

Pravděpodobnost a matematická statistika

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

dohnal@nipax.cz



I. Úvod

<https://sms.nipax.cz/pas>

Základy stochastiky

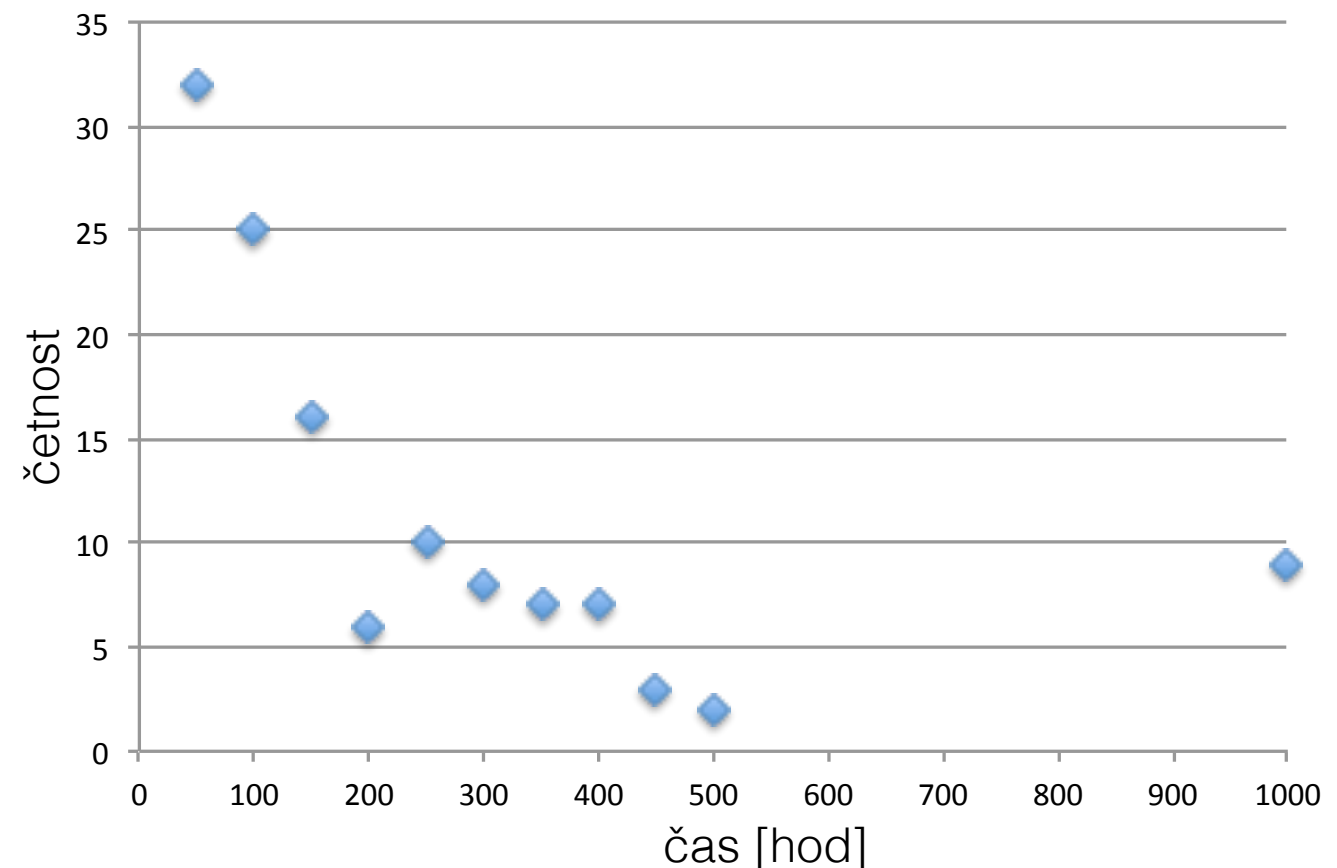
- (1) Jiří Likeš, Josef Machek: Počet pravděpodobnosti. Sešit X edice MVŠT, SNTL Praha 1981
- (2) Jiří Likeš, Josef Machek: Matematická statistika. Sešit XI edice MVŠT, SNTL Praha 1988 (2. vydání)
- (3) tyto přednášky a další učebnice naleznete na adrese:

<https://sms.nipax.cz/zs>



Doba do poruchy navigačních přístrojů

i	t_i	n_i
1	50	32
2	100	25
3	150	16
4	200	6
5	250	10
6	300	8
7	350	7
8	400	7
9	450	3
10	500	2
11	1000	9

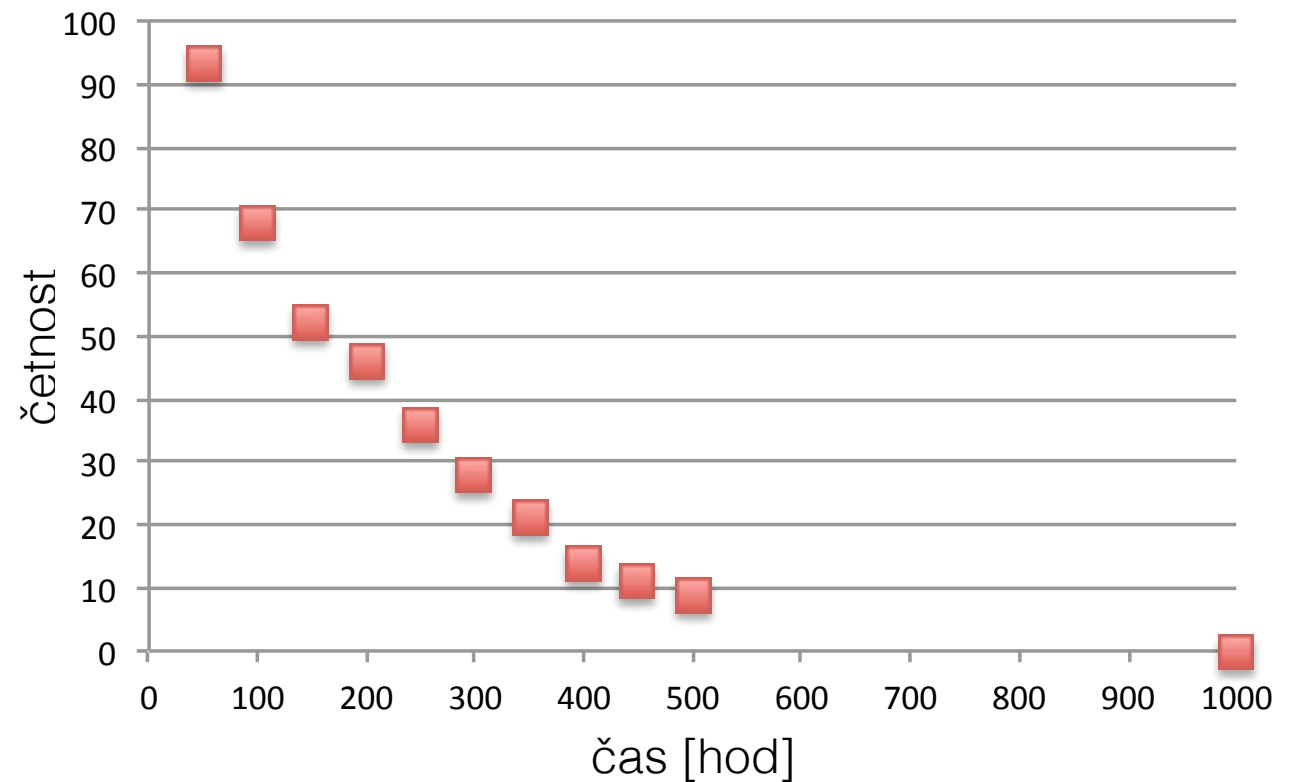


i ... pořadové číslo intervalu,
 t_i ... horní mez intervalu i [hod],
 n_i ... četnost poruch v intervalu i,



Doba do poruchy navigačních přístrojů

i	t_i	n_i	R_i
1	50	32	93
2	100	25	68
3	150	16	52
4	200	6	46
5	250	10	36
6	300	8	28
7	350	7	21
8	400	7	14
9	450	3	11
10	500	2	9
11	1000	9	0



i ... pořadové číslo intervalu,
 t_i ... horní mez intervalu i [hod],
 n_i ... četnost poruch v intervalu i ,

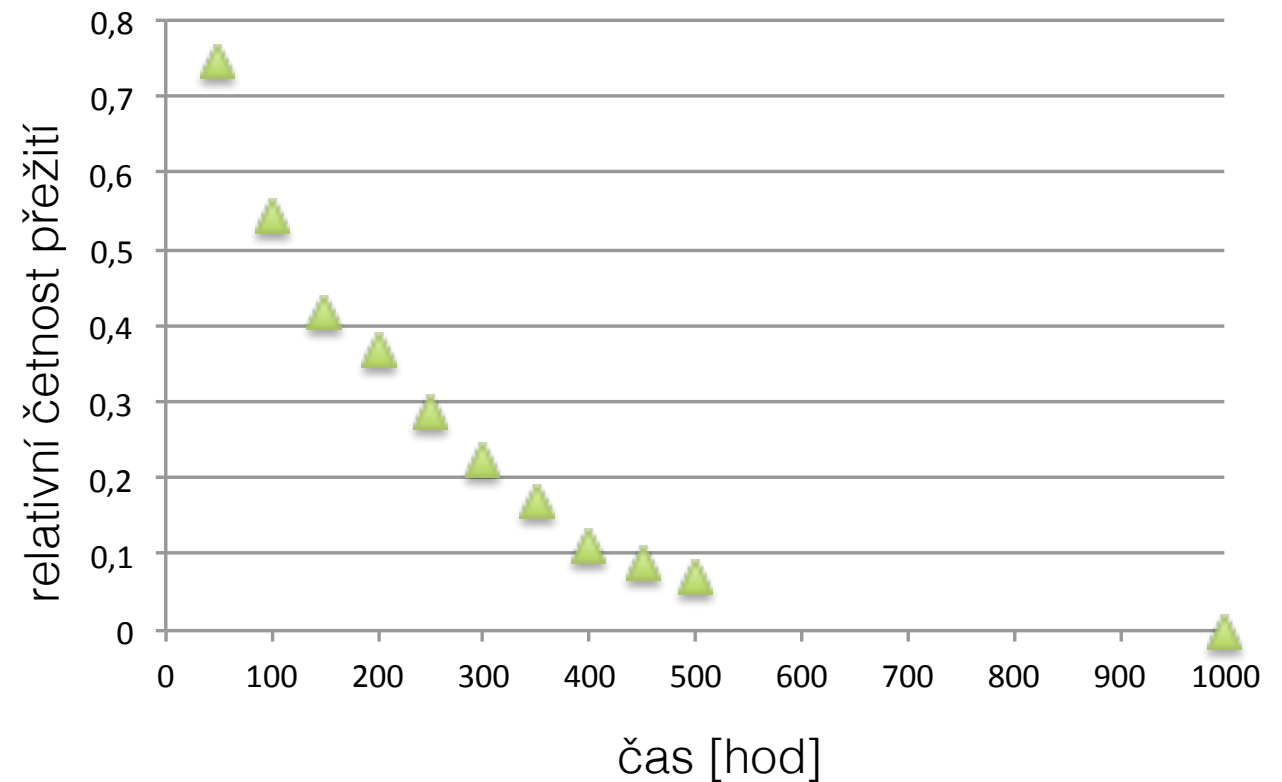
R_i ... četnost přežití intervalu i ,



Doba do poruchy navigačních přístrojů

i	t_i	n_i	R_i	R_i/n
1	50	32	93	0,744
2	100	25	68	0,544
3	150	16	52	0,416
4	200	6	46	0,368
5	250	10	36	0,288
6	300	8	28	0,224
7	350	7	21	0,168
8	400	7	14	0,112
9	450	3	11	0,088
10	500	2	9	0,072
11	1000	9	0	0

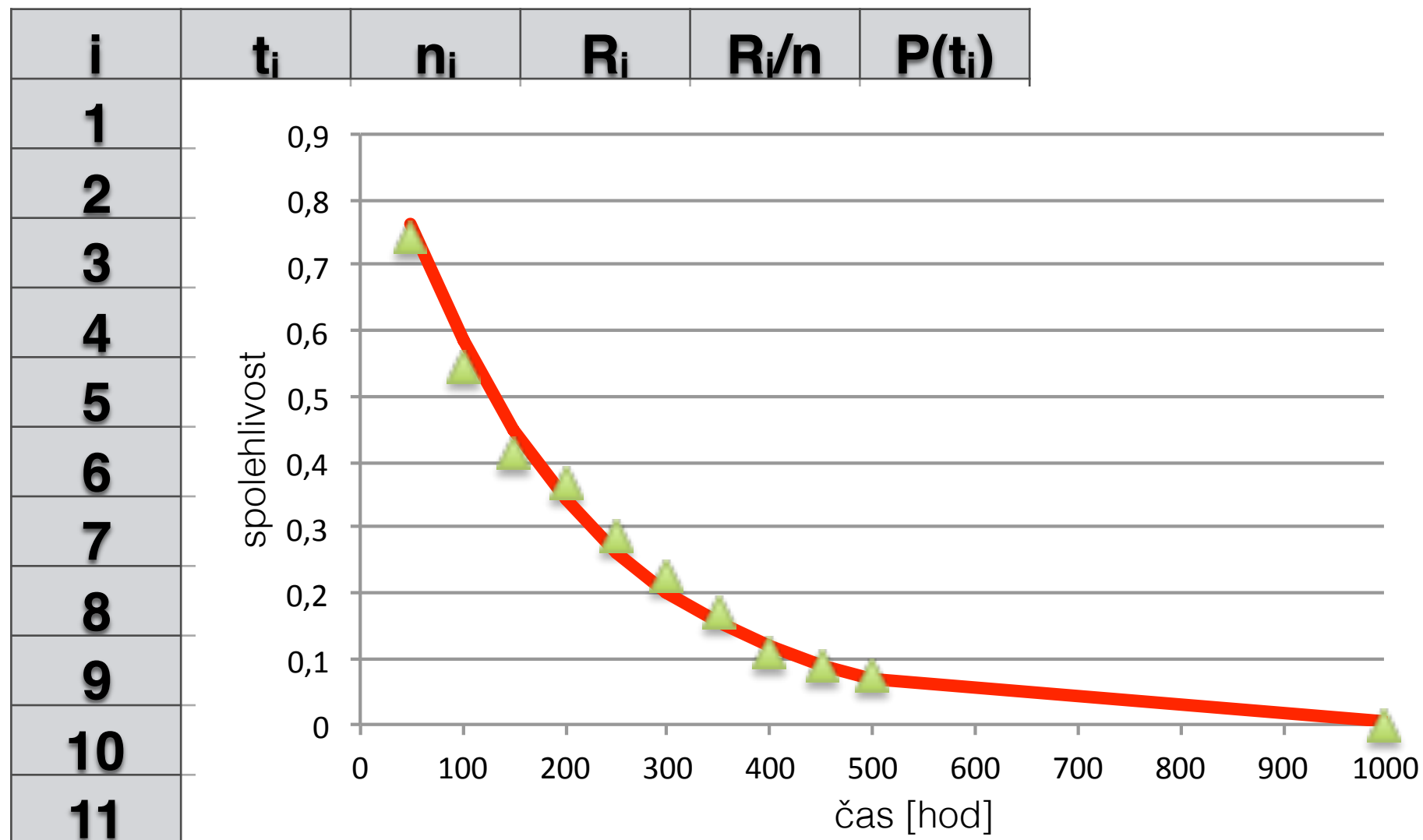
i ... pořadové číslo intervalu,
 t_i ... horní mez intervalu i [hod],
 n_i ... četnost poruch v intervalu i ,



R_i ... četnost přežití intervalu i ,
 R_i/n ... relativní četnost přežití,



Doba do poruchy navigačních přístrojů



i ... pořadové číslo intervalu,
 t_i ... horní mez intervalu i [hod],
 n_i ... četnost poruch v intervalu i ,

R_i ... četnost přežití intervalu i ,
 R_i/n ... relativní četnost přežití,
 $P(t_i)$... odhad funkce spolehlivosti.



