Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

12. Testy o kvalitativních výsledcích

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2023/2024

12. Testy o kvalitativních výsledcích

Klíčové pojmy:
- poměry (proporce)
- Kontingenční tabulka, čtyřpolní tabulka

Klíčové vztahy:
- Test chí-kvadrát
- Fisherův test

Test poměrů

Příklady:

- Statistický odhad pravděpodobnosti
- Odhad volebních preferencí
- Poměr neshodných výrobků
- Poměr žen v určité funkci
- … atd.

odhadujeme pomocí relativní četnosti $\hat{p} = \dfrac{n_A}{N}$

Jednovýběrový test:

$$H_0: \quad p = p_0$$
$$H_A: \quad p \neq p_0$$

$$T = \frac{\hat{p} - Np_0}{\sqrt{Np_0(1-p_0)}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

```
> prop.test(36, 100, 0.3)

	1-sample proportions test with continuity correction

data:  36 out of 100, null probability 0.3
X-squared = 1.4405, df = 1, p-value = 0.2301
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.3
95 percent confidence interval:
 0.2681721 0.4627255
sample estimates:        p   0.36
```

Test poměrů

Dvouvýběrový test:

$$H_0 : \quad p_1 = p_2 = p$$
$$H_A : \quad p_1 \neq p_2$$

$$T = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p_0(1-p_0)(1/N_1 + 1/N_2)}}$$

$$\sim \mathrm{N}(0,1)$$

Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 322 dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 234 dotázaných absovovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 158 případech odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 86 jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

Liší se statisticky významně poměr absolventů pracujících v oboru pro tyto dvě univerzity?

$$\hat{p}_1 = 322/480 = 0,67, \quad \hat{p}_2 = 234/320 = 0,73$$

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	322	234	556
mimo obor	158	86	244
celkem	480	320	800

Test poměrů

Dvouvýběrový test:

$$H_0: \quad p_1 = p_2 = p$$
$$H_A: \quad p_1 \neq p_2$$

$$T = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p_0(1-p_0)(1/N_1 + 1/N_2)}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Příklad:

```
> prop.test(c(322,234),c(480,320))

   2-sample test for equality of proportions with continuity correction

data:  c(322, 234) out of c(480, 320)
X-squared = 3.0273, df = 1, p-value = 0.08187
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 -0.127257708  0.006424375
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.6708333 0.7312500
```

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	322	234	556
mimo obor	158	86	244
celkem	480	320	800

Test nezávislosti v kontingenční tabulce

Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 322 dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 234 dotázaných absovovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 158 případech odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 86 jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

Lze považovat uplatnění se v oboru studia stochasticky závislé na absolvované univerzitě?

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	0,4025	0,2925	0,695
mimo obor	0,1975	0,1075	0,305
celkem	0,6000	0,4000	1,000

$0{,}695 \times 0{,}6 = 0{,}417 \neq 0{,}4025$

Test nezávislosti v kontingenční tabulce

Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 322 dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 234 dotázaných absovovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 158 případech odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 86 jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

Lze považovat uplatnění se v oboru studia stochasticky závislé na absolvované univerzitě?

Test chí-kvadrát:

$$H_0 : n_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n} \quad \text{pro všechny dvojice } i,j$$

$$H_A : n_{ij} \neq \frac{n_{i.} n_{.j}}{n} \quad \text{pro nějakou dvojici } i,j$$

kde $n_{i.} = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}, \; n_{.j} = \sum_{i=1}^{n} n_{ij}.$

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	0,4025	0,2925	0,695
mimo obor	0,1975	0,1075	0,305
celkem	0,6000	0,4000	1,000

0,695x0,6 = 0,417 ≠ 0,4025

Test nezávislosti v kontingenční tabulce

Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 322 dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 234 dotázaných absovovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 158 případech odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 86 jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

Lze považovat uplatnění se v oboru studia stochasticky závislé na absolvované univerzitě?

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
mimo obor	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
celkem	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

Test chí-kvadrát:

$$H_0 : n_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n}$$ pro všechny dvojice i,j

$$H_A : n_{ij} \neq \frac{n_{i.} n_{.j}}{n}$$ pro nějakou dvojici i,j

kde $n_{i.} = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}, \; n_{.j} = \sum_{i=1}^{n} n_{ij}.$

Test nezávislosti v kontingenční tabulce

Test chí-kvadrát:

Označme $n_{ij}^* = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$ tzv. teoretické (očekávané) četnosti. Potom testová statistika

bude mít tvar: $$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*} \sim \chi^2(r-1)(s-1)$$

Hypotézu H_0 o nezávislosti znaků zamítáme na hladině významnosti α, pokud hodnota testové statistiky X^2 překročí $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení chí-kvadrát o $(r-1)(s-1)$ stupních volnosti.

