



# Pravděpodobnost a matematická statistika

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

[dohnal@nipax.cz](mailto:dohnal@nipax.cz)



# Pravděpodobnost a matematická statistika

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

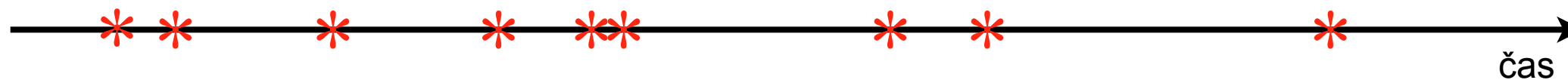
[dohnal@nipax.cz](mailto:dohnal@nipax.cz)



## II. Náhodná veličina

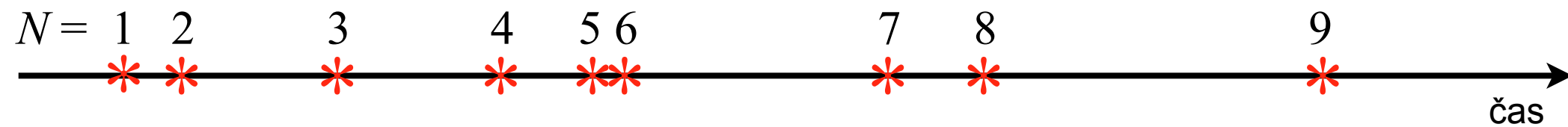
<https://sms.nipax.cz/pas>

# Náhodné události v čase



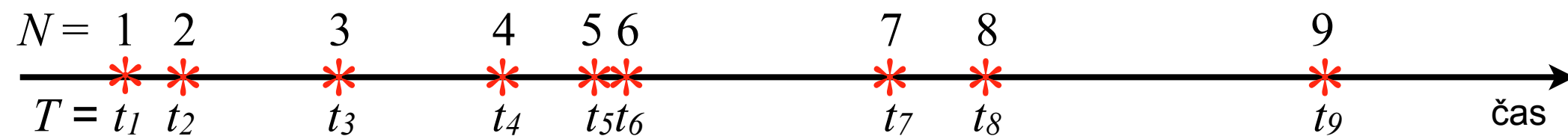
# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



# Náhodné události v čase

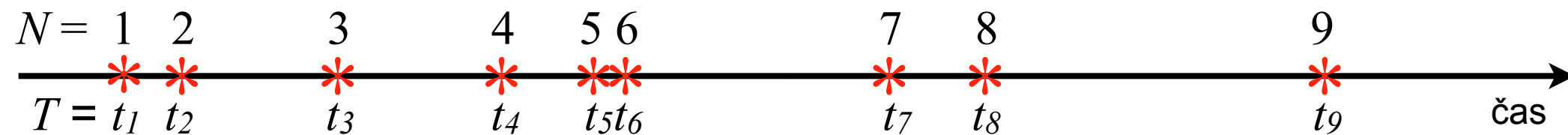
počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



čas výskytu  $i$ -té události:  $T_i$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$  ← diskrétní náhodná veličina

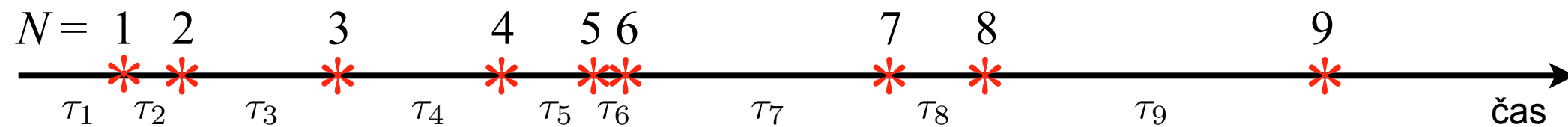


čas výskytu  $i$ -té události:  $T_i$  ← spojitá náhodná veličina



# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$  ← diskrétní náhodná veličina

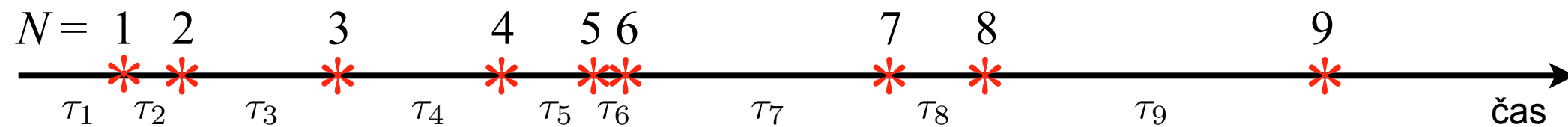


doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  ← spojitá náhodná veličina



# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$  ← diskrétní náhodná veličina

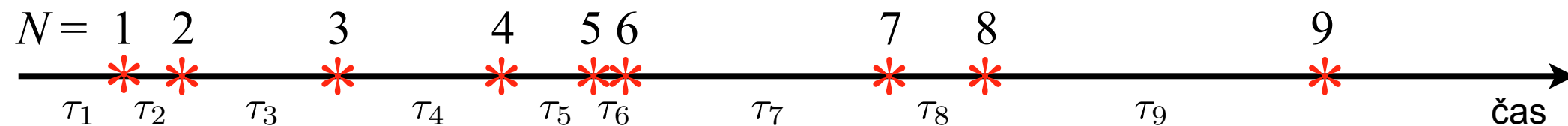


doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  ← spojitá náhodná veličina

$$\lambda(t) = \frac{N(t)}{t}$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$  ← diskrétní náhodná veličina



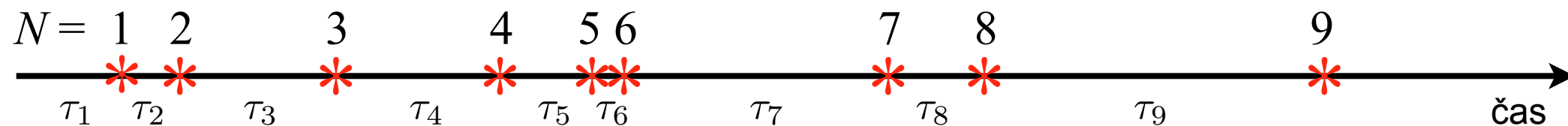
doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  ← spojitá náhodná veličina

$$\lambda(t) = \frac{N(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}$$

← střední počet událostí za jednotku času

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$  ← diskrétní náhodná veličina



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  ← spojitá náhodná veličina

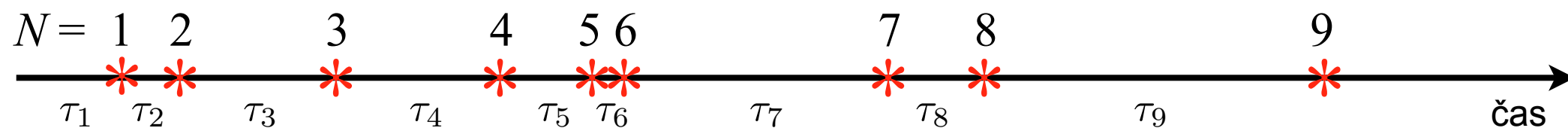
$$\lambda(t) = \frac{N(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}$$

← střední počet událostí za jednotku času

$$\bar{T}_i = \frac{t_i}{i}$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$  ← diskrétní náhodná veličina



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  ← spojitá náhodná veličina

$$\lambda(t) = \frac{N(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}$$

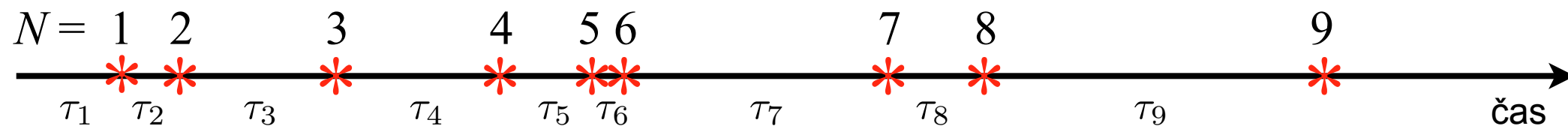
← střední počet událostí za jednotku času

$$\bar{T}_i = \frac{t_i}{i} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{T} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} = \frac{1}{\lambda}$$

← střední doba mezi událostmi

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$  ← diskrétní náhodná veličina



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  ← spojitá náhodná veličina

$$\lambda(t) = \frac{N(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}$$

← střední počet událostí za jednotku času

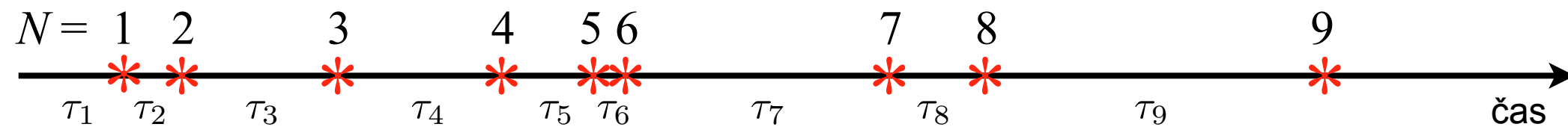
$$\bar{T}_i = \frac{t_i}{i} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{T} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} = \frac{1}{\lambda}$$

