Základy stochastiky

V. Normální rozdělení

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

Pravděpodobnostní metody a matematická statistika

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

V. Normální rozdělení

https://sms.nipax.cz/pas

Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi $\longrightarrow$ spojitá křivka

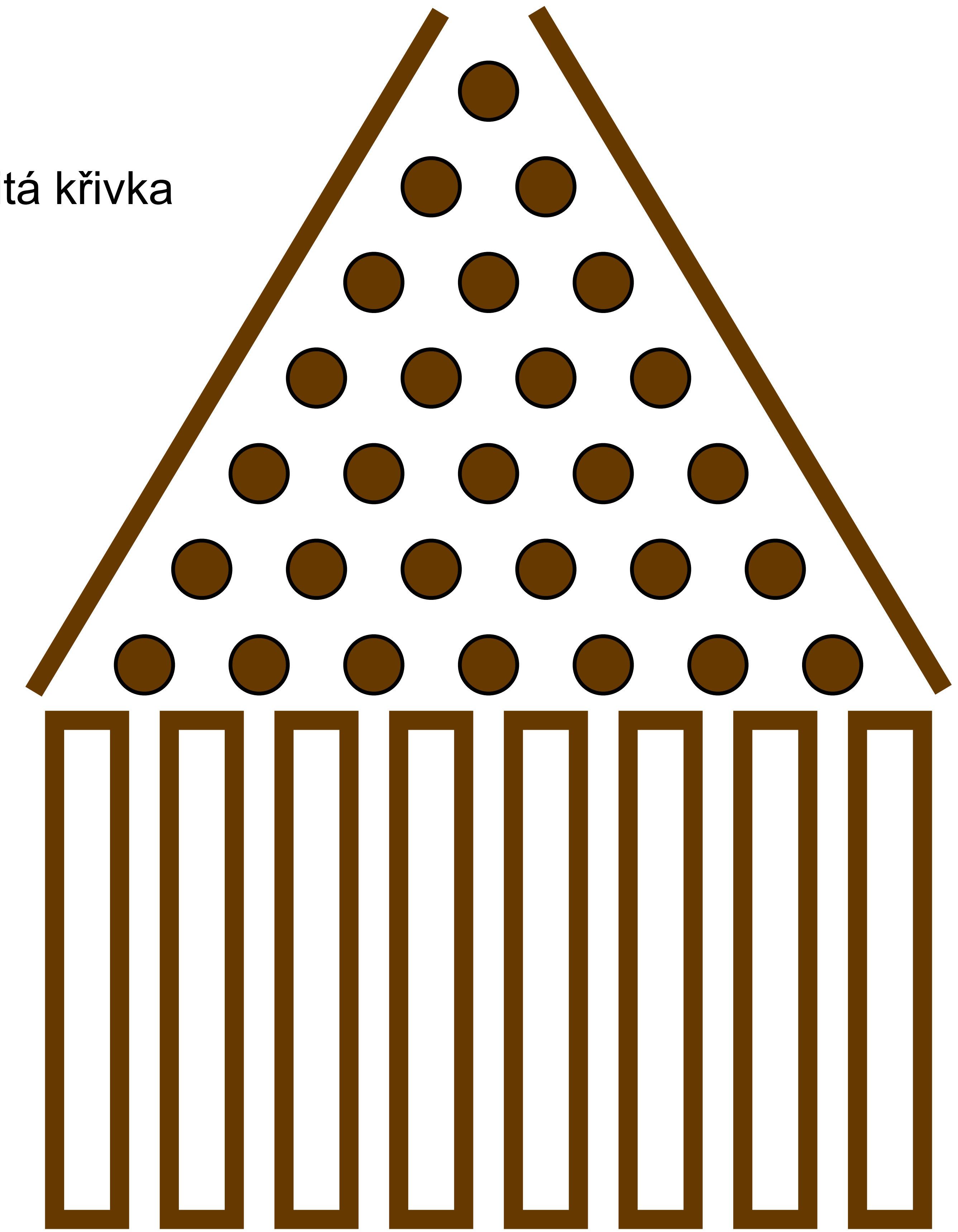
Galtonova deska

Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi $\longrightarrow$ spojitá křivka

Galtonova deska

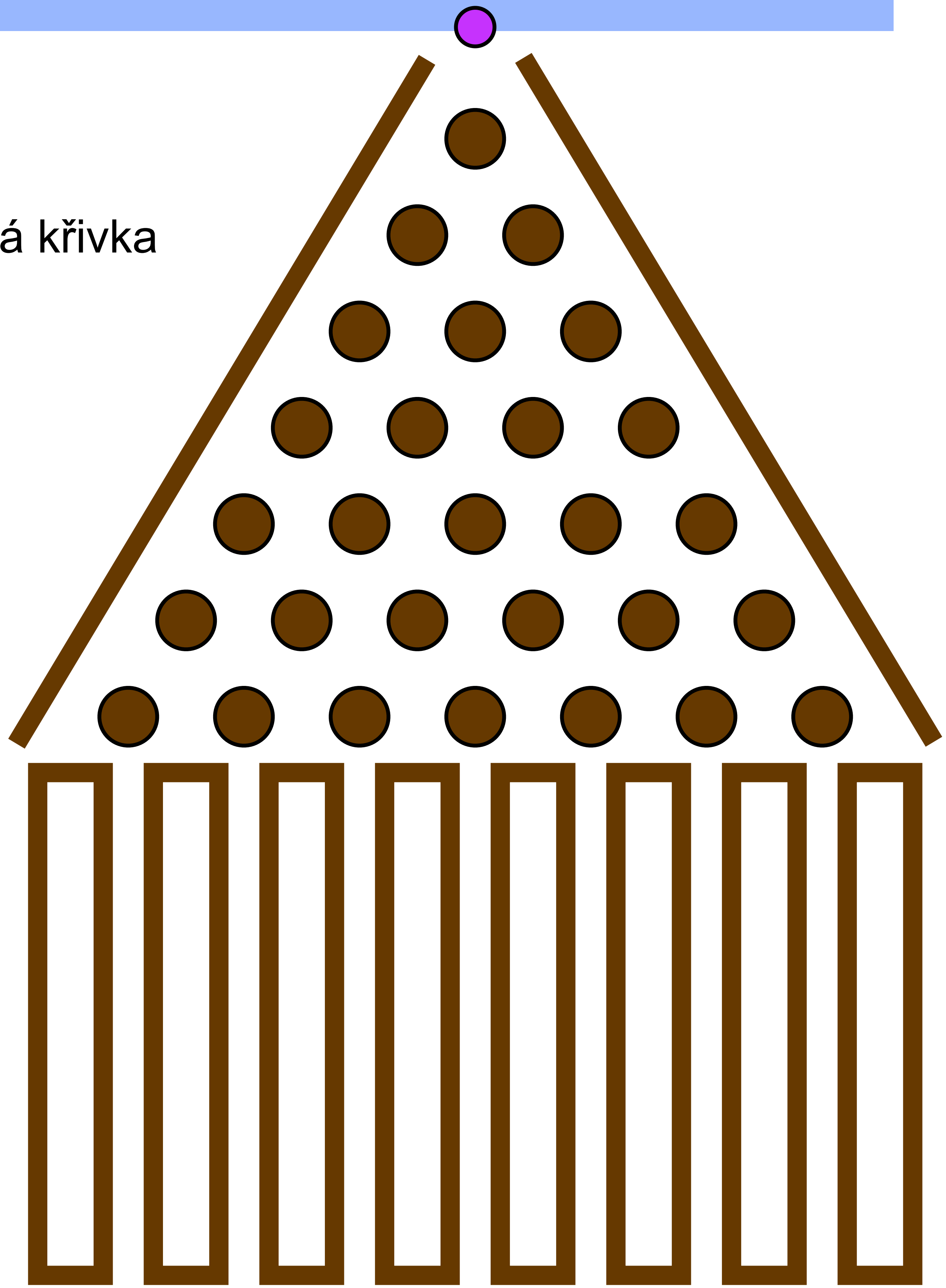


Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi ⟶ spojitá křivka

Galtonova deska

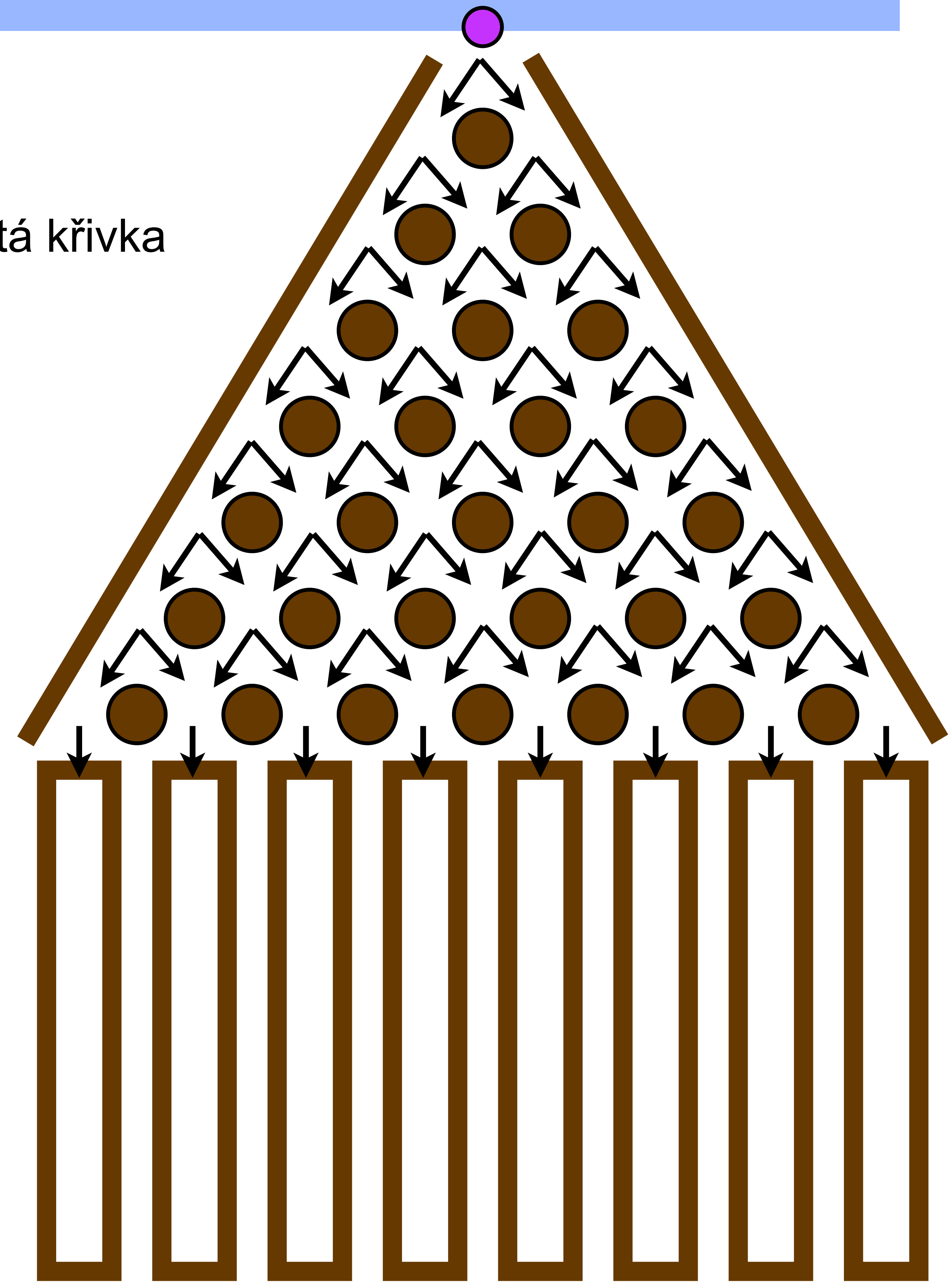


Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi ⟶ spojitá křivka

Galtonova deska

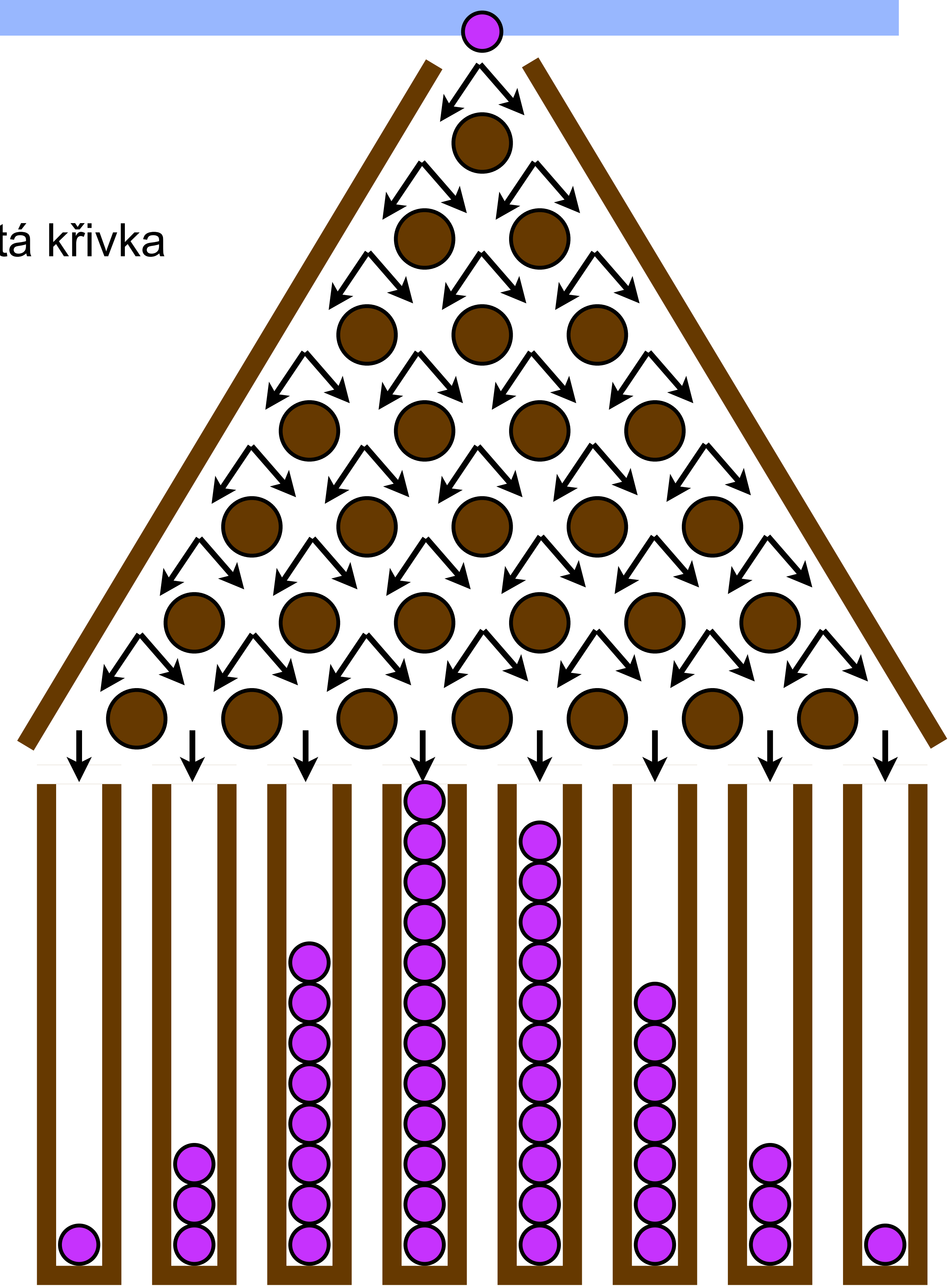


Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi ⟶ spojitá křivka

Galtonova deska

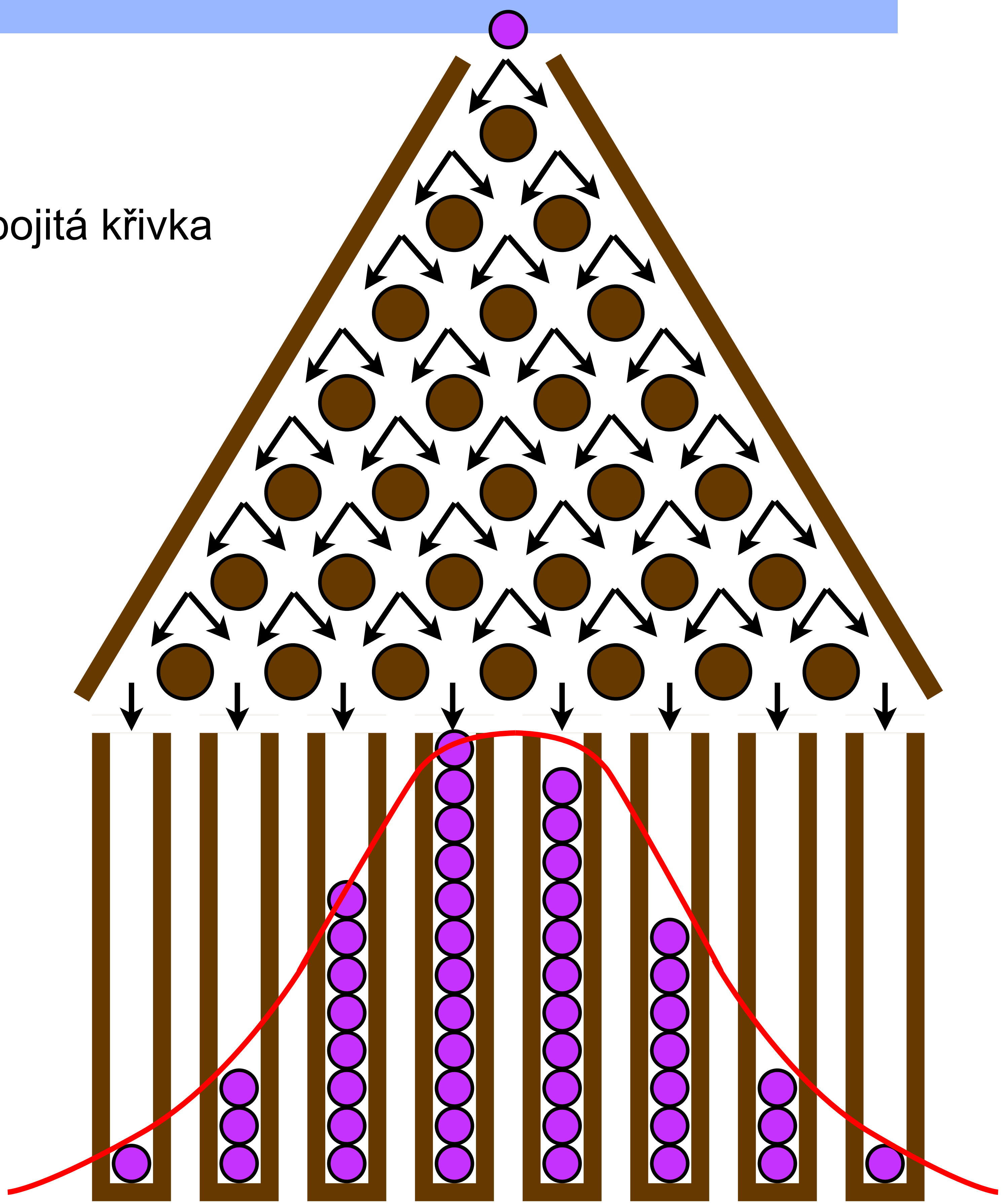


Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi ⟶ spojitá křivka

Galtonova deska



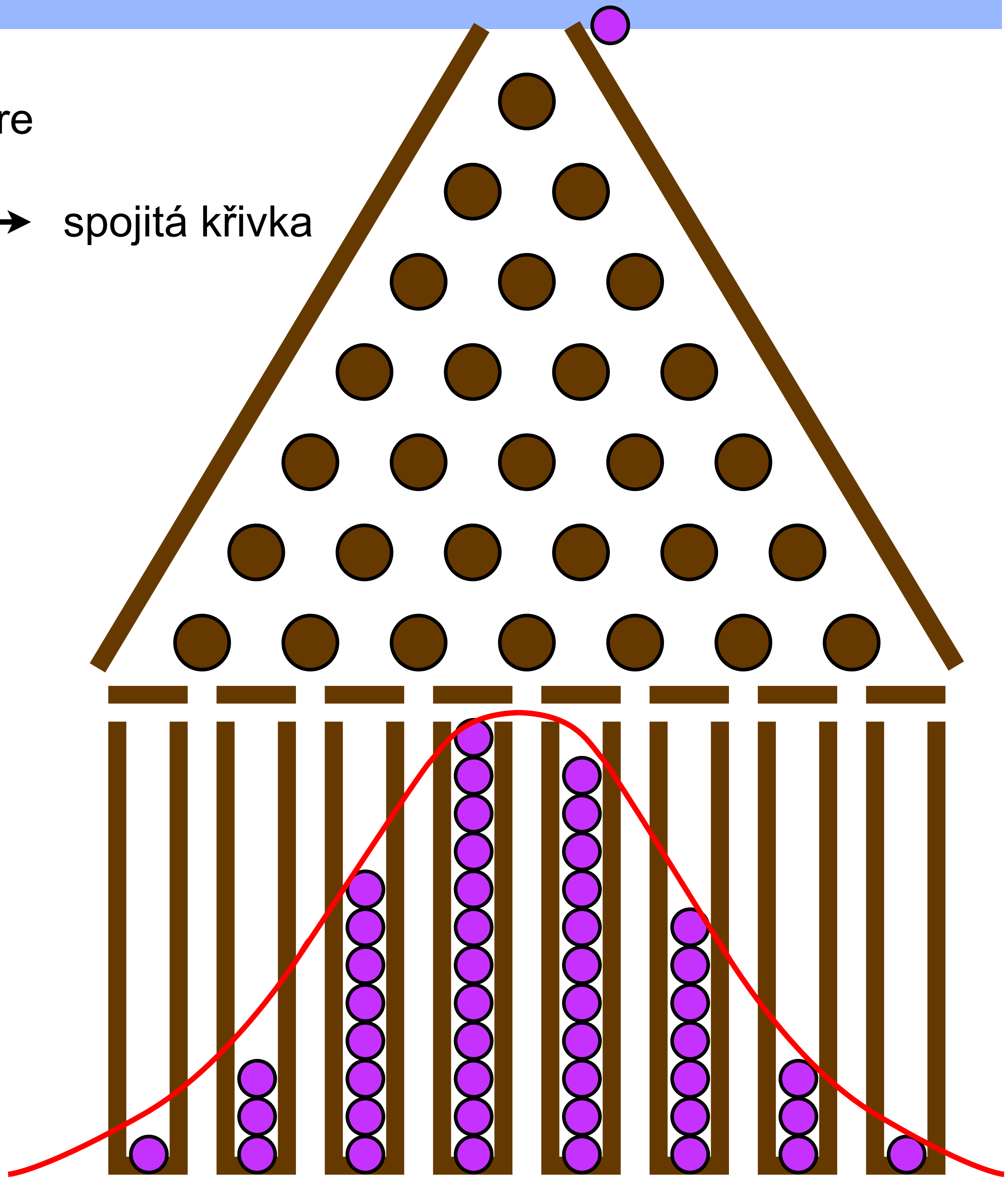
Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi ⟶ spojitá křivka

Galtonova deska

Pascalův trojúhelník



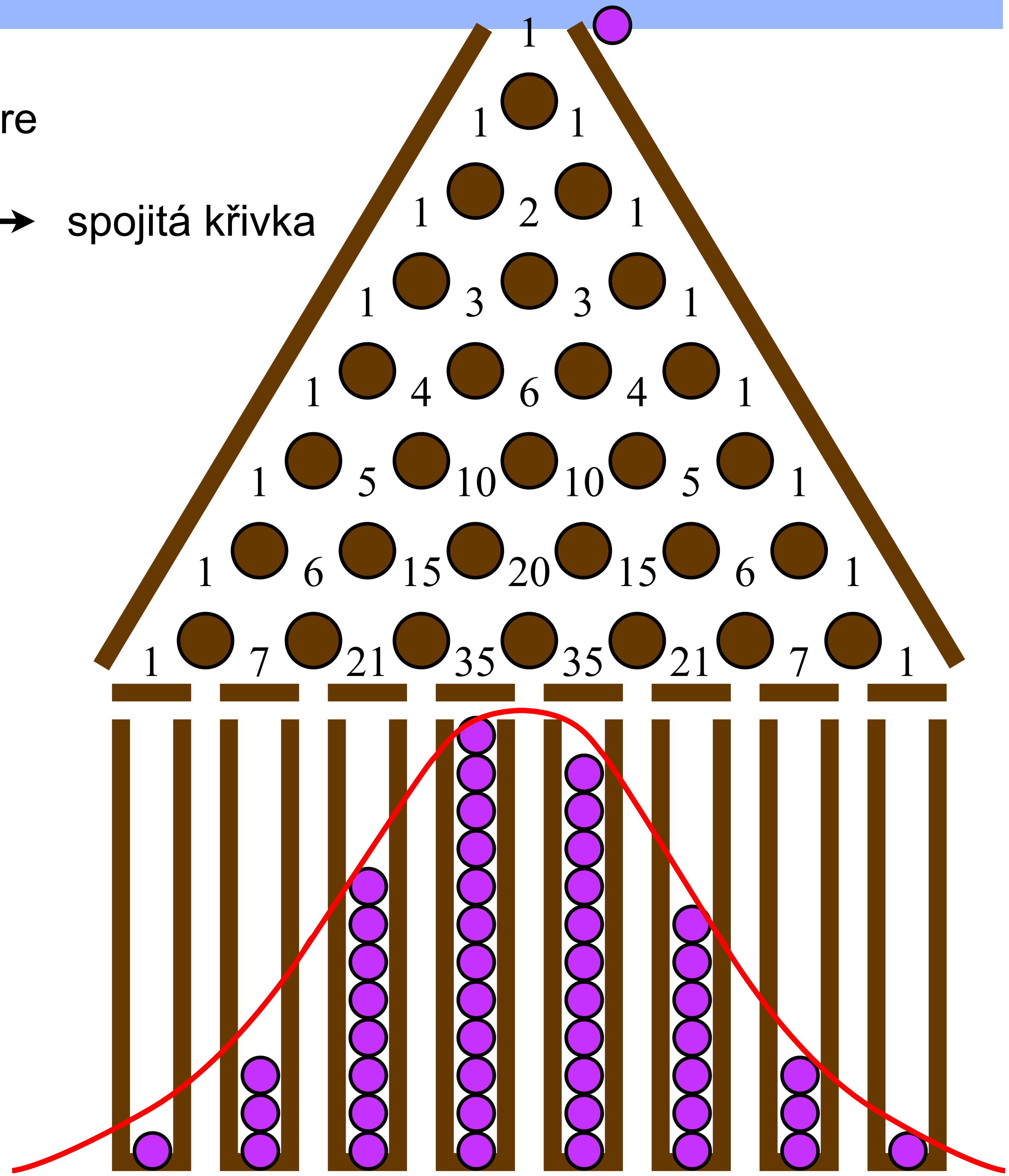
Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi ⟶ spojitá křivka

Galtonova deska

Pascalův trojúhelník



Od hazardu ke hvězdám ...

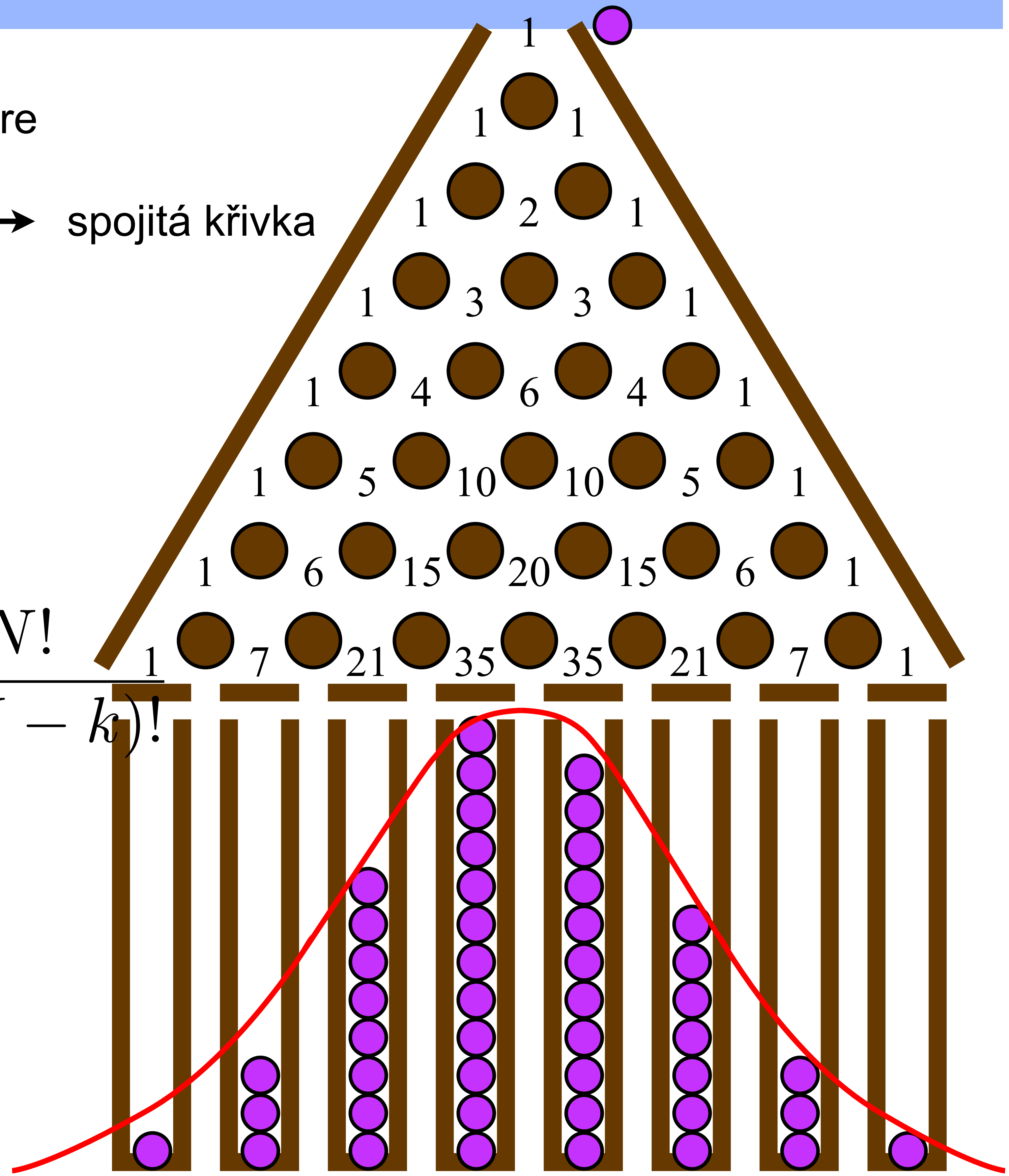
1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi $\longrightarrow$ spojitá křivka

Galtonova deska

Pascalův trojúhelník

$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$



Od hazardu ke hvězdám ...

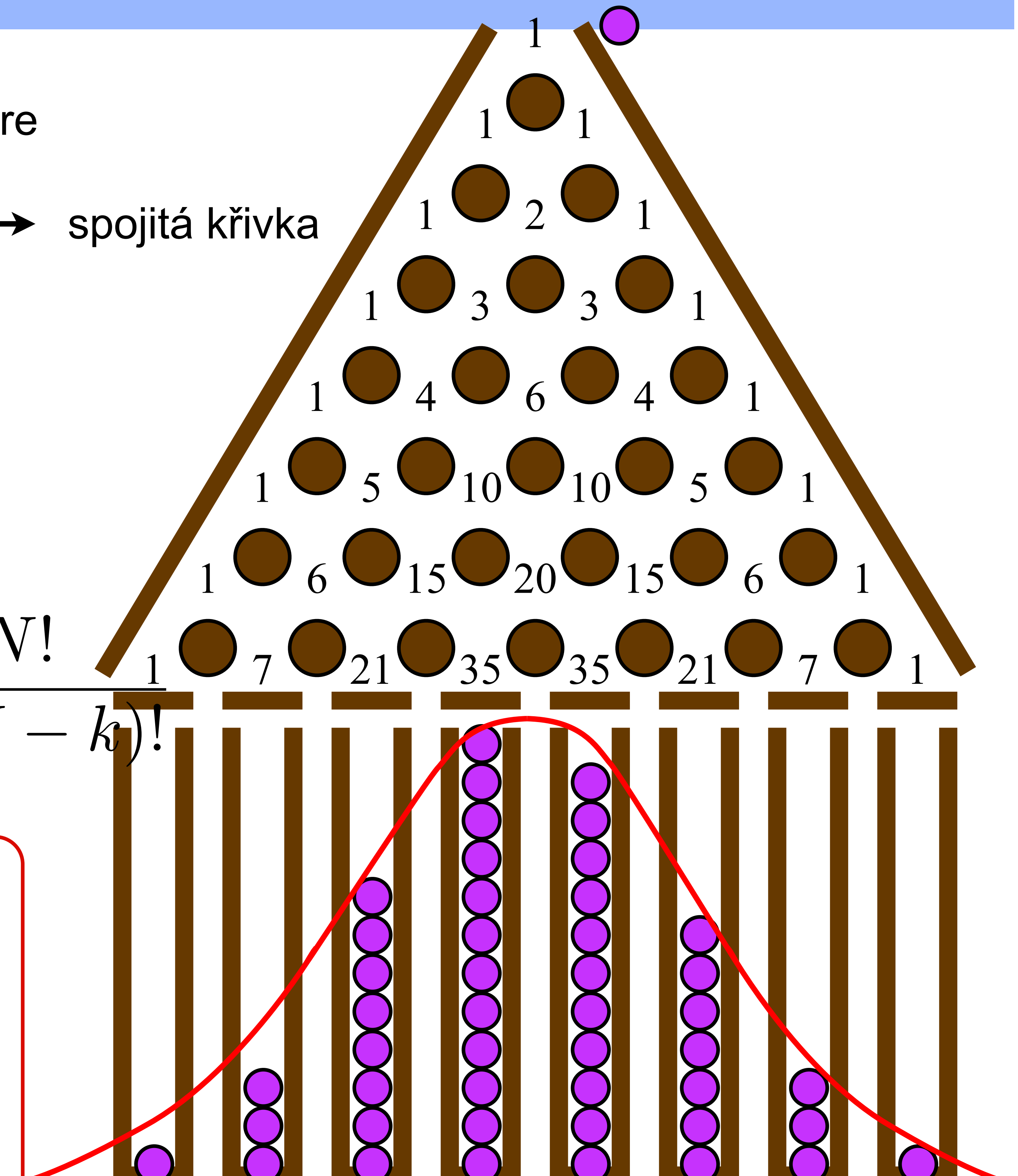
1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi $\longrightarrow$ spojitá křivka

Galtonova deska

Pascalův trojúhelník

$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$



Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Od hazardu ke hvězdám ...