Balící automat na kávu

24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455
24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721
24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405
23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285
24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777
24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906



Balící automat na kávu

Stem and Leaf diagram

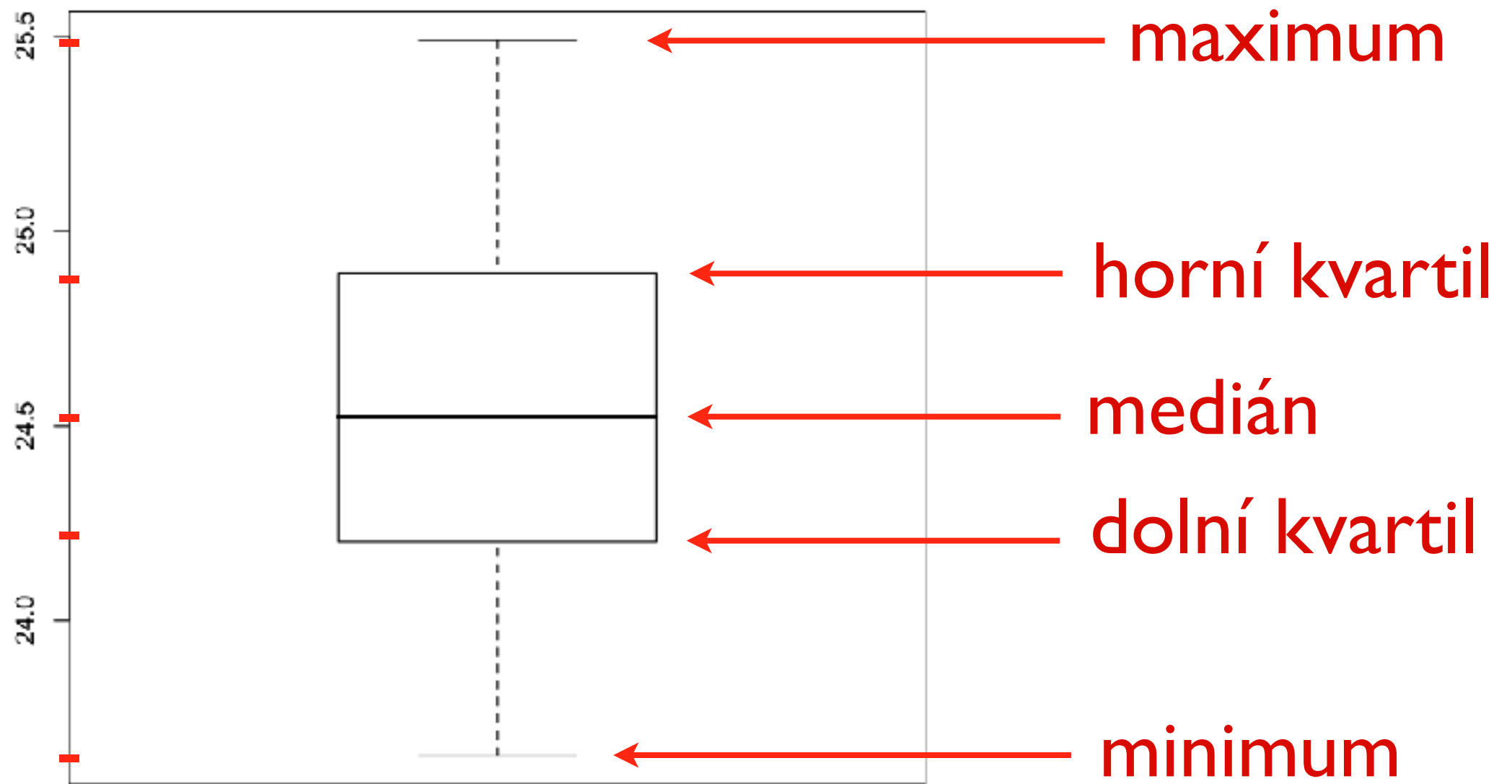


Balící automat na kávu

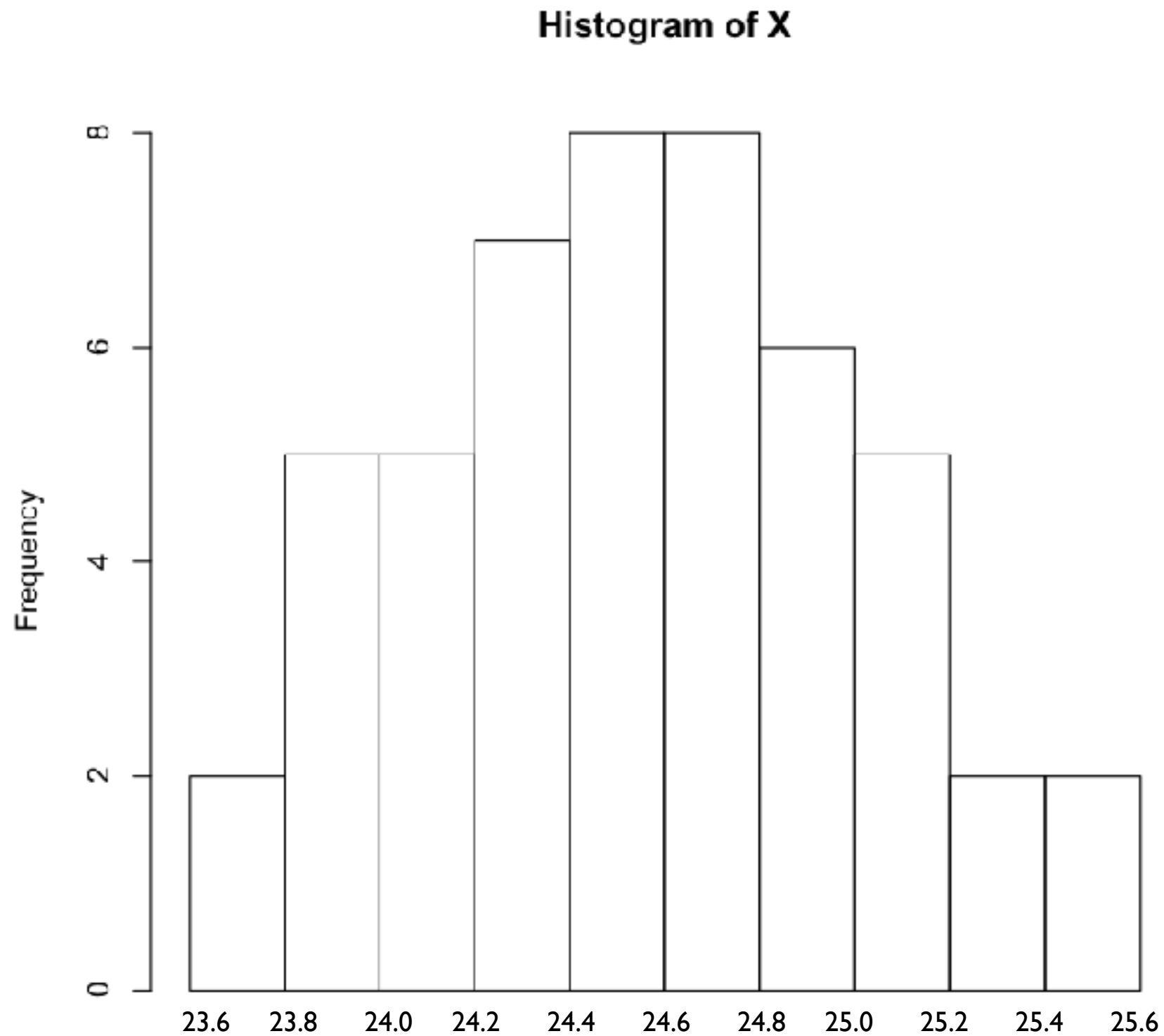
24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455
24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721
24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405
23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285
24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777
24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906



