Pravděpodobnostní metody a matematická statistika

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

VI. Náhodný vektor

https://sms.nipax.cz/pas

Náhodný vektor $Z = (X, Y)$

Náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Dvourozměrné rozdělení pravděpodobnosti:

sdružená distribuční funkce $F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x,\ Y \leq y)$

Náhodný vektor $Z = (X, Y)$

Dvourozměrné rozdělení pravděpodobnosti:
sdružená distribuční funkce $F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x,\ Y \leq y)$

$$F(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y|X \leq x)$$

$$F(x,y) = F(x)F(y|x)$$

Náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Dvourozměrné rozdělení pravděpodobnosti:
sdružená distribuční funkce $F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x,\ Y \leq y)$

$$F(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y|X \leq x)$$

$$F(x,y) = F(x)F(y|x)$$

Pokud jsou X a Y stochasticky nezávislé, potom je

$$F(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

$$F(x,y) = F(x)F(y)$$

Platí to i opačně: pokud je $F(x,y) = F(x)F(y)$, potom jsou X a Y stochasticky nezávislé.

Spojitý náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Jsou-li X a Y spojité náhodné veličiny, potom je i $F(x,y)$ spojitou diferencovatelnou funkcí a její druhou smíšenou parciální derivaci nazýváme sdruženou hustotou náhodného vektoru (X,Y).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

Spojitý náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Jsou-li X a Y spojité náhodné veličiny, potom je i $F(x,y)$ spojitou diferencovatelnou funkcí a její druhou smíšenou parciální derivaci nazýváme sdruženou hustotou náhodného vektoru (X,Y).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

Objem pod plochou $z = f(x,y)$ určuje pravděpodobnost nad odpovídající oblastí v rovině xy a zřejmě musí platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$$

Spojitý náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Jsou-li X a Y spojité náhodné veličiny, potom je i $F(x,y)$ spojitou diferencovatelnou funkcí a její druhou smíšenou parciální derivaci nazýváme sdruženou hustotou náhodného vektoru (X,Y).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

Objem pod plochou $z = f(x,y)$ určuje pravděpodobnost nad odpovídající oblastí v rovině xy a zřejmě musí platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$$

Tedy je

$$P\big((X,Y) \in W\big) = \iint_W f(x,y) dx dy$$

Spojitý náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Jsou-li X a Y spojité náhodné veličiny, potom je i $F(x,y)$ spojitou diferencovatelnou funkcí a její druhou smíšenou parciální derivaci nazýváme sdruženou hustotou náhodného vektoru (X,Y).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

Objem pod plochou $z = f(x,y)$ určuje pravděpodobnost nad odpovídající oblastí v rovině xy a zřejmě musí platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$$

Tedy je

$$P\big((X,Y) \in W\big) = \iint_W f(x,y) dx dy$$

Speciálně

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) du dv$$

Spojitý náhodný vektor $Z = (X, Y)$

Jaké je rozdělení pravděpodobnosti složky X?

Spojitý náhodný vektor $Z = (X, Y)$

Jaké je rozdělení pravděpodobnosti složky X?

$$P\big(X \leq x\big) = P\big(X \leq x \wedge Y \leq \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$$

Spojitý náhodný vektor $Z = (X, Y)$

Jaké je rozdělení pravděpodobnosti složky X?

$$P\big(X \leq x\big) = P\big(X \leq x \wedge Y \leq \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \right) dx = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

Spojitý náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Jaké je rozdělení pravděpodobnosti složky X?

$$P\big(X \leq x\big) = P\big(X \leq x \wedge Y \leq \infty\big) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right)dx = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

Hustotu

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

nazýváme marginální hustotou složky X vektoru $Z=(X,Y)$.

Podobně

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

je marginální hustotou složky Y.

