{,}4 \quad (N = 8, K = 4)$

$D_{0,01} = 116{,}8 \quad (N = 8, K = 4)$

Statisticky významně se liší hodnoty výnosů kukuřice mezi variantami hnojení V_2, V_4 a to na hladině významnosti $\alpha = 0{,}01$ (diference $T_i - T_j$ jsou označeny ^{xx}). Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ se dále statisticky významně liší hodnoty výnosů kukuřice mezi variantami hnojení V_1, V_4 a V_2, V_3.

Neparametrická analýza rozptylu

```
> pairwise.wilcox.test(vynosy$vynos, vynosy$varianta)


Pairwise comparisons using Wilcoxon rank sum test with continuity
correction

data:  vynosy$vynos and vynosy$varianta

   V1     V2     V3
V2 0.1133 -      -
V3 0.1544 0.0079 -
V4 0.0079 0.0056 0.0080
```

Statisticky významně se neliší hodnoty výnosů kukuřice pouze mezi variantami hnojení V_1,V_2 a V_1,V_3. Statisticky významně se liší varianta V_4 od všech ostatních a varianty V_2,V_3. To vše už na hladině významnosti $\alpha = 0{,}008$.

Neparametrická analýza rozptylu

Test extrémních odchylek hodnot odezvy

V řadě pozorovaných hodnot se někdy objeví hodnota extrémně se lišící od ostatních, tzn. výrazně vybočuje z rozpětí ostatních naměřených hodnot.
Je třeba posoudit, zda je tato odchylka pouze náhodná nebo zda je uvedená hodnota zatížena „hrubou chybou“.
Pro objektivní posouzení této otázky existuje skupina testů, které se nazývají „*testy extrémních odchylek*“.

Dixonův test

Pozorovaná hodnota, která se extrémně liší od ostatních, je zřejmě buď nejmenší hodnotou ($x_{(1)}$) nebo největší hodnotou ($x_{(n)}$).

Nulová hypotéza H_0 tvrdí, že ($x_{(1)}$), resp. ($x_{(n)}$), je vybrána ze stejného normálně rozděleného základního souboru jako ostatní hodnoty.
Pro posouzení, zda hodnota ($x_{(1)}$) nebo hodnota ($x_{(n)}$) je zatížena hrubou chybou, užíváme testovacího kritéria

$$Q_1 = \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}} \quad \text{nebo} \quad Q_n = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$$

Jestliže vypočtená hodnota Q_1, resp. Q_n , překročí kritickou hodnotu $Q_{1\alpha} = Q_{n\alpha}$ (nalezenou v tabulkách pro Dixonův test, hladinu významnosti α a rozsah souboru n), zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti α a hodnotu ($x_{(1)}$), resp. ($x_{(n)}$), jako údaj zkreslený hrubou chybou, ze souboru vyloučíme.
Tzn. že nulová hypotéza se zamítá, pokud platí $Q_1 > Q_{\alpha(n)}$. nebo $Q_n > Q_{\alpha(n)}$.

Neparametrická analýza rozptylu

Odezva $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se neřídí normálním rozdělením => nelze použít ANOVA.

Friedmanův test

- Je neparametrickou obdobou analýzy rozptylu dvojného třídění (pro dva faktory - například pro jeden hlavní a druhý blokový).
- Předpokládejme, že máme měření y_{ij}, kde i je označení bloku, j je označení úrovně faktoru (ošetření). Pro každou dvojici (i,j) máme jedno měření.
- Označme

  k - počet úrovní faktoru

  n - počet bloků

  r_{ij} - pořadí naměřené hodnoty odezvy y_{ij} v bloku i

  $\bar{r}_{\cdot j}$ - průměrné pořadí odezvy při úrovni j přes všechny bloky $\quad \bar{r}_{\cdot j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ij}$

  $\bar{r}$ - průměrné pořadí přes všechny úrovně a přes všechny bloky $\quad \bar{r} = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} r_{ij}$

Položme $SS_t = n\sum_{j=1}^{k}(\bar{r}_{\cdot j} - \bar{r})^2$ a $SS_e = \frac{1}{n(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(r_{ij} - \bar{r})^2$

Testová statistika má tvar $Q = \frac{SS_t}{SS_e}$

(Pro velká n a k ($n > 15$, $k > 4$) má přibližně chí-kvadrát rozdělení o k-1 stupních volnosti)

Neparametrická analýza rozptylu