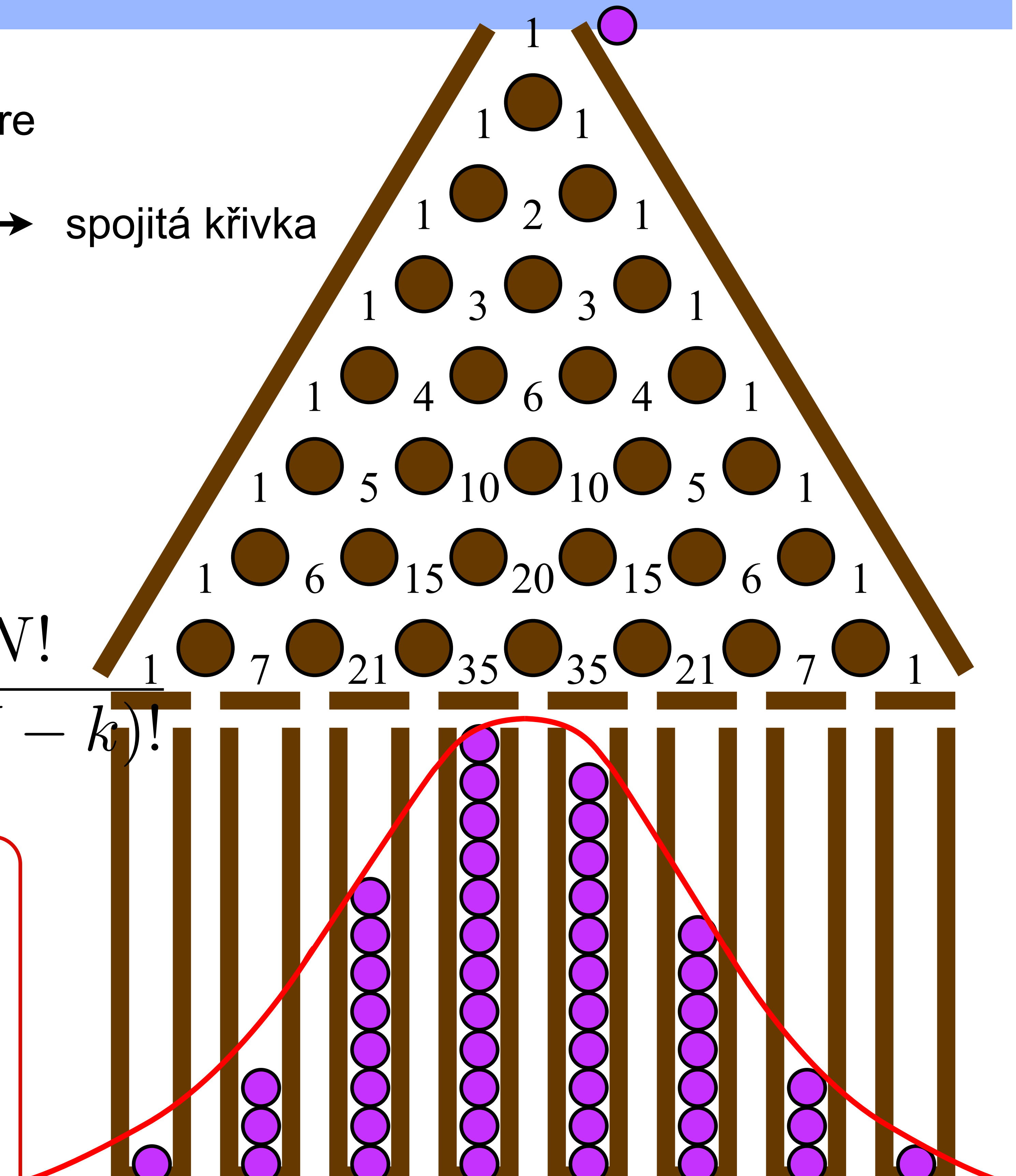
1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi $\longrightarrow$ spojitá křivka

Galtonova deska

Pascalův trojúhelník

$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$



Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = Ke^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$

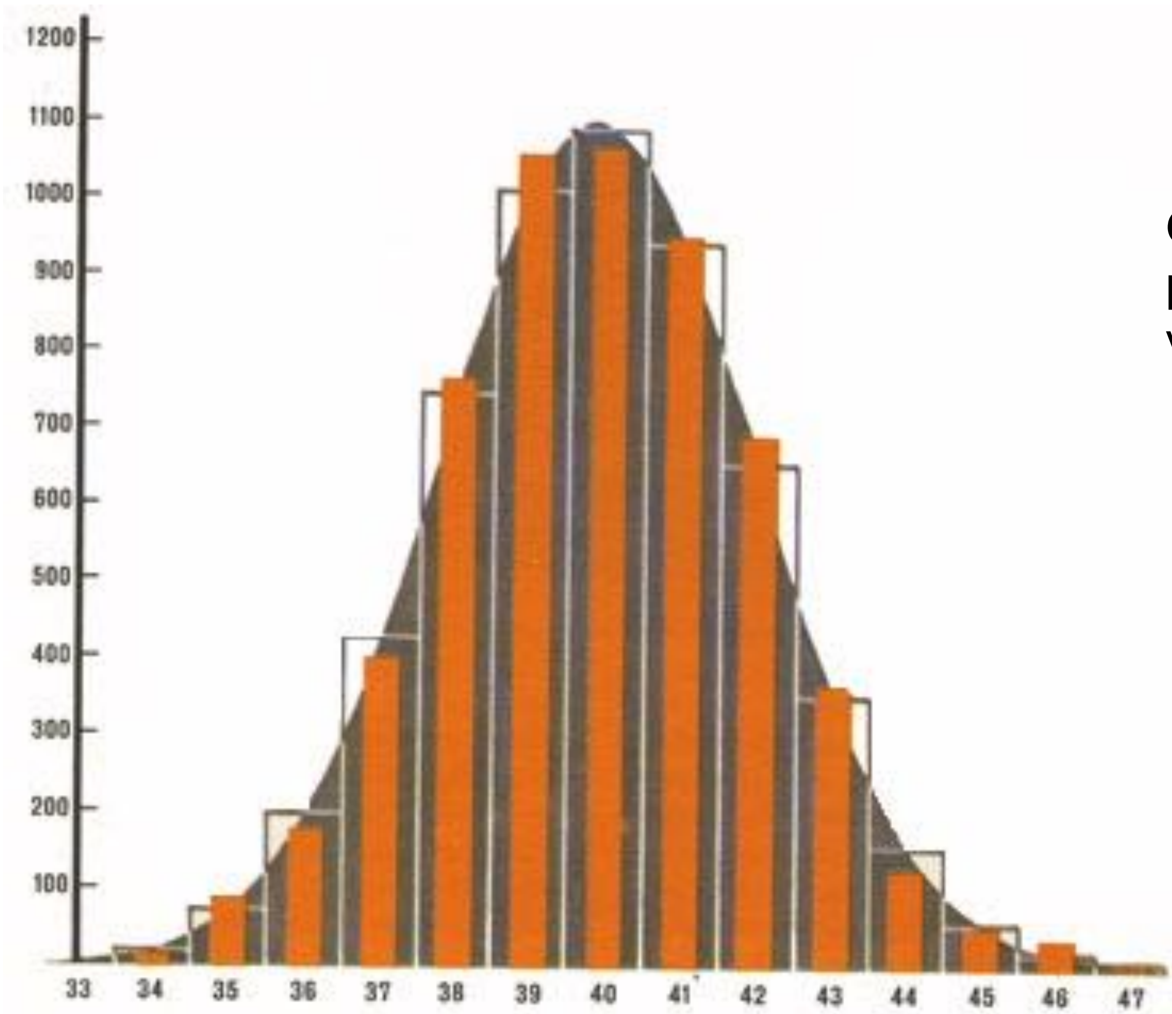
Rozdělení chyb měření

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Qételet
- antropometrická měření anglických vojáků



Obvod hrudi skotských vojáků v palcích, naměřený Quételetem ve dvacátých letech 19. století

Normální rozdělení

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních

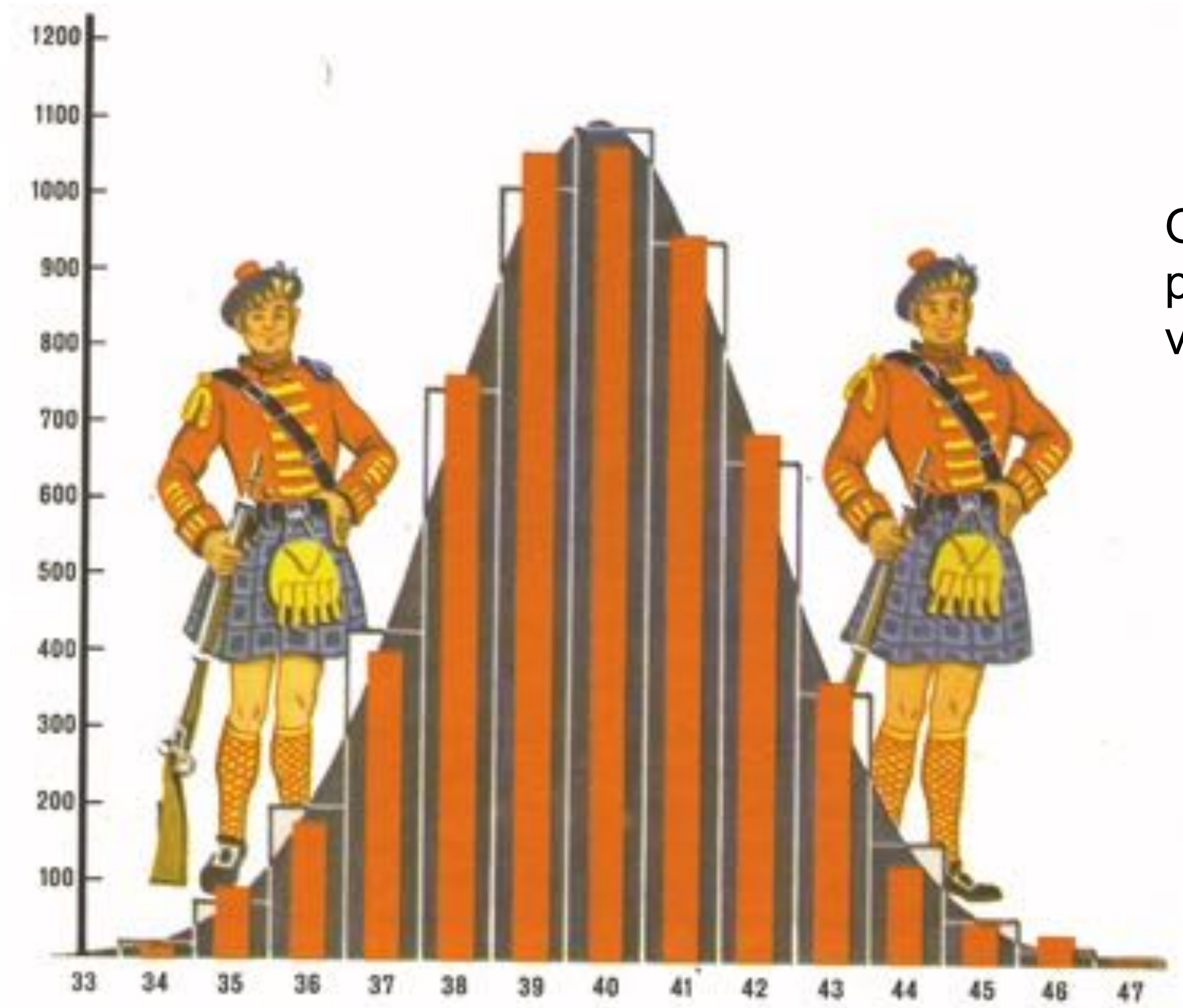
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Qételet

- antropometrická měření anglických vojáků



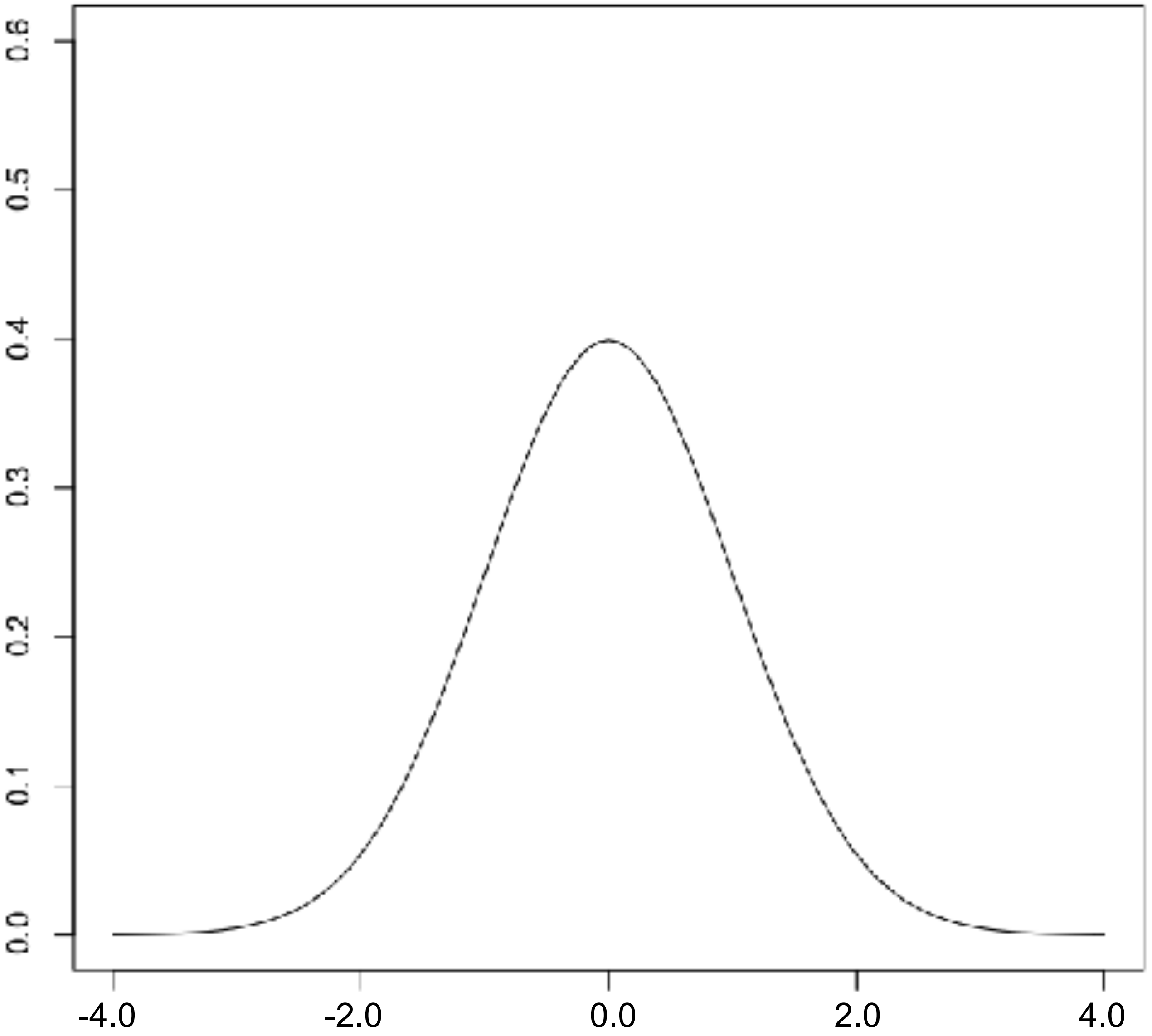
Obvod hrudi skotských vojáků v palcích, naměřený Quételetem ve dvacátých letech 19. století

normální rozdělení

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

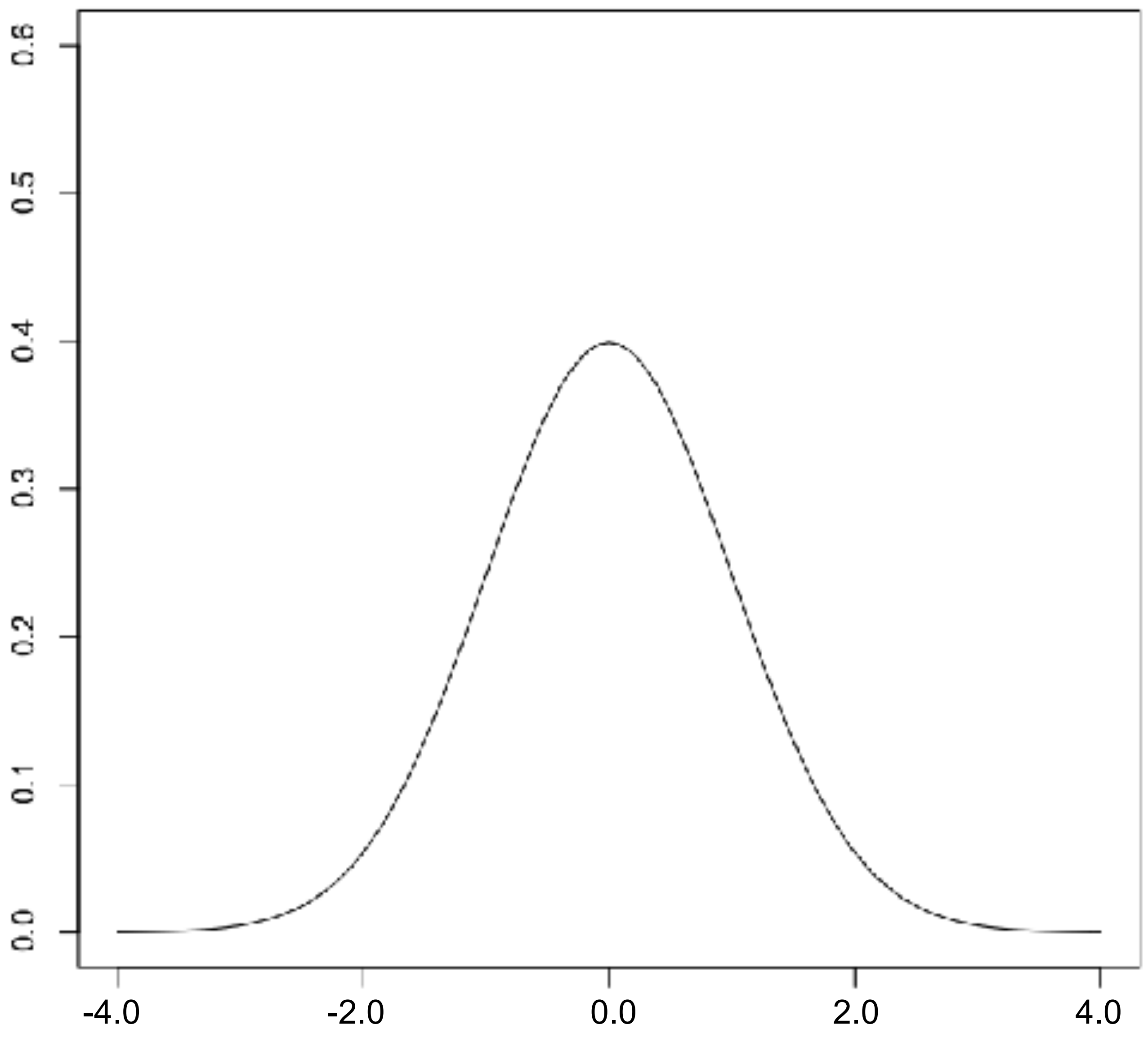


Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



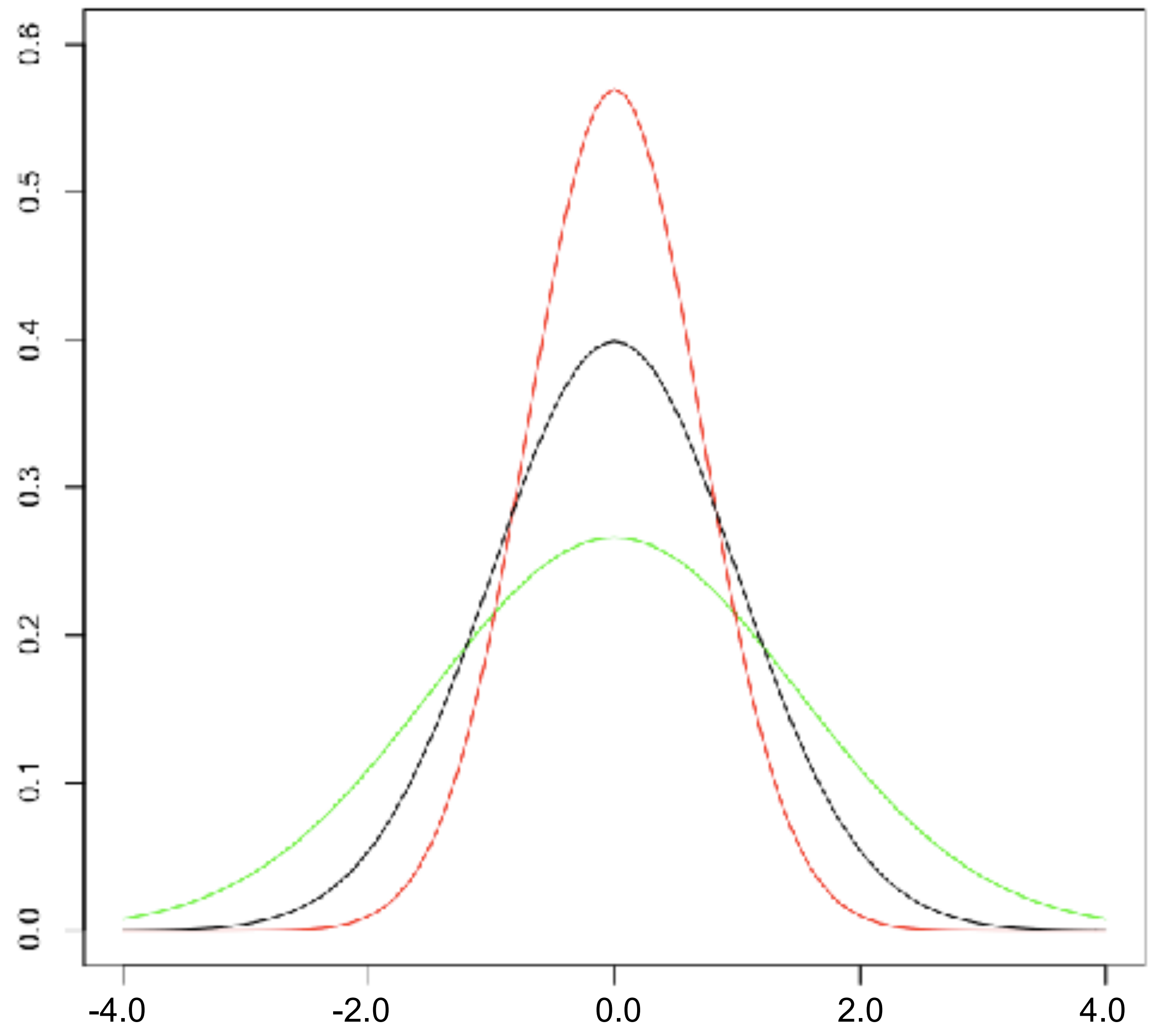
$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

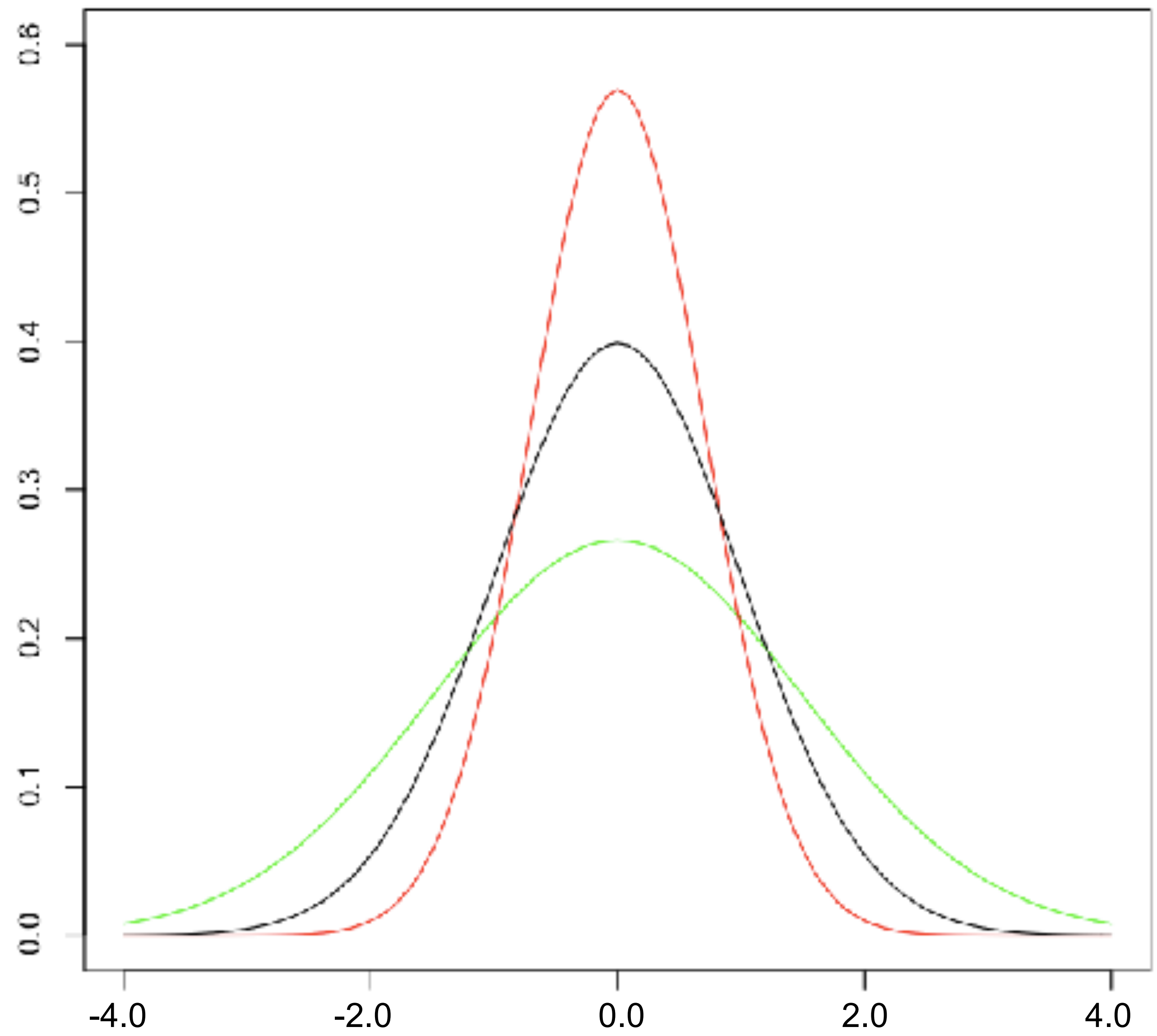
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in R$ - parametr polohy

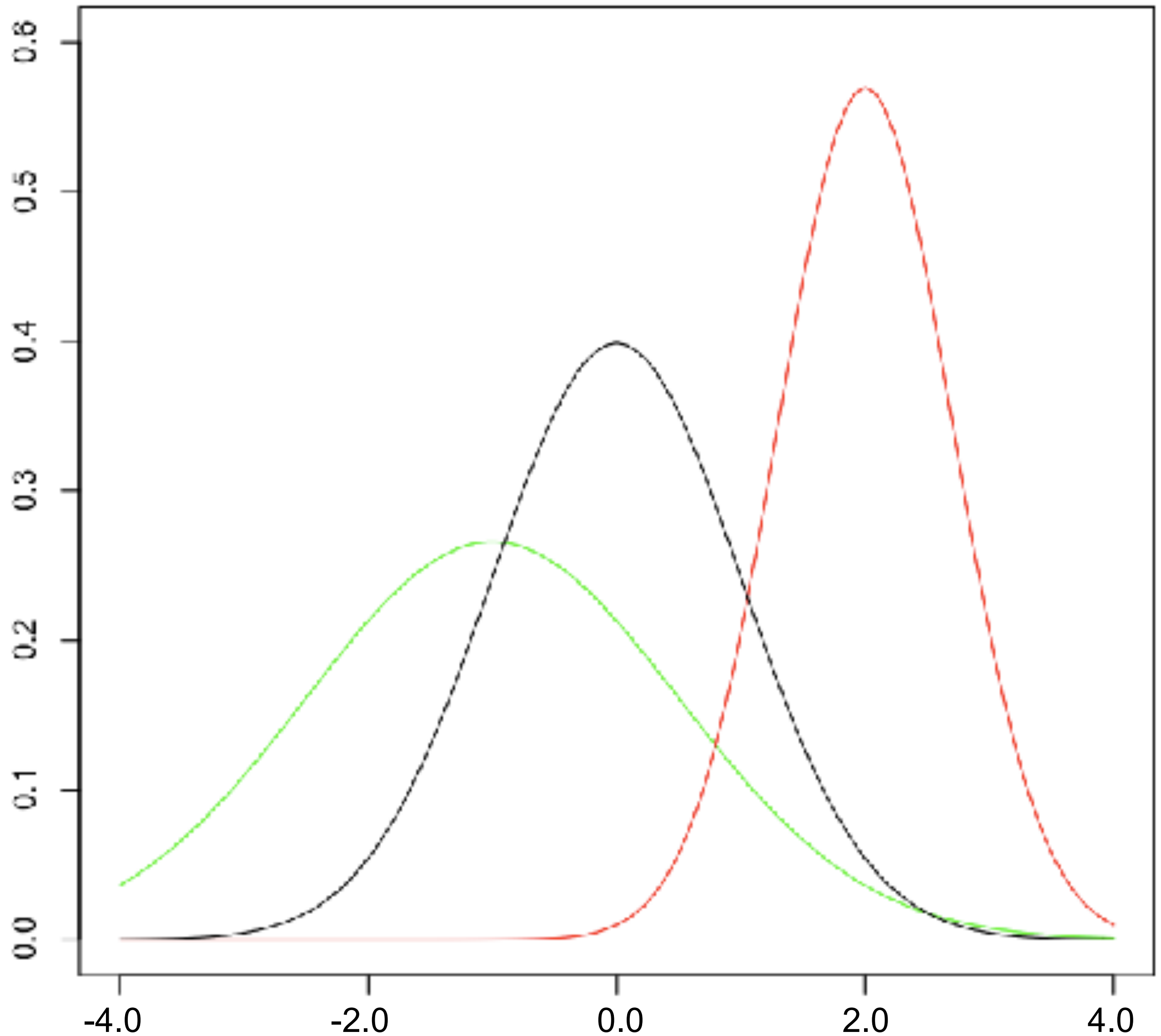
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení

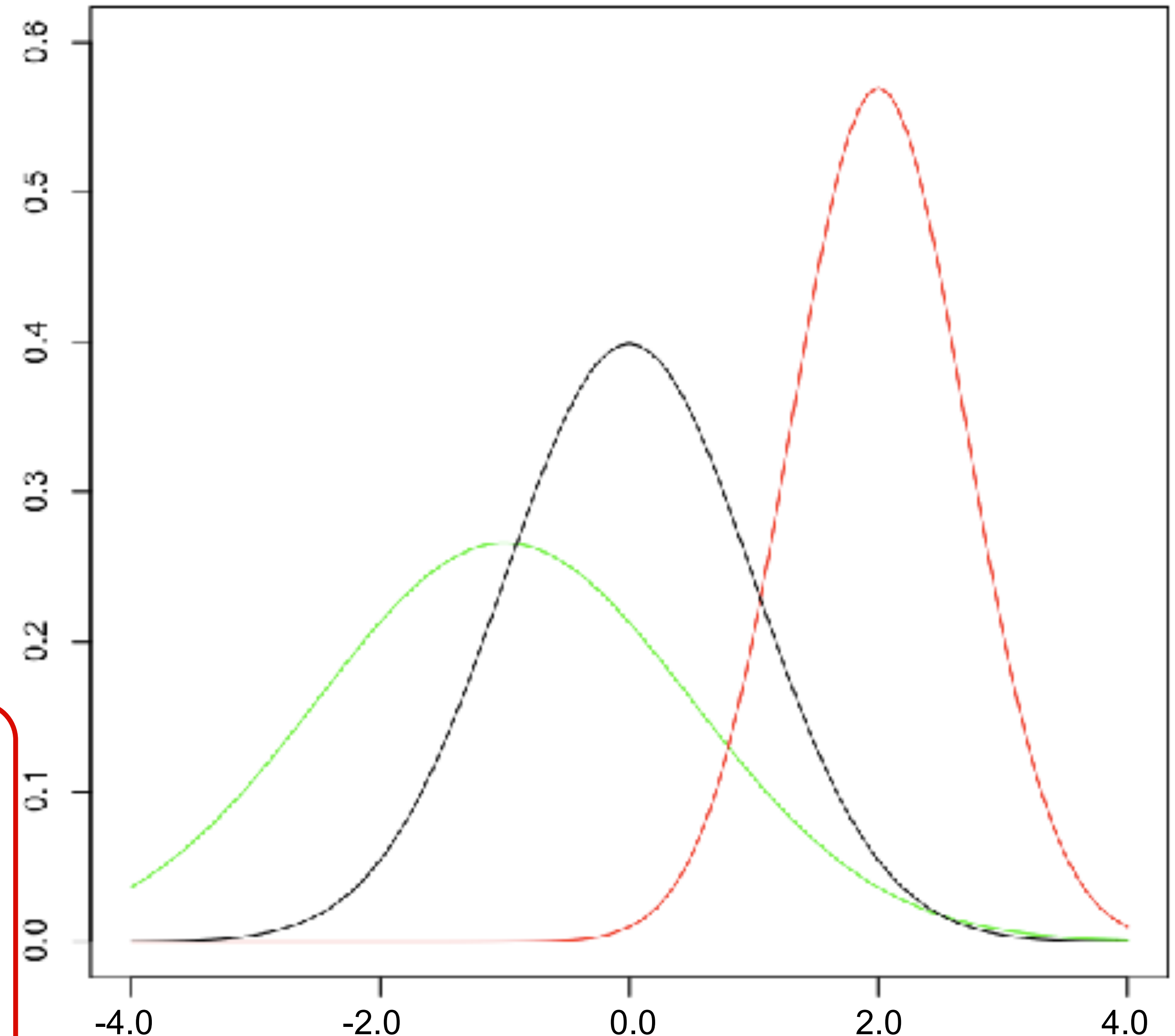
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hustota pravděpodobnosti