Podmínky pro použití testu nezávislosti v kontingenční tabulce:

- žádná teoretická četnost nesmí být menší než 1
- nejvíce 20 % teoretických četností může být menších než 5
- pro tabulku 2x2 (čtyřpolní) musí navíc platit, že:
    - $n > 40$, jinak
    - pro $20 < n < 40$, je nutná úprava test. kriteria pomocí tzv. Yatesovy korekce
    - pro $n<20$ je třeba použít tzv. přesný Fisherův test.

Test nezávislosti v kontingenční tabulce

Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 322 dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 234 dotázaných absovovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 158 případech odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 86 jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

Lze považovat uplatnění se v oboru studia stochasticky závislé na absolvované univerzitě?

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	322	234	556
mimo obor	158	86	244
celkem	480	320	800

```
> pruzkum <- matrix(c(322, 234, 158, 86),2)
> colnames(pruzkum)= c("CVUT","UK")
> rownames(pruzkum)= c("v oboru", "mimo obor")
> pruzkum
          CVUT  UK
v oboru    322 158
mimo obor  234  86

> chisq.test(pruzkum)
  Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction

 data: pruzkum, X-squared = 3.0273, df = 1, p-value = 0.08187
```

Test nezávislosti v kontingenční tabulce

Fisherův test je založen na tzv. poměru šancí (Odds ratio) výskytu určité události v závislosti na události druhé (v našem příkladu „CVUT“ a „v oboru“). Kvantifikuje tedy sílu vztahu mezi těmito dvěma veličinami.

$$\mathrm{OR} = \frac{P(\text{jev nastane})}{P(\text{jev nenastane})} = \frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}}$$

OR = 1 : žádná závislost mezi zkoumanými událostmi – pravděpodobnost nastání jedné události je stejná nezávisle na přítomnosti či nepřítomnosti druhé

OR > 1 : přítomnost jedné události navyšuje šanci na nastání události druhé

OR < 1 : přítomnost jedné události snižuje šanci na nastání události druhé

	ČVUT ano	ČVUT ne	celkem
v oboru ano	322	234	556
v oboru ne	158	86	244
celkem	480	320	800

```
> fisher.test(pruzkum)

    Fisher's Exact Test for Count Data

data:  pruzkum,  p-value = 0.07187
alternative hypothesis: true odds ratio is not equal to 1
95 percent confidence interval: 0.5407144 1.0343715
sample estimates: odds ratio 0.7492708
```

Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

13. Síla testu a rozsah výběru

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2023/2024

13. Síla testu a rozsah výběru

Klíčové pojmy:

- Síla testu
- Rozsah výběru

Klíčové vztahy:

- Test chí-kvadrát
- Fisherův test

Síla testu

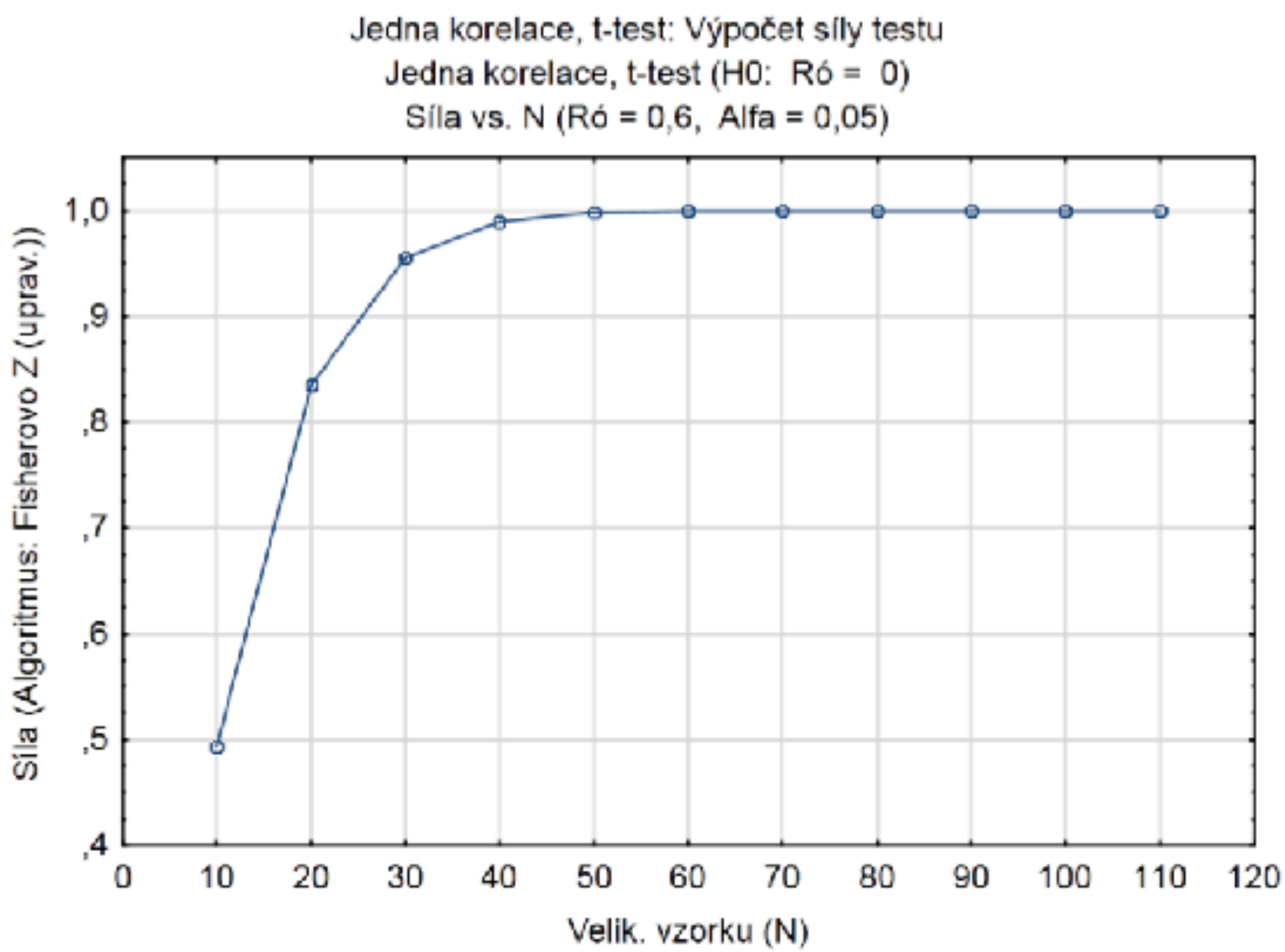
Síla testu je pravděpodobnost toho, že test zamítne hypotézu když neplatí, tedy je rovna (1- β), kde β je pravděpodobnost chyby II. druhu (= nezamítáme nulovou hypotézu když nepatí)

Síla testu je vlastnost testu, tedy závisí především na:

- testové statistice
- alternativní hypotéze
- na velikosti výběru
- no a samozřejmě na datech