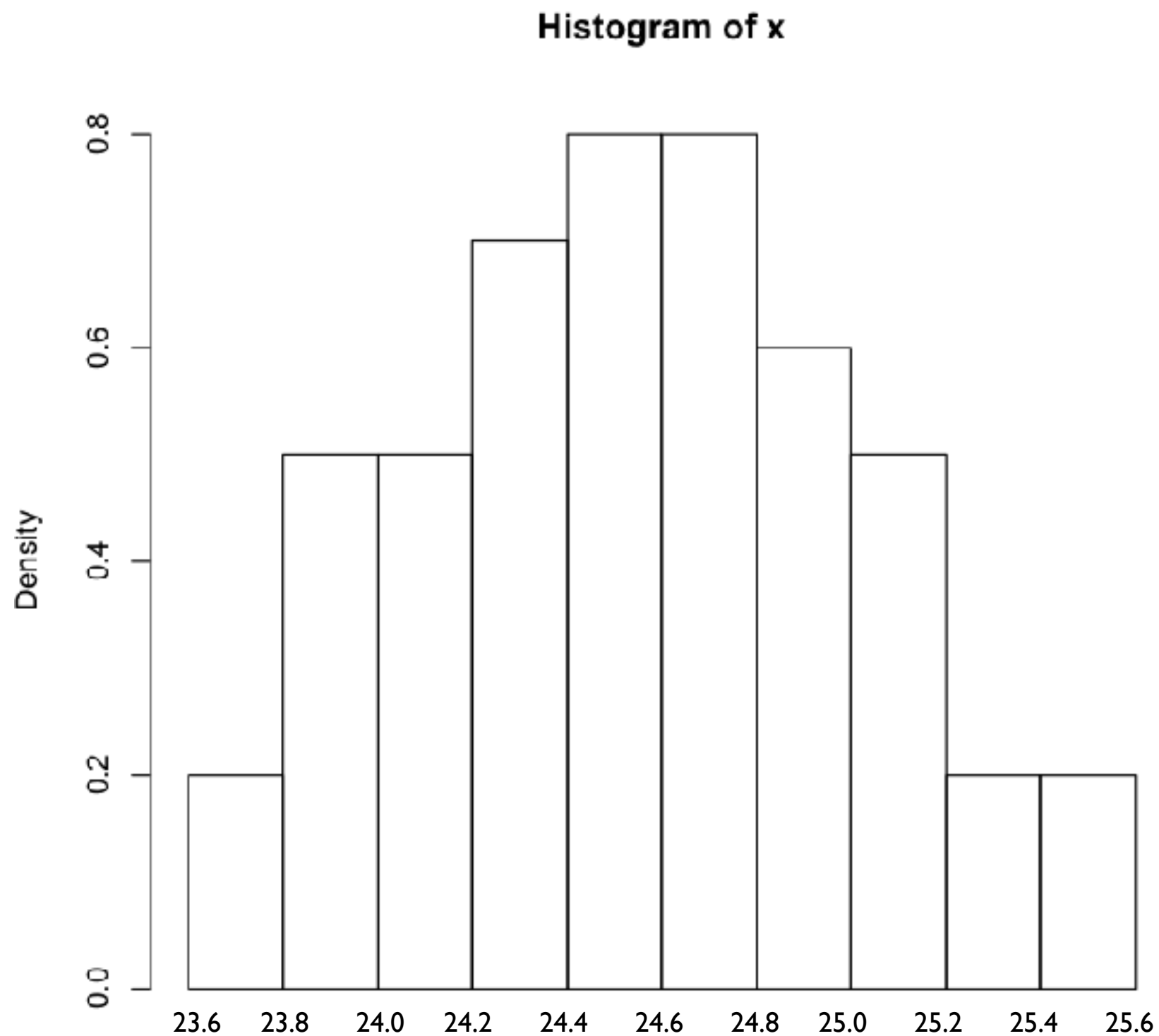
Balící automat na kávu



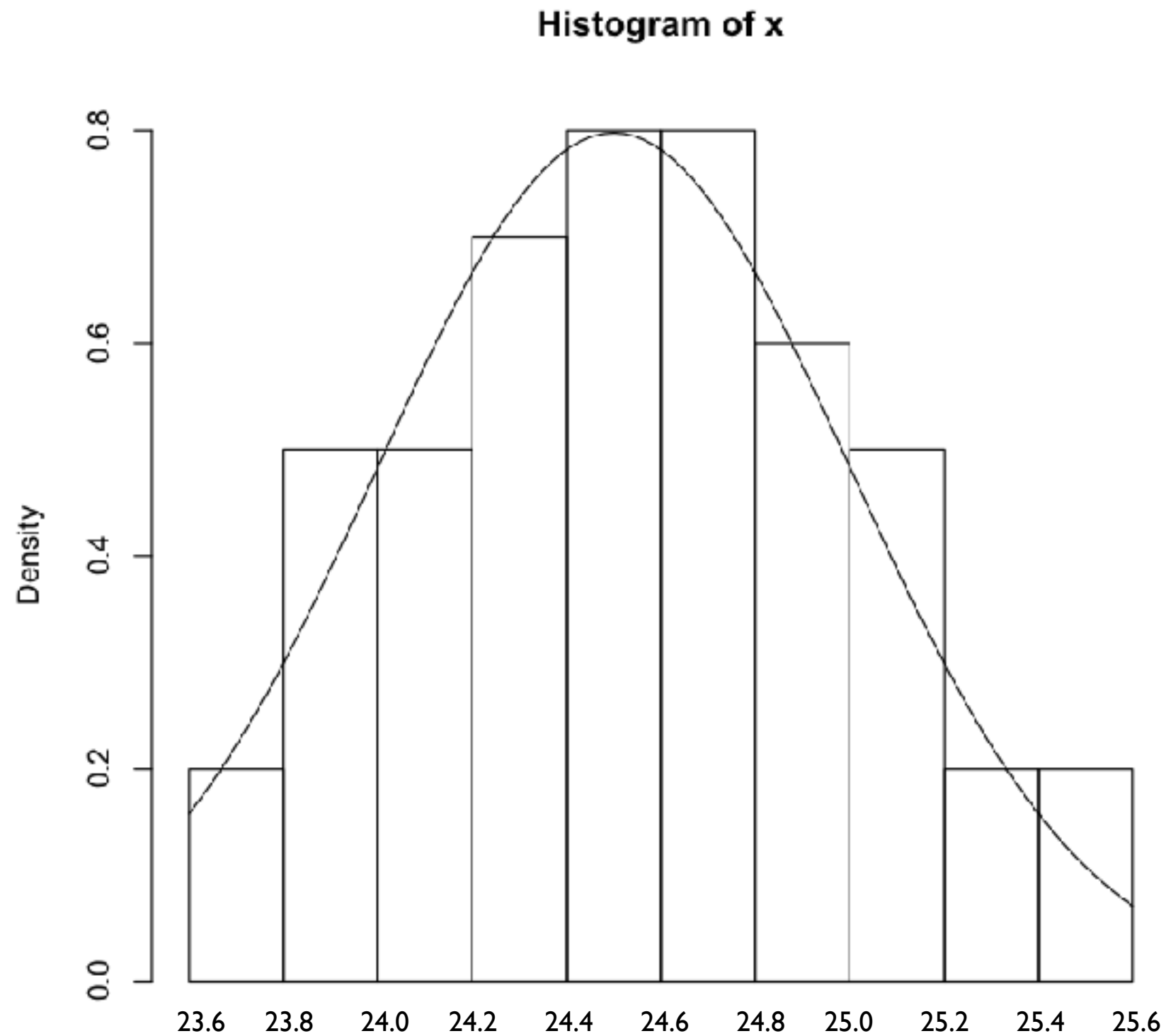
Balící automat na kávu



Balící automat na kávu



Balící automat na kávu



Balící automat na kávu

Výběrový průměr

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = 24.54689$$

Výběrový rozptyl

$$s_{n-1}^2(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 = 0.2102477$$

Výběrová směrodatná odchylka

$$s_{n-1}(X) = \sqrt{s_{n-1}^2(X)} = 0.4585277$$



Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39



$$Y_{\min} = 0.17$$

$$Y_{\max} = 12.64$$

$$Y_{\text{med}} = 3.13$$

$$Y_{\text{LQ}} = 1.15$$

$$Y_{\text{UQ}} = 5.41$$

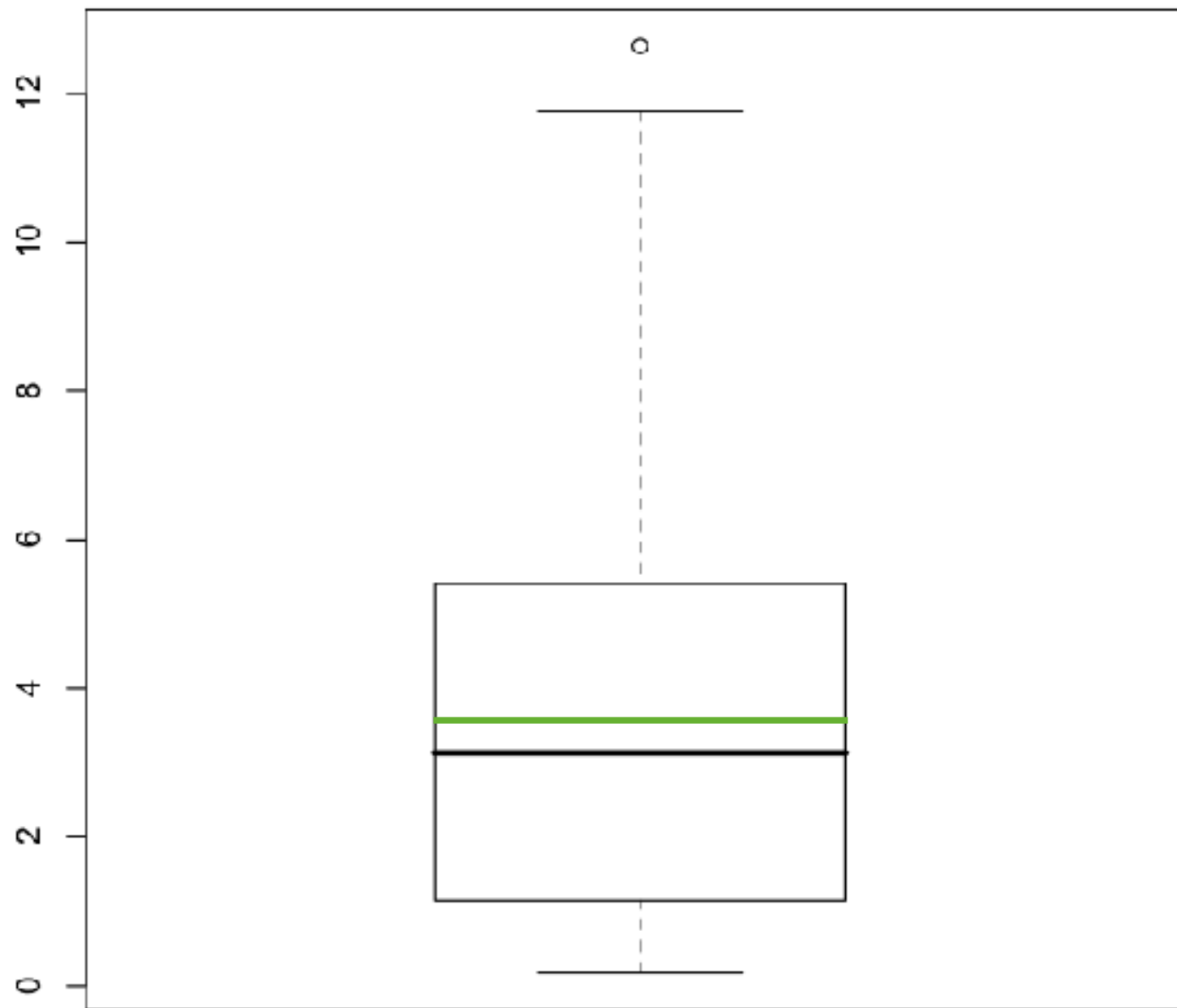
0	2	2	3	3	3	4	5	6	6	8	9	1	1	3	6	7	8	9
2	1	4	6	7	8	9	1	2	3	4	7	9						
4	0	2	7	8	0	0	2	4	6	8								
6	0	1	2	5	2	5												
8	7																	
10	5	8																
12	6																	

$$\bar{Y} = 3.69$$

$$s^2_{n-1}(Y) = 9.0957$$



Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

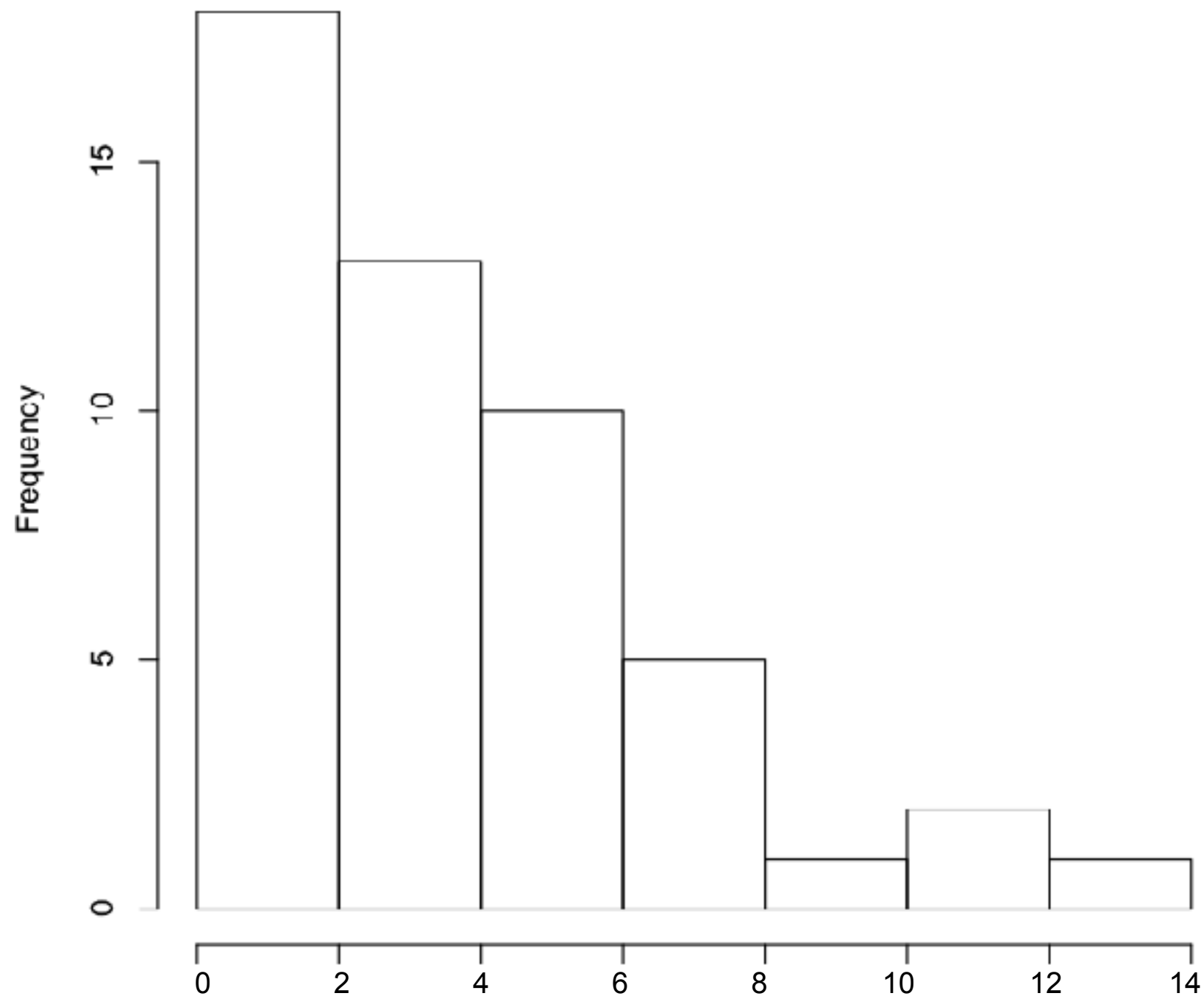


Krabicový graf (Box & Whiskers) Y



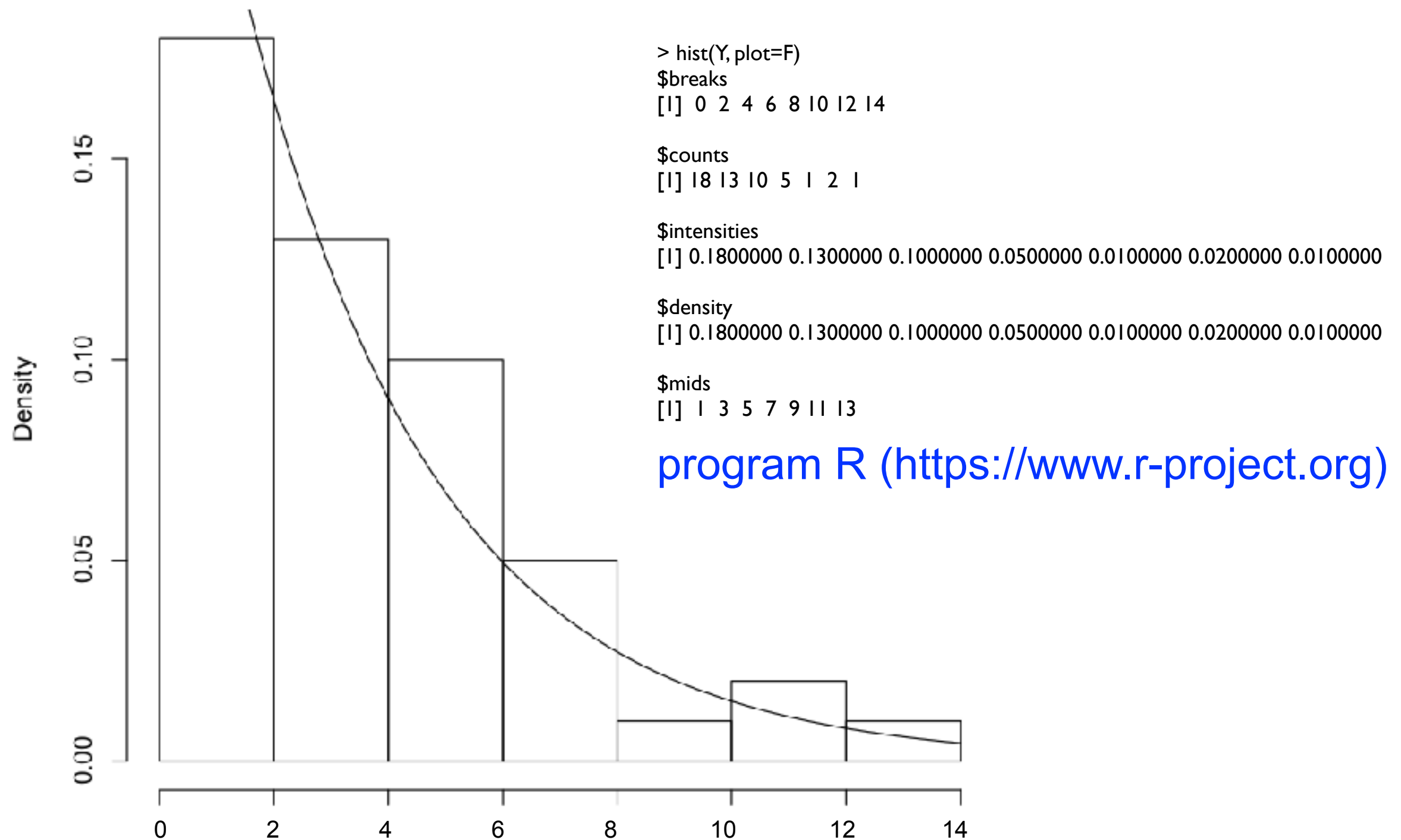
Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

Histogram Y (absolutní četnosti)



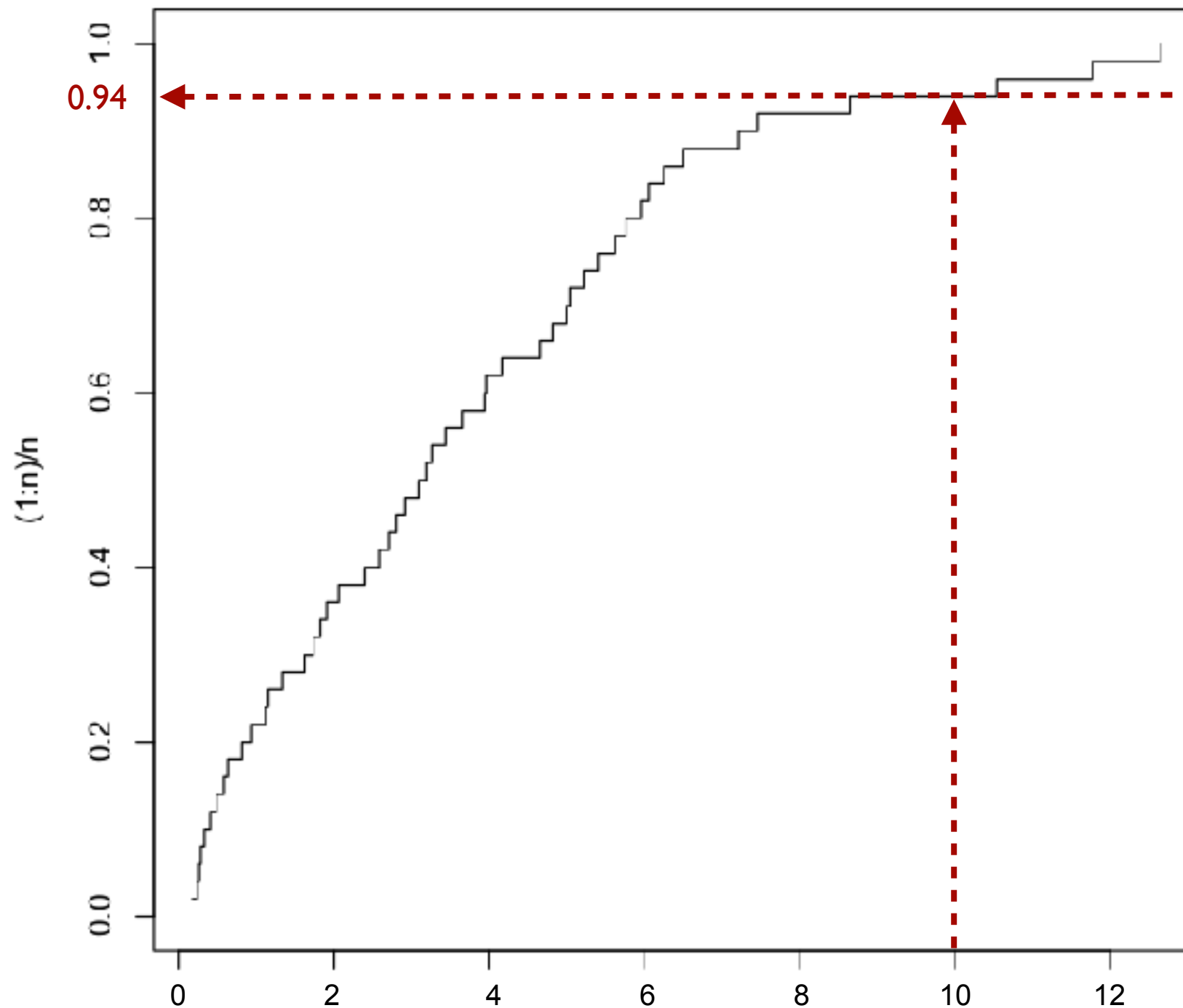
Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

Histogram Y (relativní četnosti)