$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

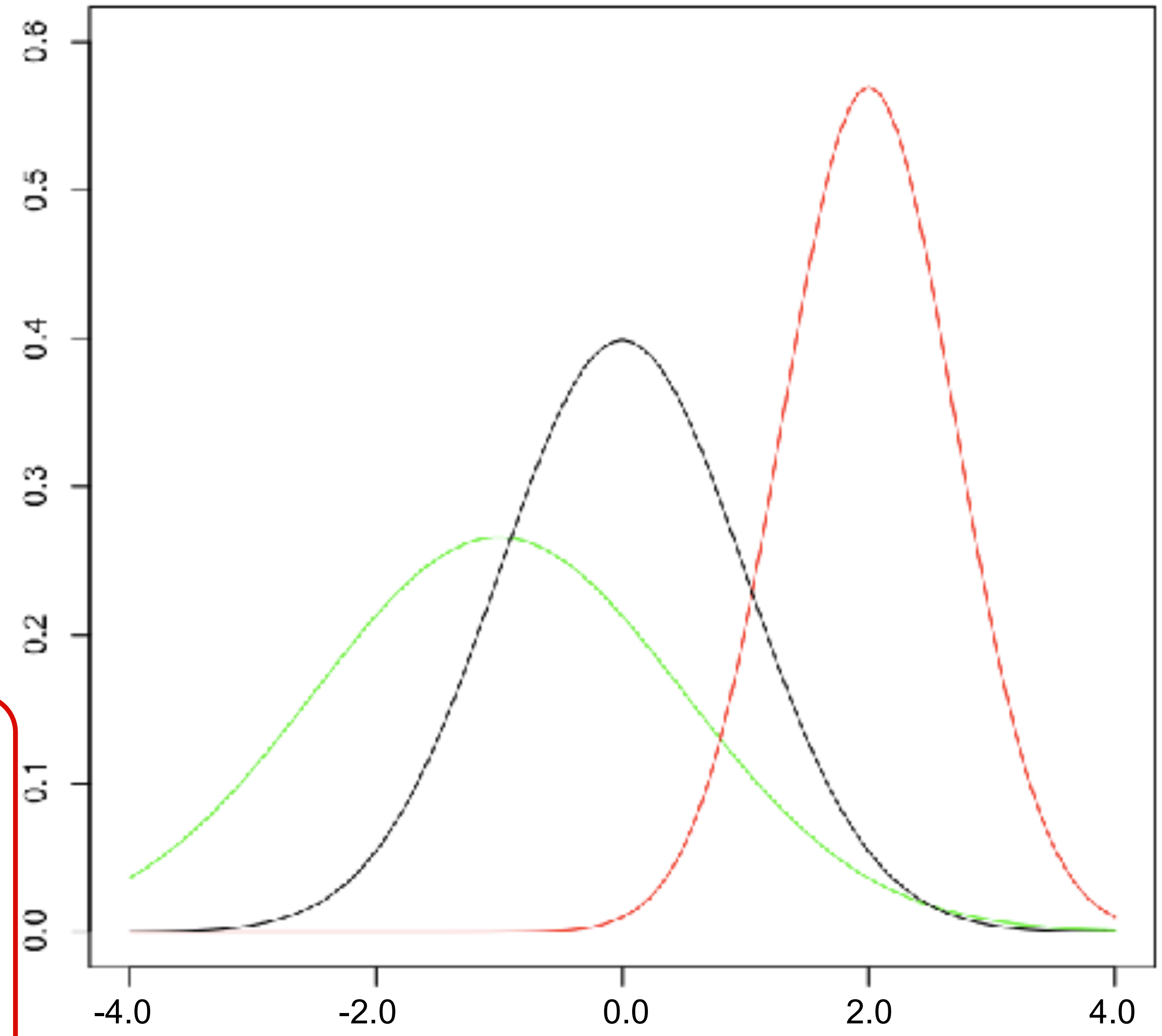
$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hustota pravděpodobnosti

$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

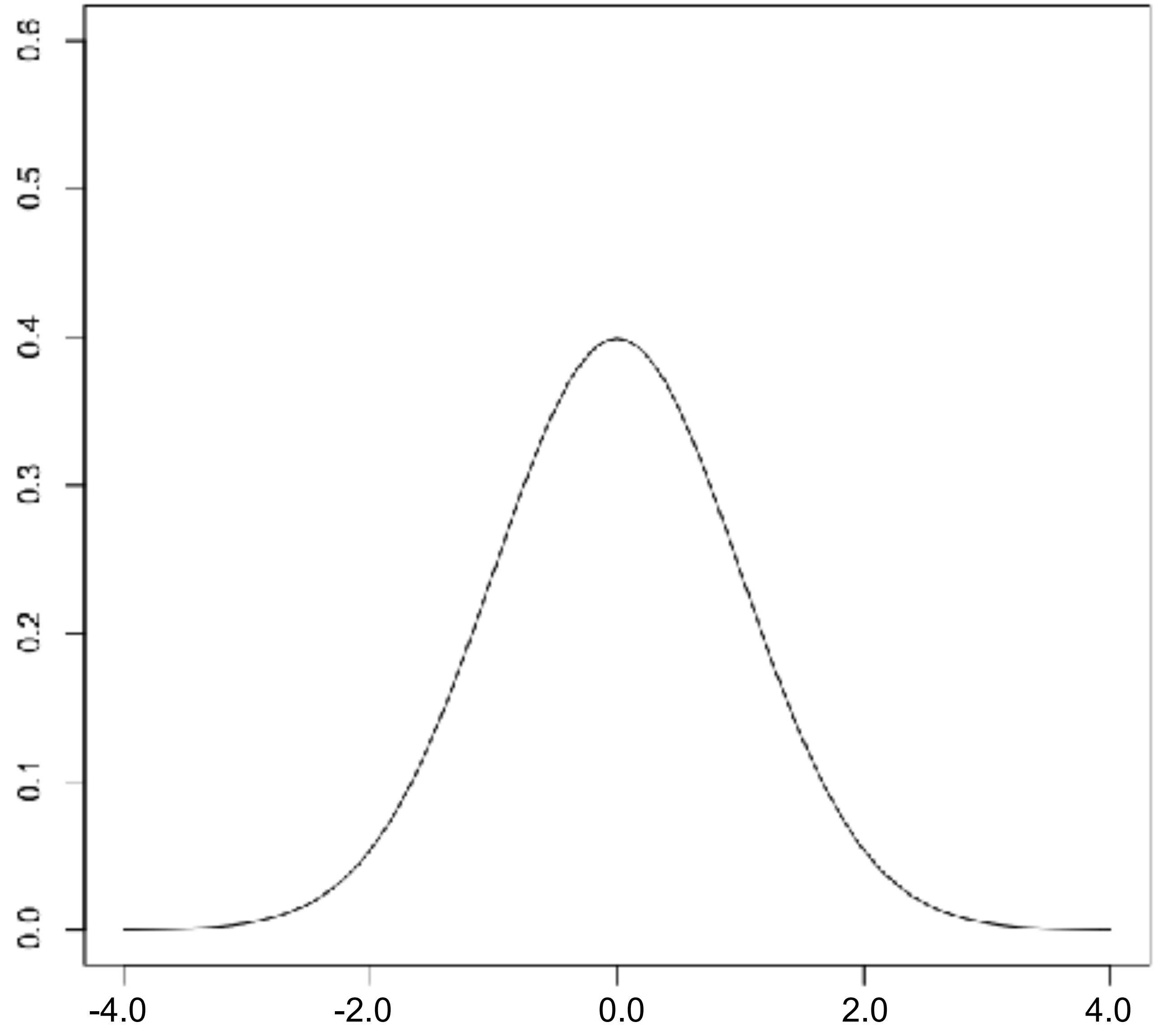
$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

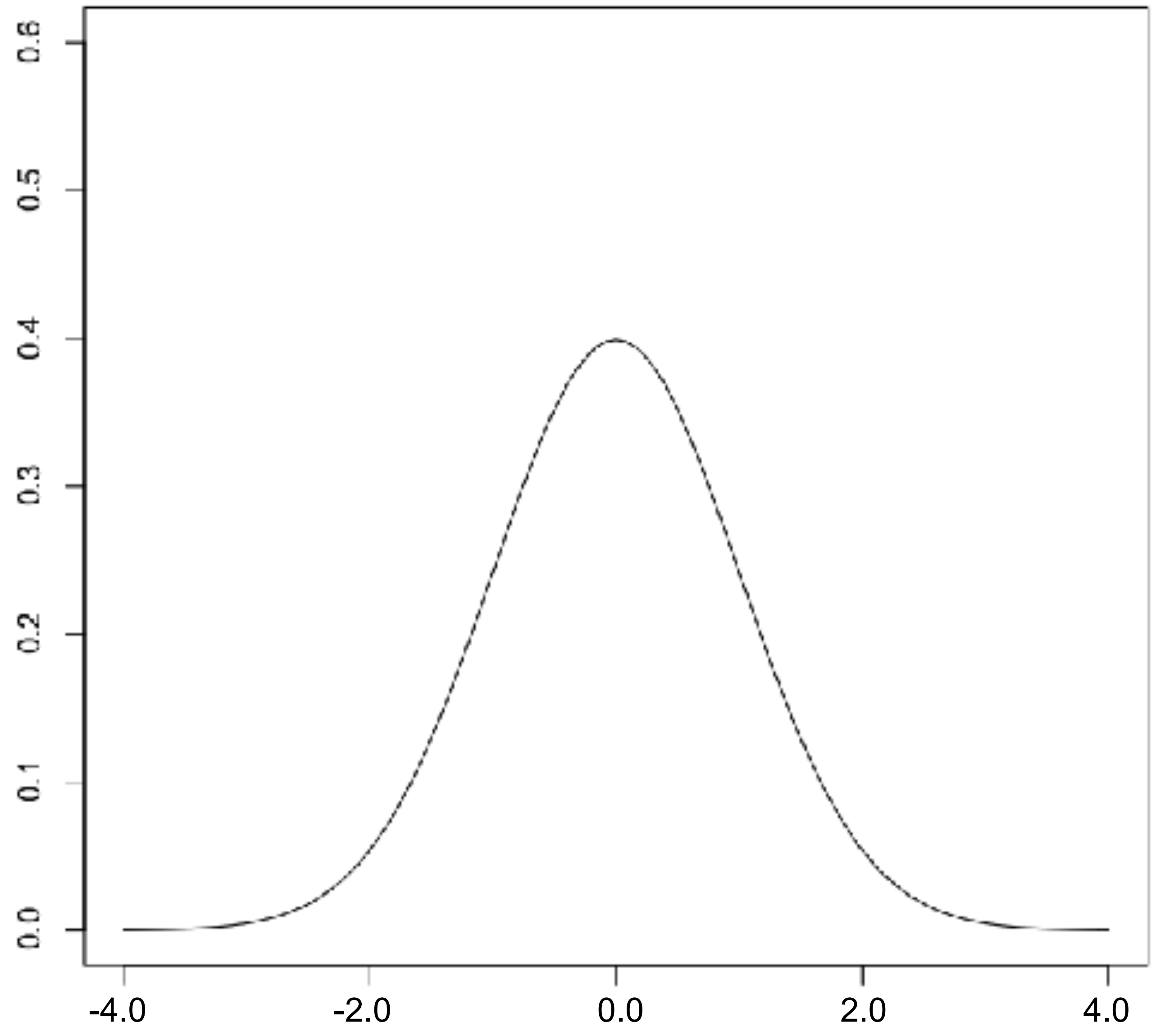


Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$



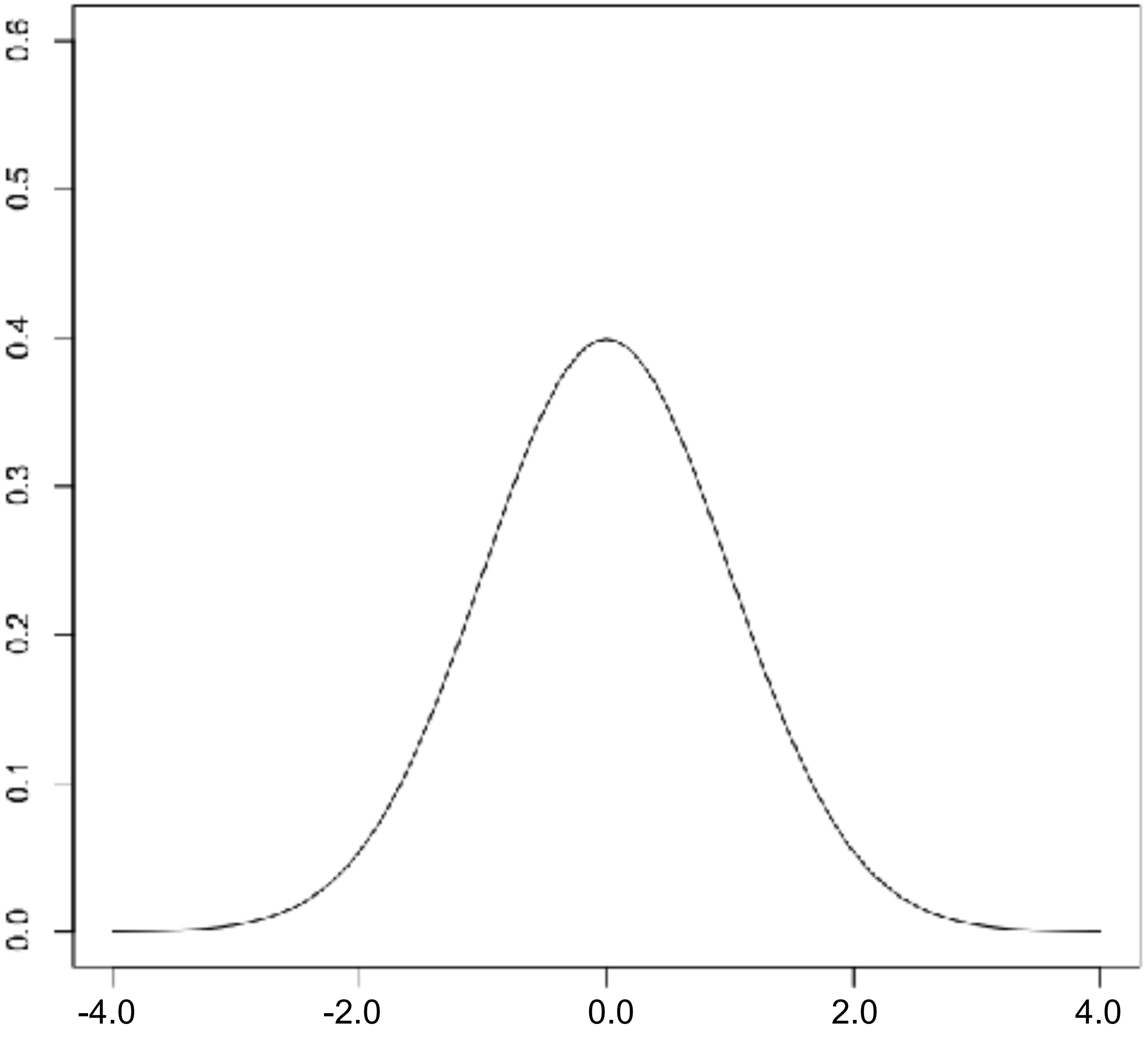
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$

$$X \sim N(0,1)$$



Normální rozdělení

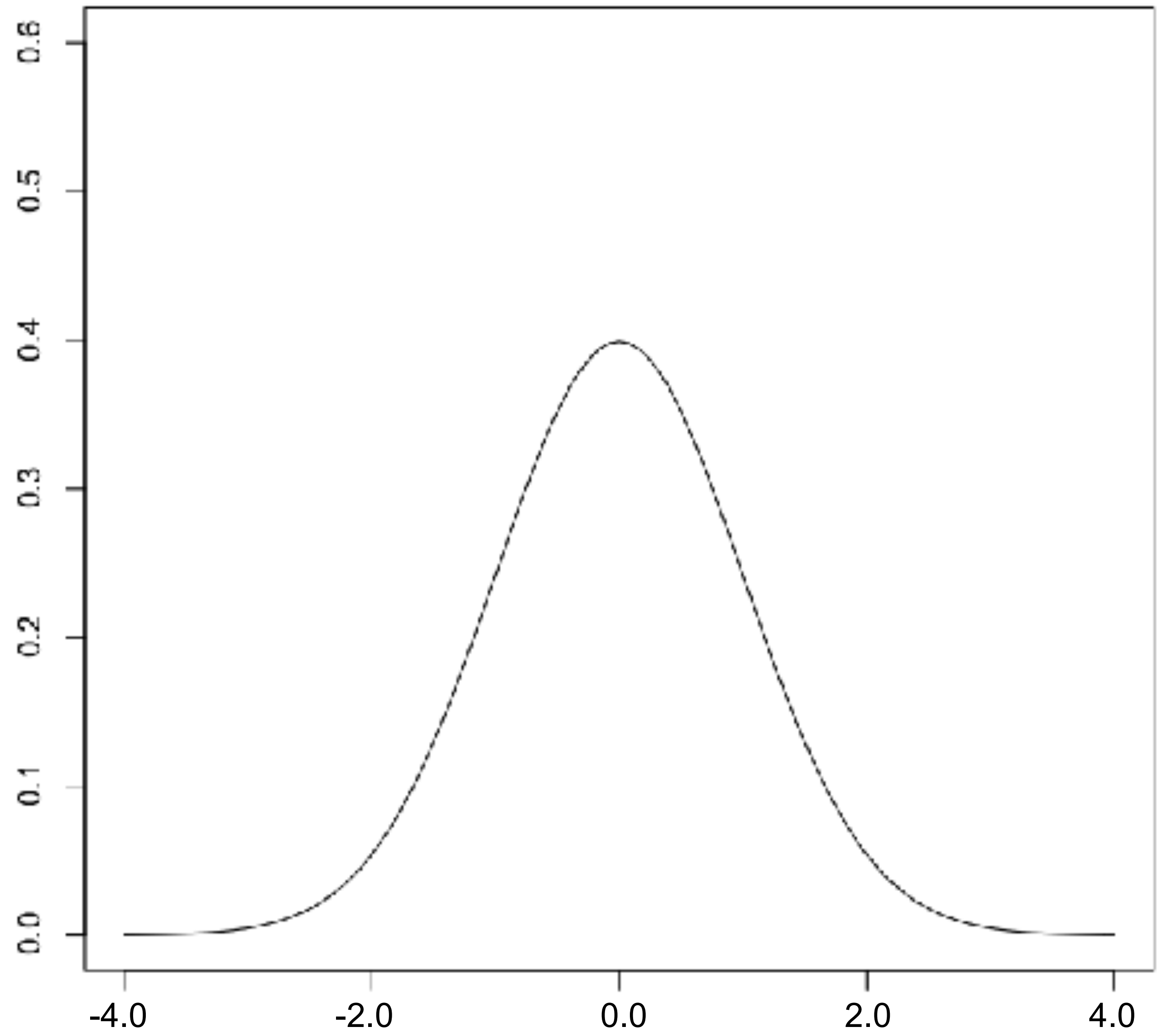
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$

$$X \sim N(0,1)$$

$$X \in (-\infty, +\infty)$$



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

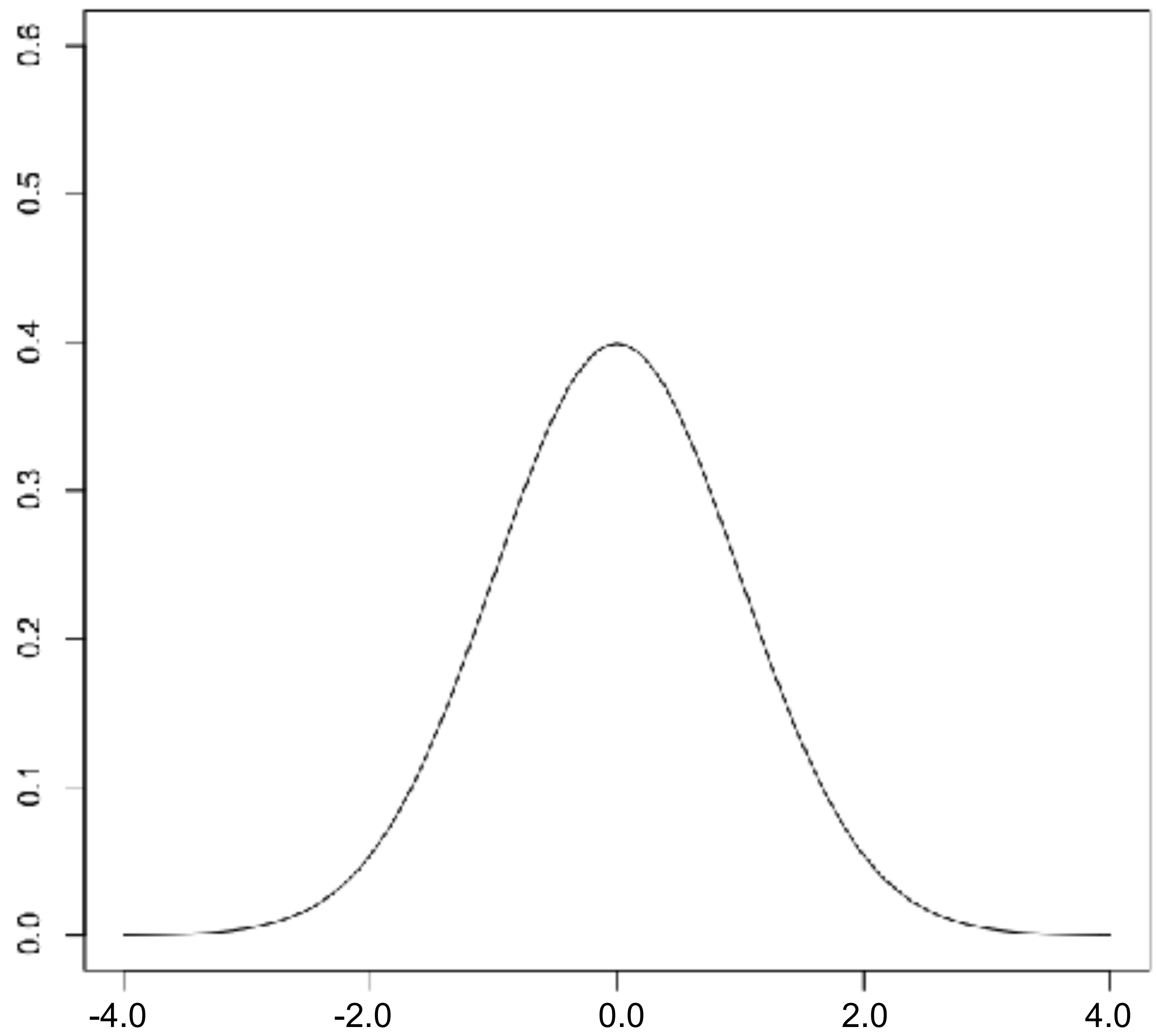
$$x \in R$$

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$

$$X \sim N(0,1)$$

$$X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) =$$



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

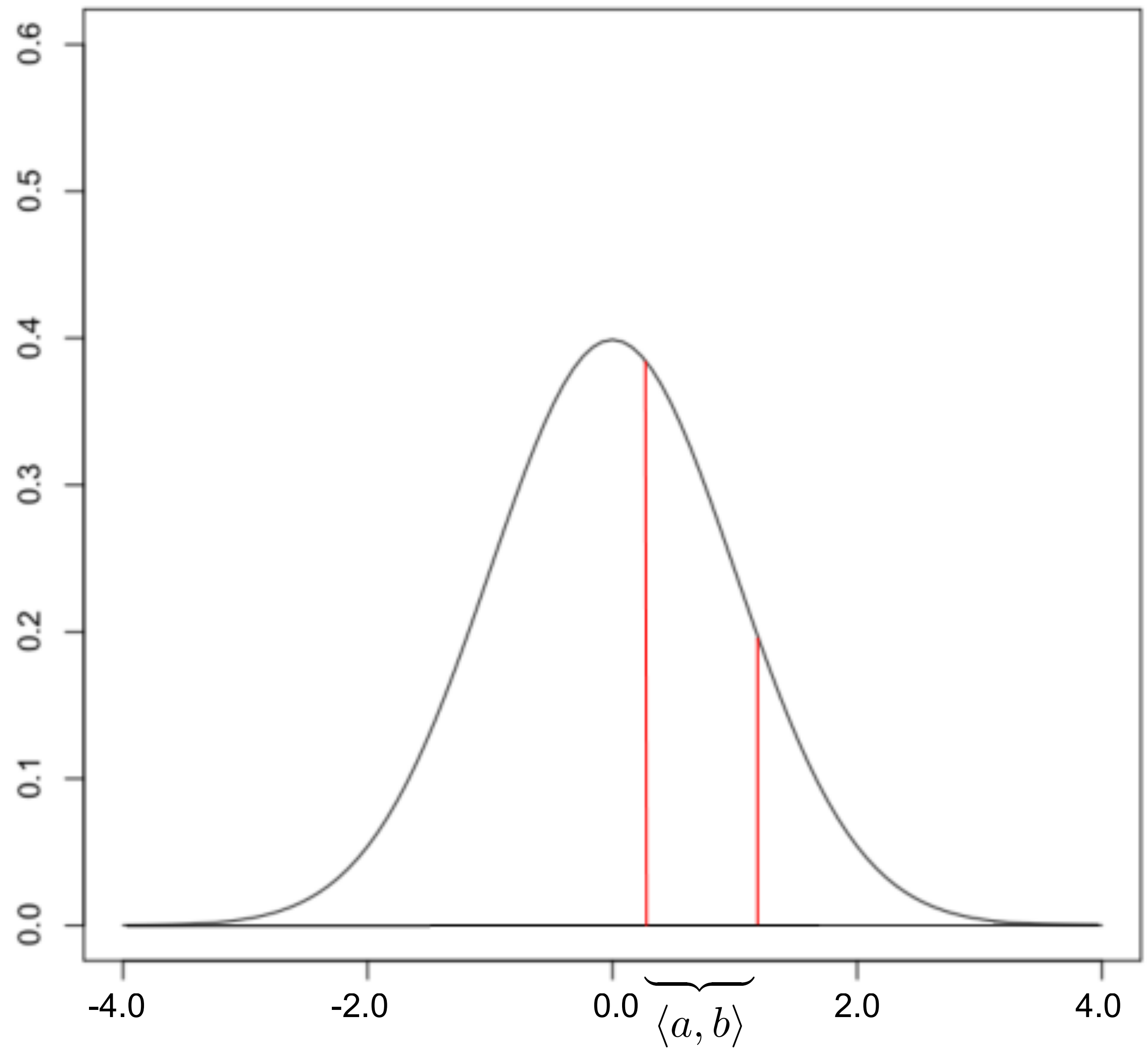
$$x \in R$$

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) =$$



Normální rozdělení

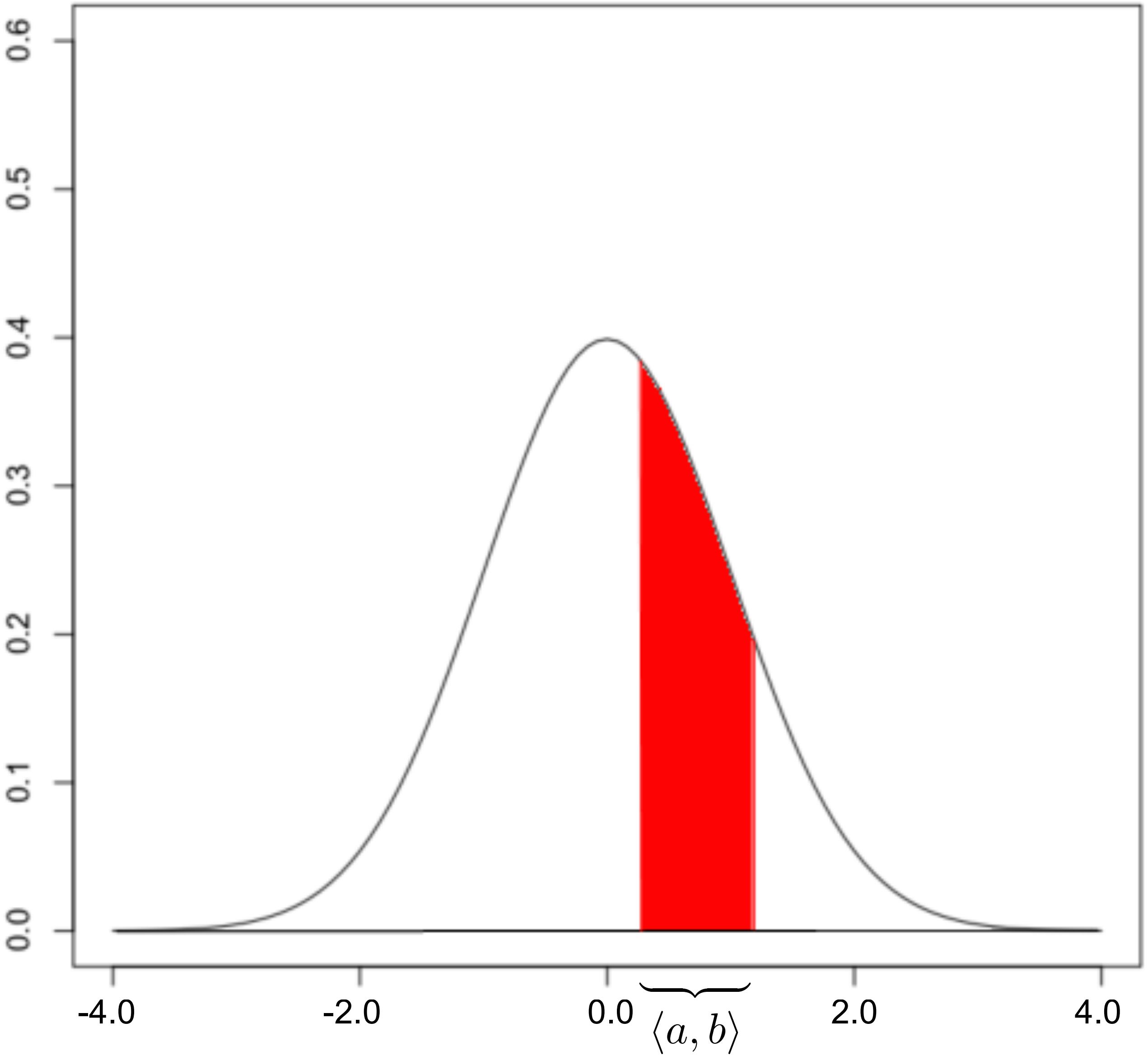
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$

$$X \sim N(0,1)$$

$$X \in (-\infty, +\infty)$$



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Normální rozdělení

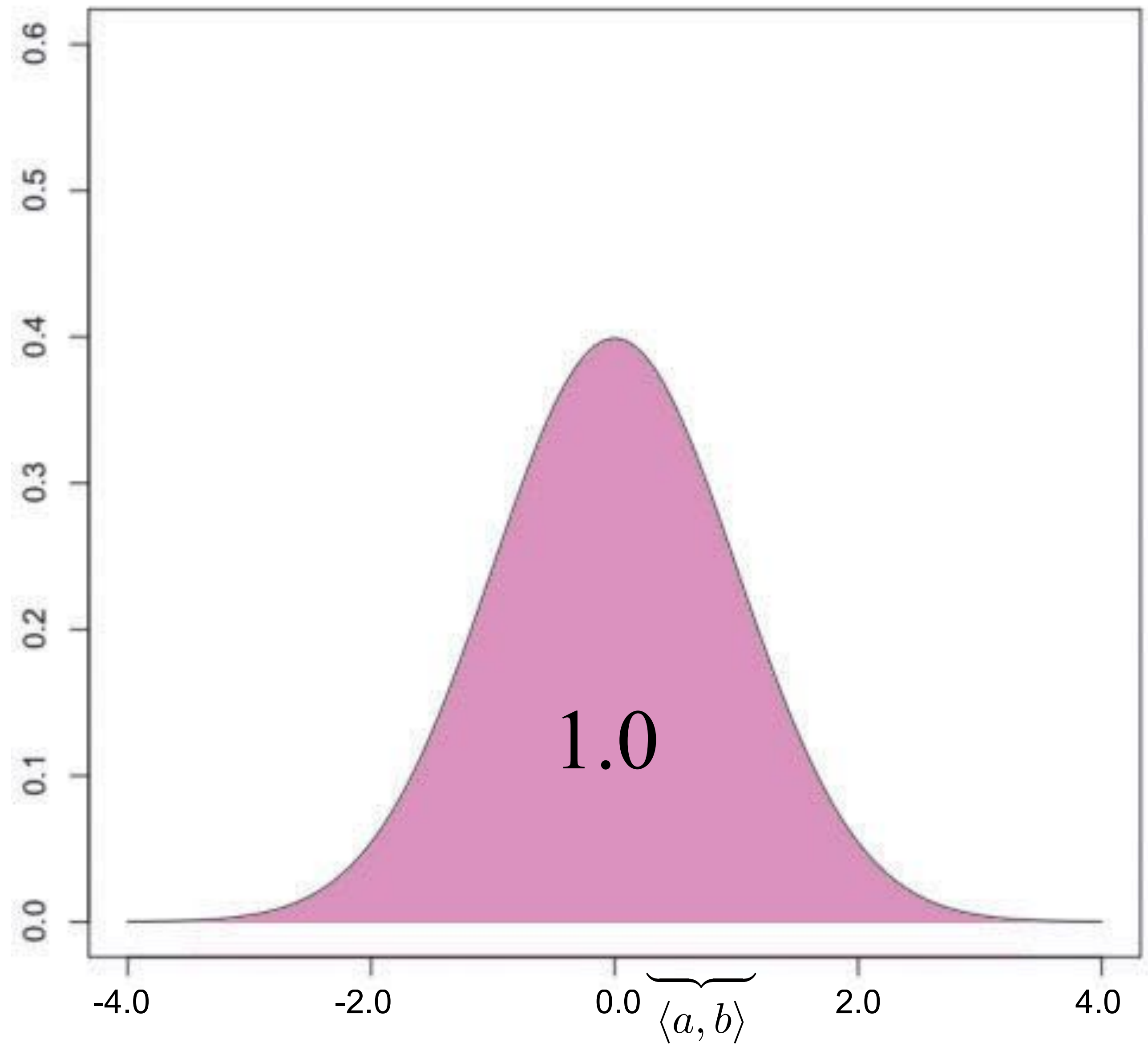
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$

$$X \sim N(0,1)$$

$$X \in (-\infty, +\infty)$$



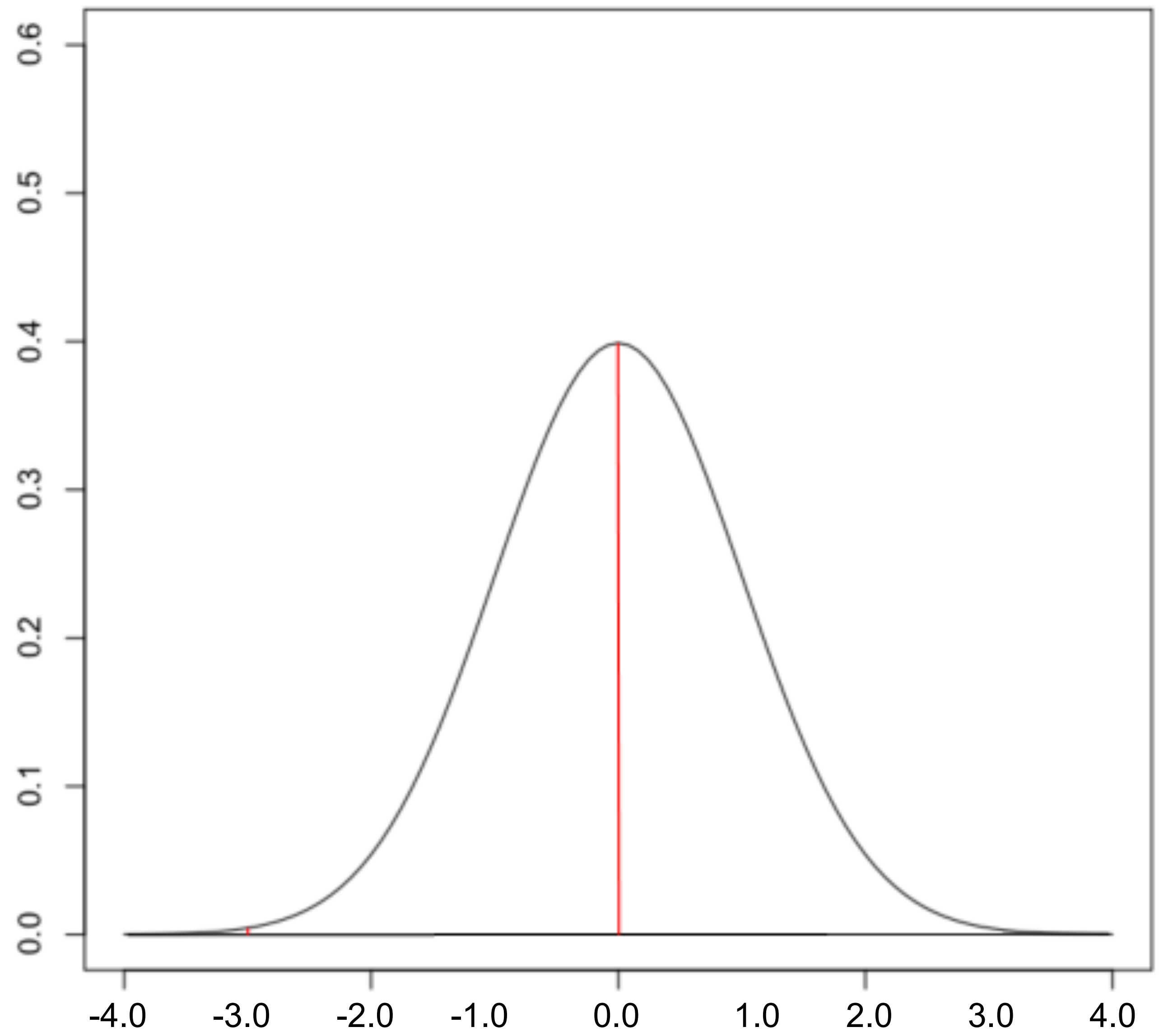
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