← střední doba mezi událostmi

$\lambda$  je intenzita událostí,  $1/\lambda$  je střední doba mezi událostmi

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

$\lambda$  je intenzita událostí,  $1/\lambda$  je střední doba mezi událostmi

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

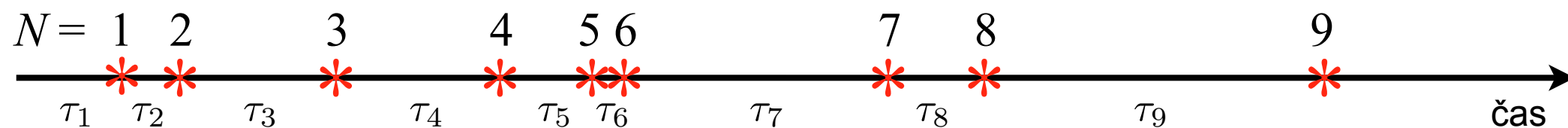
Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi událostmi nepřekročí hodnotu  $t$  ?  $P(\tau \leq t) = ?$

$\lambda$  je intenzita událostí,  $1/\lambda$  je střední doba mezi událostmi



# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi událostmi nepřekročí hodnotu  $t$  ?  $P(\tau \leq t) = ?$

Jaká je pravděpodobnost, že za dobu  $t$  nastane  $k$  událostí?  $P(N(t) = k) = ?$

$\lambda$  je intenzita událostí,  $1/\lambda$  je střední doba mezi událostmi



# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi událostmi nepřekročí hodnotu  $t$  ?  $P(\tau \leq t) = ?$

Exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda$ :

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi událostmi nepřekročí hodnotu  $t$  ?  $P(\tau \leq t) = ?$

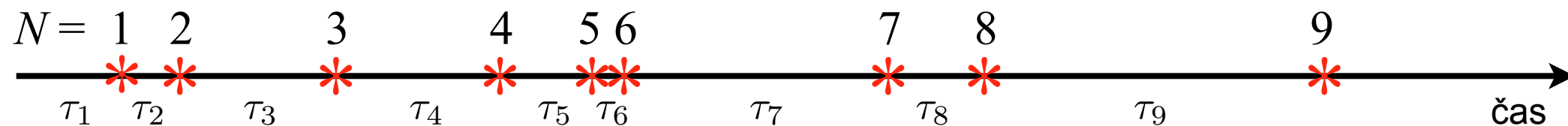
Exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda$ :

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi událostmi nepřekročí hodnotu  $t$  ?  $P(\tau \leq t) = ?$

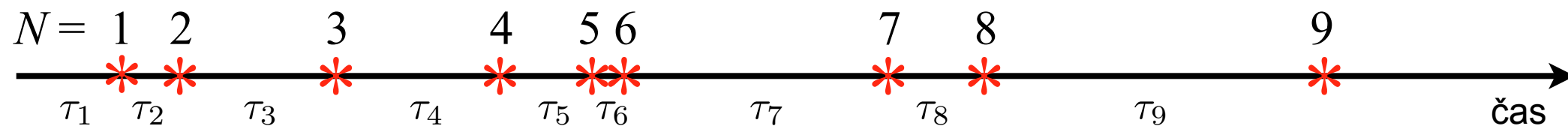
Exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda$ :

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad E(\tau) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi událostmi nepřekročí hodnotu  $t$  ?  $P(\tau \leq t) = ?$

Exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda$ :

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad E(\tau) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}$$