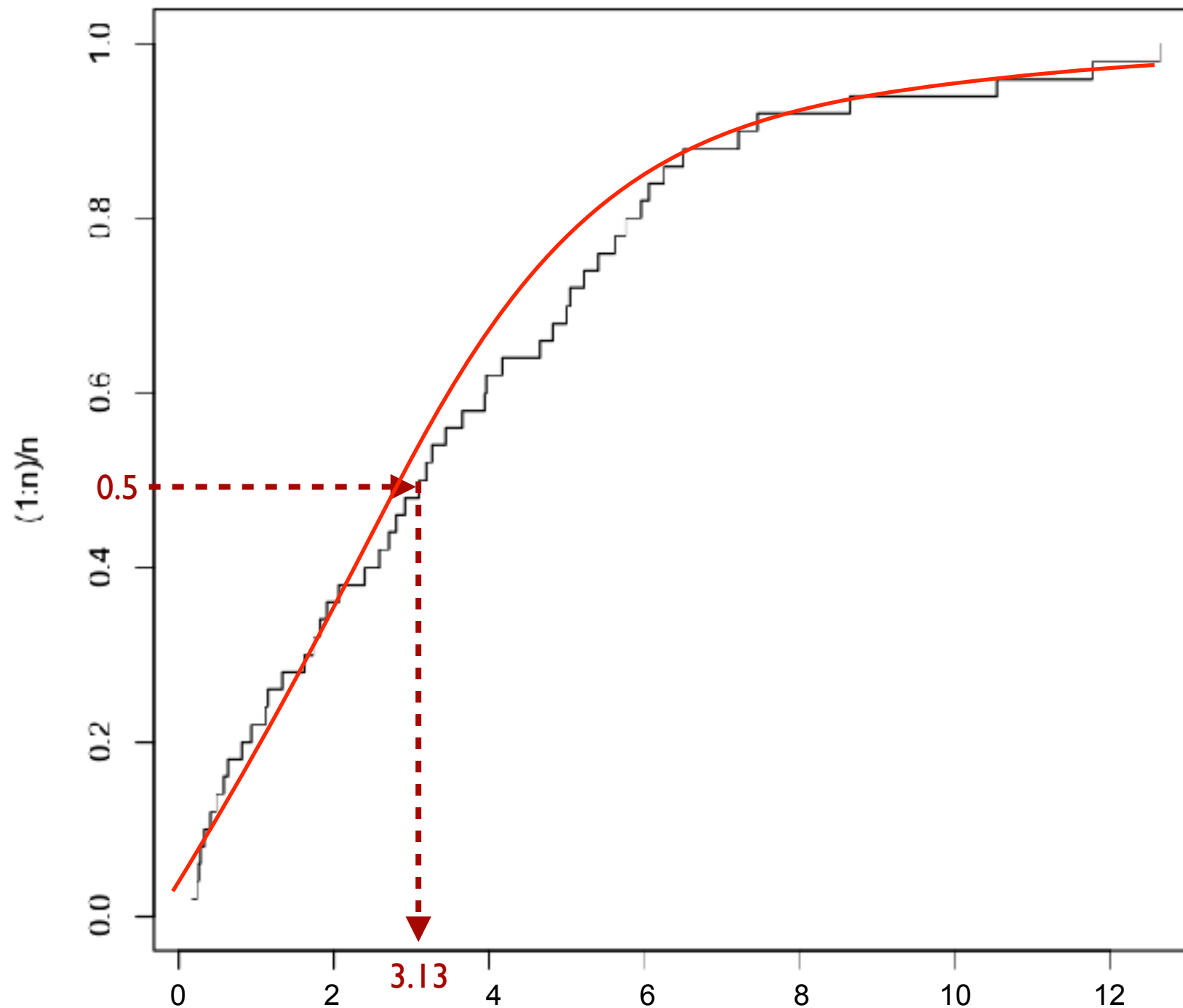
Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

Empirická distribuční funkce Y



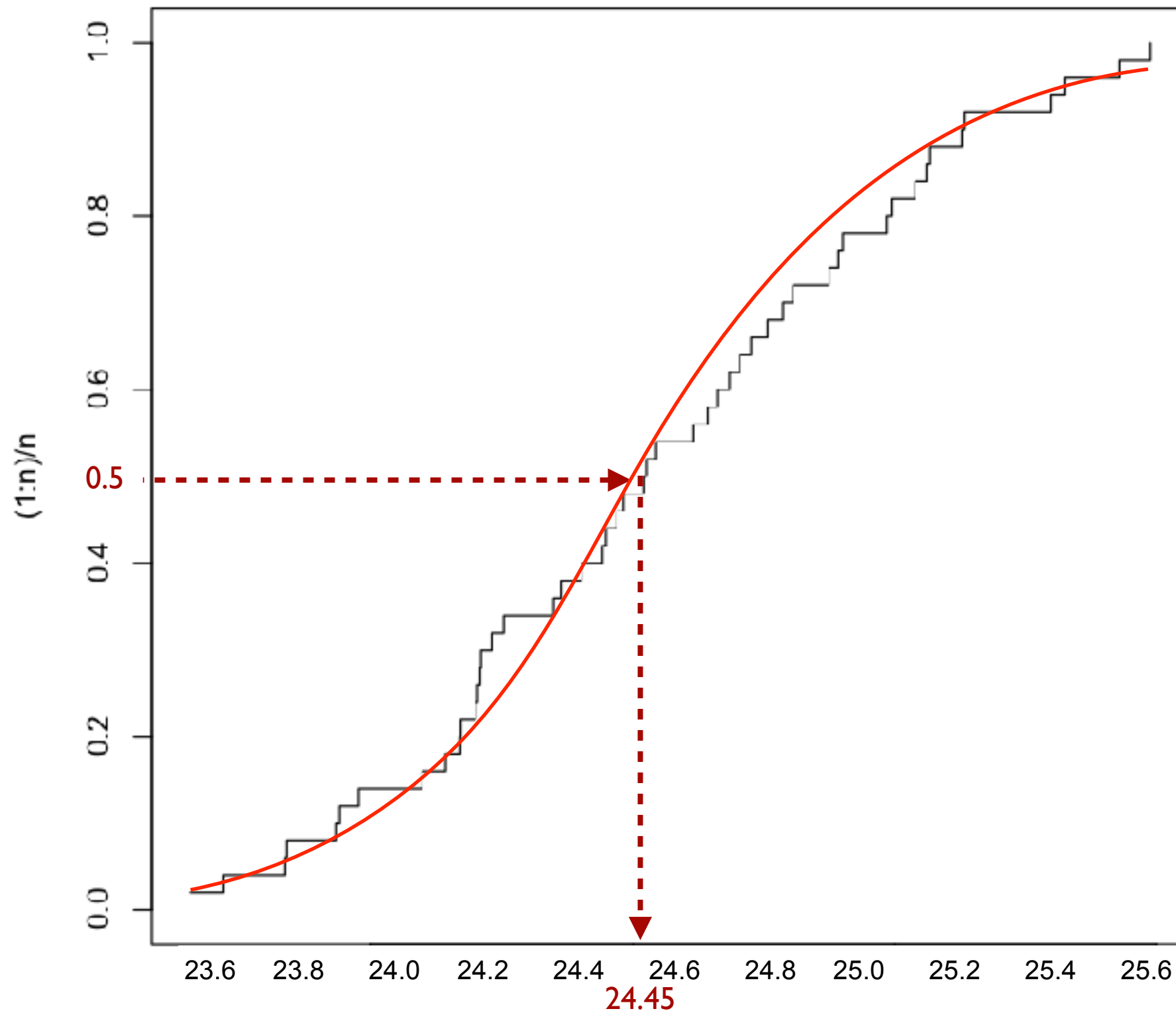
Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

Empirická distribuční funkce Y



Balící automat na kávu

Empirická distribuční funkce Y

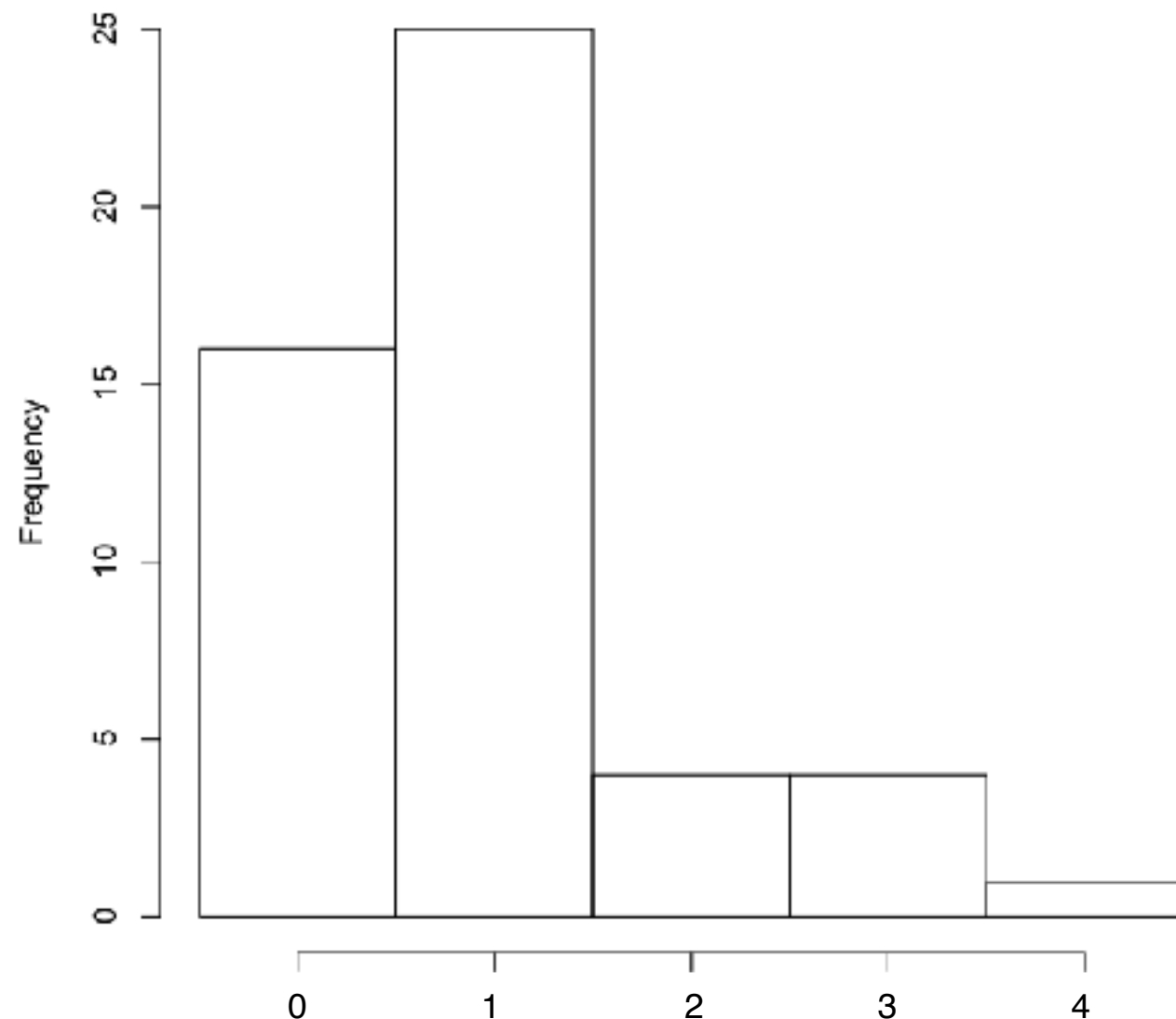


Vadné výrobky v 50 balení po 100 ks

1 1 0 1 1 0 3 1 2 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 2 0
0 0 2 3 1 0 0 2 1 1 1 0 3 1 0 1 0 1 1 0 4 3 1 1 0

0 | IIII
1 | IIII IIII IIII IIII
2 | IIII
3 | IIII
4 | I

Histogram of Z



Vadné výrobky v 50 balení po 100 ks

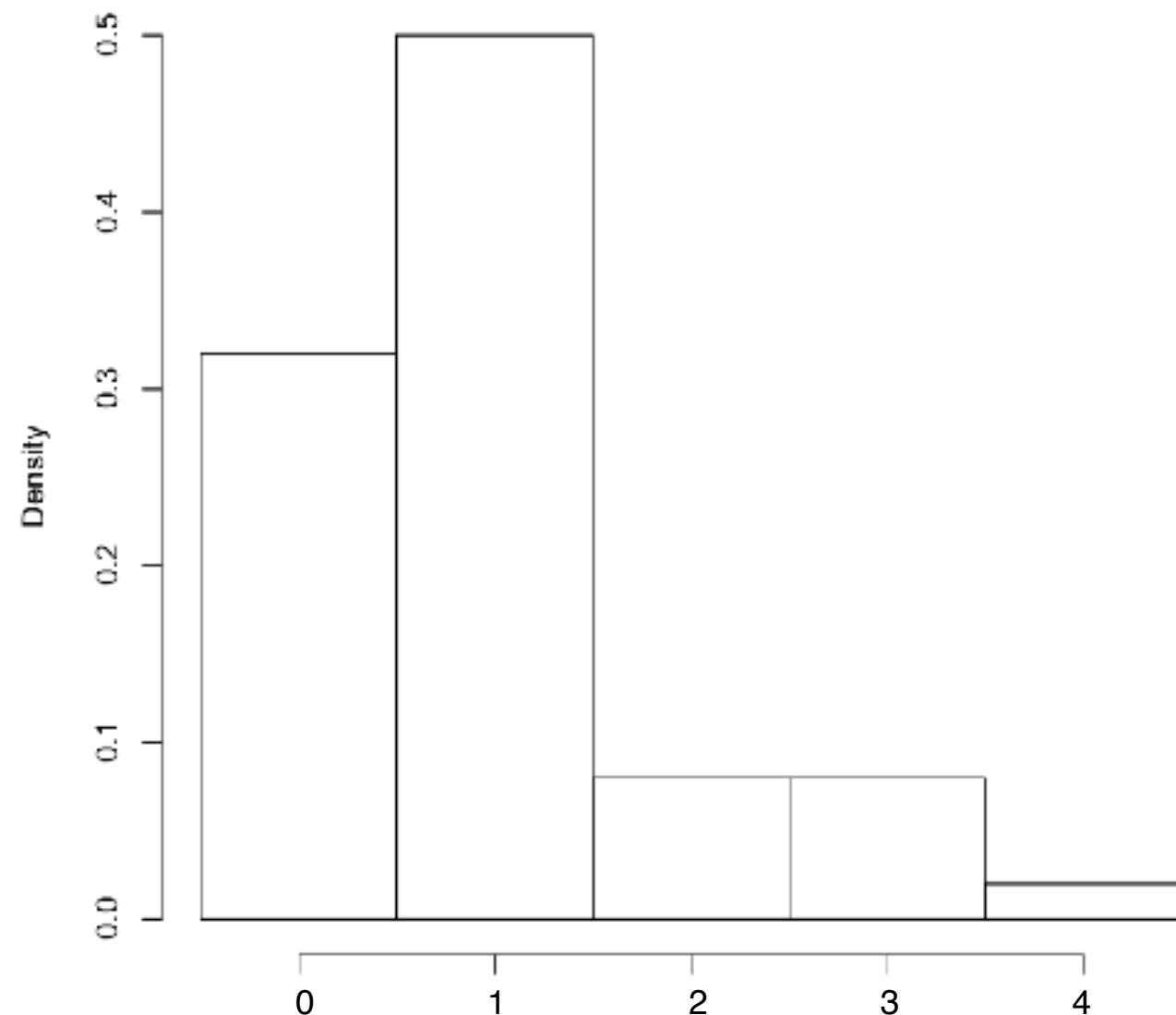
1 1 0 1 1 0 3 1 2 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 2 0
0 0 2 3 1 0 0 2 1 1 1 0 3 1 0 1 0 1 1 0 4 3 1 1 0