V případě t-testu závisí na

- rozptylu dat σ^2
- předpokládané diferenci δ
- na velikosti výběru n

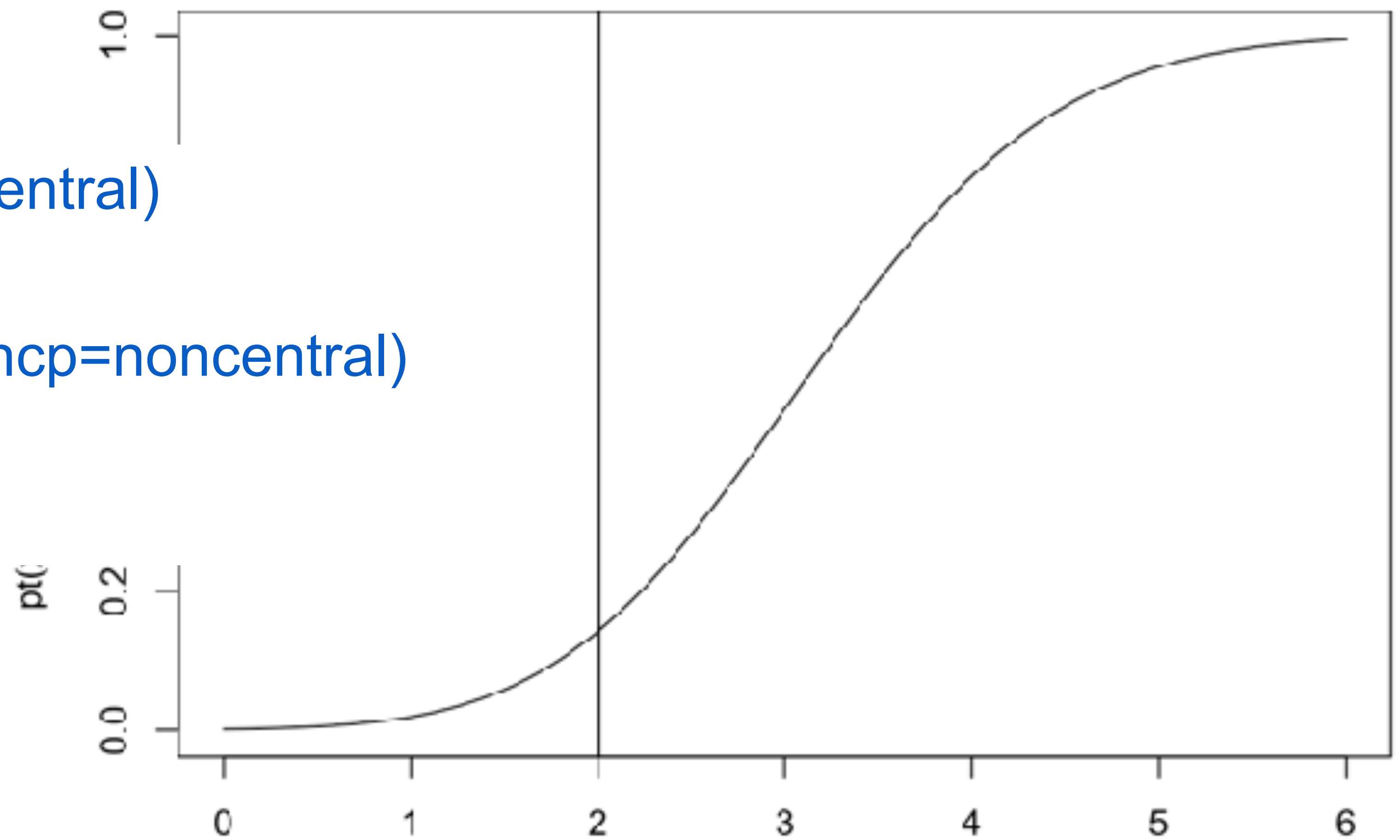


Síla testu

Jednovýběrový t-test (nebo párový t-test): Za předpokladu alternativní hypotézy H_A: $\mu = m_0 + \delta$ má testová statistika tzv. necentrální t-rozdělení s parametrem necentrality $\nu = \frac{\delta}{\sigma}\sqrt{n}$

```
> davky <- data.matrix(read.table("davkovac.txt"))
> n = 50;  delta = 0.2
> noncentral = delta*sqrt(n)/sd(davky)
> curve(pt(x,n-1,ncp=noncentral), from=0, to=10)
> abline(v=qt(0.975, n-1))

> pt(qt(0.975,n-1), n-1,ncp=noncentral)
[1] 0.1438221
> power=1-pt(qt(0.975,n-1), n-1,ncp=noncentral)
> power
[1] 0.8561779
```



Síla testu

Jednovýběrový t-test (nebo párový t-test):

```
> power.t.test(delta=0.2, sd=sd(davky), sig.level=0.05, power=0.9,
    type="one.sample")

     One-sample t test power calculation

              n = 57.18447
          delta = 0.2
             sd = 0.458528
      sig.level = 0.05
          power = 0.9
    alternative = two.sided
```

Při ručním počítání obvykle předpokládáme znalost směrodatné odchylky σ a namísto t-rozdělení použijeme standardní normální rozdělení (a jeho kvantily u_p). Požadovaná síla testu je zde označena β. Potom lze odvodit přibližný vztah:

$$n = \left[\left(\frac{u_{\alpha/2} + u_\beta}{\delta/\sigma} \right)^2 \right] + 1$$

Síla testu

Dvouvýběrový t-test: Za předpokladu alternativní hypotézy H_A: $\mu_X - \mu_Y = \delta$ má testová statistika necentrální t-rozdělení s parametrem necentrality

$$\nu = \frac{\delta}{\sigma\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}}$$

```
> x <- data.matrix(read.table("dodavatelX.txt"))
> y <- data.matrix(read.table(„dodavatelY.txt"))
> z=c(x,y)

> power.t.test(delta=2, sd=sd(z), sig.level=0.05, power=0.9)

     Two-sample t test power calculation

              n = 43.59226
          delta = 2
             sd = 2.847857
      sig.level = 0.05
          power = 0.9
    alternative = two.sided

NOTE: n is number in *each* group
```