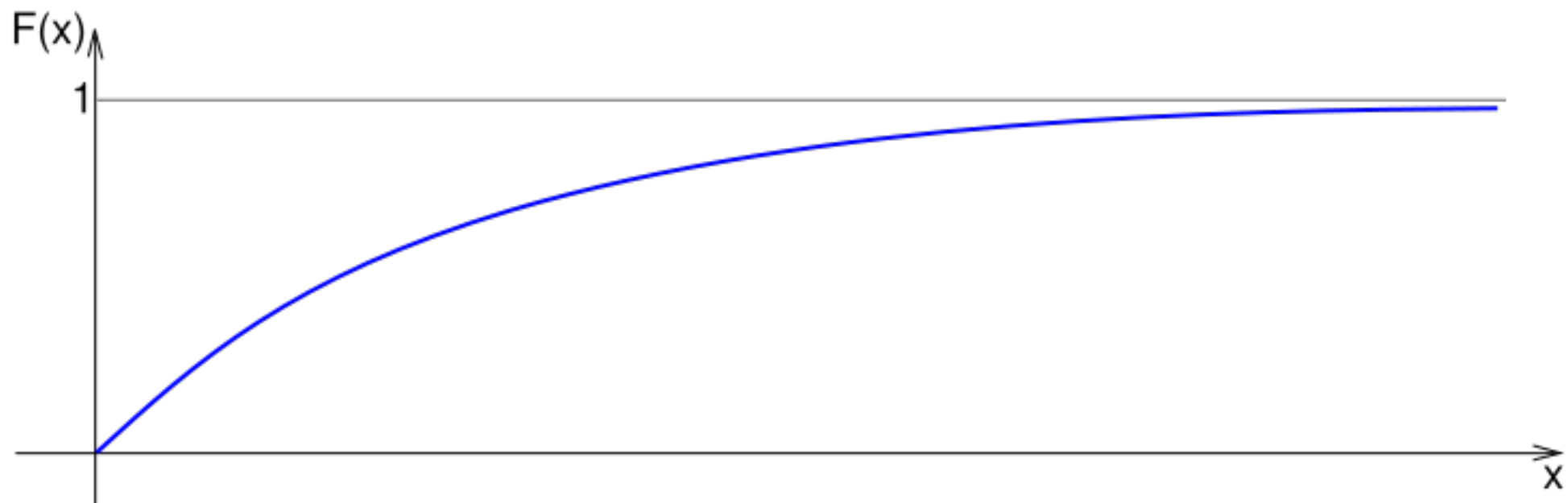
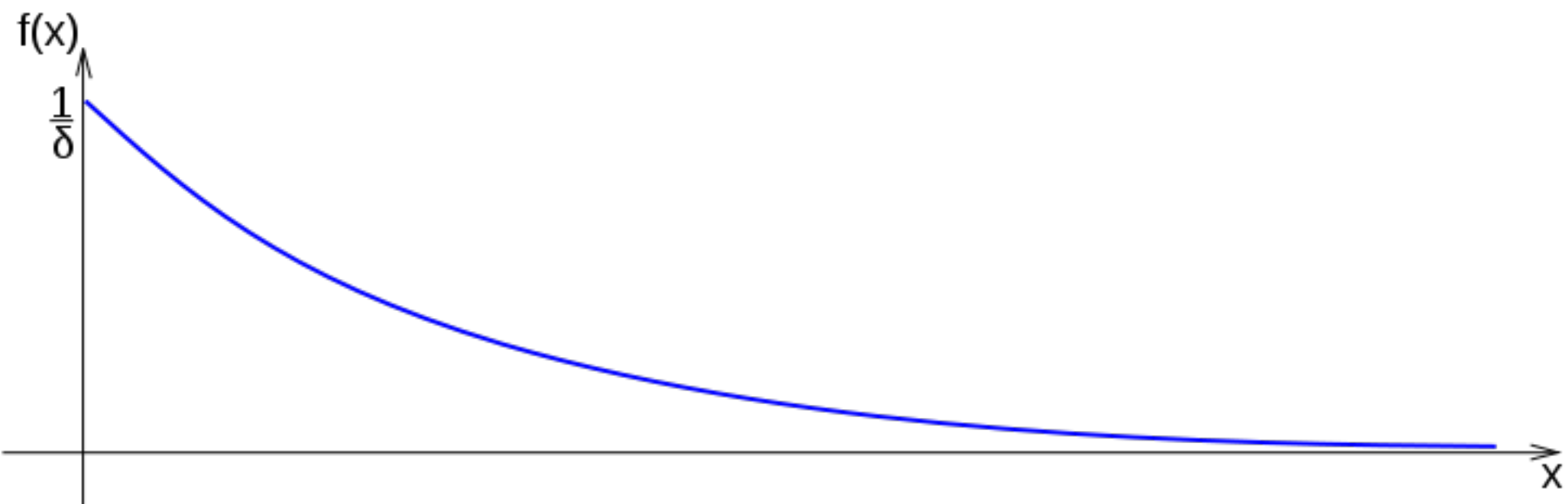
$\lambda$  je intenzita událostí,  $1/\lambda$  je střední doba mezi událostmi

# Exponenciální rozdělení

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

# Exponenciální rozdělení

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$



# Exponenciální rozdělení

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{\delta}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases}$$



# Exponenciální rozdělení

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{\delta}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny, která popisuje dobu mezi nezávislými, náhodně se vyskytujícími událostmi v čase.