0 | IIII IIII IIII I
1 | IIII IIII IIII IIII IIII
2 | IIII
3 | IIII
4 | I

$$\bar{Z} = \frac{49}{50} = 0.98$$

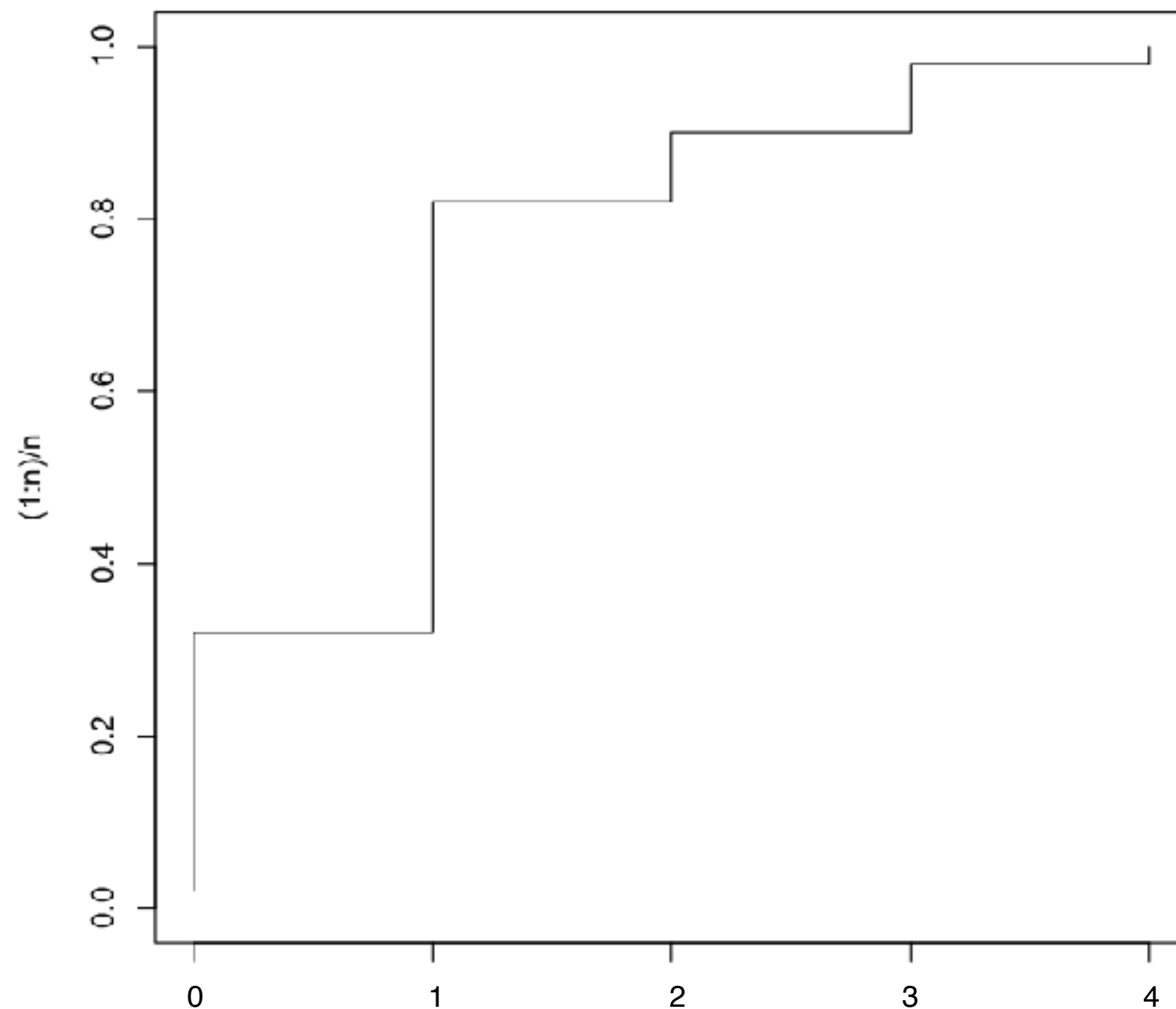
$$\hat{p} = \frac{49}{50 * 100} = 0.0098$$

Histogram of Z



Vadné výrobky v 50 balení po 100 ks

Empirická distribuční funkce Z



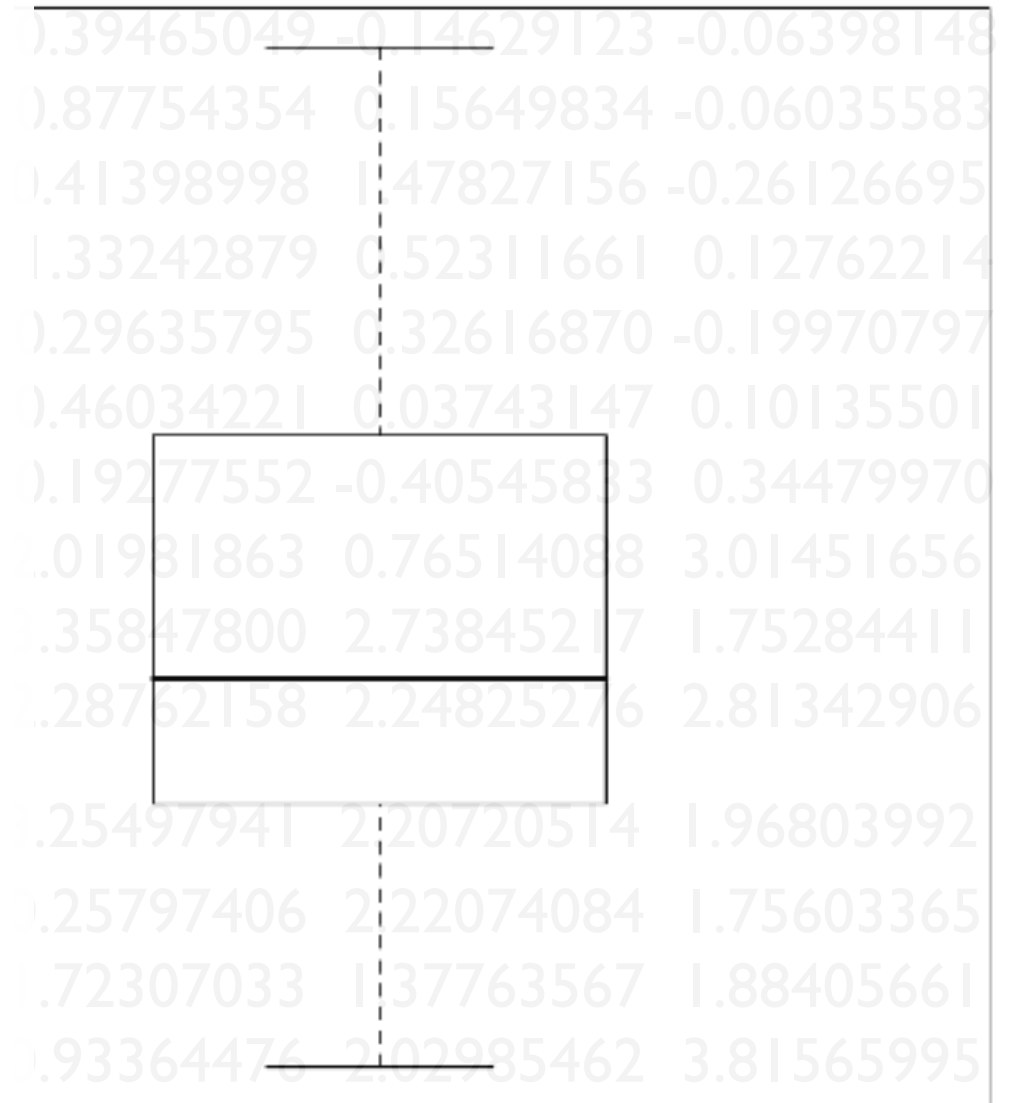
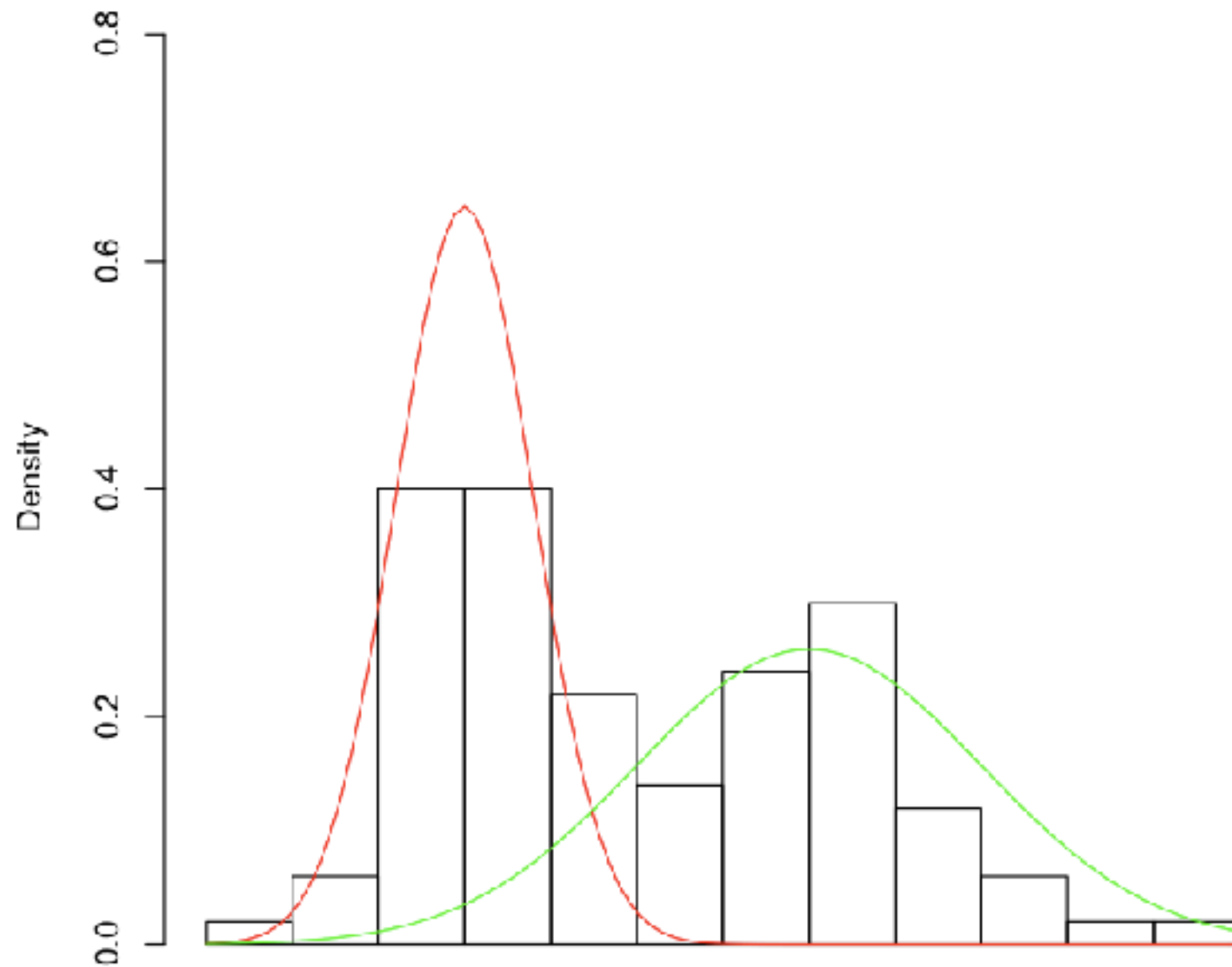
Směs dvou rozdělení

[1]	-0.25640083	0.18603345	-0.32252900	0.14029539	0.39465049	-0.14629123	-0.06398148
[8]	0.10442055	0.51064463	-0.07187202	-0.42318328	0.87754354	0.15649834	-0.06035583
[15]	0.69360581	0.15117762	0.23367583	0.61422960	-0.41398998	1.47827156	-0.26126695
[22]	0.77789548	-0.52023548	-0.08282471	-0.15890144	-1.33242879	0.52311661	0.12762214
[29]	-0.11583169	0.51265392	-0.13004186	-0.24243102	0.29635795	0.32616870	-0.19970797
[36]	-0.01118346	0.12561809	-0.09053659	-0.56441304	0.46034221	0.03743147	0.10135501
[43]	0.26033918	-0.23269814	0.29845597	-0.58751879	-0.19277552	-0.40545833	0.34479970
[50]	0.08673142	2.05546926	1.07953109	2.03748670	2.01981863	0.76514088	3.01451656
[57]	0.81426280	2.92537527	2.35934579	2.16165093	3.35847800	2.73845217	1.75284411
[64]	1.09047564	2.13775360	2.13511623	4.07874750	2.28762158	2.24825276	2.81342906
[71]	0.46444795	1.76316503	1.96194266	1.74588526	3.25497941	2.20720514	1.96803992
[78]	2.47810693	1.10029278	1.29474306	2.14552626	0.25797406	2.22074084	1.75603365
[85]	1.74266678	1.98355362	2.06861315	1.72165585	1.72307033	1.37763567	1.88405661
[92]	2.67042567	2.97843210	2.78023154	1.98062697	0.93364476	2.02985462	3.81565995
[99]	0.56794957	1.31112964					

Směs dvou rozdělení

[1]	-0.25640083	0.18603345	-0.32252900	0.14029539	0.39465049	-0.14629123	-0.06398148
[8]	0.10442055	0.51064463	-0.07187202	-0.42318328	0.87754354	0.15649834	-0.06035583
[15]	0.69360581	0.15117762	0.23367583	0.61422960	-0.41398998	1.47827156	-0.26126695
[22]	0.77789548	-0.52023548	-0.08282471	-0.15890144	-1.33242879	0.52311661	0.12762214
[29]	-0.11583169	0.51265392	-0.13004186	-0.24243102	0.29635795	0.32616870	-0.19970797
[36]	-0.01118346	0.12561809	-0.09053659	-0.56441304	0.46034221	0.03743147	0.10135501
[43]	0.26033918	-0.23269814	0.29845597	-0.58751879	-0.19277552	-0.40545833	0.34479970
[50]	0.08673142	2.05546926	1.07953109	2.03748670	2.01981863	0.76514088	3.01451656
[57]	0.81426280	2.92537527	2.35934579	2.16165093	3.35847800	2.73845217	1.75284411
[64]	1.09047564	2.13775360	2.13511623	4.07874750	2.28762158	2.24825276	2.81342906
[71]	0.46444795	1.76316503	1.96194266	1.74588526	3.25497941	2.20720514	1.96803992
[78]	2.47810693	1.10029278	1.29474306	2.14552626	0.25797406	2.22074084	1.75603365
[85]	1.74266678	1.98355362	2.06861315	1.72165585	1.72307033	1.37763567	1.88405661
[92]	2.67042567	2.97843210	2.78023154	1.98062697	0.93364476	2.02985462	3.81565995
[99]	0.56794957	1.31112964					

Směs dvou rozdělení



Úvod do teorie pravděpodobnosti

- Náhoda a pravděpodobnost,
- náhodný jev, náhodná veličina
- rozdělení pravděpodobnosti a jeho souvislost s histogramem
- pravidla pro počítání s pravděpodobností
- podmíněná pravděpodobnost
- závislost náhodných veličin
- využití závislosti při stanovení pravděpodobnosti - věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta

(1) Jiří Likš, Josef Machek: Počet pravděpodobnosti. Sešit X edice MVŠT, SNTL Praha 1981

(2) další učebnice naleznete na adrese: <https://gejza.nipax.cz>



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus = činnost, která může skončit různým výsledkem a my dopředu nevíme kterým

Náhodný jev = výsledek náhodného pokusu, o kterém dopředu nevíme, zda nastane či ne

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
(Kolmogorov, 1933)

Ω - množina elementárních náhodných jevů

$\mathcal{F}$ - jevové pole (σ -algebra náhodných jevů)

(a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

(b) pokud $A \in \mathcal{F}$, potom platí $A^C \in \mathcal{F}$

(c) pokud $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, potom platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

P - pravděpodobnostní míra na $\mathcal{F}$



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Rozdělení sázky

Dva hráči hrají sérii 9 her a vyhraje ten, který první dosáhne 5 vítězství (tedy většinu). Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu 4:2 a je třeba spravedlivě rozdělit sázku mezi oba hráče.

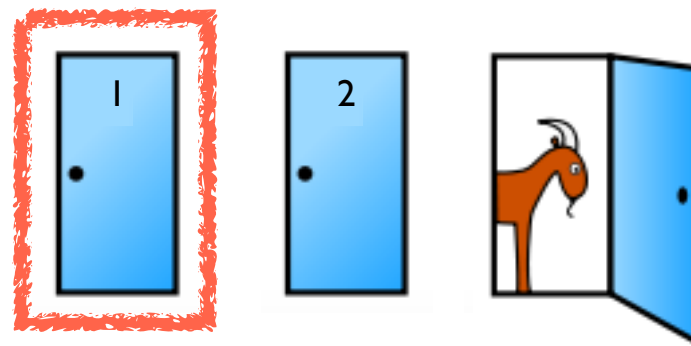
Úloha o rozdělení sázky je jednou z nejstarších dokumentovaných úloh pravděpodobnosti a je připisována Blaise Pascalovi a Pierre de Fermatovi z roku 1654. Ve skutečnosti je však mnohem starší a jsou známy její verze z konce XV. století.