Spojitý náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Složky X a Y náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ jsou stochasticky nezávislé právě když platí jedna z rovností

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Spojitý náhodný vektor $Z = (X, Y)$

Složky X a Y náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ jsou stochasticky nezávislé právě když platí jedna z rovností

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

Příklad: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

Spojitý náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Složky X a Y náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ jsou stochasticky nezávislé právě když platí jedna z rovností

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

Příklad: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x,y) = \begin{cases} const, & (x,y) \in K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Spojitý náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Složky X a Y náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ jsou stochasticky nezávislé právě když platí jedna z rovností

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$
$$F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

Příklad: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x,y) = \begin{cases} const, & (x,y) \in K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$const = \frac{1}{\pi}$$

Spojitý náhodný vektor $Z = (X,Y)$

Složky X a Y náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ jsou stochasticky nezávislé právě když platí jedna z rovností

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

Příklad: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x,y) = \begin{cases} const, & (x,y) \in K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$const = \frac{1}{\pi}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Střední hodnota náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ je rovna vektoru středních hodnot jeho složek: $\mathrm{E}(Z)= (\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y)$.

Charakteristiky náhodného vektoru

Střední hodnota náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ je rovna vektoru středních hodnot jeho složek: $\mathrm{E}(Z)= (\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y)$.

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_i^X, \\
EY &= \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_j y_j p_j^Y.
\end{aligned}
$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Střední hodnota náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ je rovna vektoru středních hodnot jeho složek: $\mathrm{E}(Z)= (\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y)$.

$$\begin{aligned} EX &= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_i^X, \\ EY &= \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_j y_j p_j^Y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EX &= \iint_{R^2} x f(x,y) dx dy = \int_R x \int_R f(x,y) dy dx = \int_R x f^X(x) dx, \\ EY &= \iint_{R^2} y f(x,y) dx dy = \int_R y \int_R f(x,y) dx dy = \int_R y f^Y(y) dy. \end{aligned}$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Kovariance $cov(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}X).(Y-\mathrm{E}Y)] = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X.\mathrm{E}Y$$

kde $EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}, \qquad EXY = \iint_{R^2} xyf(x,y)dxdy.$

Charakteristiky náhodného vektoru

Kovariance $cov(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}X).(Y-\mathrm{E}Y)] = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X.\mathrm{E}Y$$

kde $EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}, \qquad EXY = \iint_{R^2} xyf(x,y)dxdy.$

Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, potom je

$$EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_i^X p_j^Y = \sum_i x_i p_i^X \sum_j y_j p_j^Y = EX.EY,$$

$$EXY = \iint_{R^2} xyf^X(x)f^Y(y)dxdy = \int_R xf^X(x)dx \int_R yf^Y(y)dy = EX.EY.$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Kovariance $cov(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}X).(Y-\mathrm{E}Y)] = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X.\mathrm{E}Y$$

kde $EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}, \qquad EXY = \iint_{R^2} xyf(x,y)dxdy.$

Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, potom je

$$EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_i^X p_j^Y = \sum_i x_i p_i^X \sum_j y_j p_j^Y = EX.EY,$$

$$EXY = \iint_{R^2} xyf^X(x)f^Y(y)dxdy = \int_R xf^X(x)dx \int_R yf^Y(y)dy = EX.EY.$$

a tedy

$$cov(X,Y) = EXY - EXEY = EXEY - EXEY = 0.$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Korelační koeficient $\varrho(X,Y)$ náhodných veličin X,Y je roven

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Korelační koeficient $\varrho(X,Y)$ náhodných veličin X,Y je roven

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

Je-li $\rho(X,Y) = 0$ t, říkáme, že X a Y jsou nekorelované.

Charakteristiky náhodného vektoru

Korelační koeficient $\varrho(X,Y)$ náhodných veličin X,Y je roven

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

Je-li $\rho(X,Y) = 0$ t, říkáme, že X a Y jsou nekorelované.

Kovarianční matice náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ má tvar

$$D(X,Y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Korelační koeficient $\varrho(X,Y)$ náhodných veličin X,Y je roven

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

Je-li $\rho(X,Y) = 0$ t, říkáme, že X a Y jsou nekorelované.