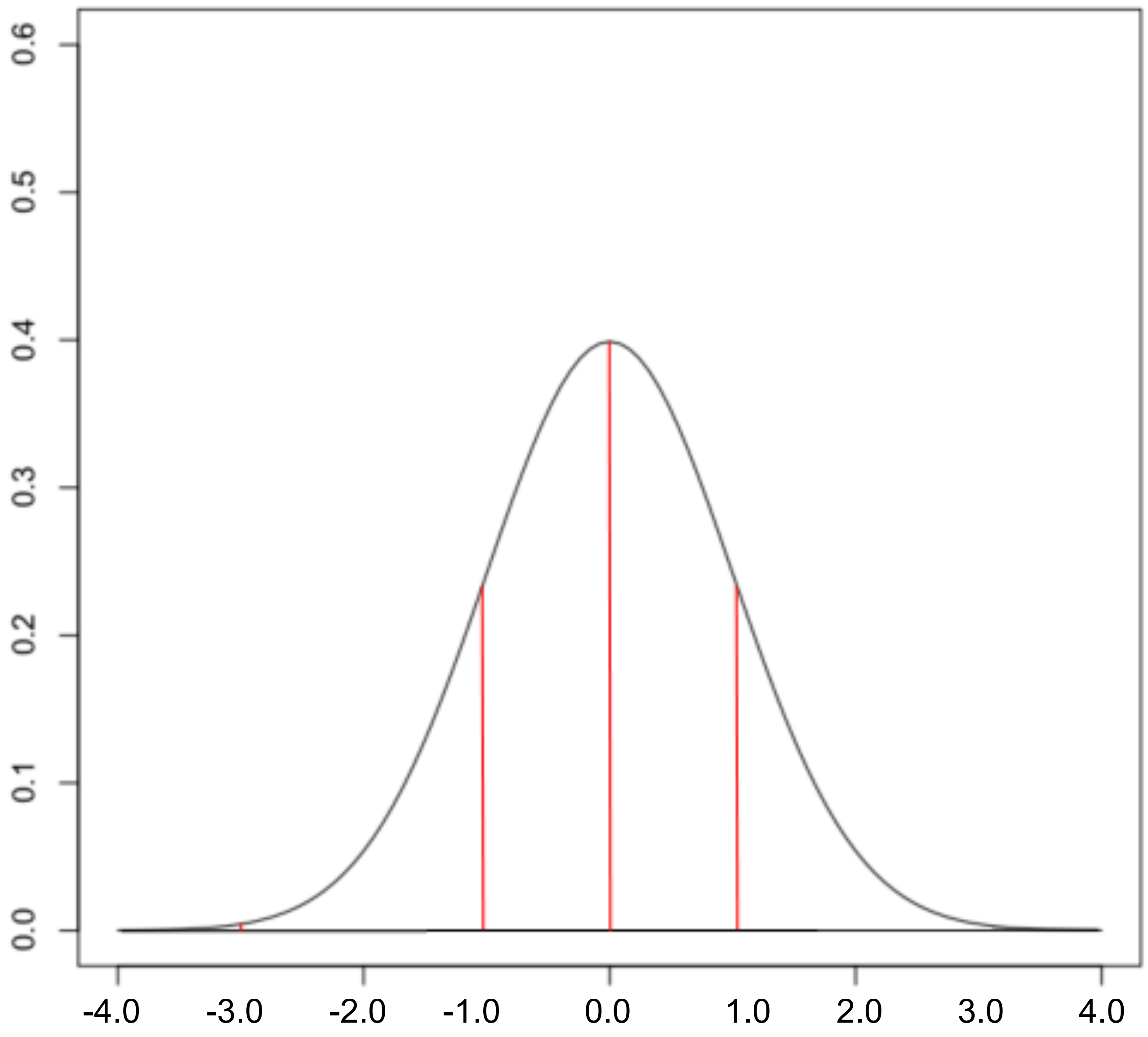


Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0, 1)$$



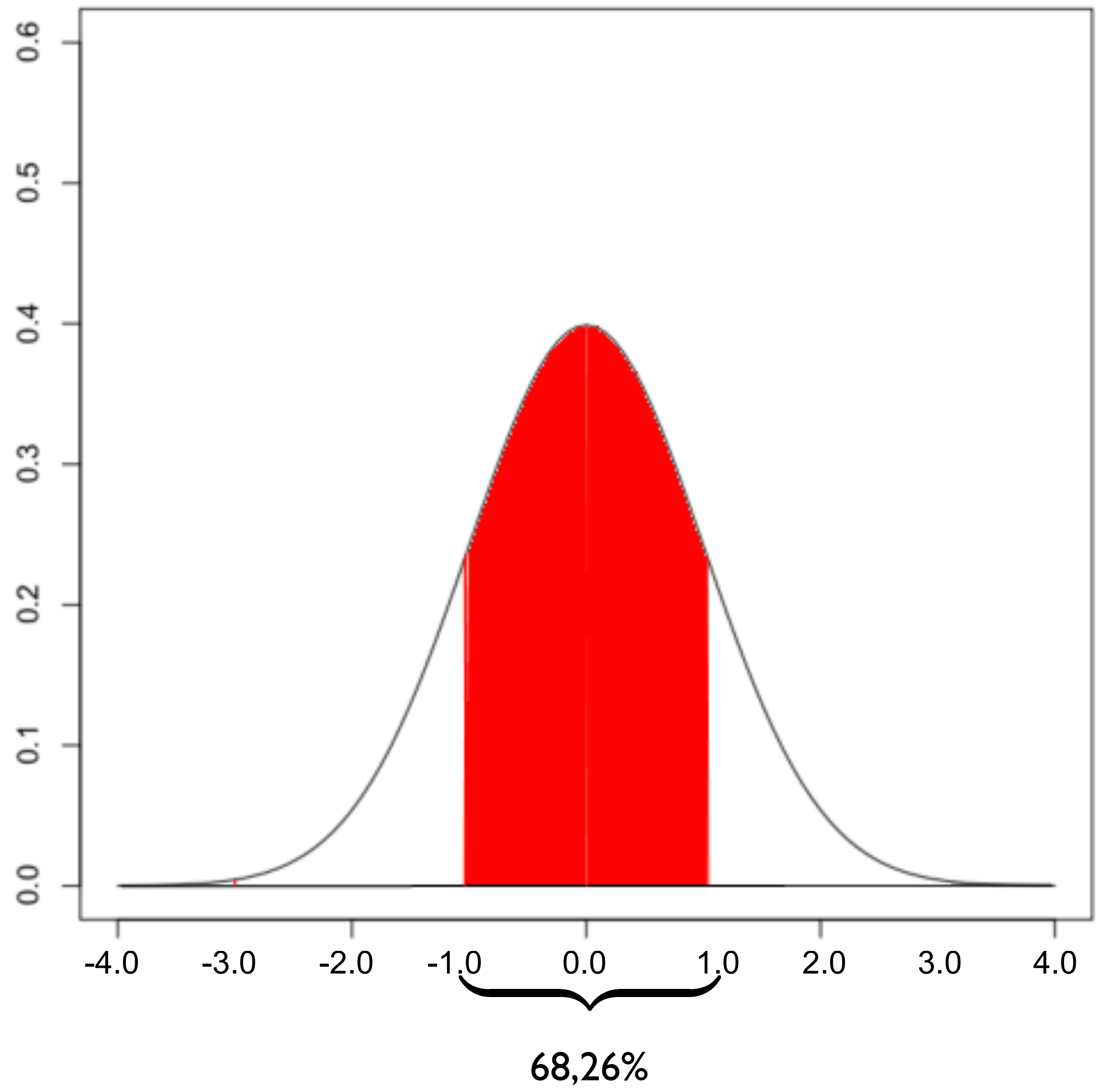
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$



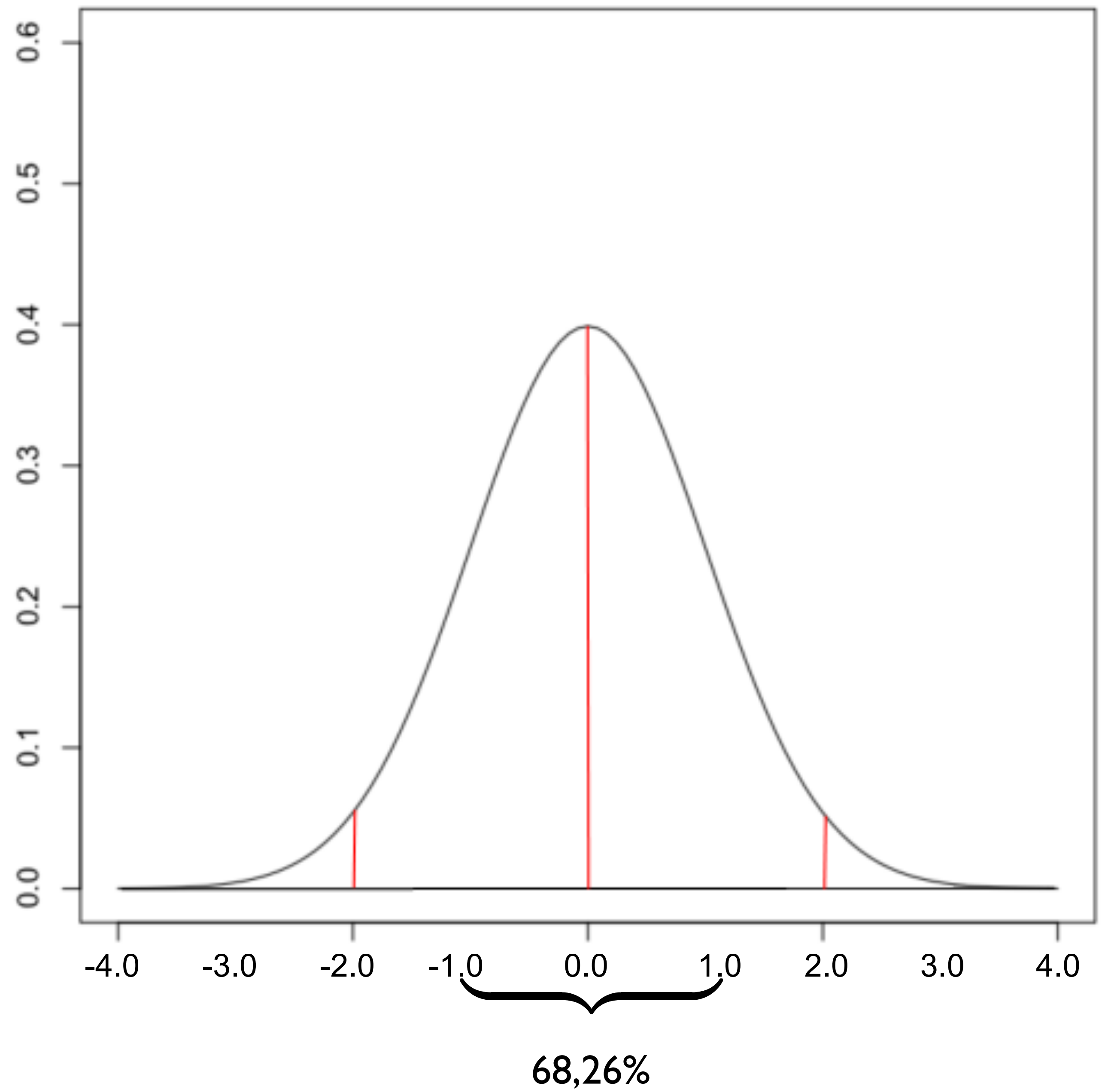
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$



Normální rozdělení

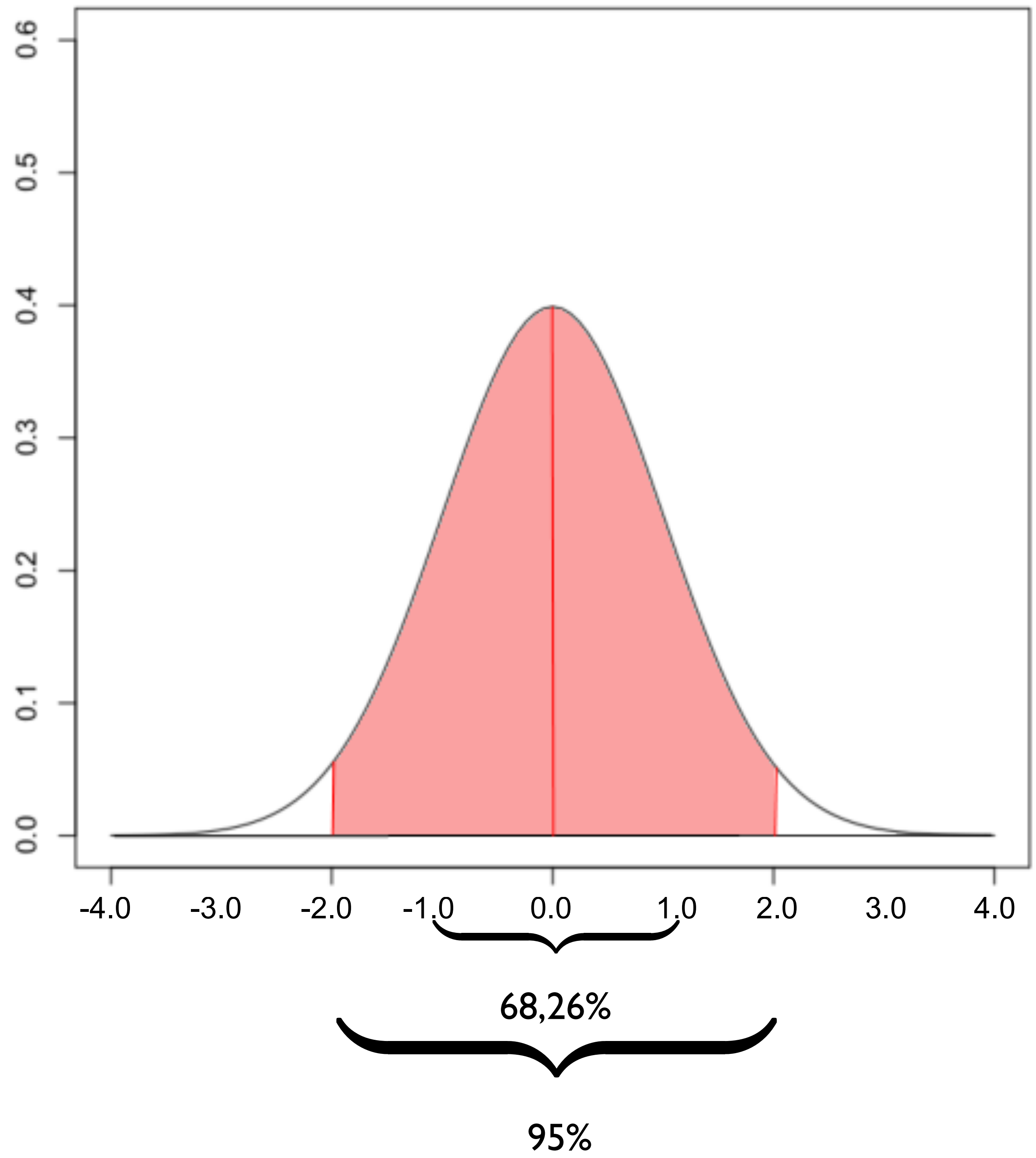
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

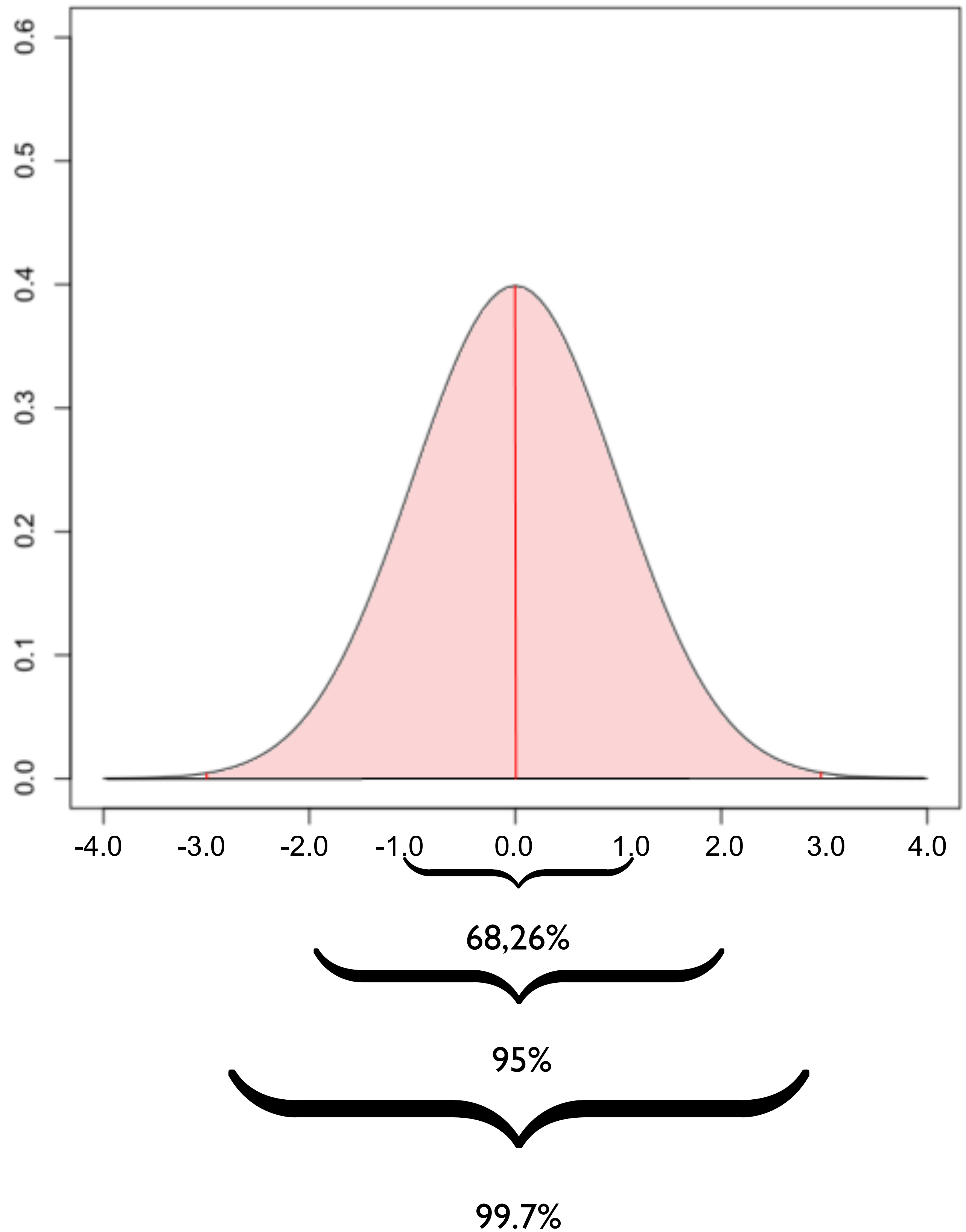
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

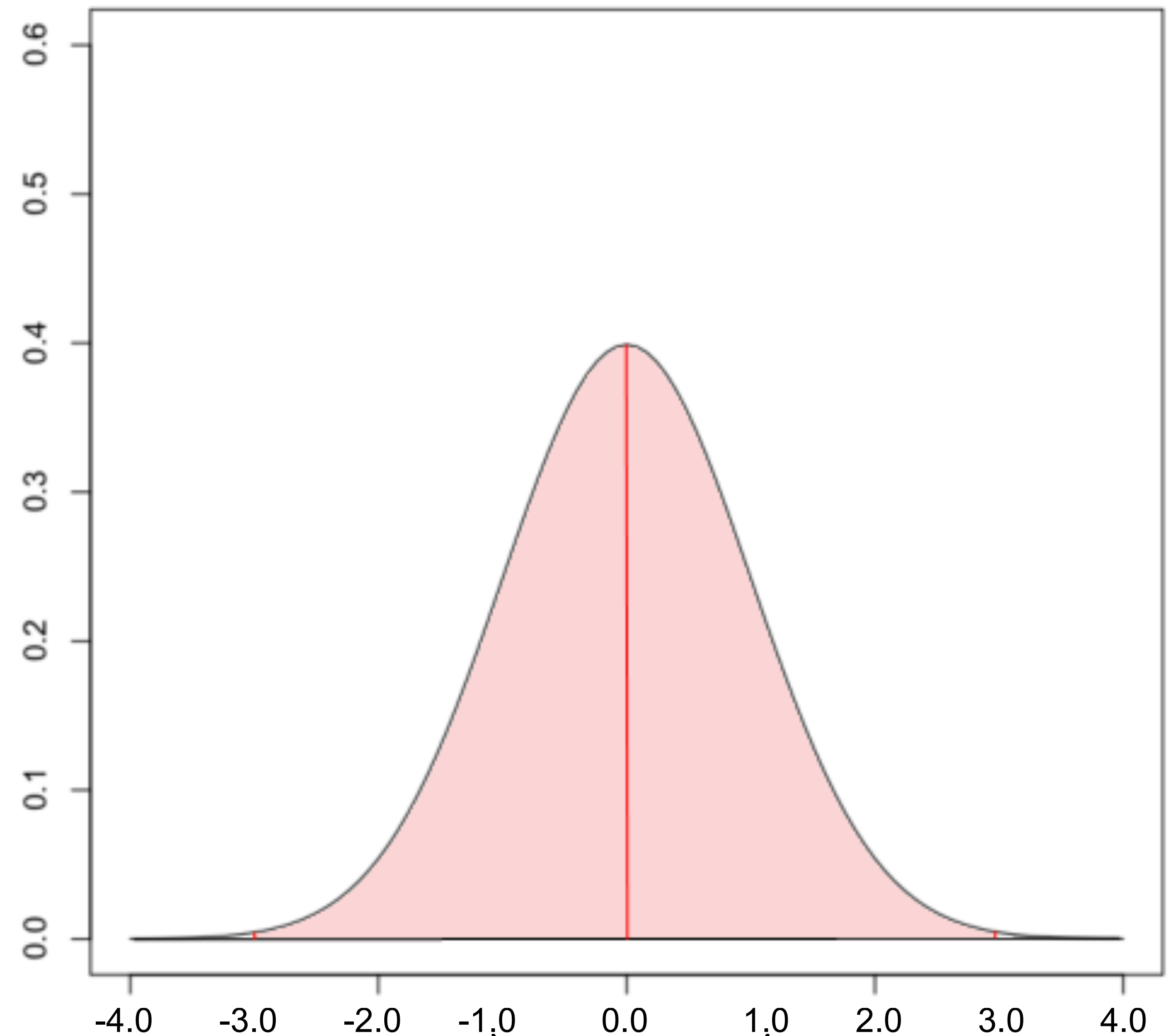
$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



$\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$
68,26%

$\langle \mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma \rangle$
95%

$\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$
99.7%

Normální rozdělení

$$X \sim N(0,1) \qquad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0,1) \qquad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \qquad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \qquad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \qquad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma)$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0,1) \qquad Y \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \qquad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \qquad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \qquad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \leq Y - \mu \leq k\sigma)$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0,1) \qquad\qquad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \le X \le 1) = 0.6826 \qquad P(\mu - \sigma \le Y \le \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \le X \le 2) = 0.9545 \qquad P(\mu - 2\sigma \le Y \le \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \le X \le 3) = 0.9973 \qquad P(\mu - 3\sigma \le Y \le \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \le Y \le \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \le Y - \mu \le k\sigma)$$

$$= P\left(-k \le \frac{Y - \mu}{\sigma} \le k\right)$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0,1) \qquad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \qquad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \qquad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \qquad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \leq Y - \mu \leq k\sigma)$$

$$= P(-k \leq \frac{Y - \mu}{\sigma} \leq k) \quad = P(-k \leq X \leq k)$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0,1) \qquad\qquad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \le X \le 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \le Y \le \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \le X \le 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \le Y \le \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \le X \le 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \le Y \le \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \le Y \le \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \le Y - \mu \le k\sigma)$$

$$= P\left(-k \le \frac{Y-\mu}{\sigma} \le k\right) = P(-k \le X \le k)$$

$$\boxed{Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)}$$

Normální rozdělení

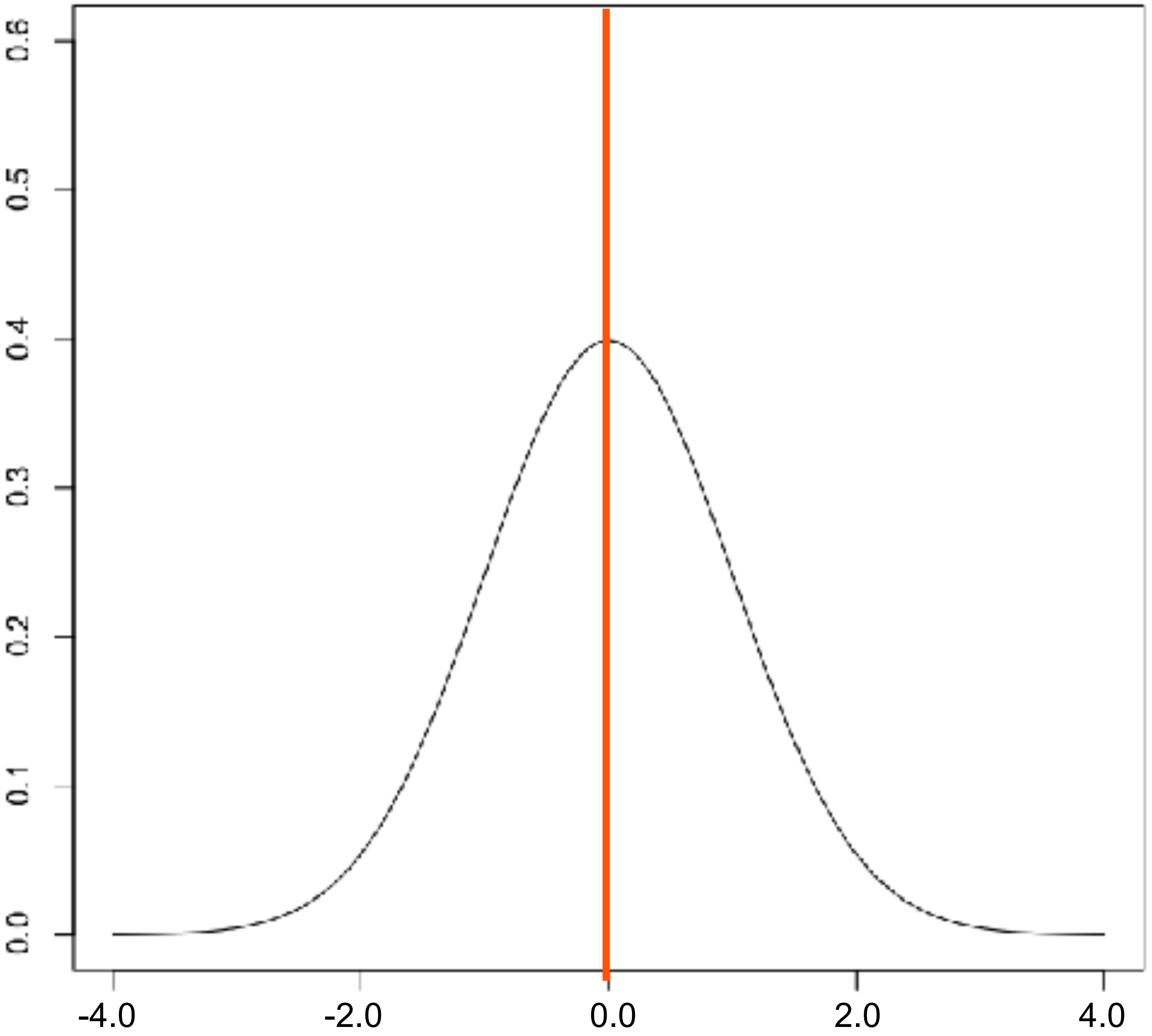
Symetrie:

$$X \sim N(0,1)$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \le x)$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

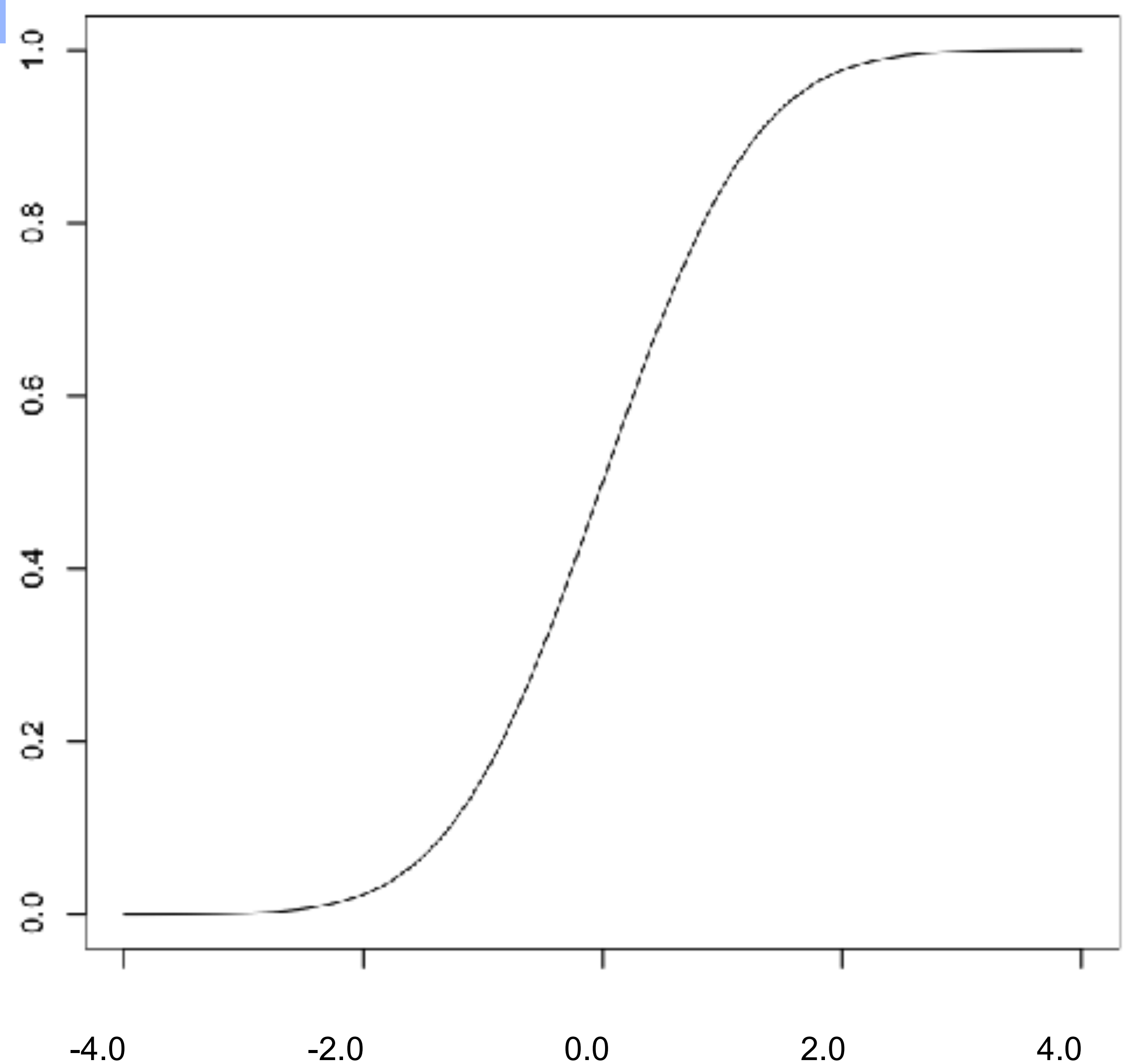
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