<http://www.statapol.cz/bulletiny/ib-2009-2.pdf>



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Problém tří dveří (Monty Hall Problem)



<http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimpleMontyHall/>



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Definice pravděpodobnosti

1. Klasická definice pravděpodobnosti: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$
 $\mu(A)$ = počet elementárních jevů v jevu A

$\mu(A)$ = “míra” jevu A

2. Axiomatická definice pravděpodobnosti

(a) $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

(b) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

3. Statistická definice pravděpodobnosti: $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Pravidla pro počítání s pravděpodobností

1) $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

2) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

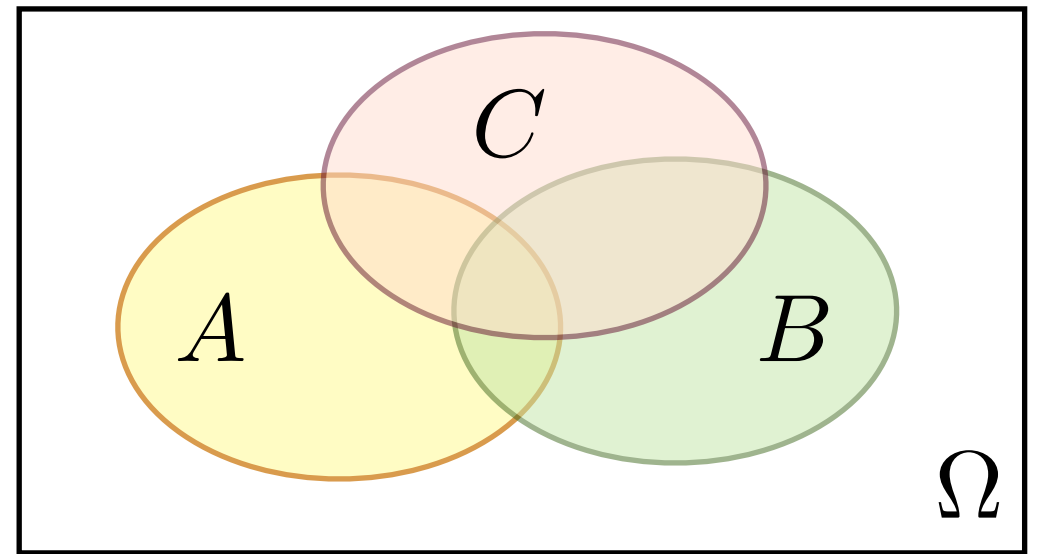
3) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

6) $P(A^C) = 1 - P(A)$

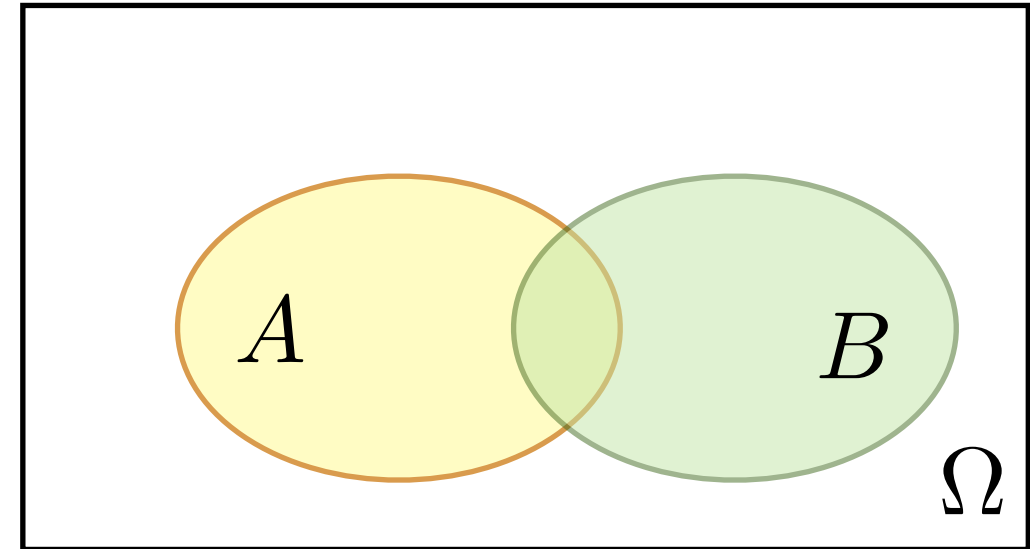
$P(A \cap B) = ?$



Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Jevy A a B jsou stochasticky nezávislé právě když $P(A|B)=P(A)$

Nebo také: $P(B|A)=P(B)$

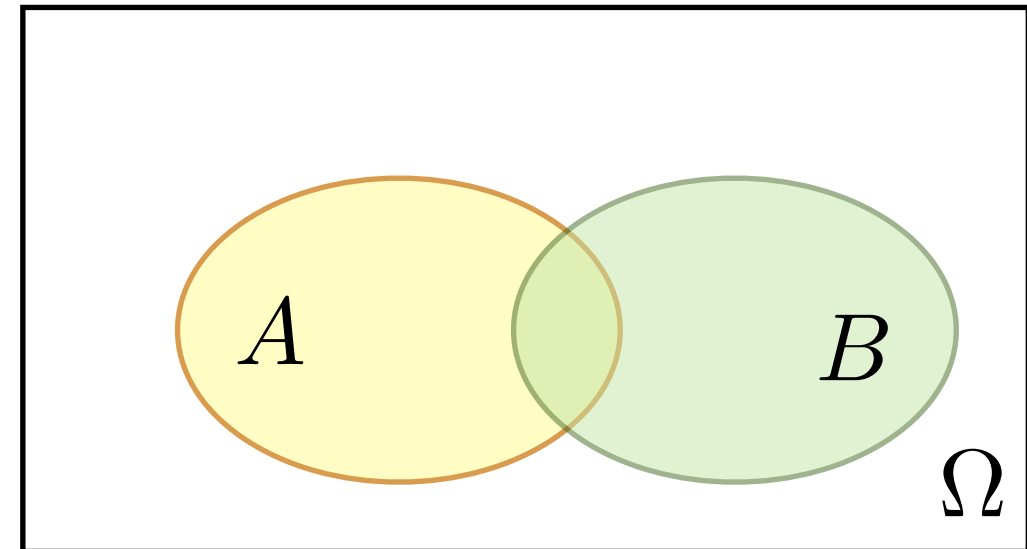
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Příklad:

Je známo, že v dlouhodobém průměru je mezi 1000 dodaných komponent 2,34% vadných výrobků pocházejících od výrobce A, 1,08% vadných výrobků od výrobce B, 65,97% bezvadných výrobků od výrobce A a zbytek (30,6%) jsou bezvadné výrobky od výrobce B.

Lze považovat jev, že výrobek je vadný, na výrobci?

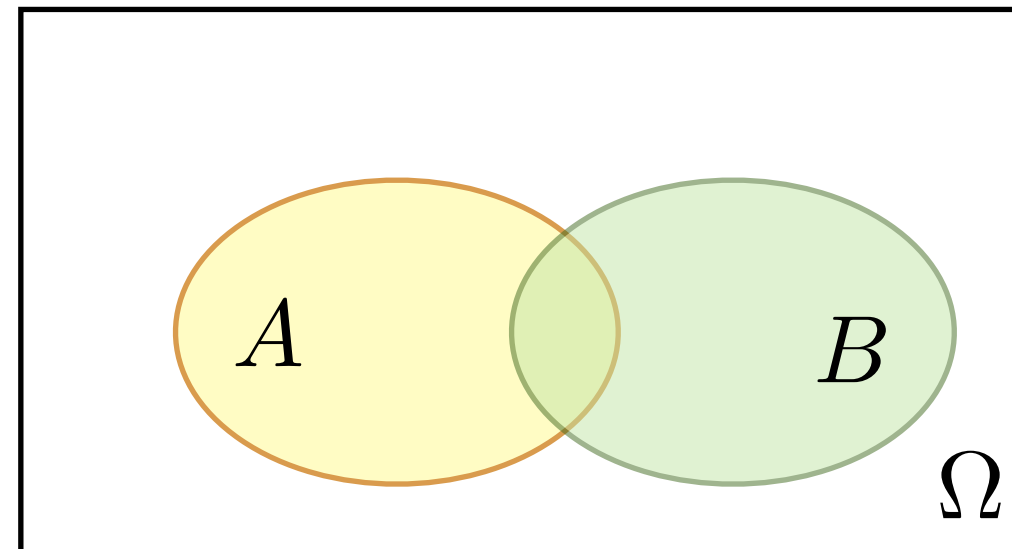
	A	B
vada (V)	2,34	1,08
bez vady	65,98	30,6



Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



$$2,34 = 3,42 \cdot 68,32$$

$$65,98 = 96,58 \cdot 68,32$$

$$1,08 = 3,42 \cdot 31,68$$

$$30,60 = 96,58 \cdot 31,68 \quad \text{o.K.}$$

Jev, že výrobek je vadný, lze považovat za stochasticky nezávislý na výrobci.

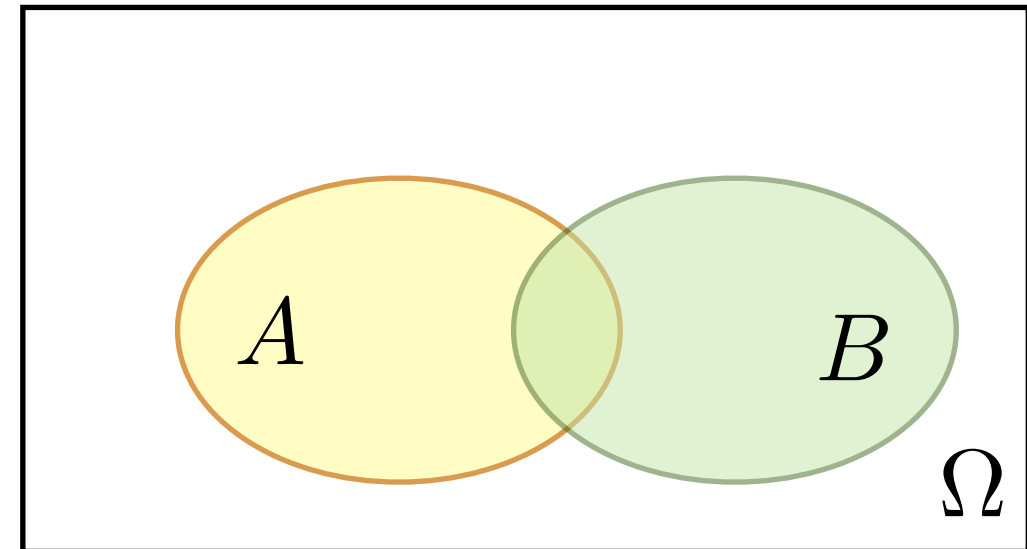
	A	B
vada (V)	2,34	1,08
bez vady	65,98	30,6



Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 34% dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 28% dotázaných absolvovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 20% případů odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 18% jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

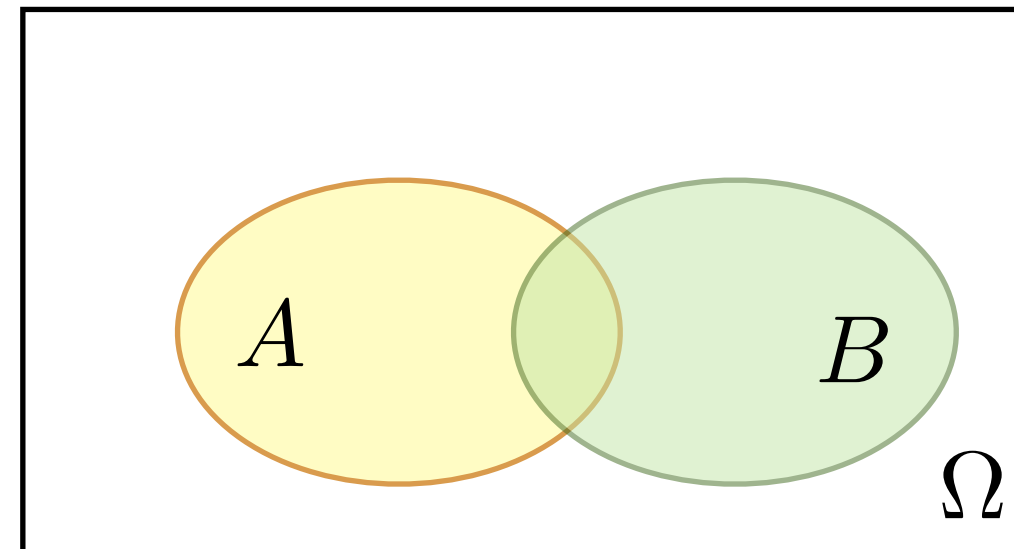
Lze považovat uplatnění se v oboru studia stochasticky nezávislé na absolvované univerzitě?



Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Příklad:

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	0,34	0,28	0,62
mimo obor	0,20	0,18	0,38
celkem	0,54	0,46	1

$$P(O) = 0,62$$

$$P(O|\text{ČVUT}) = 0,34/0,54 = 0,63 > P(O)$$

Uplatnění v oboru je stochasticky závislé na absolvované univerzitě

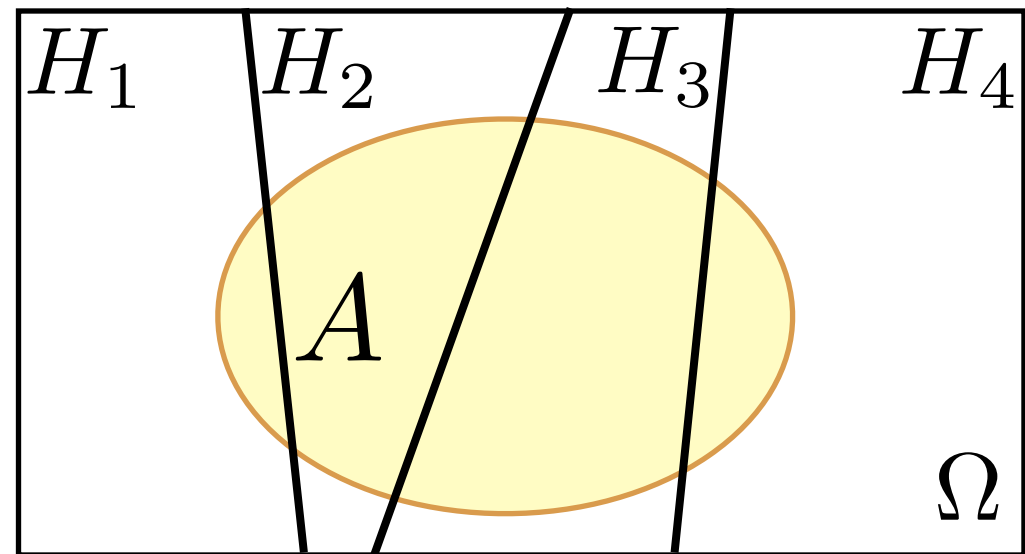
$$0,54 \cdot 0,62 = 0,3348$$



Věta o úplné pravděpodobnosti

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω
 $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

$$\begin{aligned} P(A) = & P(A|H_1) \cdot P(H_1) \\ & + P(A|H_2) \cdot P(H_2) \\ & + P(A|H_3) \cdot P(H_3) \\ & + P(A|H_4) \cdot P(H_4) \end{aligned}$$



Příklad:

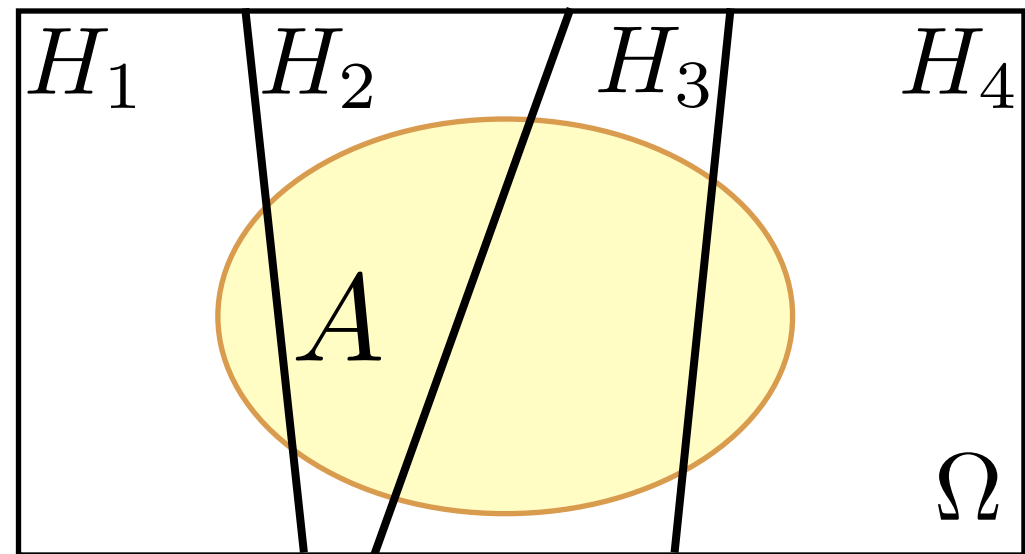
Na trhu jsou výrobky od čtyř výrobců v pořadí A, B, C a D v poměru 1:2:4:5. Zmetkovitost je u těchto výrobců po řadě 0,5%, 0,8%, 0,3% a 0,3%. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek na trhu bude vadný? A bude-li vadný, jaká je pravděpodobnost, že byl vyroben výrobcem A?