# Exponenciální rozdělení

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{\delta}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny, která popisuje dobu mezi nezávislými, náhodně se vyskytujícími událostmi v čase.

Přitom střední doba mezi těmito událostmi je rovna  $\delta$  a střední počet těchto událostí za jednotku času je  $\lambda$ .

# Exponenciální rozdělení

$$P(\tau \leq t + s | \tau \geq s)$$

# Exponenciální rozdělení

$$P(\tau \leq t + s | \tau \geq s) = \frac{P((\tau \leq t + s) \ \& \ (\tau \geq s))}{P(\tau \geq s)}$$

# Exponenciální rozdělení

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t + s | \tau \geq s) &= \frac{P((\tau \leq t + s) \ \& \ (\tau \geq s))}{P(\tau \geq s)} \\ &= \frac{P(\tau \in \langle s, t + s \rangle)}{P(\tau \geq s)} \end{aligned}$$

# Exponenciální rozdělení

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t + s | \tau \geq s) &= \frac{P((\tau \leq t + s) \ \& \ (\tau \geq s))}{P(\tau \geq s)} \\ &= \frac{P(\tau \in \langle s, t + s \rangle)}{P(\tau \geq s)} = \frac{F(t + s) - F(s)}{1 - F(s)} \end{aligned}$$

# Exponenciální rozdělení

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t + s | \tau \geq s) &= \frac{P((\tau \leq t + s) \ \& \ (\tau \geq s))}{P(\tau \geq s)} \\ &= \frac{P(\tau \in \langle s, t + s \rangle)}{P(\tau \geq s)} = \frac{F(t + s) - F(s)}{1 - F(s)} \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{t+s}{\delta}} - 1 + e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} \end{aligned}$$

# Exponenciální rozdělení

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t + s | \tau \geq s) &= \frac{P((\tau \leq t + s) \ \& \ (\tau \geq s))}{P(\tau \geq s)} \\ &= \frac{P(\tau \in \langle s, t + s \rangle)}{P(\tau \geq s)} = \frac{F(t + s) - F(s)}{1 - F(s)} \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{t+s}{\delta}} - 1 + e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} = \frac{e^{-\frac{s}{\delta}} - e^{-\frac{t}{\delta}} e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} \end{aligned}$$



# Exponenciální rozdělení

$$\begin{aligned}P(\tau \leq t + s | \tau \geq s) &= \frac{P((\tau \leq t + s) \ \& \ (\tau \geq s))}{P(\tau \geq s)} \\&= \frac{P(\tau \in \langle s, t + s \rangle)}{P(\tau \geq s)} = \frac{F(t + s) - F(s)}{1 - F(s)} \\&= \frac{1 - e^{-\frac{t+s}{\delta}} - 1 + e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} = \frac{e^{-\frac{s}{\delta}} - e^{-\frac{t}{\delta}} e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} \\&= 1 - e^{-\frac{t}{\delta}} = F(t) = P(\tau \leq t)\end{aligned}$$



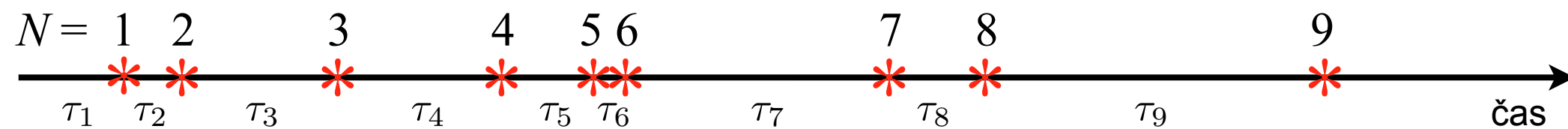
# Exponenciální rozdělení

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t + s | \tau \geq s) &= \frac{P((\tau \leq t + s) \ \& \ (\tau \geq s))}{P(\tau \geq s)} \\ &= \frac{P(\tau \in \langle s, t + s \rangle)}{P(\tau \geq s)} = \frac{F(t + s) - F(s)}{1 - F(s)} \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{t+s}{\delta}} - 1 + e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} = \frac{e^{-\frac{s}{\delta}} - e^{-\frac{t}{\delta}} e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} \\ &= 1 - e^{-\frac{t}{\delta}} = F(t) = P(\tau \leq t) \end{aligned}$$

Exponenciální rozdělení nemá paměť!