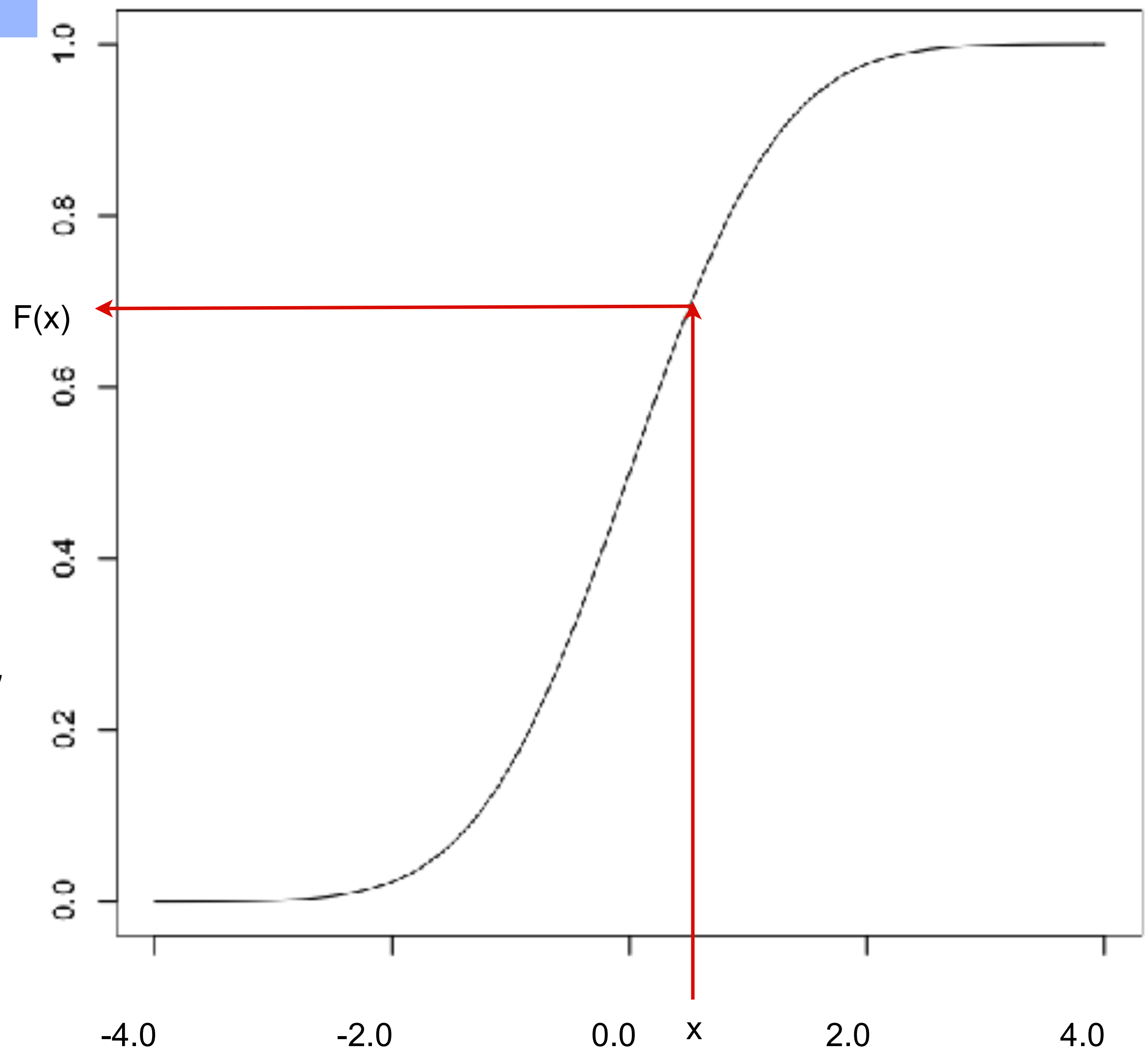
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \le x)$$

distribuční funkce



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

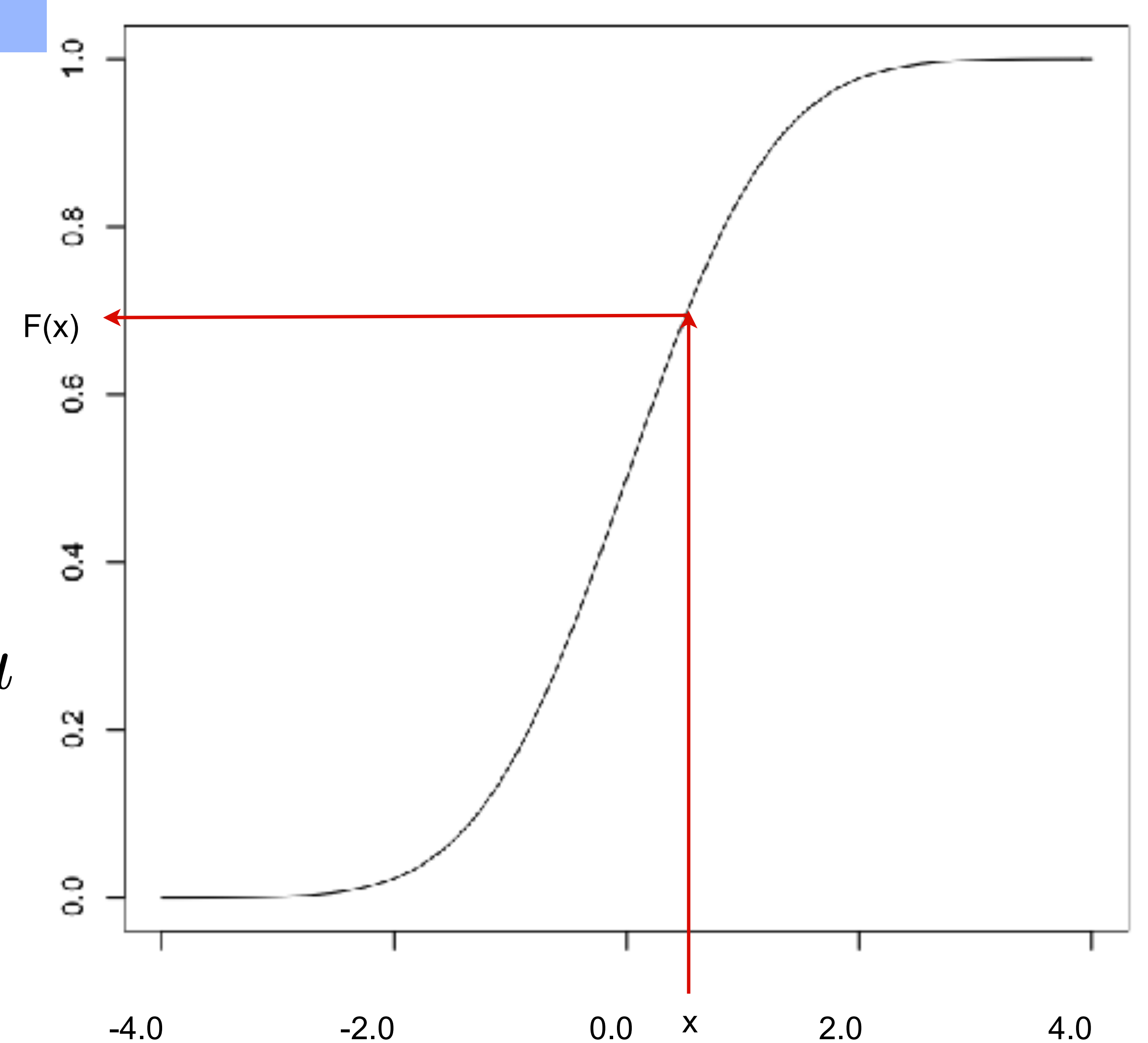
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x?

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

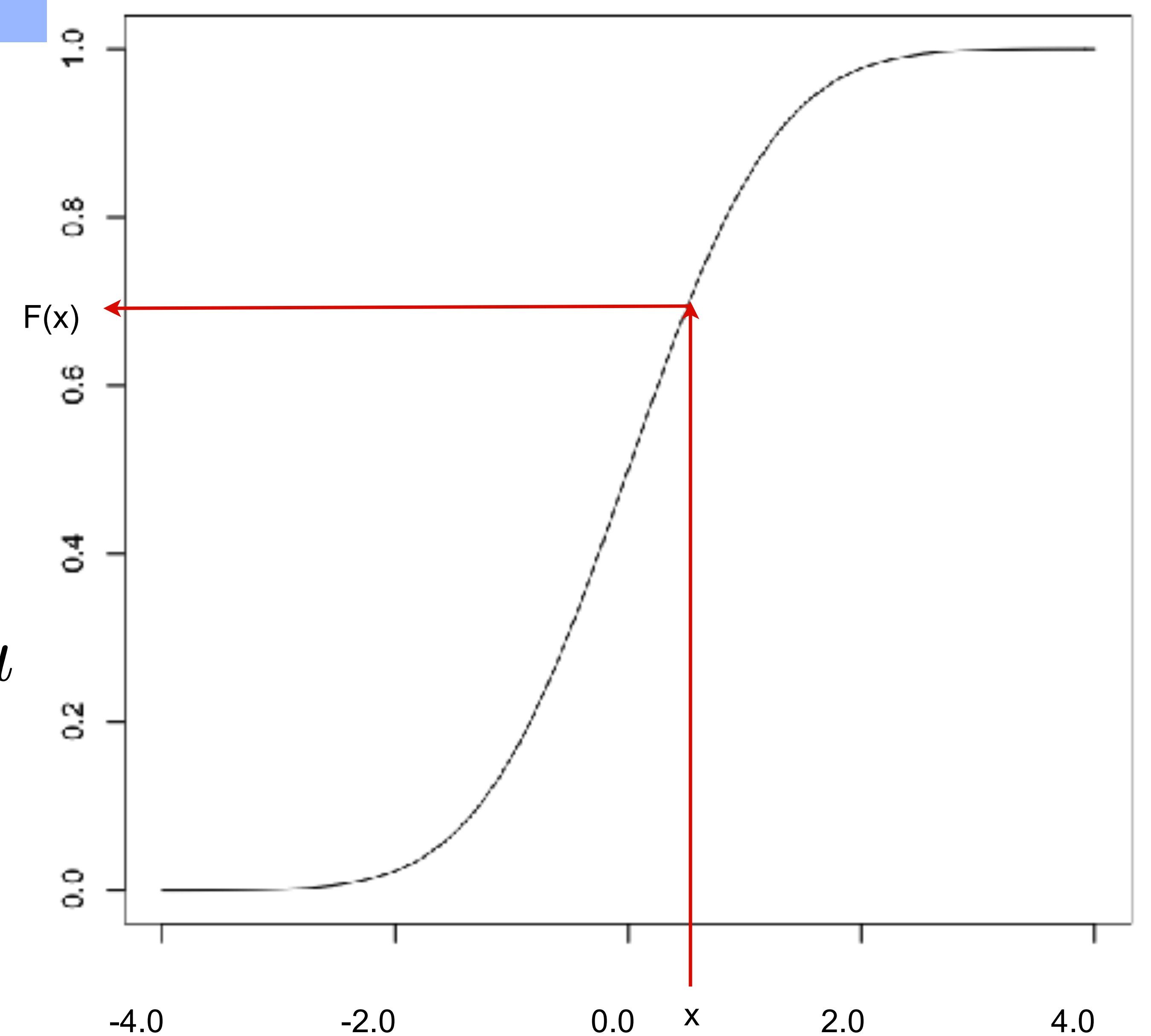
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x?

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

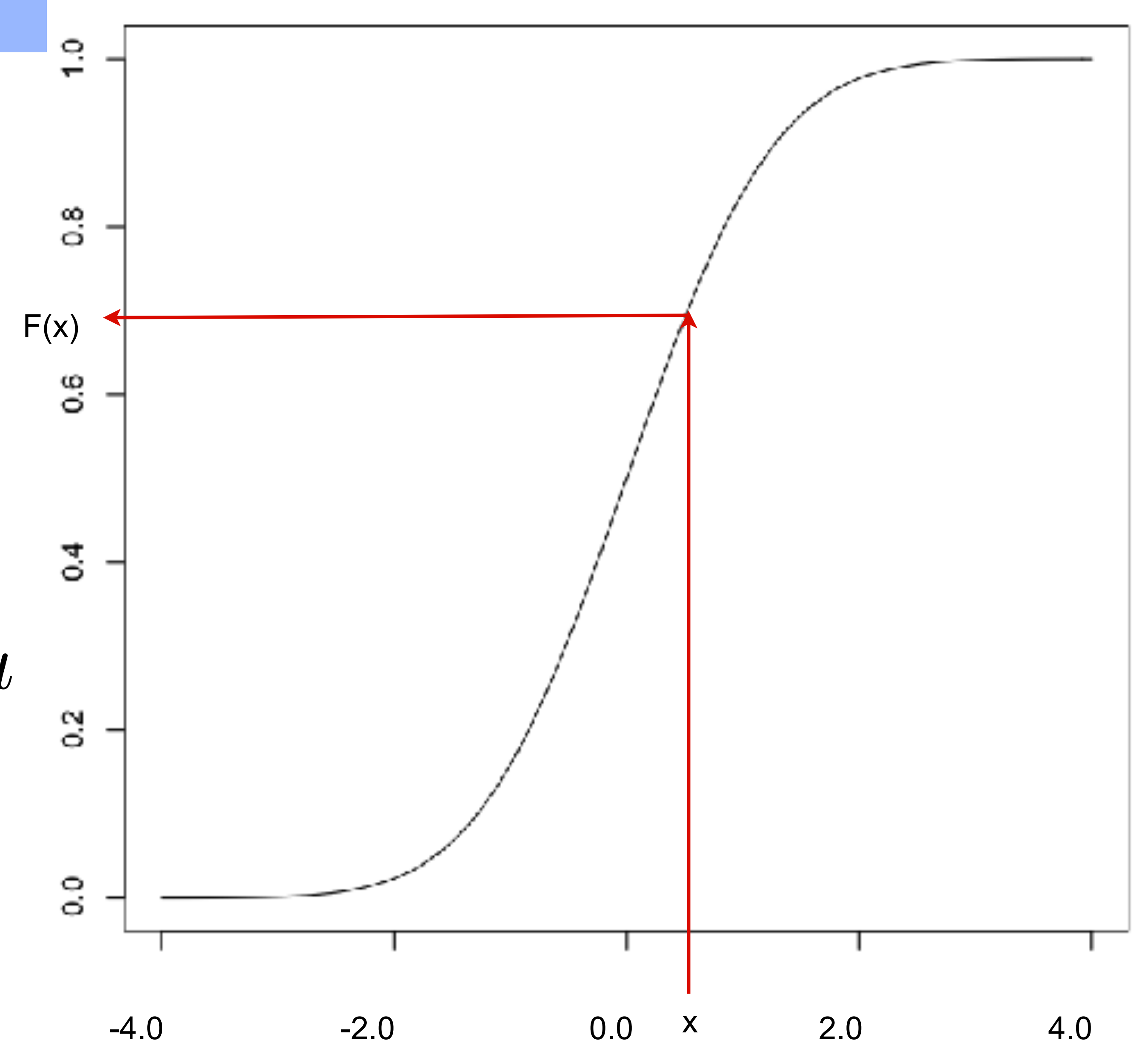
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x?

S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X větší než x?

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

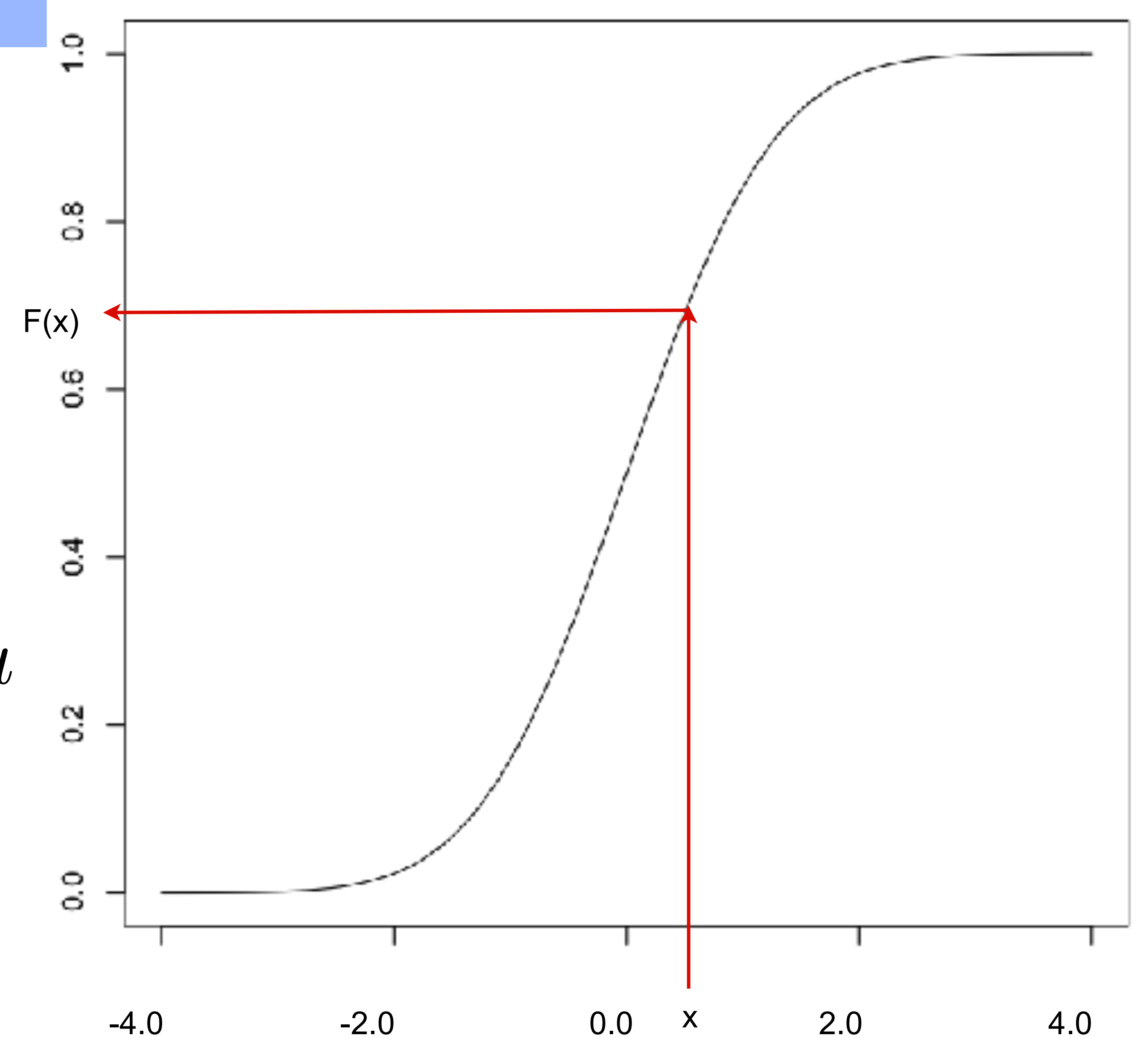
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x?

S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X větší než x?

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

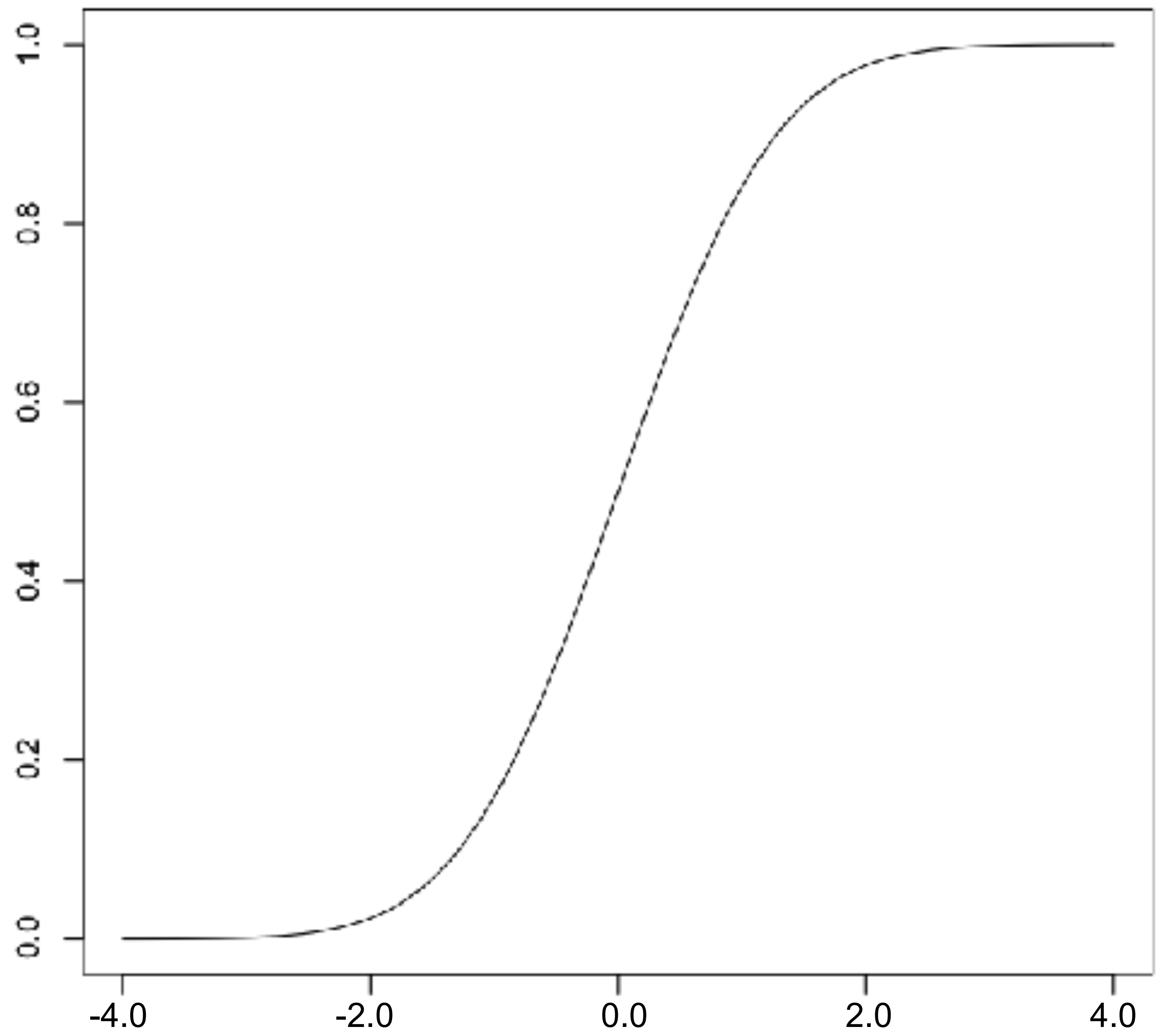
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



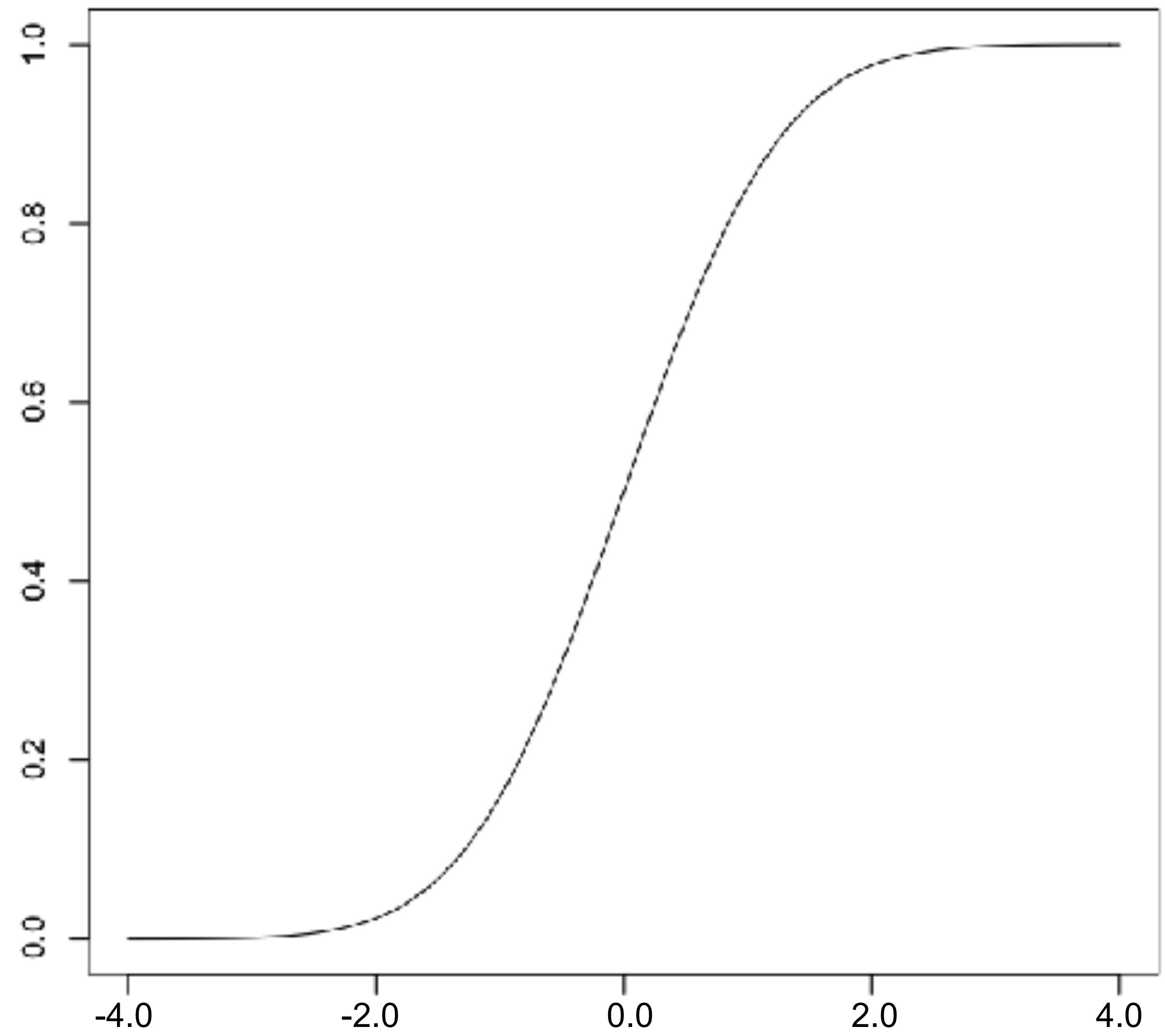
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$



$$\boxed{\Phi(x) = P(X \leq x)}$$

distribuční funkce

Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p?

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

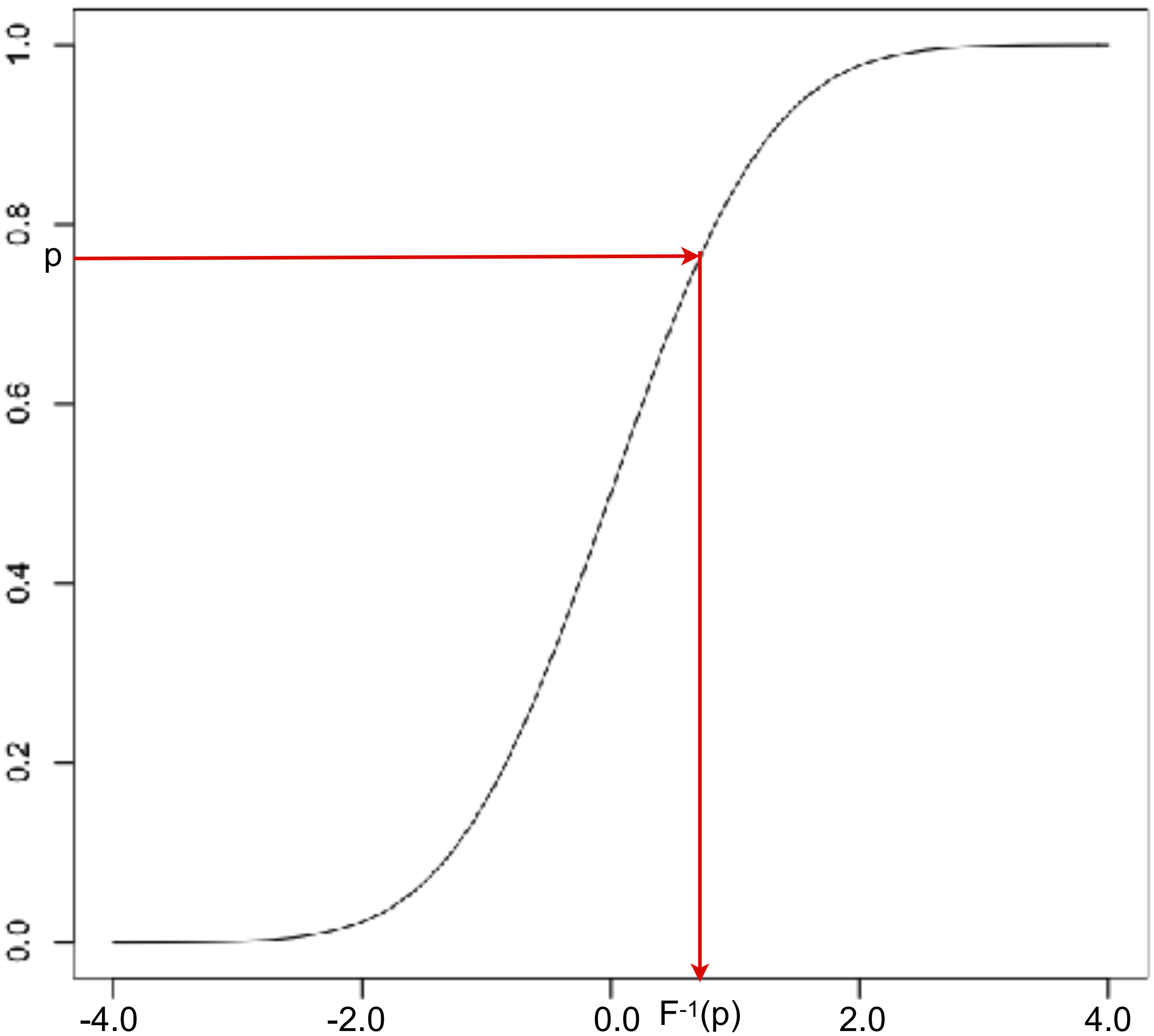
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p?

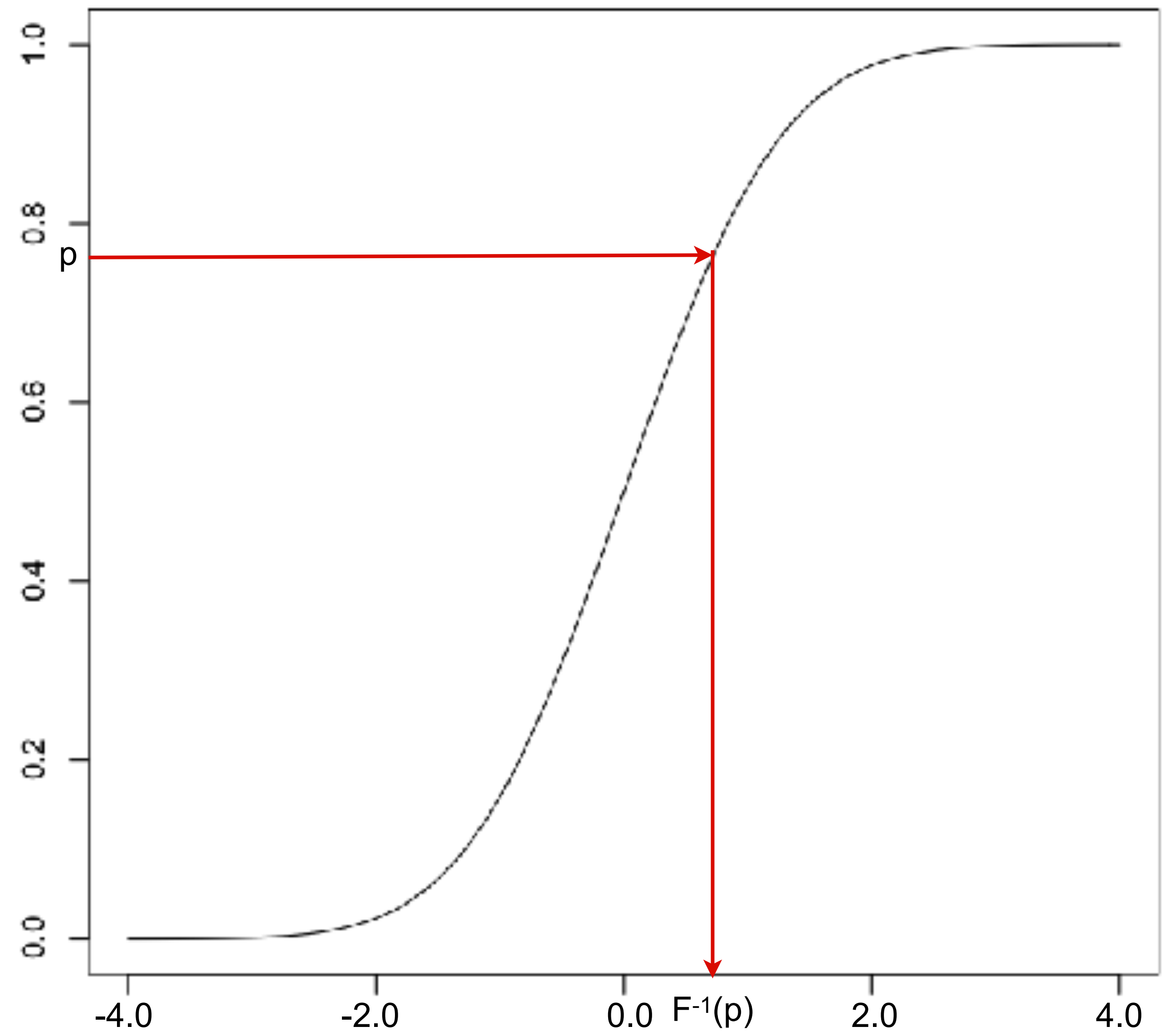
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$



$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce

Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p?

$$x_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce

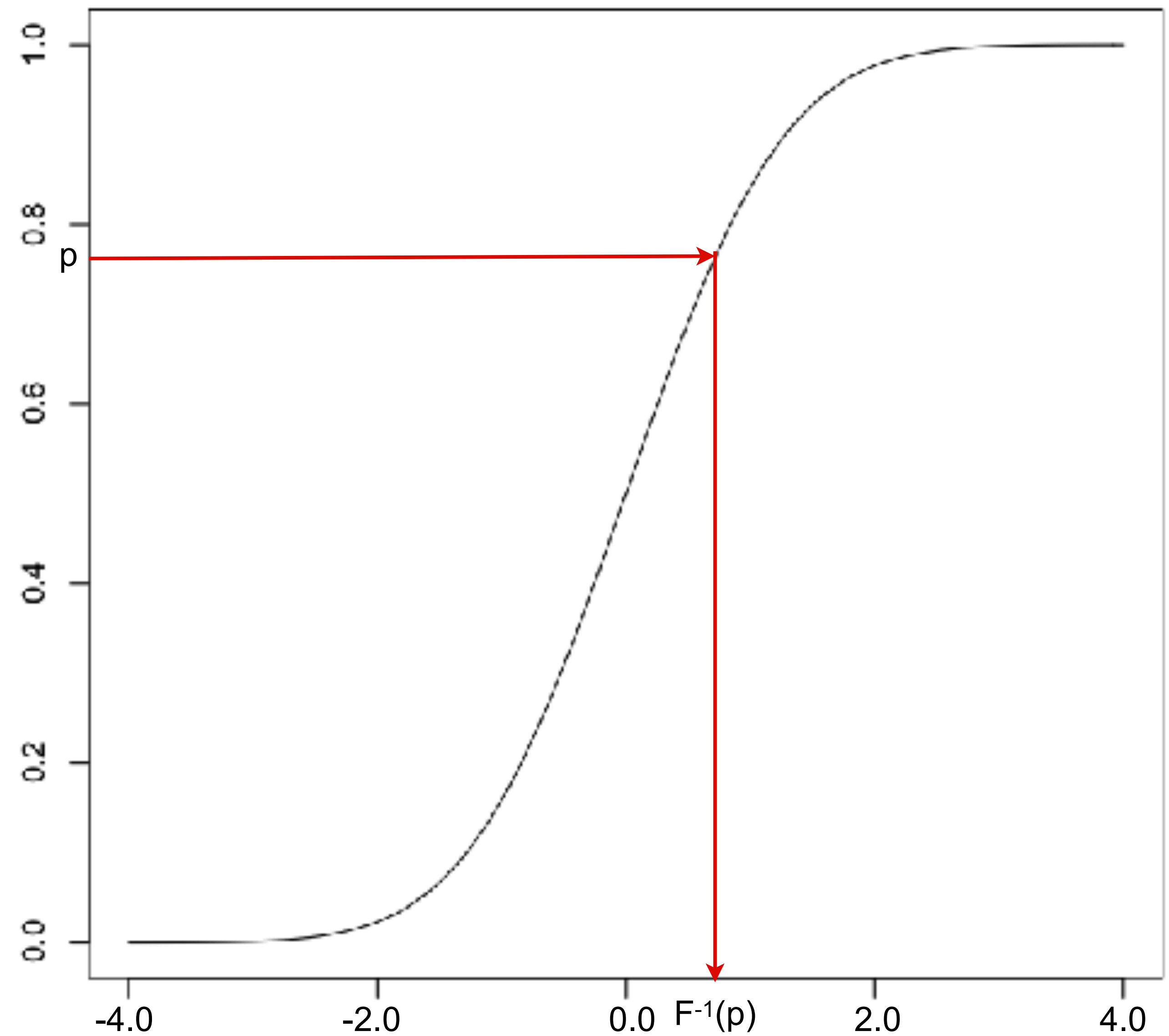
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$



$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce

Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p?

$$x_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce

Jakých hodnot bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností p?