Věta o úplné pravděpodobnosti

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω
 $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

$$\begin{aligned} P(A) = & P(A|H_1) \cdot P(H_1) \\ & + P(A|H_2) \cdot P(H_2) \\ & + P(A|H_3) \cdot P(H_3) \\ & + P(A|H_4) \cdot P(H_4) \end{aligned}$$



Příklad:

$$P(H_1) = 1/12, \quad P(A|H_1) = 0,005$$

$$P(H_2) = 2/12, \quad P(A|H_2) = 0,008$$

$$P(H_3) = 4/12, \quad P(A|H_3) = 0,003$$

$$P(H_4) = 5/12, \quad P(A|H_4) = 0,003$$

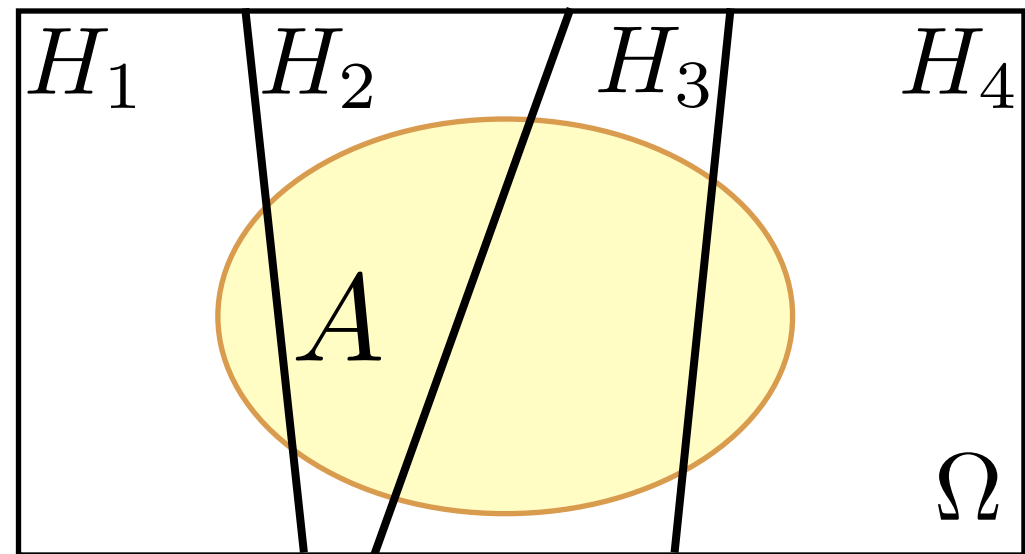
$$P(A) = (5 + 16 + 12 + 15)/12000 = 0,004$$



Bayesova věta

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω
 $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

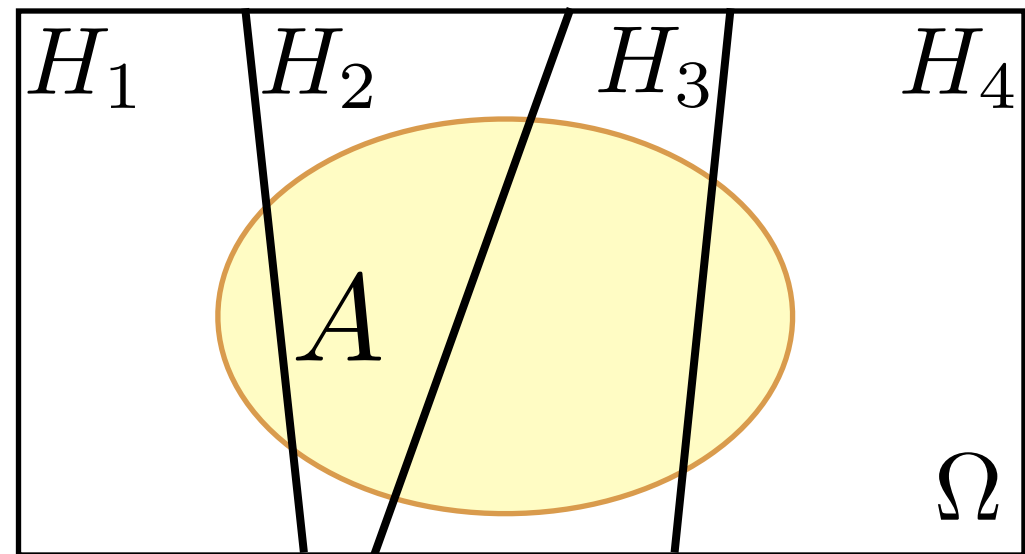
$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)}$$



Bayesova věta

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω
 $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{\sum_{i=1}^4 P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$



Příklad:

$$P(H_1) = 0,08333, \quad P(A|H_1) = 0,0005$$

$$P(H_2) = 0,16667, \quad P(A|H_2) = 0,0008$$

$$P(H_3) = 0,33333, \quad P(A|H_3) = 0,0003$$

$$P(H_4) = 0,41667, \quad P(A|H_4) = 0,0003$$

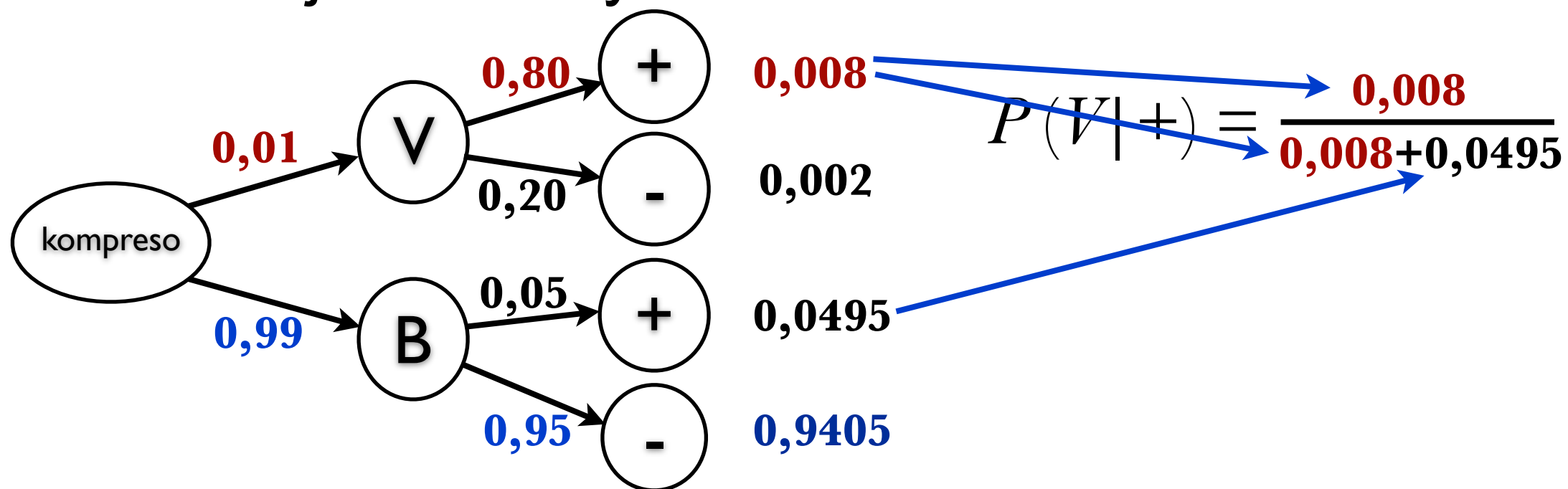
$$P(H_1|A) = 0,0005 \cdot 0,08333 / 0,0004 = 0,10417$$



Bayesova věta

Příklad:

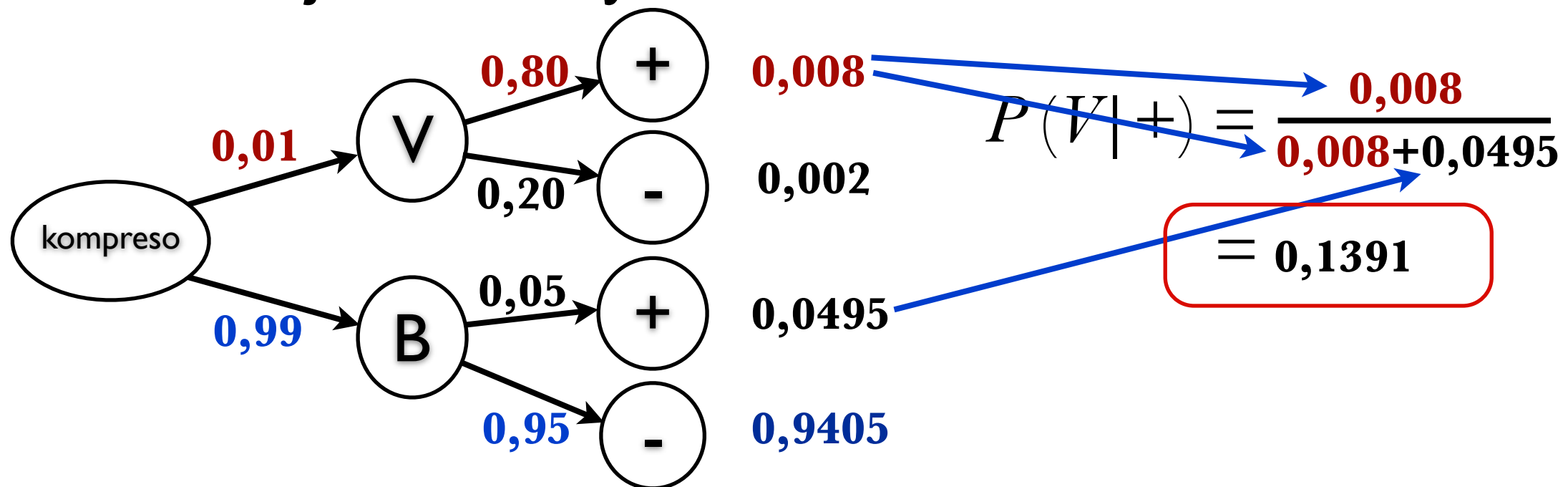
Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?



Bayesova věta

Příklad:

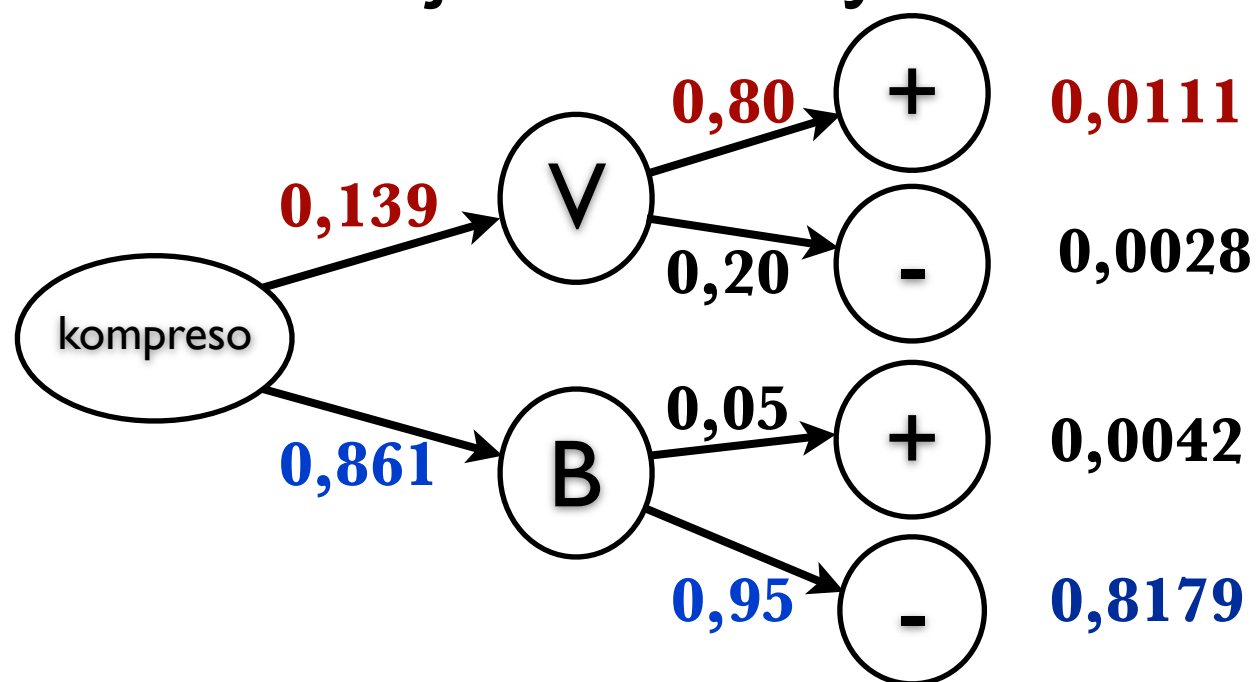
Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?



Bayesova věta

Příklad:

Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?



$$P_2(V|+) = \frac{0,0111}{0,0111+0,0042}$$

$$= 0,7255$$

Při opakovaném testu



Rozdělení sázky

Dva hráči hrají sérii 9 her a vyhraje ten, který první dosáhne 5 vítězství (tedy většinu). Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu 4:2 a je třeba spravedlivě rozdělit sázku mezi oba hráče.

Řešení:

- 1) Předpokládáme, že vítězství každého z obou hráčů A a B v následujících neuskutečněných hrách by bylo stejně možné.
- 2) Chybí dohrát ještě tři hry: hráči A chybí k vítězství jedna výhra, hráči B chybějí tři.
- 3) Možné výsledky jsou: AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB.
- 4) Z toho v prvních sedmi by celkově vyhrál hráč A a pouze v jediném případě (posledním) by vyhrál hráč B.
- 5) Tedy šance na výhru jsou 7:1 a to je také poměr, v němž by měla být rozdělena sázka.



Rozdělení sázky

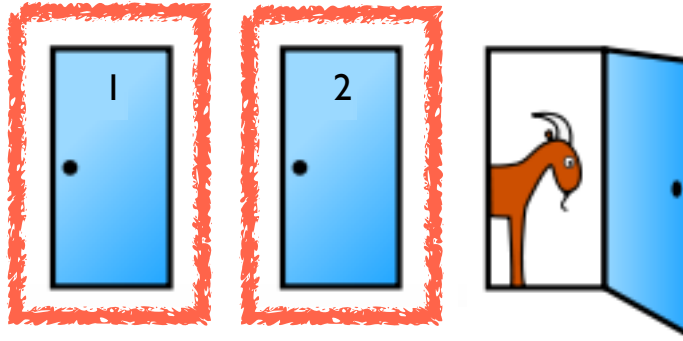
Dva hráči hrají sérii 9 her a vyhraje ten, který první dosáhne 5 vítězství (tedy většinu). Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu 4:2 a je třeba spravedlivě rozdělit sázku mezi oba hráče.