Kovarianční matice náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ má tvar

$$D(X,Y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

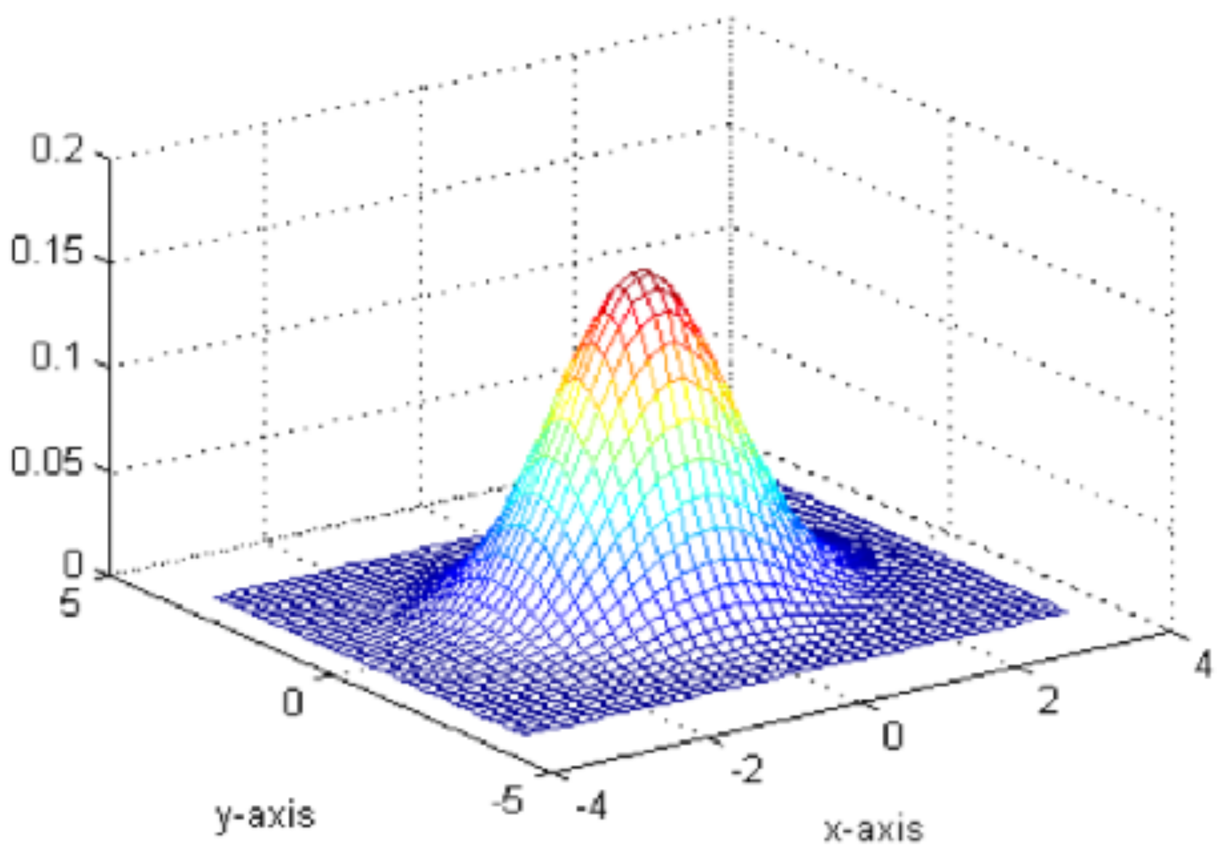
Korelační matice náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ má tvar