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

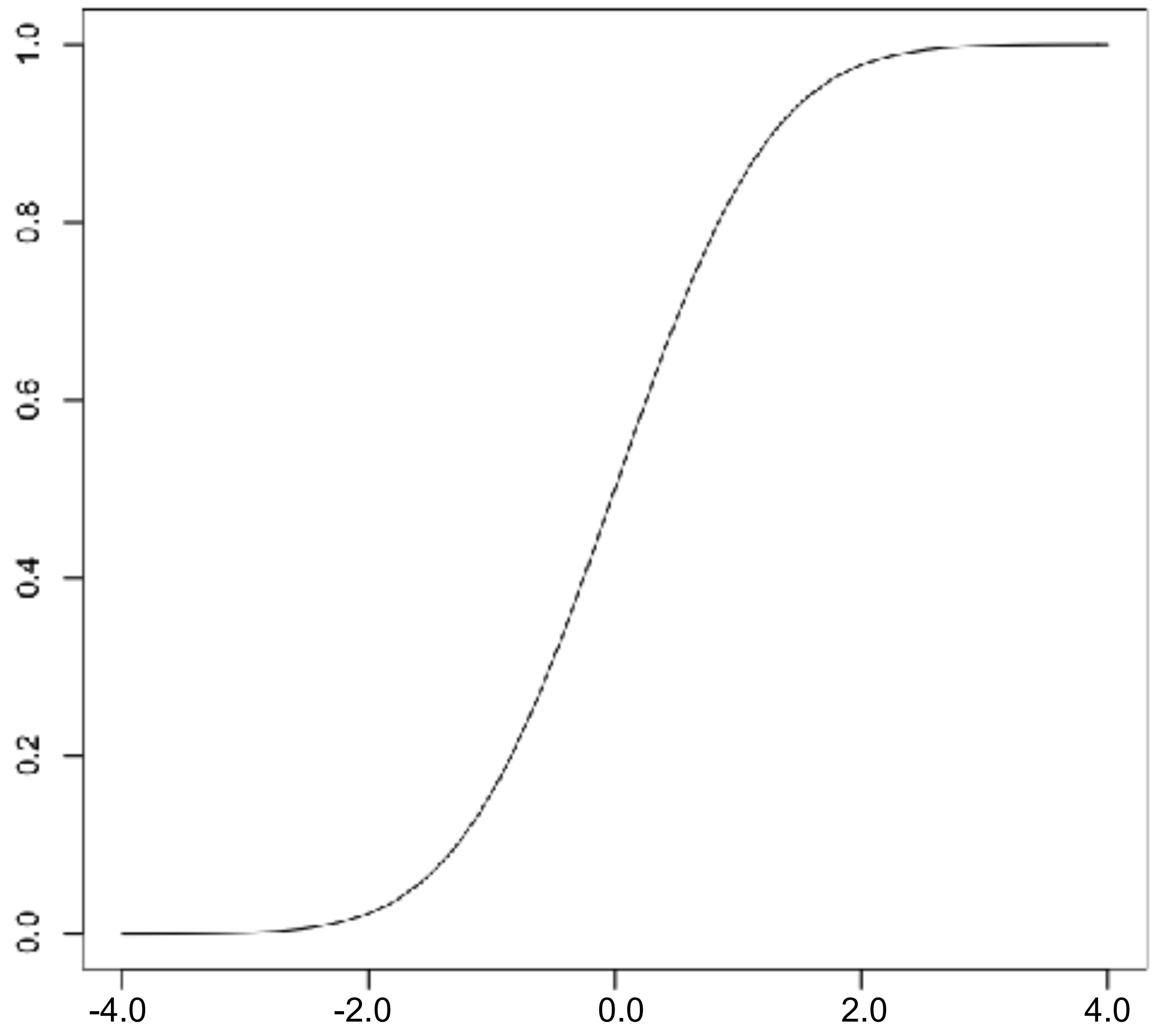
$$x \in R$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

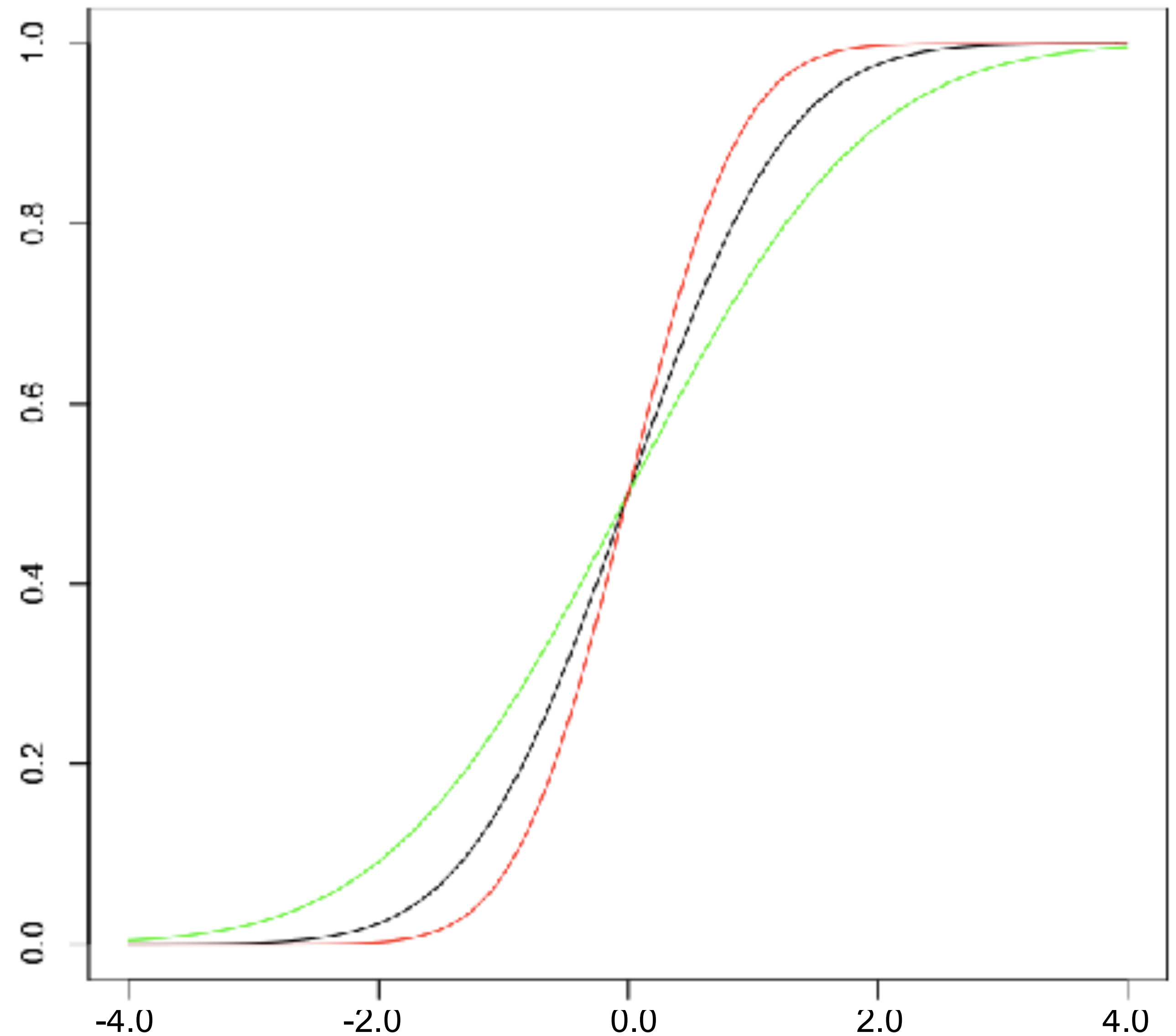
$$x \in R$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

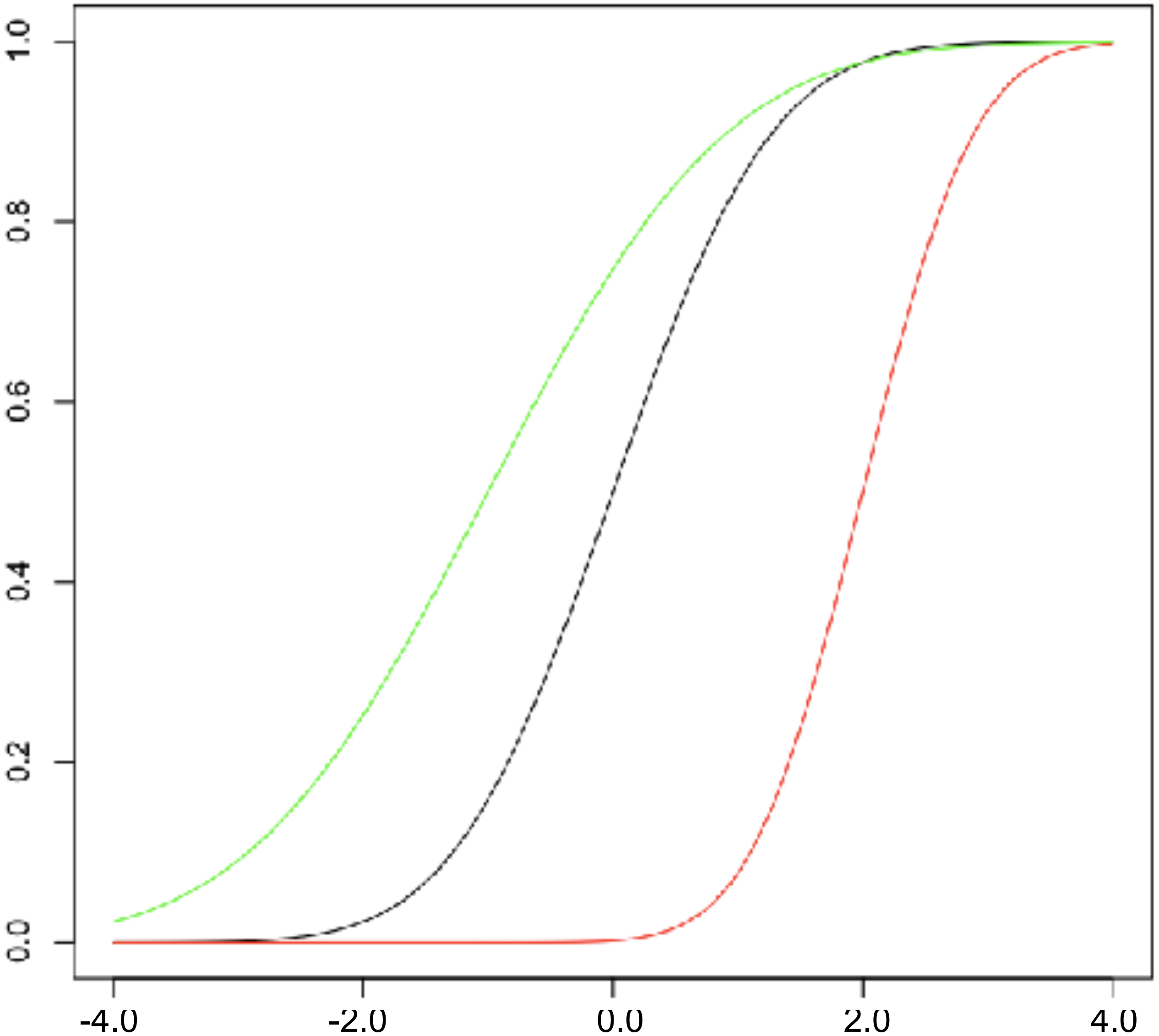
$$x \in R$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



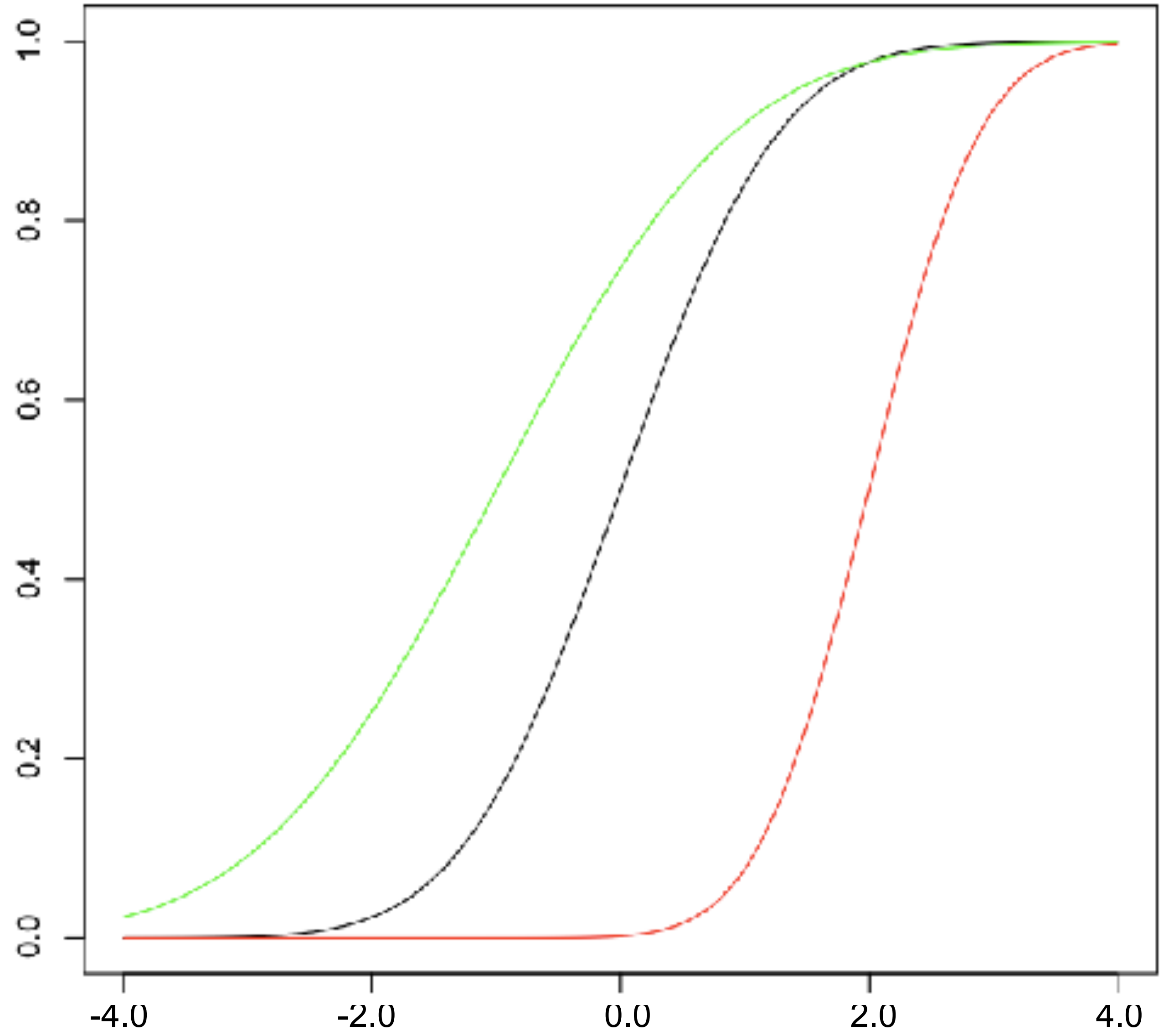
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$



$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$$

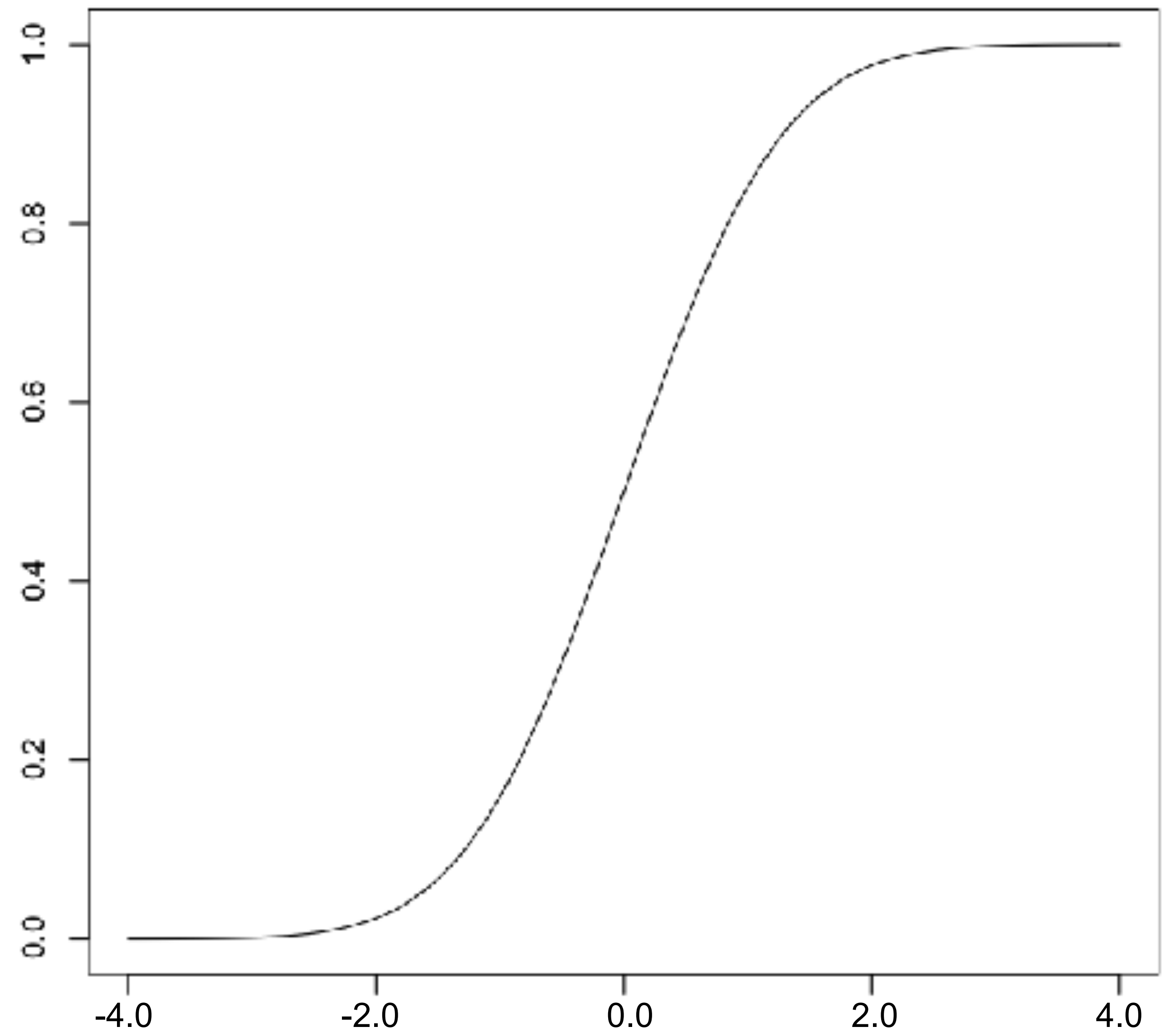
distribuční funkce

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad x \in R$$

Normální rozdělení

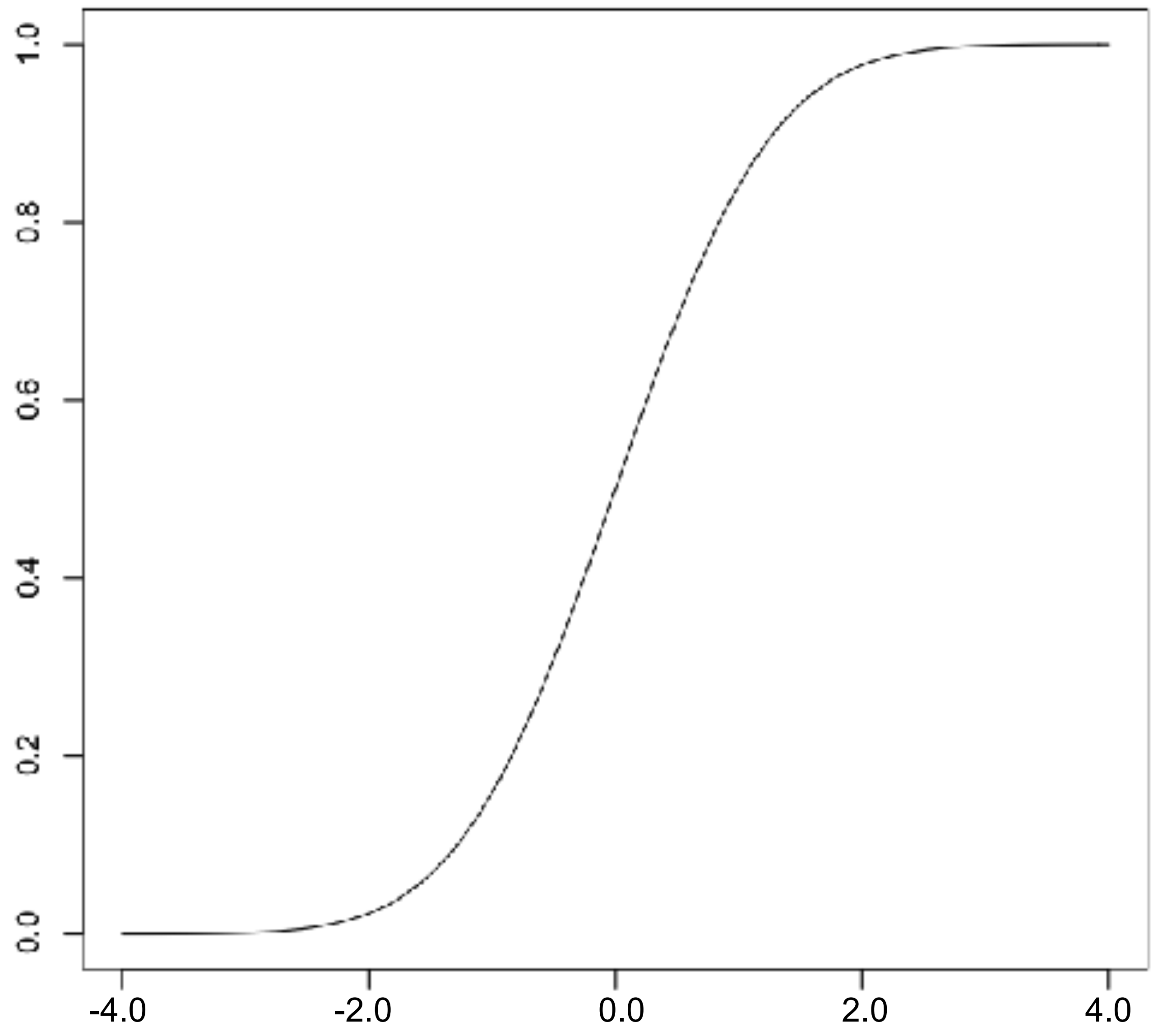
S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?



Normální rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

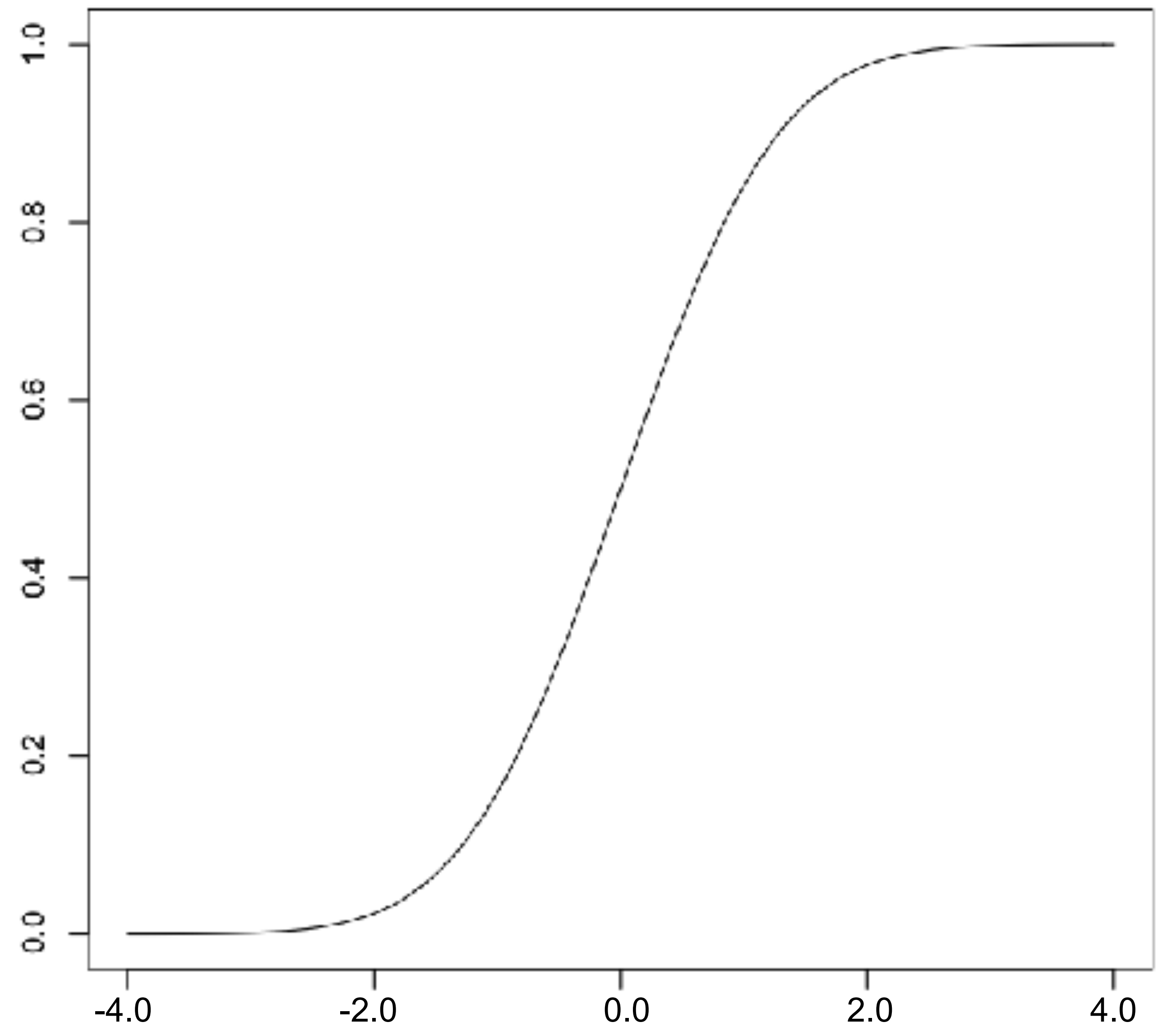


Normální rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx$$



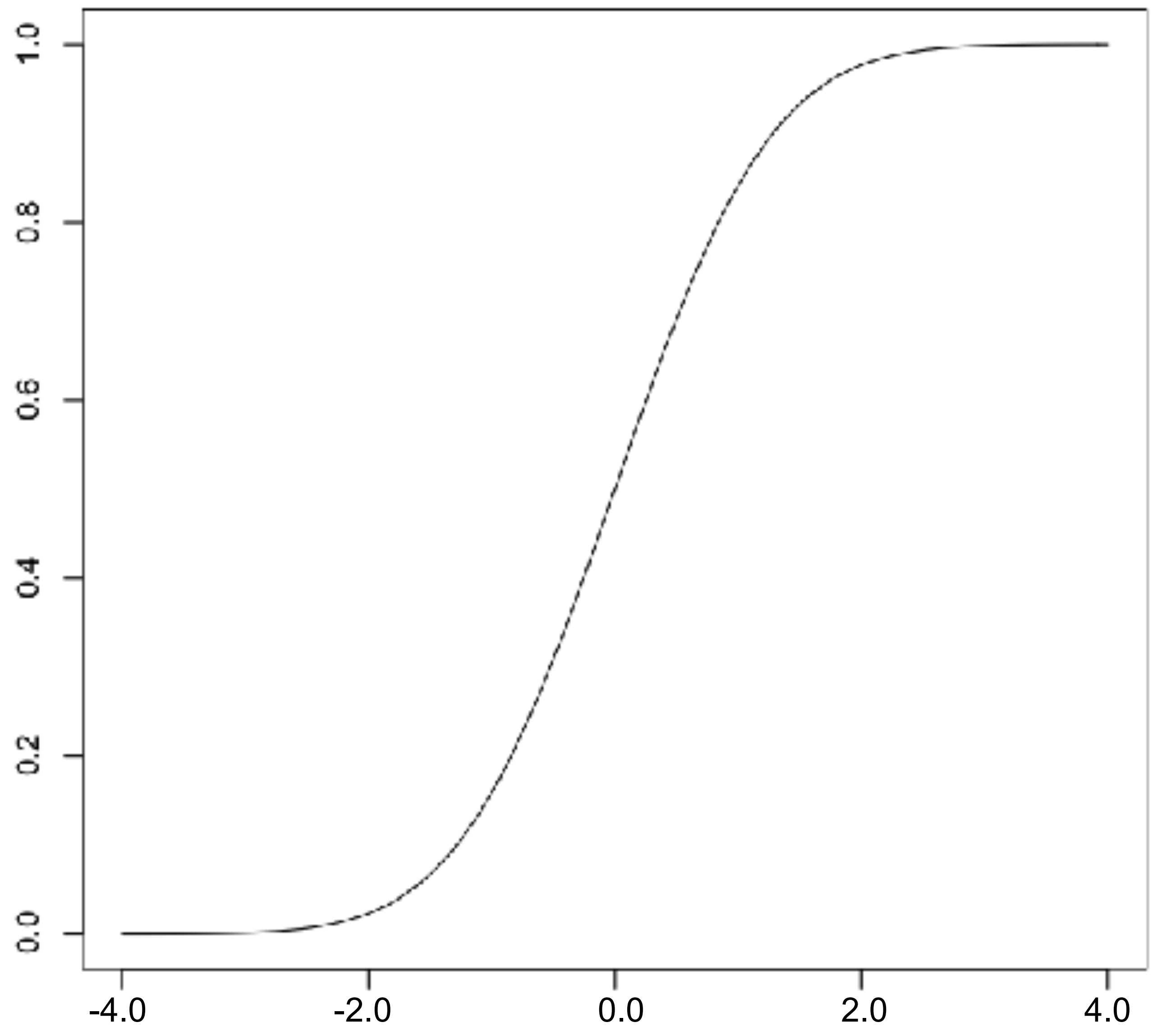
Normální rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$= F(b) - F(a)$$



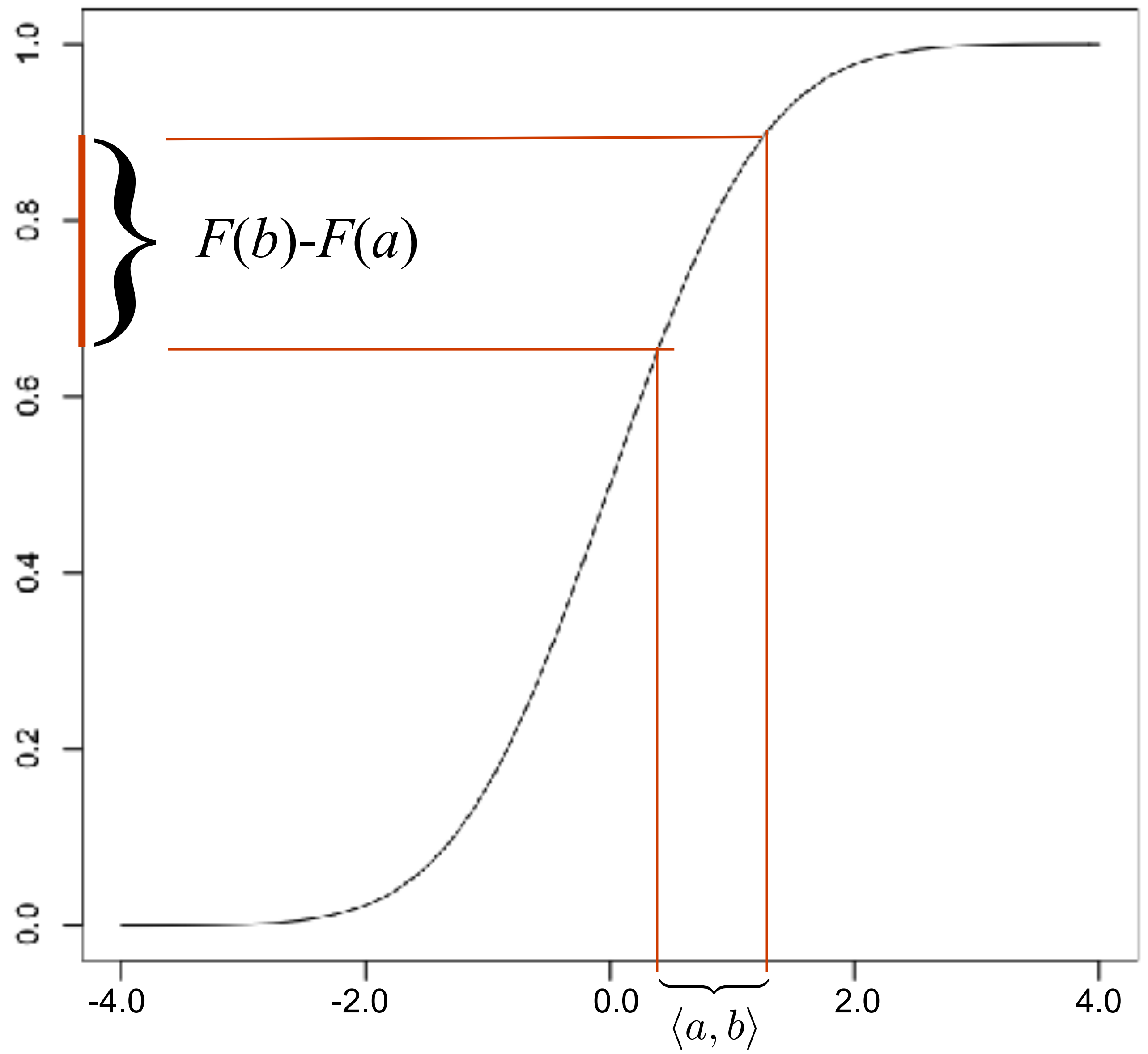
Normální rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)}$$



Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0,1)$$

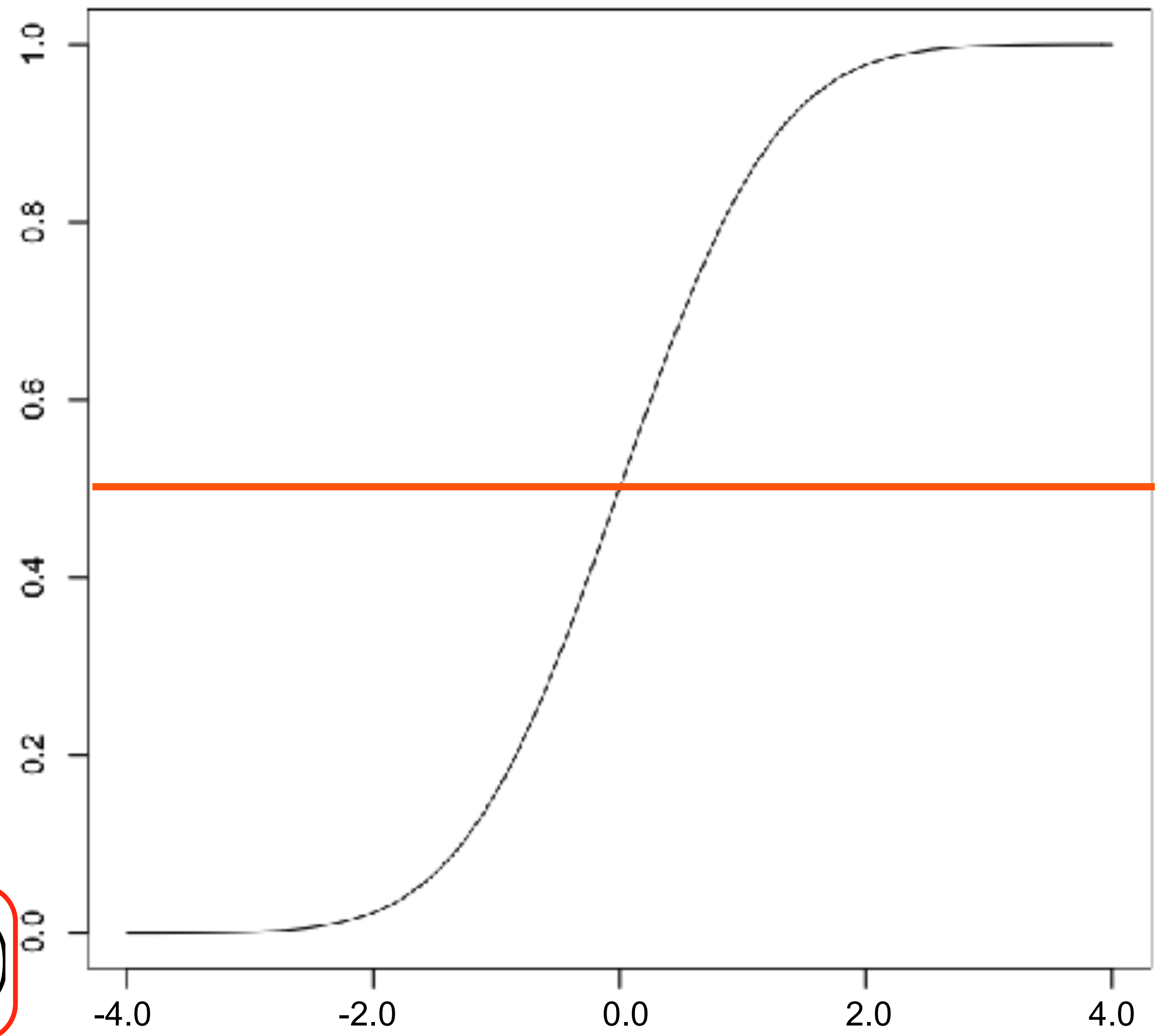
$$f(x) = f(-x)$$

$$\boxed{\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$\boxed{F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x)}$$



Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0,1)$$

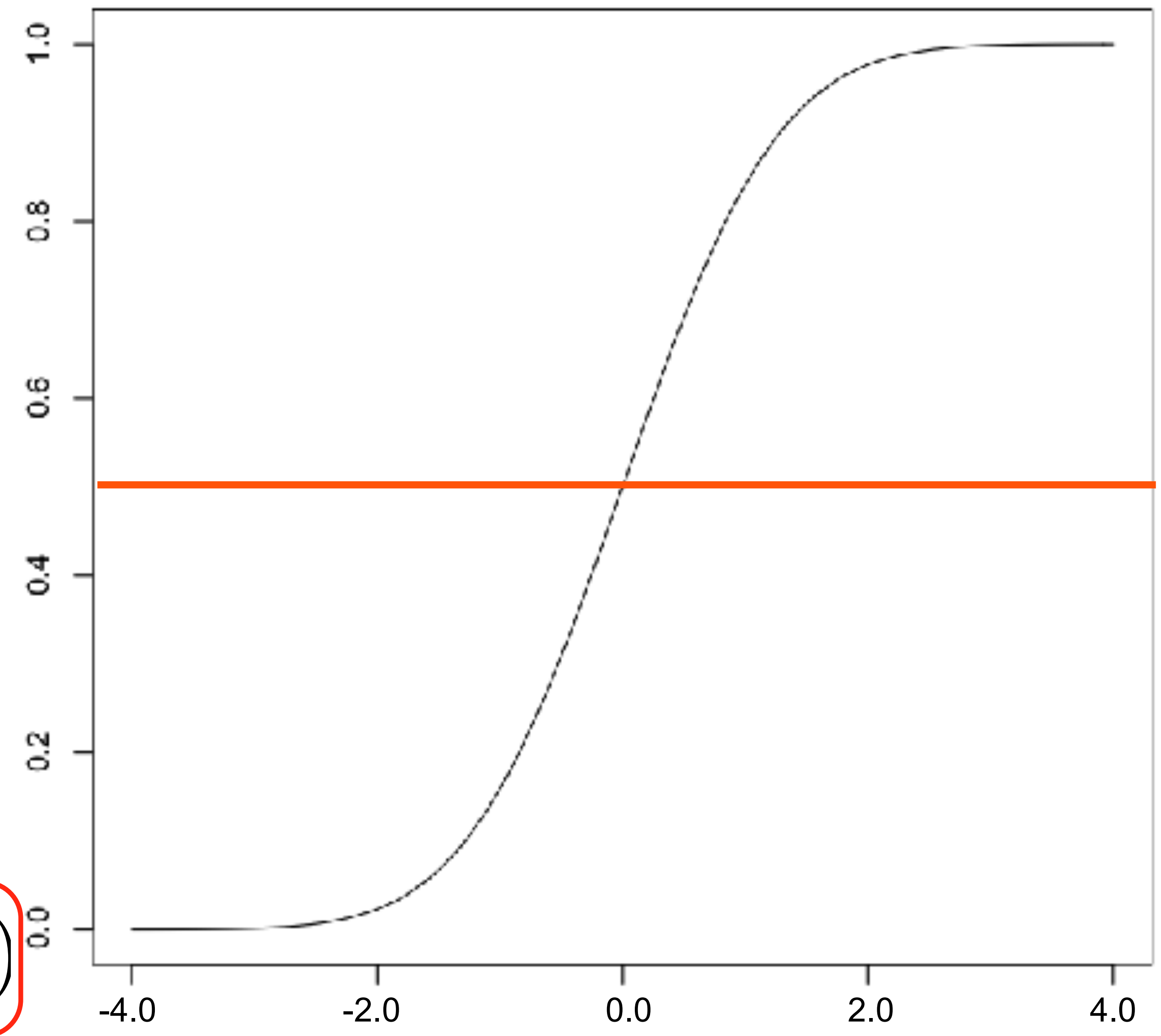
$$f(x) = f(-x)$$

$$\boxed{\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$\boxed{F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x)}$$



$$P(|X| \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$$

Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0,1)$$

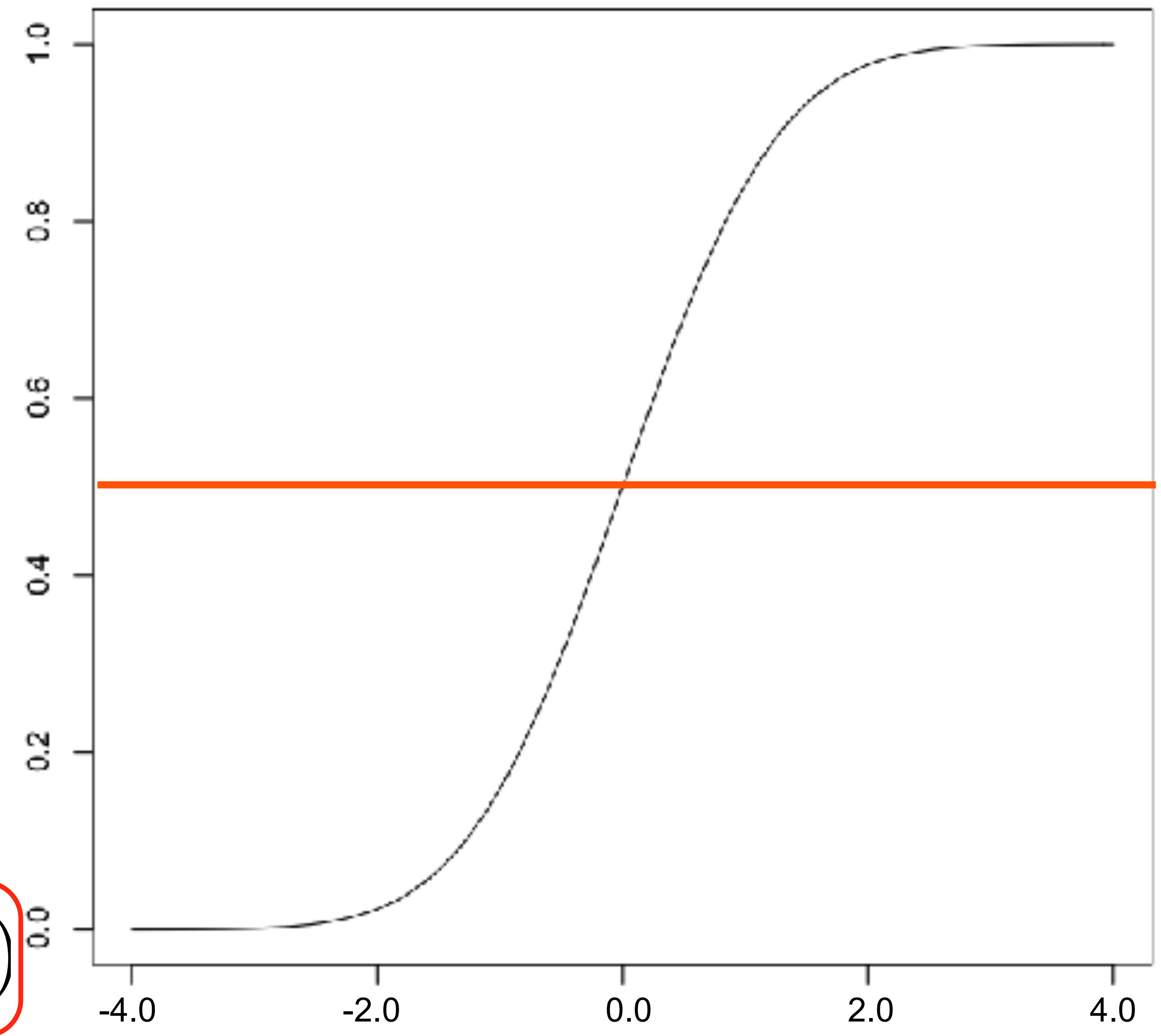
$$f(x) = f(-x)$$

$$\boxed{\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

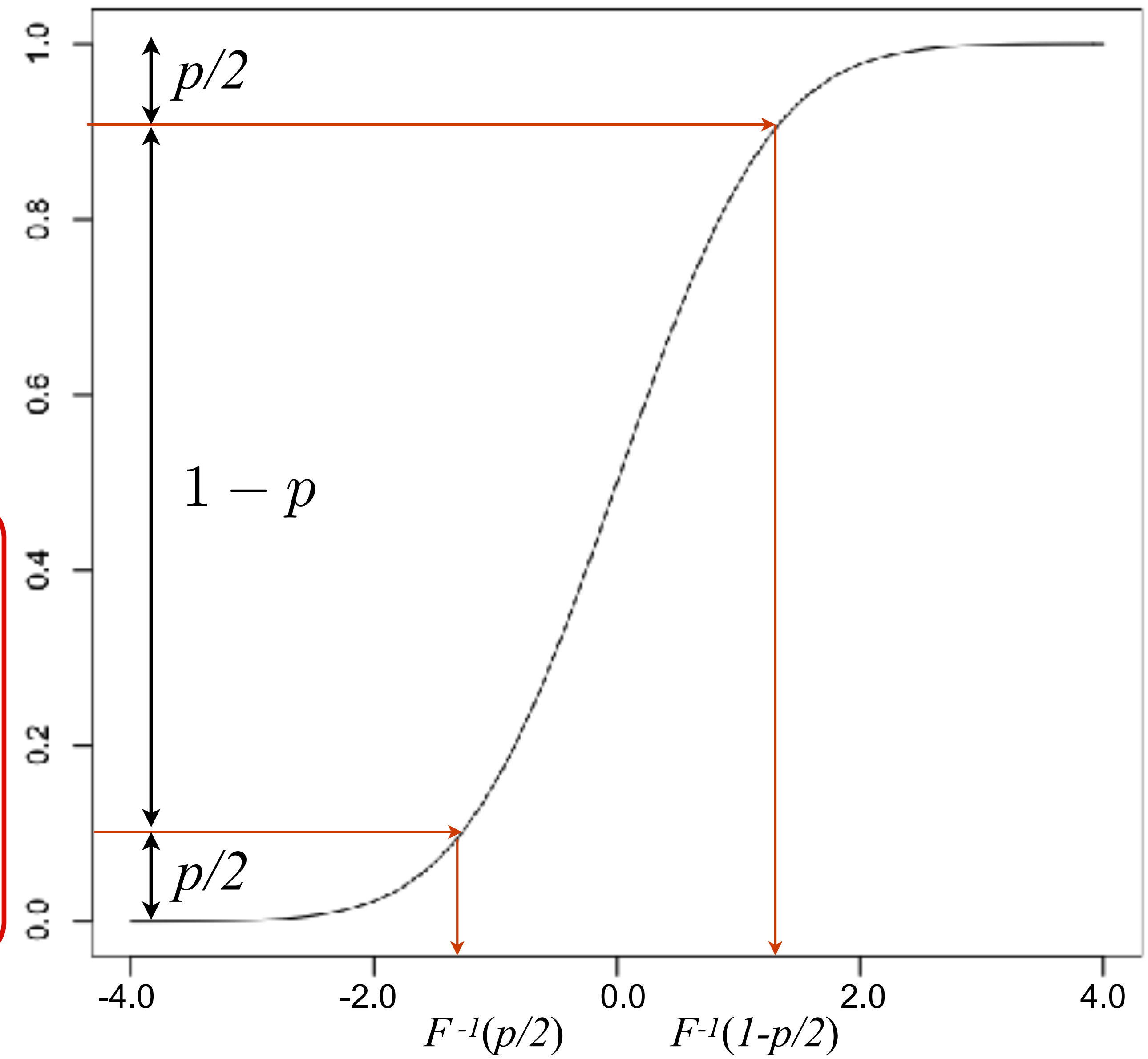
$$\boxed{F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x)}$$



$$P(|X| \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$$

$$P(|X - \mu| \leq x) = F(\mu + x) - F(\mu - x) =$$
$$F(\mu + x) - (1 - F(\mu + x)) = 2F(\mu + x) - 1$$

Normální rozdělení



$$P(a \leq X \leq b) = 1 - p$$

$$\begin{aligned} a &= F^{-1}(p/2), \\ b &= F^{-1}(1 - p/2) \end{aligned}$$

($p/2$)-kvantil normálního rozdělení a (1-$p/2$)-kvantil normálního rozdělení

Ze symetrie plyne:

$$X \sim N(0,1): \quad x_{p/2} = \Phi^{-1}(p/2) = -x_{1-p/2} = -\Phi^{-1}(1-p/2)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2): \quad y_{p/2} = F^{-1}(p/2) = 2\mu - y_{1-p/2} = 2\mu - F^{-1}(1-p/2)$$

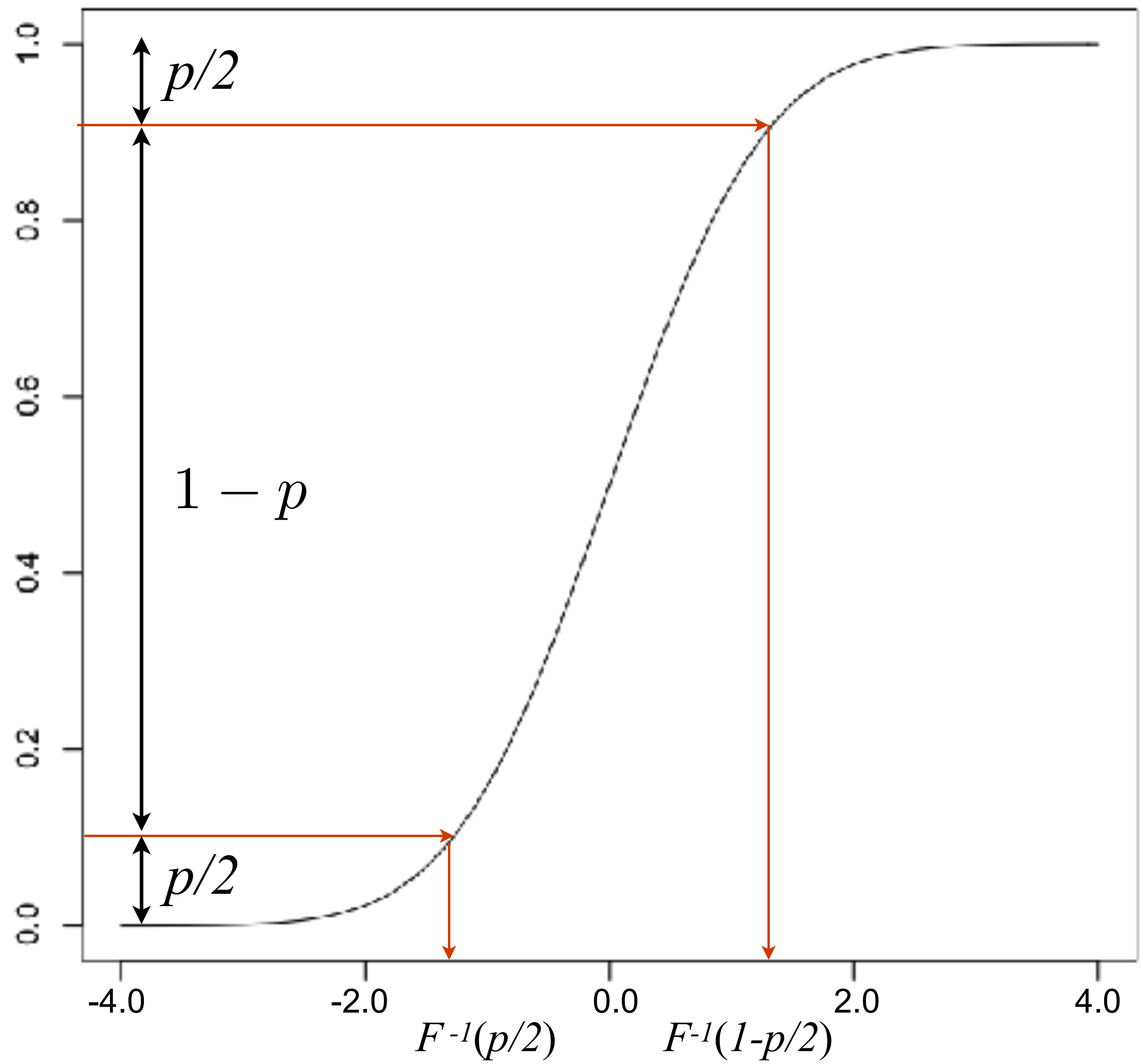
Normální rozdělení

Jakých hodnot kolem střední hodnoty bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností 1-p?

$$P(a \leq X \leq b) = 1 - p$$

$$\begin{aligned} a &= F^{-1}(p/2), \\ b &= F^{-1}(1 - p/2) \end{aligned}$$

($p/2$)-kvantil normálního rozdělení a (1-$p/2$)-kvantil normálního rozdělení

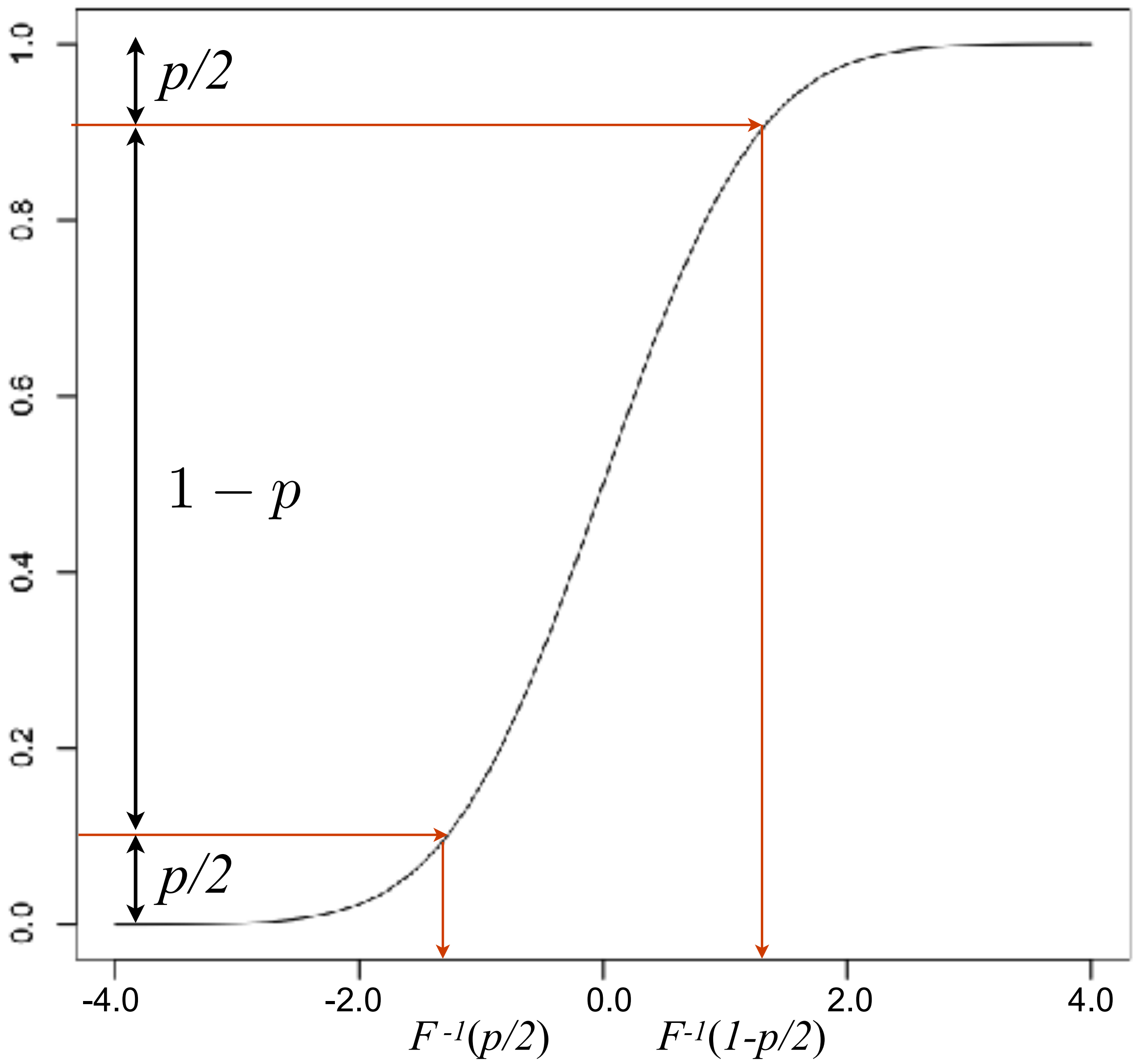


Ze symetrie plyne:

$$X \sim N(0,1): \quad x_{p/2} = \Phi^{-1}(p/2) = -x_{1-p/2} = -\Phi^{-1}(1-p/2)$$

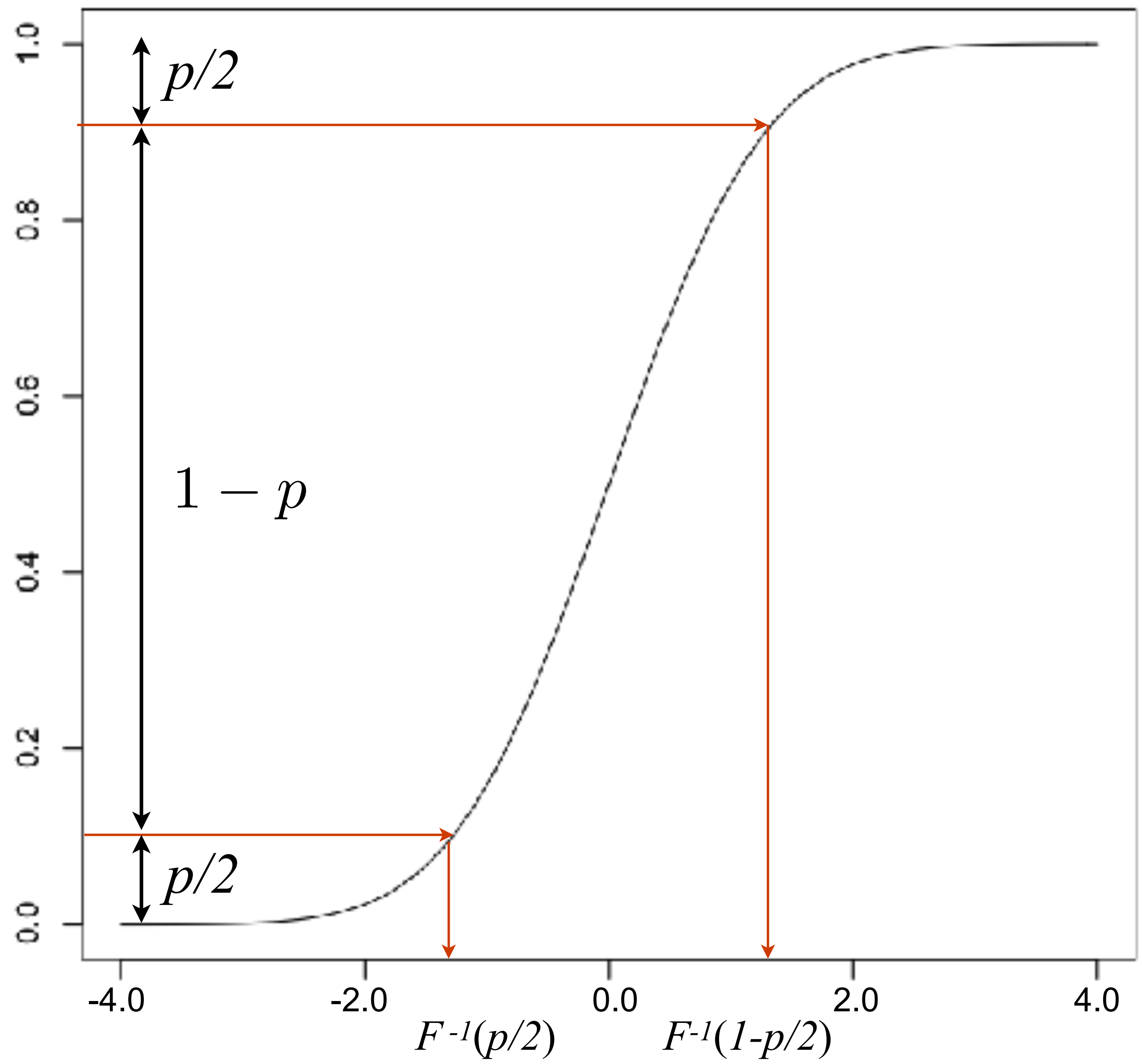
$$Y \sim N(\mu, \sigma^2): \quad y_{p/2} = F^{-1}(p/2) = 2\mu - y_{1-p/2} = 2\mu - F^{-1}(1-p/2)$$

Normální rozdělení



Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?



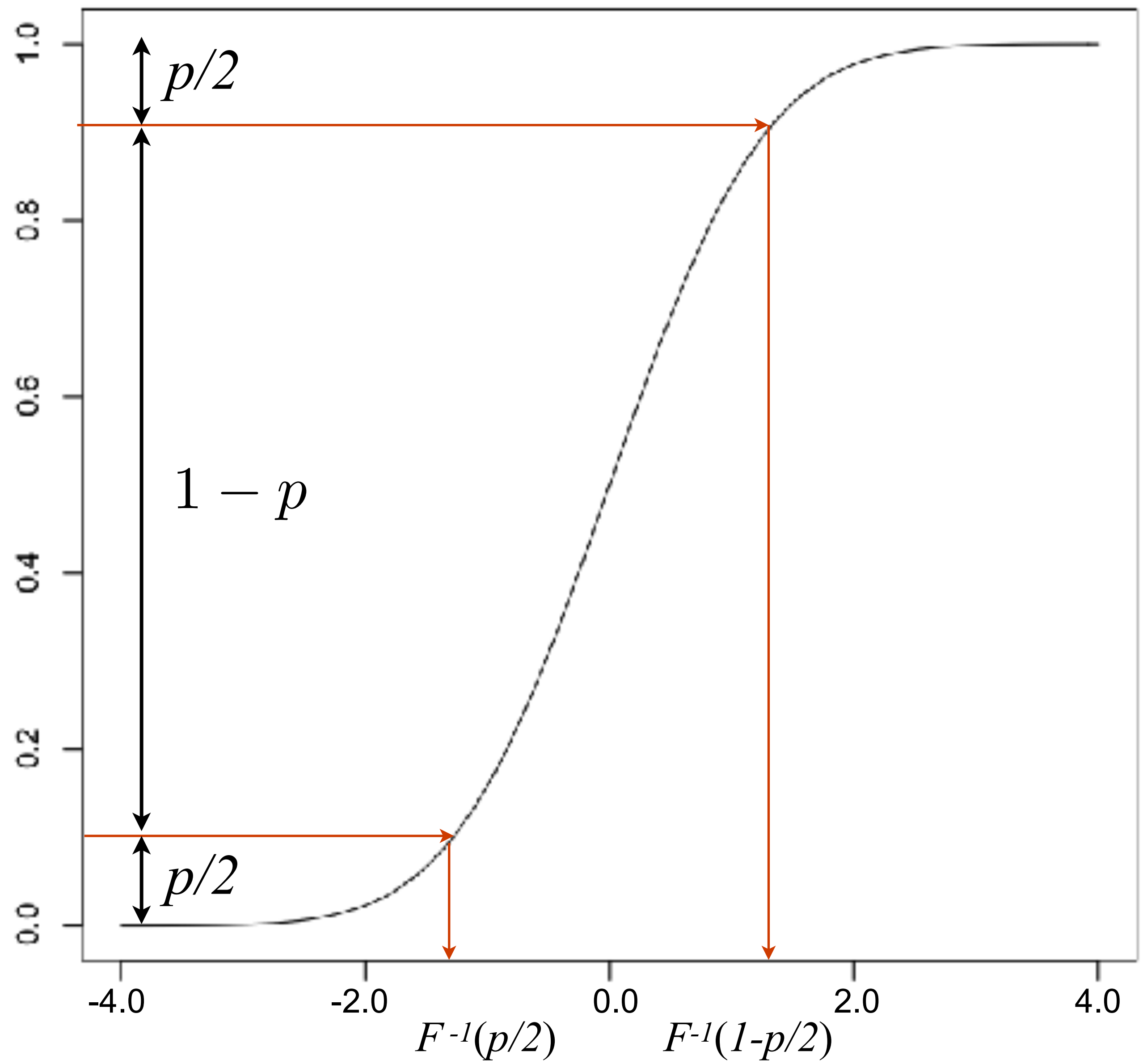
Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0,1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$



Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0,1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