Síla testu

Dvouvýběrový t-test: Za předpokladu alternativní hypotézy H_A: $\mu_X - \mu_Y = \delta$ má testová statistika necentrální t-rozdělení s parametrem necentrality

$$\nu = \frac{\delta}{\sigma\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}}$$

```
> x <- data.matrix(read.table("dodavatelX.txt"))
> y <- data.matrix(read.table(„dodavatelY.txt"))
> z=c(x,y)

> power.t.test(n=100, delta=2, sd=sd(z), sig.level=0.05)

     Two-sample t test power calculation

              n = 100
          delta = 2
             sd = 2.847857
      sig.level = 0.05
          power = 0.9985668
    alternative = two.sided

NOTE: n is number in *each* group
```

Síla testu

Dvouvýběrový t-test: Za předpokladu alternativní hypotézy H_A: $\mu_X - \mu_Y = \delta$ má testová statistika necentrální t-rozdělení s parametrem necentrality

$$\nu = \frac{\delta}{\sigma\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}}$$

```
> x <- data.matrix(read.table("dodavatelX.txt"))
> y <- data.matrix(read.table(„dodavatelY.txt"))
> z=c(x,y)

> power.t.test(delta=2, sd=sd(z), sig.level=0.05, power=0.9,
  alt="one.sided")

     Two-sample t test power calculation

              n = 35.42511
          delta = 2
             sd = 2.847857
      sig.level = 0.05
          power = 0.9
    alternative = one.sided

NOTE: n is number in *each* group
```

Síla testu

Dvouvýběrový t-test: Za předpokladu alternativní hypotézy H_A: $\mu_X - \mu_Y = \delta$ má testová statistika necentrální t-rozdělení s parametrem necentrality

$$\nu = \frac{\delta}{\sigma\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}}$$

```
> x <- data.matrix(read.table("dodavatelX.txt"))
> y <- data.matrix(read.table(„dodavatelY.txt"))
> z=c(x,y)

> power.t.test(delta=2, sd=5.0, sig.level=0.05, power=0.9,
  alt="one.sided")

     Two-sample t test power calculation

              n = 107.7313
          delta = 2
             sd = 5
      sig.level = 0.05
          power = 0.9
    alternative = one.sided

NOTE: n is number in *each* group
```

Síla testu

Dvouvýběrový t-test: Za předpokladu alternativní hypotézy H_A: $\mu_X - \mu_Y = \delta$ má testová statistika necentrální t-rozdělení s parametrem necentrality

$$\nu = \frac{\delta}{\sigma\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}}$$

Při ručním počítání obvykle předpokládáme znalost směrodatné odchylky σ a namísto t-rozdělení použijeme standardní normální rozdělení (a jeho kvantily u_p). Požadovaná síla testu je zde označena β. Potom lze odvodit přibližný vztah:

$$n = 2 \cdot \left[\left(\frac{u_{\alpha/2} + u_\beta}{\delta/\sigma} \right)^2 \right] + 1$$

(Toto n je pro každou skupinu.)

Síla testu

Porovnání dvou poměrů:

```
> power.prop.test(n=400, p1=0.67, p2=0.73)

     Two-sample comparison of proportions power calculation

              n = 400
             p1 = 0.67
             p2 = 0.73
      sig.level = 0.05
          power = 0.4567771
    alternative = two.sided

NOTE: n is number in *each* group
```

Síla testu

Porovnání dvou poměrů:

```
> power.prop.test(power=0.9, p1=0.67, p2=0.73)

     Two-sample comparison of proportions power calculation

              n = 1223.788
             p1 = 0.67
             p2 = 0.73
      sig.level = 0.05
          power = 0.9
    alternative = two.sided

NOTE: n is number in *each* group
```

Síla testu

Porovnání dvou poměrů:

```
> power.prop.test(power=0.85, p1=0.67, p2=0.73)

     Two-sample comparison of proportions power calculation

              n = 1045.926
             p1 = 0.67
             p2 = 0.73
      sig.level = 0.05
          power = 0.85
    alternative = two.sided

NOTE: n is number in *each* group
```