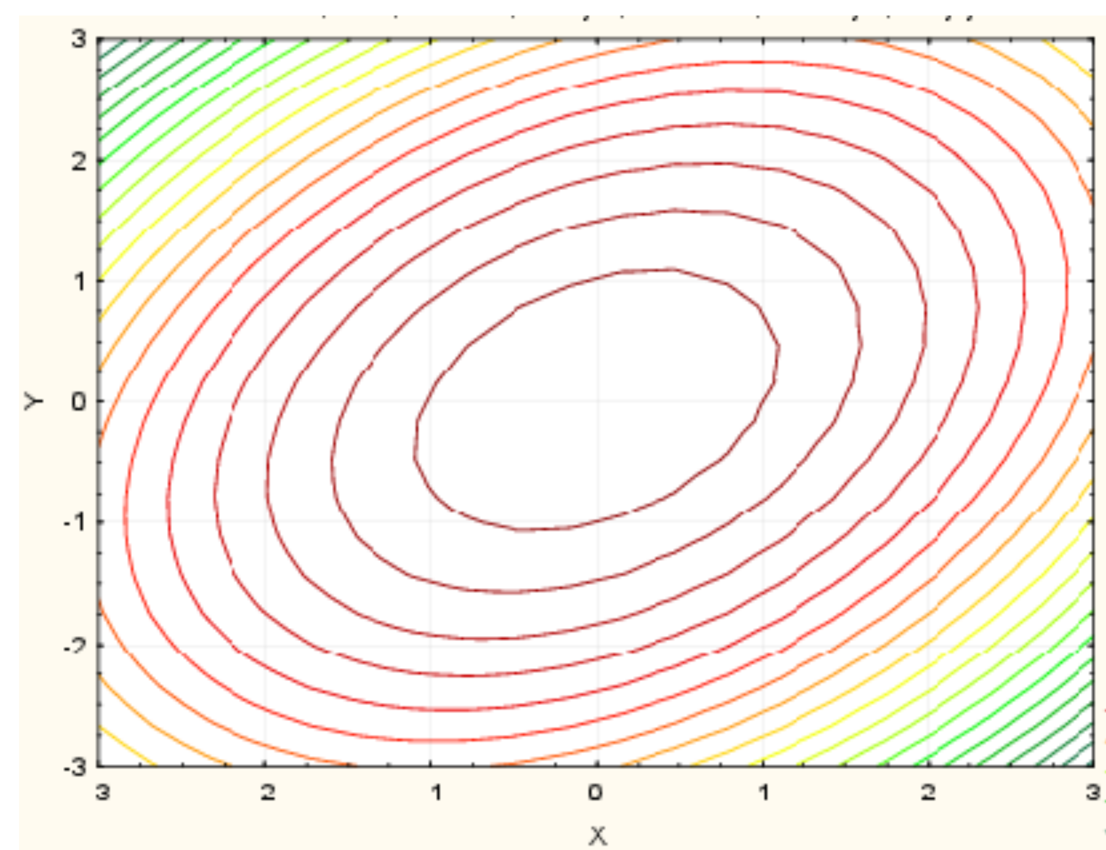
$$R(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(Y,X) & 1 \end{pmatrix}$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Náhodný vektor (X,Y) má dvourozměrné normální rozdělení se střední hodnotou (μ_1,μ_2) a kovarianční maticí $D = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ je-li jeho dvourozměrná hustota rovna

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$





Dvourozměrné normální rozdělení

Úloha: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X,Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2. Vypočtěte střední hodnotu tedy s hustotou a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

V tomto případě pro $x, y \in \mathbf{R}^2$ dostáváme

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Úloha: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X,Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2. Vypočtěte střední hodnotu tedy s hustotou a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Dvourozměrné normální rozdělení

Úloha: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X,Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2. Vypočtěte střední hodnotu tedy s hustotou a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Úloha: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X, Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2. Vypočtěte střední hodnotu tedy s hustotou a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x, y) f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

V tomto případě pro $x, y \in \mathbf{R}^2$ dostáváme

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Úloha: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X,Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2. Vypočtěte střední hodnotu tedy s hustotou a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

V tomto případě pro $x, y \in \mathbf{R}^2$ dostáváme

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$ a tedy $$E(Z) = \iint \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Úloha: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X,Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2. Vypočtěte střední hodnotu tedy s hustotou a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

V tomto případě pro $x, y \in \mathbf{R}^2$ dostáváme

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$ a tedy $$E(Z) = \iint \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^2\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Úloha: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X,Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2. Vypočtěte střední hodnotu tedy s hustotou a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

V tomto případě pro $x, y \in \mathbf{R}^2$ dostáváme

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$ a tedy $$E(Z) = \iint \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^2\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\left[\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, \quad \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2} \right]$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Řešení: Počítáme i-tý obecný moment Z: je $Z^i = (X^2 + Y^2)^{\frac{i}{2}}$, tedy

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \int_R^2 (x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}} e^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy.$$

Substitucí $x = rcos\beta, y = rsin\beta$, jejíž Jakobián je r, dostáváme

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\infty r^{i+1} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$$

a s použitím další substituce $t = \frac{r^2}{2\sigma^2}$

$$EZ^i = \sigma^i \int_0^\infty (2t)^{\frac{i}{2}} e^{-t} dt = \left(\sigma\sqrt{2}\right)^i \Gamma(\frac{i}{2} + 1).$$

Odsud specielně plyne $EZ = \sigma\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = 1,253\sigma$. Pomocí druhého obecného momentu $EZ^2 = 2\sigma^2\Gamma(2)$ je rozptyl $VarZ = EZ^2 - (EZ)^2 = 0,429\sigma^2$.