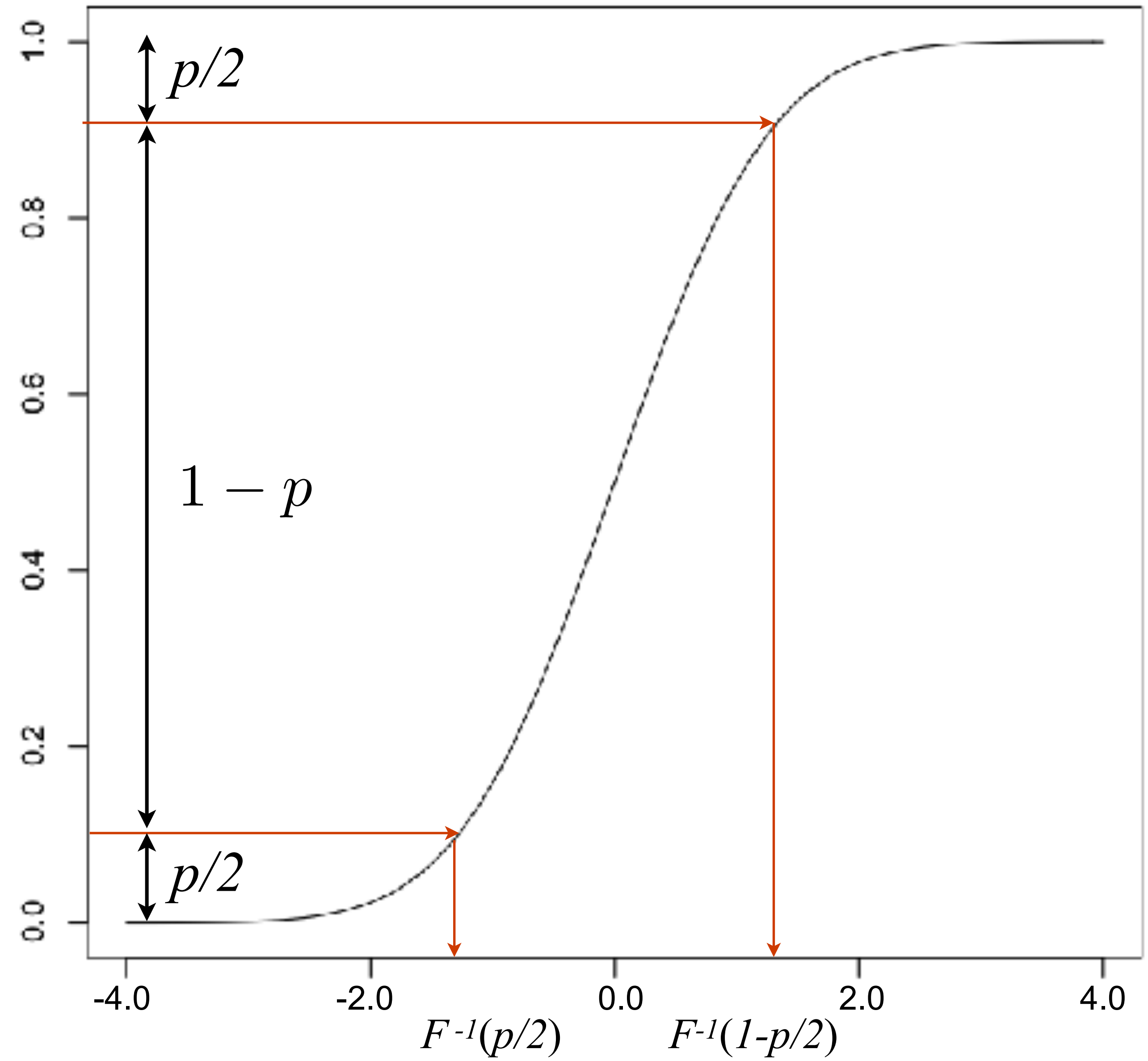
$$\Rightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) =$$

$$P(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma})$$



Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0,1), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\Rightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$$

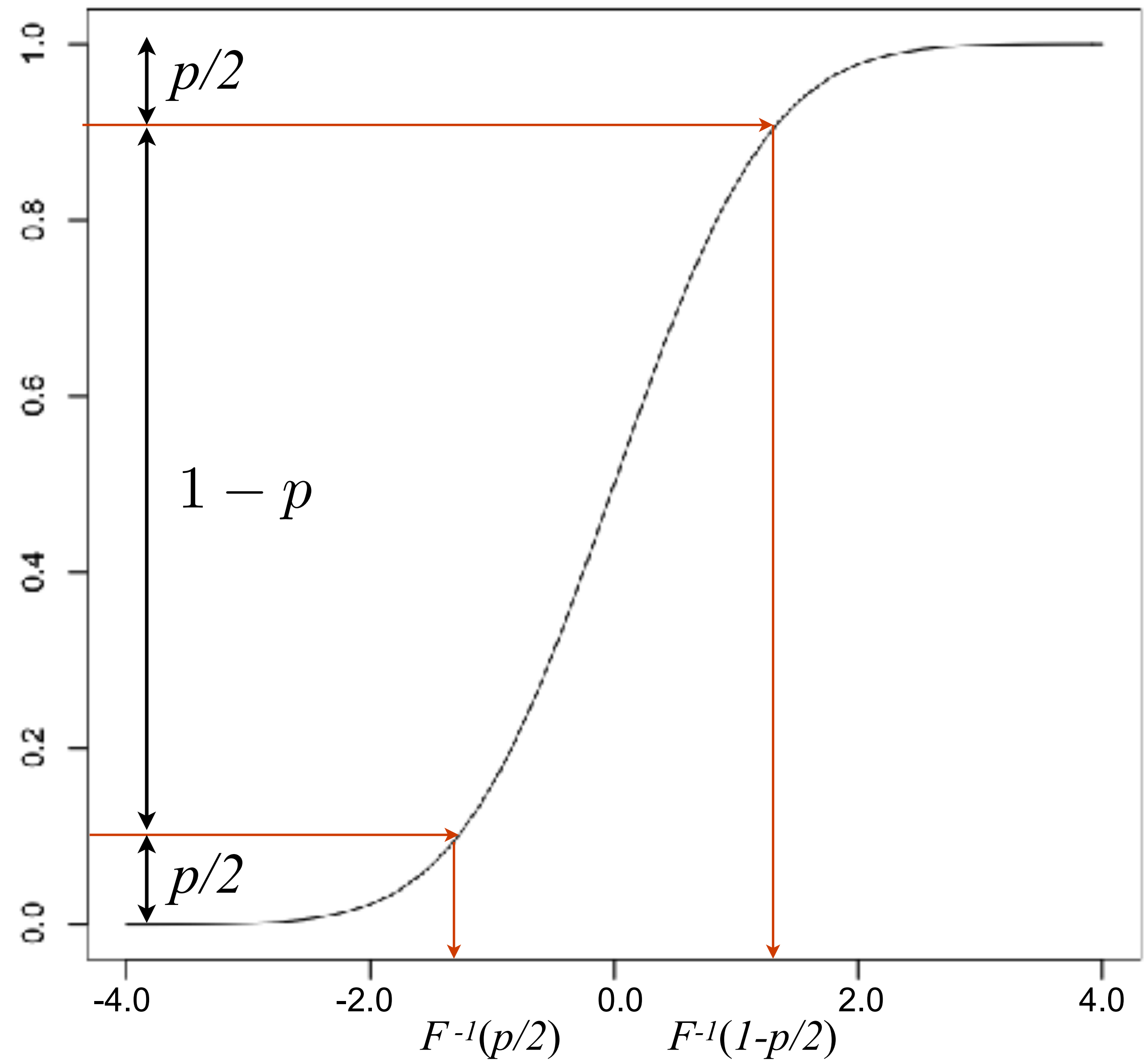
$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) =$$

$$P(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma})$$

Tedy je: $$F(y) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma})$$



Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0,1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

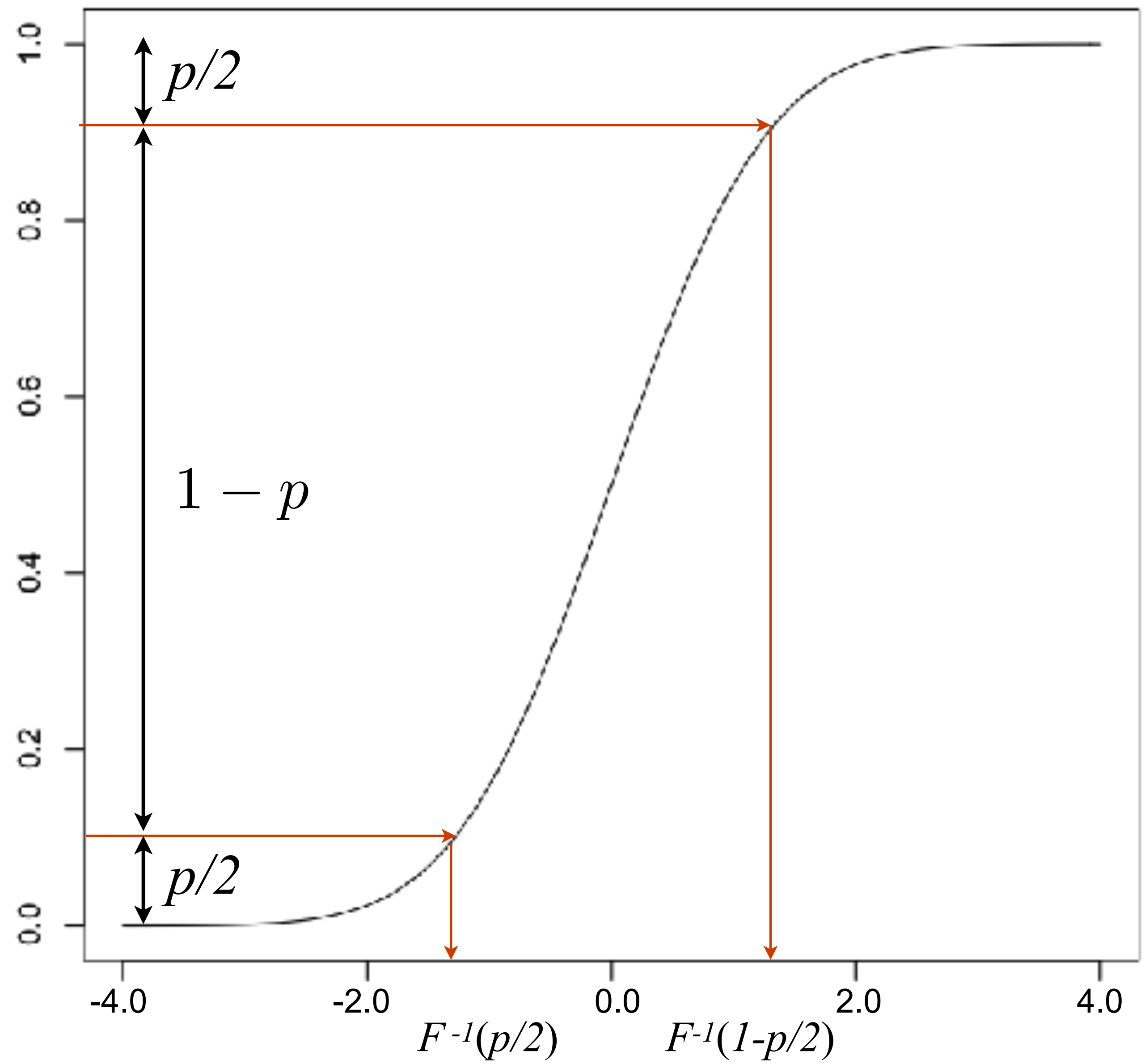
$$\Rightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) =$$

$$P(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma})$$



Tedy je: $F(y) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma})$

... a odtud: $F^{-1}(p) = \sigma \Phi^{-1}(p) + \mu$

Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0,1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

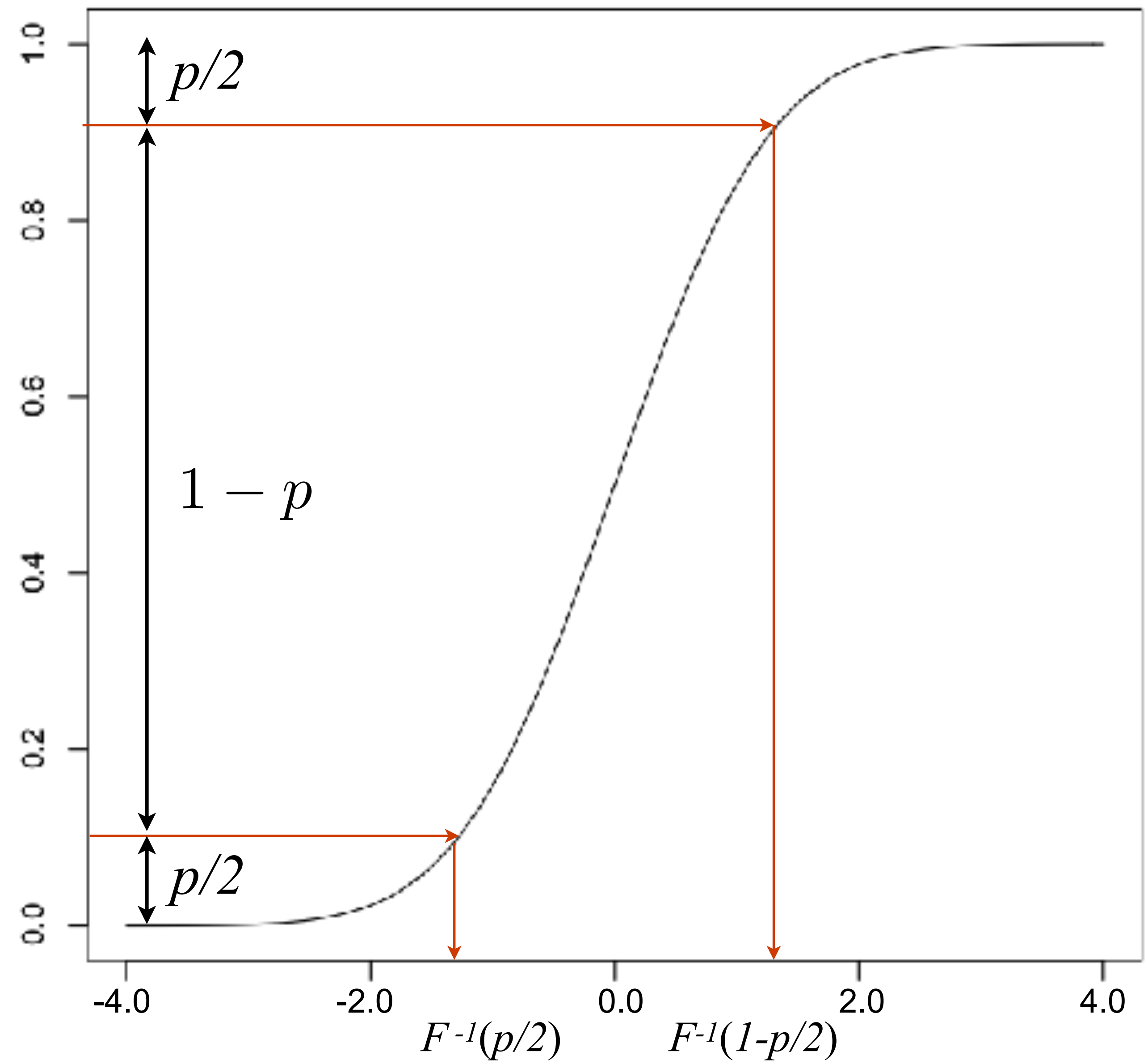
$$\Rightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) =$$

$$P(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma})$$



Tedy je: $F(y) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma})$

... a odtud: $F^{-1}(p) = \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu$

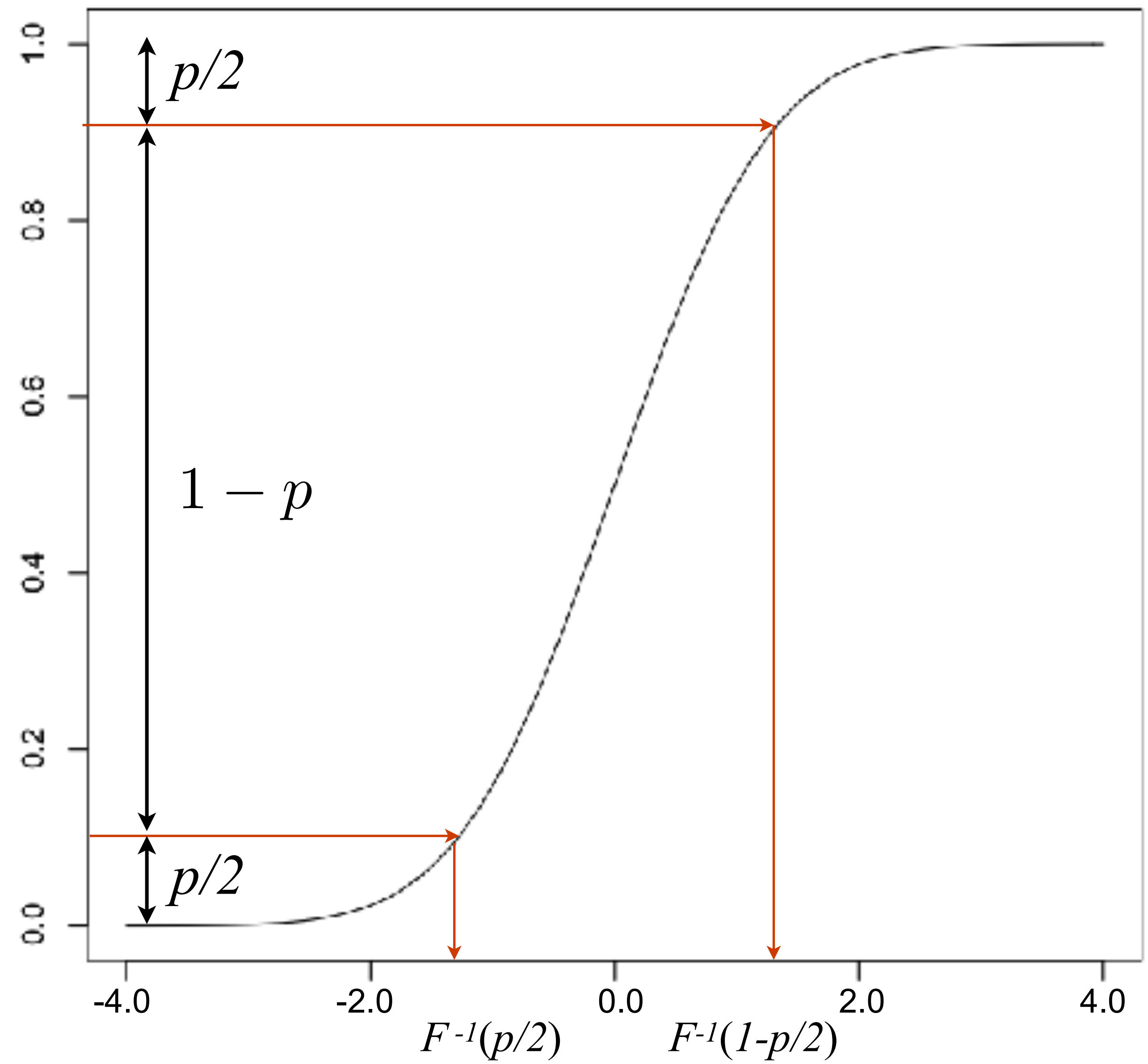
Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1-p/2)$

Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$



Tedy je: $$F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

... a odtud: $$F^{-1}(p) = \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu$$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$

Normální rozdělení

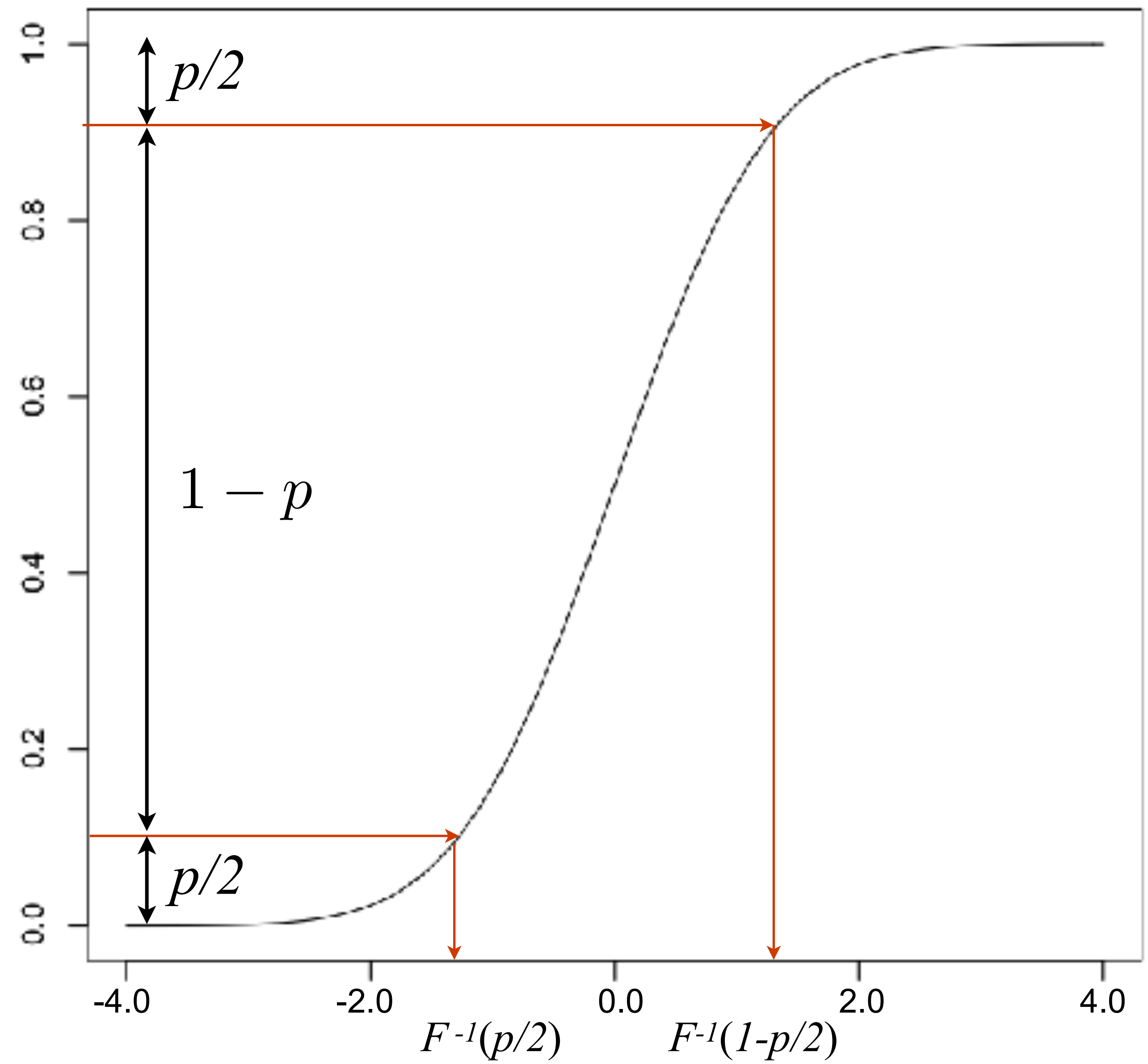
Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1-p/2) = u_p$$

... potom

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(p/2) &= -u_p \\ F^{-1}(1-p/2) &= \mu + \sigma u_p \\ F^{-1}(p/2) &= \mu - \sigma u_p \end{aligned}$$

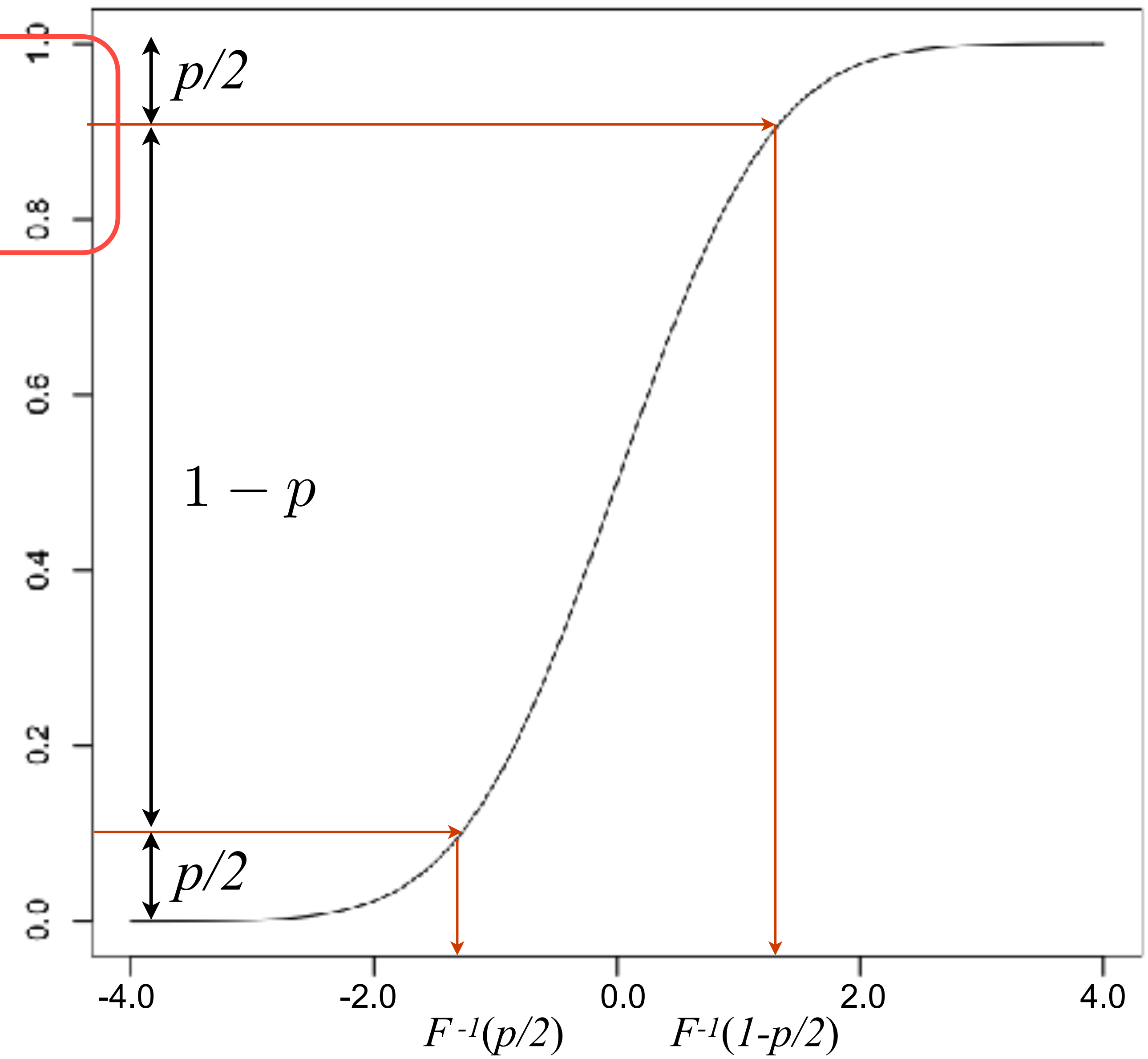


Tedy je: $$F(y) = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

... a odtud: $$F^{-1}(p) = \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu$$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1-p/2)$

Normální rozdělení



... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$

... potom

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(p/2) &= -u_p \\ F^{-1}(1 - p/2) &= \mu + \sigma u_p \\ F^{-1}(p/2) &= \mu - \sigma u_p \end{aligned}$$

Tedy pro $\alpha \in (0, 1)$

$$X \sim N(0,1) \Rightarrow \quad P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Normální rozdělení

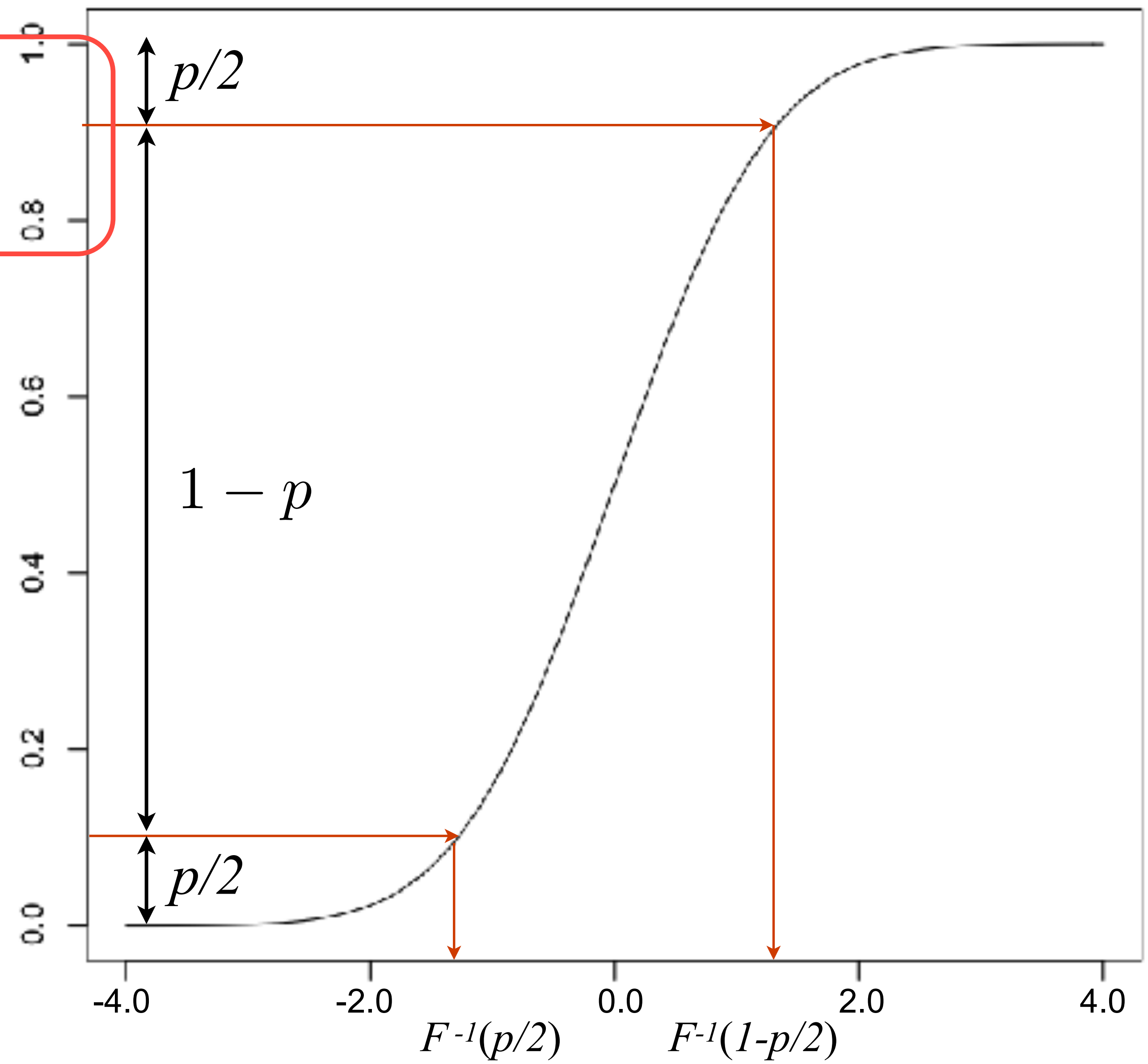
Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1-p/2) = u_p$$

... potom

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(p/2) &= -u_p\\ F^{-1}(1-p/2) &= \mu+\sigma u_p\\ F^{-1}(p/2) &= \mu-\sigma u_p\end{aligned}$$



Tedy pro $\alpha \in (0,1)$

$$X \sim N(0,1) \Rightarrow \qquad P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1-\alpha$$

Normální rozdělení

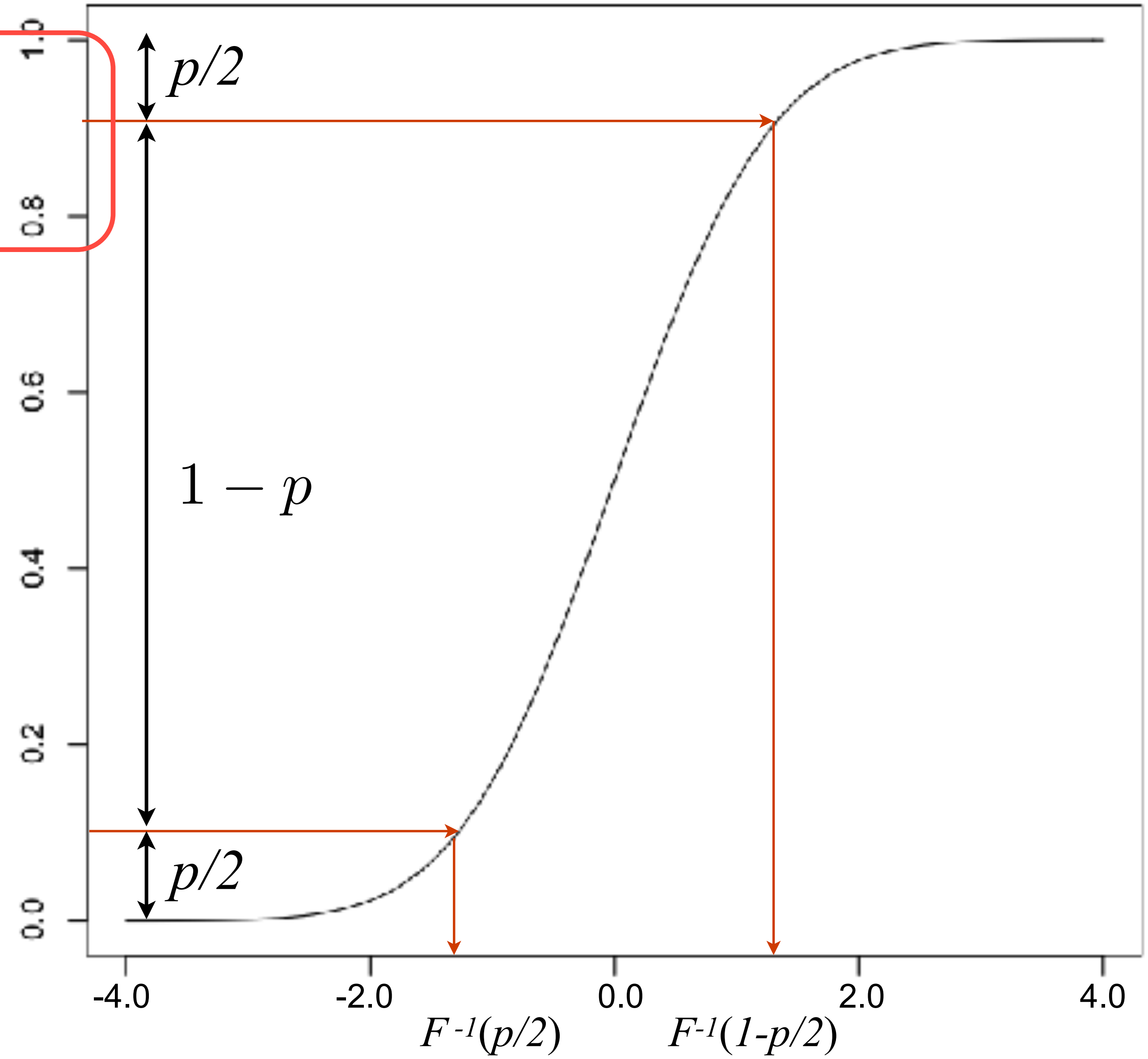
Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1-p/2) = u_p$$

... potom

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(p/2) &= -u_p \\ F^{-1}(1-p/2) &= \mu + \sigma u_p \\ F^{-1}(p/2) &= \mu - \sigma u_p\end{aligned}$$



Tedy pro $\alpha \in (0,1)$

$$X \sim N(0,1) \Rightarrow \qquad P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \qquad P(\mu - \sigma u_\alpha \leq Y \leq \mu + \sigma u_\alpha) = 1-\alpha$$

$$P\left(-u_\alpha \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq u_\alpha\right) = 1-\alpha$$

Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Rozptyl náhodné veličiny X:

$$var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Rozptyl náhodné veličiny X:

$$var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \quad E(X) = \mu \qquad var(X) = \sigma^2$$

Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Rozptyl náhodné veličiny X:

$$var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \quad E(X) = \mu \qquad var(X) = \sigma^2$$

Jak tyto parametry najít, když máme k dispozici pouze několik měření veličiny X?

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \qquad X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$$