Řešení 2:

- 1) Předpokládáme, že vítězství každého z obou hráčů A a B v následujících neuskutečněných hrách by bylo stejně možné.
- 2) Chybí dohrát ještě tři hry: hráči A chybí k vítězství jedna výhra, hráči B chybějí maximálně tři hry.
- 3) Pro ukončení hry by mohly nastat tyto výsledky: A, BA, BBA, BBB.
- 4) Je $P(A)=1/2$, $P(BA)=1/4$, $P(BBA)=P(BBB)=1/8$.
- 5) Hráč A by vyhrál v prvních třech případech s pravděpodobností $7/8$, Hráč B by vyhrál pouze v posledním případě s pravděpodobností $1/8$.
- 6) Tedy šance na výhru jsou 7:1 a to je také poměr, v němž by měla být rozdělena sázka.



Problém tří dveří (Monty Hall Problem)



- Označme: A_1, A_2, A_3 jevy, že auto je za dveřmi č. 1, 2, 3.
- Pro nás je zřejmě apriori $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$.
- Necht' O_1, O_2, O_3 značí jevy, že moderátor otevře dveře č. 1, 2, 3.
- Zvolíme např. dveře č. 1.
- Zřejmě je $P(O_1) = 0$ a $P(O_2) = P(O_3) = 1/2$.
- Dále platí: $P(O_2|A_1)=1/2$, $P(O_3|A_1)=1/2$, $P(O_2|A_2)=0$, $P(O_3|A_2)=1$, $P(O_2|A_3)=1$, $P(O_3|A_3)=0$.
- Předpokládejme, že moderátor otevřel dveře č. 3.
- Tedy aposteriorní pravděpodobnosti podle Bayesovy věty jsou:

$$P(A_1|O_3) = \frac{P(A_1)P(O_3|A_1)}{P(O_3)} = \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/2} = 1/3$$

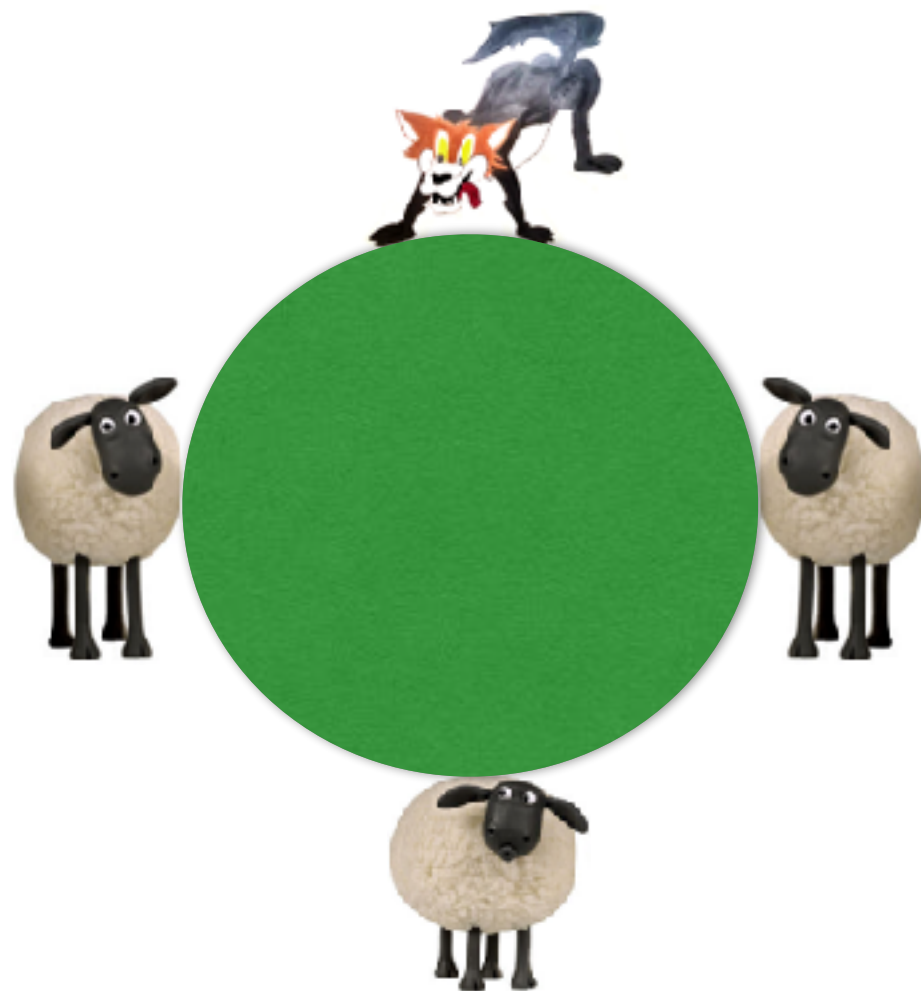
$$P(A_2|O_3) = \frac{P(A_2)P(O_3|A_2)}{P(O_3)} = \frac{1/3 \cdot 1}{1/2} = 2/3$$



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Vlk a ovečky

Na kružnici jsou ve stejných vzdálenostech od sebe rozmístěny 3 ovečky a jeden vlk. Vlk se náhodně pohybuje doleva či doprava se stejnou pravděpodobností. Narazí-li na ovečku, sežere ji. Která z oveček má největší pravděpodobnost, že zůstane jako poslední?



*Jedná se o tzv. „náhodnou procházku“.
Úlohu lze řešit onecně pro n oveček.*



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Automat na jízdenky

Automt vydává jízdenky v hodnotě 1€. Přijímá pouze 1 a 2 eurové mince. Na 2€ vrací 1€ zpět. Pokud mu dojdou 1€ mince v zásobníku automatu, tento ohlásí chybu a zablokuje se. Kolik musíme dát do zásobníku mincí, aby zvládl obsloužit 60 zákazníků bez zablokování s pravděpodobností alespoň 0,95?

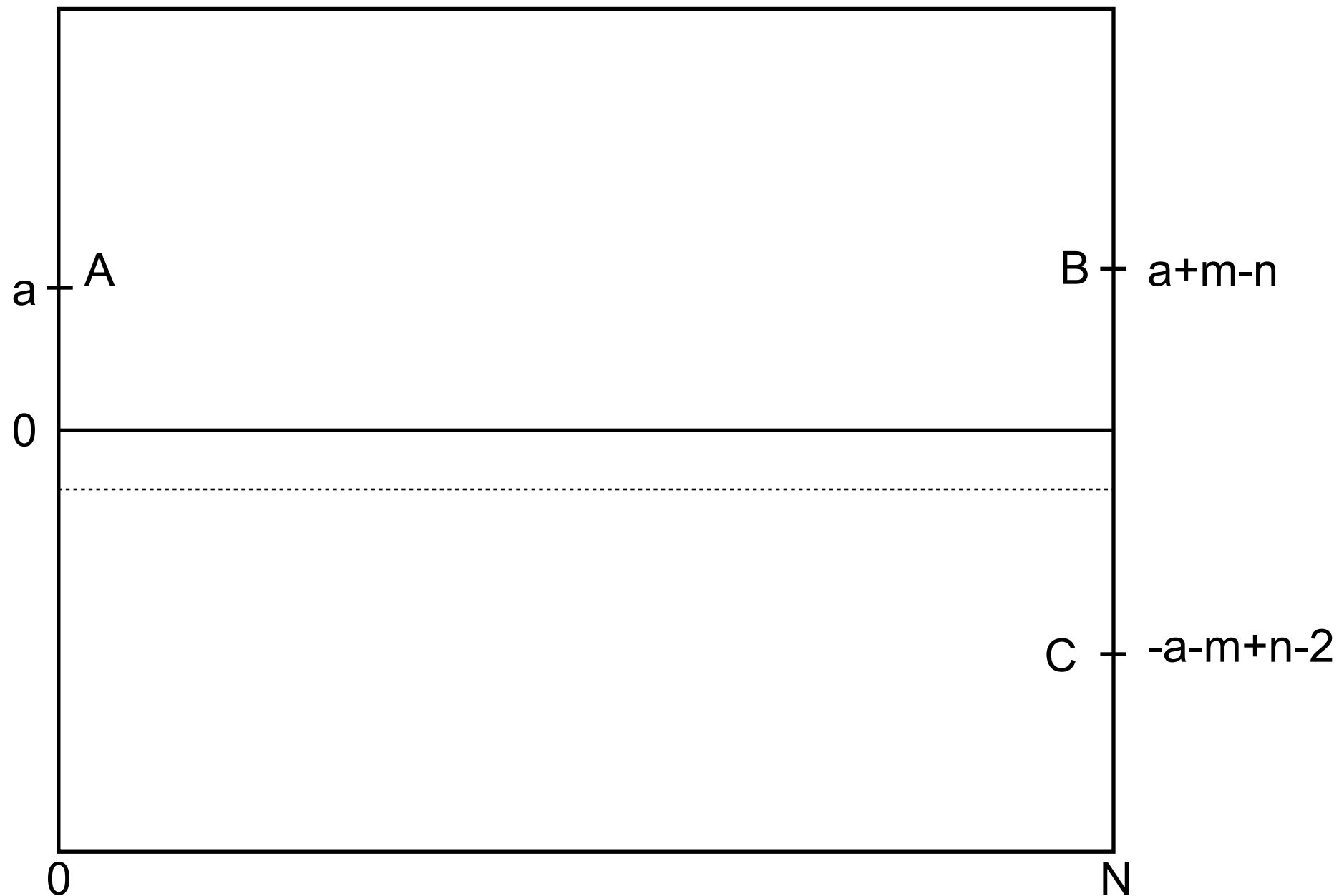
N = počet zákazníků

m = má 1€ minci (tedy $n = N - m$ má 2€)



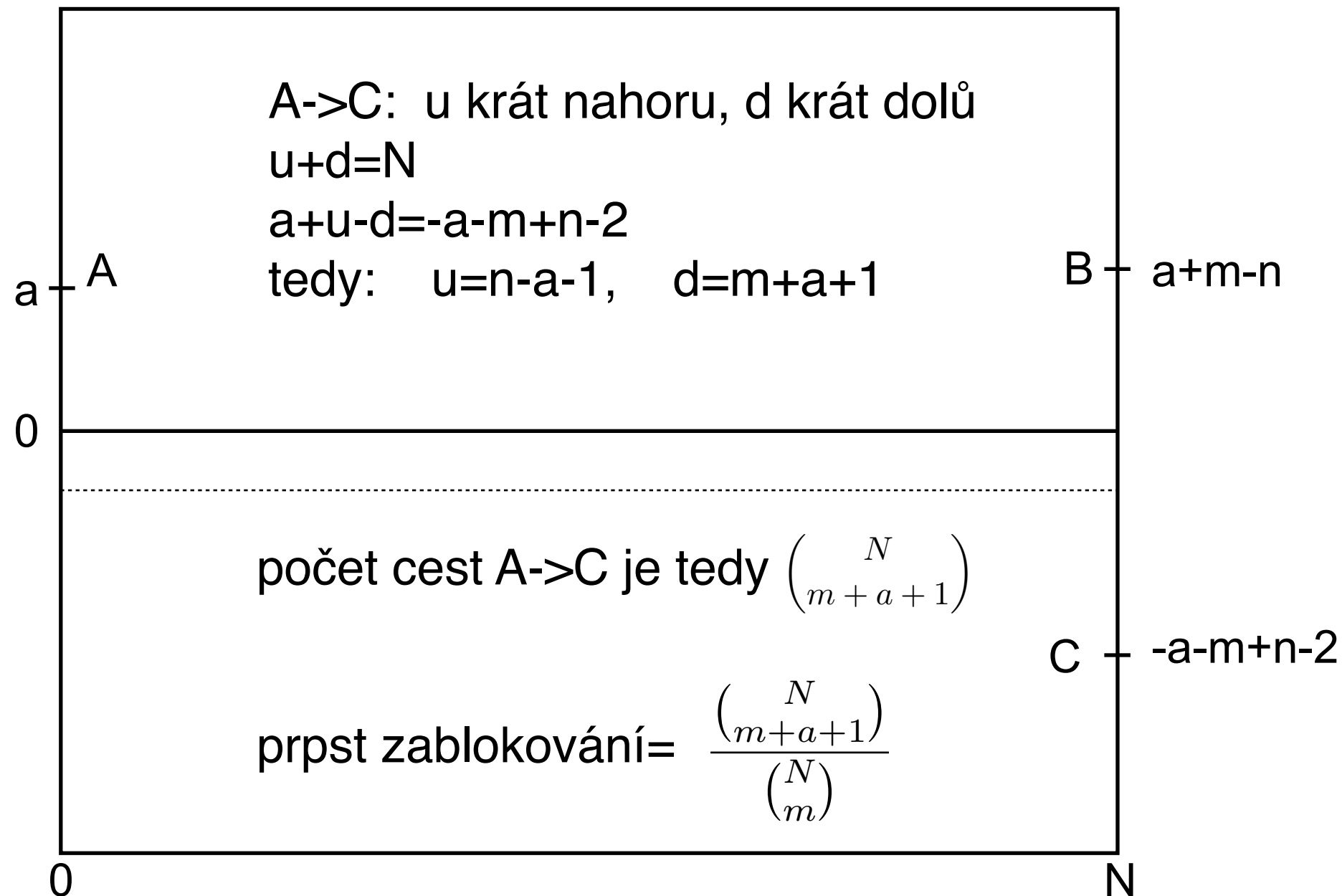
Úvod do teorie pravděpodobnosti

Automat na jízdenky



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Automat na jízdenky



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Úloha o ruinování hráče

Dva hráči A a B hrají sérii her. Při každé hře hráči vsadí jednu korunu. Hráč A vyhraje s pravděpodobností p a prohraje s pravděpodobností $1-p$. Na počátku má hráč A celkem x korun, hráč B má y korun. Hry jsou vzájemně nezávislé. Hra se hraje tak dlouho, dokud mají oba co vsadit. Tedy hra končí v okamžiku, kdy je jeden z hráčů zruinován. Jakou mají hráči A a B pravděpodobnost zruinování?

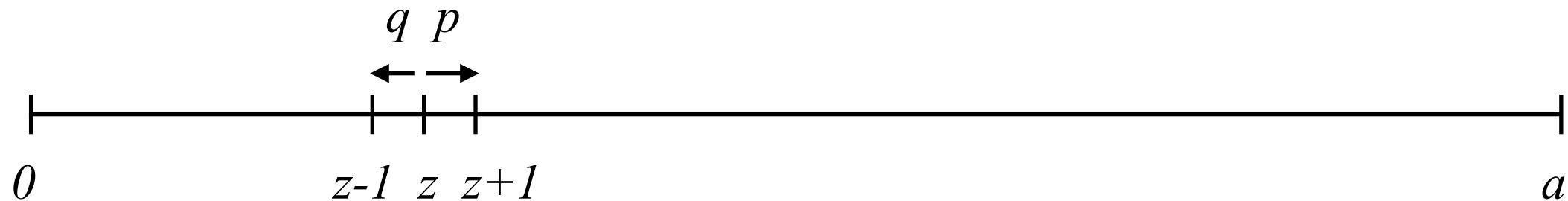
Další z nejznámějších pravděpodobnostních úloh, kterou lze nalézt například v učebnici teorie pravděpodobnosti W. Feller z roku 1957.

<http://www.statapol.cz/oldstat/bulletiny/ib-93-4.pdf>



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Úloha o ruinování hráče



q_z = pravděpodobnost, že bude zruinován

$$q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1} \quad q_z = A + B \left(\frac{q}{p} \right)^z$$

$$q_0 = 1 \quad q_a = 0 \quad q_z = \frac{\left(\frac{q}{p} \right)^a - \left(\frac{q}{p} \right)^z}{\left(\frac{q}{p} \right)^a - 1}$$