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

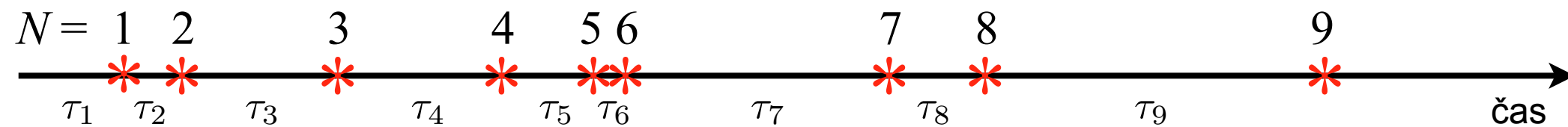
Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

$$k=2: \quad P(t_2 \leq t) = ?$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

$k=2$ :  $P(t_2 \leq t) = ?$

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

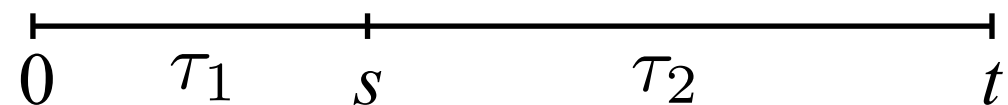
Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

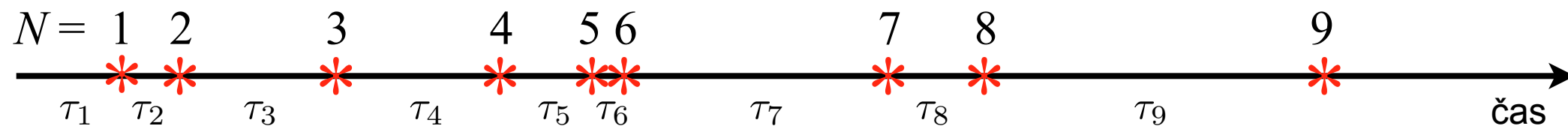
$k=2$ :  $P(t_2 \leq t) = ?$

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$



# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

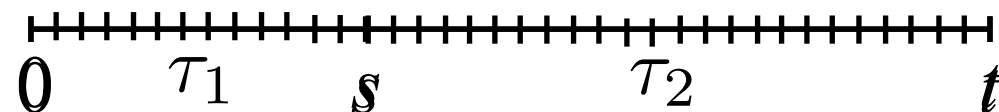
Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

$k=2$ :  $P(t_2 \leq t) = ?$

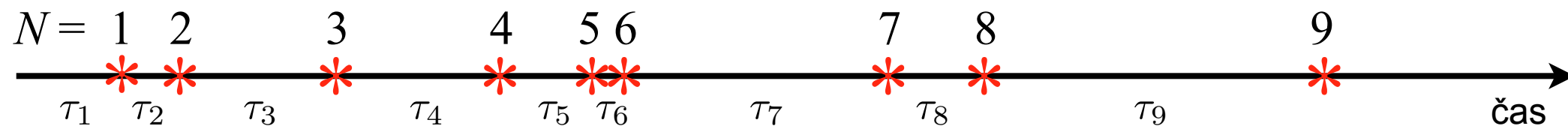
$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$





# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

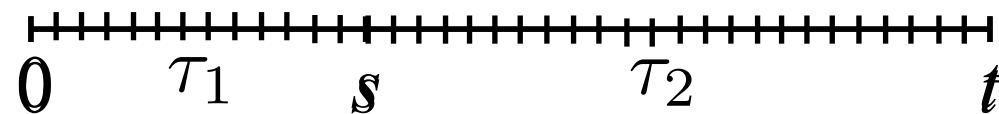
Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

$k=2$ :  $P(t_2 \leq t) = ?$

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$

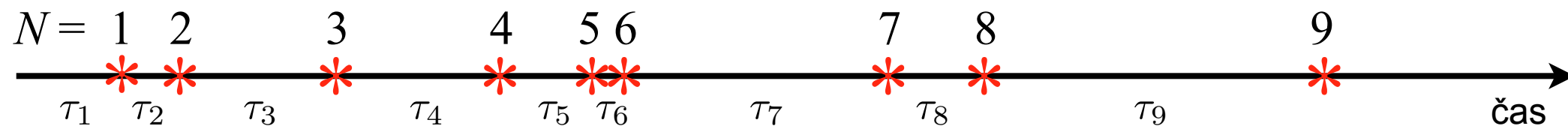


$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i \mid \tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle))$$



# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

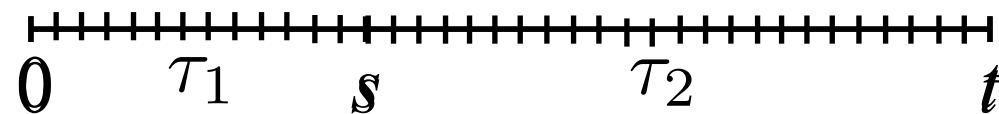
Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

$k=2$ :  $P(t_2 \leq t) = ?$

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$

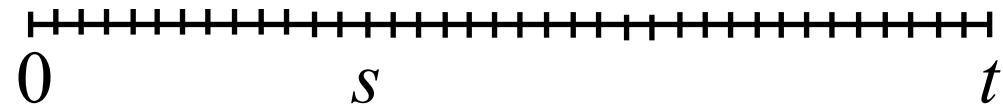


$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i \mid \tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle))$$

$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i)$$

# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad P(t_2 \leq t) = ?$$
$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$



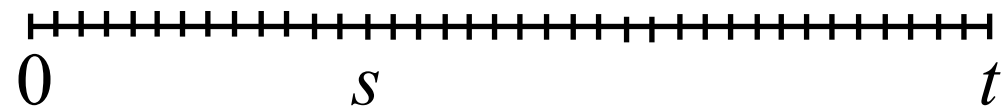
$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i \mid \tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle))$$

$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i)$$

# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad P(t_2 \leq t) = ?$$

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$



$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i \mid \tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle))$$

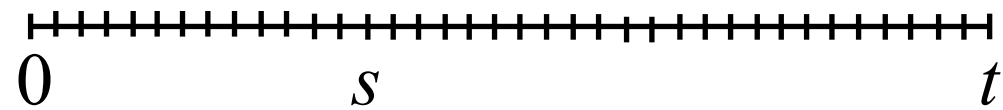
$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} P(\tau_1 \in \langle s_i, s_i + ds \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i - ds)$$

# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad P(t_2 \leq t) = ?$$

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$



$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i \mid \tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle)$$

$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i)$$

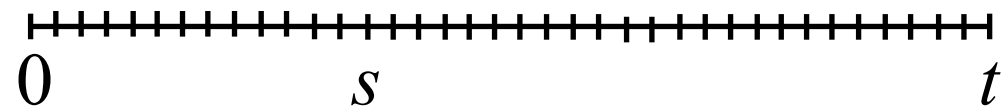
$$= \sum_{i=0}^{n-1} P(\tau_1 \in \langle s_i, s_i + ds \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i - ds)$$

$$\doteq \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i) \cdot ds F(t - s_i - ds)$$

# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad P(t_2 \leq t) = ?$$

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$



$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i \mid \tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle)$$

$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i)$$

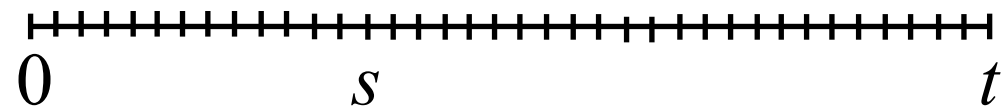
$$= \sum_{i=0}^{n-1} P(\tau_1 \in \langle s_i, s_i + ds \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i - ds)$$

$$\doteq \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i) \cdot ds F(t - s_i - ds) \quad \rightarrow \int_0^t F(t - s) f(s) ds$$

# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad P(t_2 \leq t) = ?$$

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$



$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i \mid \tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle)$$

$$P(t_2 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_1 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} P(\tau_1 \in \langle s_i, s_i + ds \rangle) P(\tau_2 \leq t - s_i - ds)$$

$$\doteq \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i) \cdot ds F(t - s_i - ds) \quad \rightarrow \int_0^t F(t - s) f(s) ds$$

$$\int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-s)}) \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t} - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda) \qquad f_2(t) = \lambda e^{-\lambda t}(1 + \lambda)$$



# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda) \qquad f_2(t) = \lambda e^{-\lambda t}(1 + \lambda)$$

$$k=3: \quad P(t_3 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_3 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_1 + \tau_2 \leq t - s_i)$$



# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda) \qquad f_2(t) = \lambda e^{-\lambda t}(1 + \lambda)$$

$$k=3: \quad P(t_3 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_3 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_1 + \tau_2 \leq t - s_i)$$

$$F_3 = \int_0^t F_2(t - s) f(s) \, ds$$

# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda) \qquad f_2(t) = \lambda e^{-\lambda t}(1 + \lambda)$$

$$k=3: \quad P(t_3 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_3 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_1 + \tau_2 \leq t - s_i)$$

$$F_3 = \int_0^t F_2(t - s) f(s) \, ds$$

$$k: \quad P(t_k \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_k \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_1 + \dots + \tau_{k-1} \leq t - s_i)$$

$$F_k = \int_0^t F_{k-1}(t - s) f(s) \, ds$$

# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda) \qquad f_2(t) = \lambda e^{-\lambda t}(1 + \lambda)$$

$$k=3: \quad P(t_3 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_3 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_1 + \tau_2 \leq t - s_i)$$

$$F_3 = \int_0^t F_2(t - s) f(s) \, ds$$

$$k: \quad P(t_k \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_k \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_1 + \dots + \tau_{k-1} \leq t - s_i)$$

$$F_k = \int_0^t F_{k-1}(t - s) f(s) \, ds \quad \leftarrow \text{k-tá konvoluční mocnina } F(t)$$

# Součet náhodných veličin s Exponenciálním rozdělením

$$k=2: \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda) \qquad f_2(t) = \lambda e^{-\lambda t}(1 + \lambda)$$

$$k=3: \quad P(t_3 \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_3 \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_1 + \tau_2 \leq t - s_i)$$

$$F_3 = \int_0^t F_2(t-s) f(s) \, ds$$

$$k: \quad P(t_k \leq t) = \sum_{i=1}^n P(\tau_k \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle) P(\tau_1 + \dots + \tau_{k-1} \leq t - s_i)$$

$$F_k = \int_0^t F_{k-1}(t-s) f(s) \, ds \quad \leftarrow \text{k-tá konvoluční mocnina } F(t)$$

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad \text{pro } t \geq 0$$

$$F_k(t) = 0, \quad \text{pro } t < 0$$

# Erlangovo rozdělení

Rozdělení součtu  $k$  náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$  se nazývá Erlangovo:

$$F_k(t) = 0, \quad \text{pro } t < 0$$

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad \text{pro } t \geq 0$$

$$f_k(t) = 0, \quad \text{pro } t < 0$$

$$f_k(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad \text{pro } t \geq 0$$

$$E(X) = \frac{k}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{k}{\lambda^2}.$$

# Erlangovo rozdělení

Rozdělení součtu  $k$  náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$  se nazývá Erlangovo:

$$F_k(t) = 0, \quad \text{pro } t < 0$$

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad \text{pro } t \geq 0$$

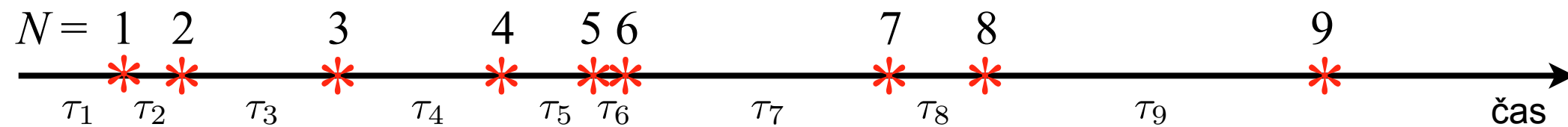
$$f_k(t) = 0, \quad \text{pro } t < 0$$

$$f_k(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad \text{pro } t \geq 0$$

$$E(X) = \frac{k}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{k}{\lambda^2}.$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$



# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

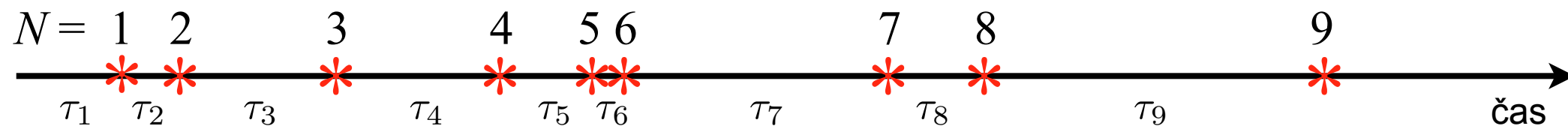
Jaká je pravděpodobnost, že za dobu  $t$  nastane  $k$  událostí?

$$P(N(t) = k) = ?$$



# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

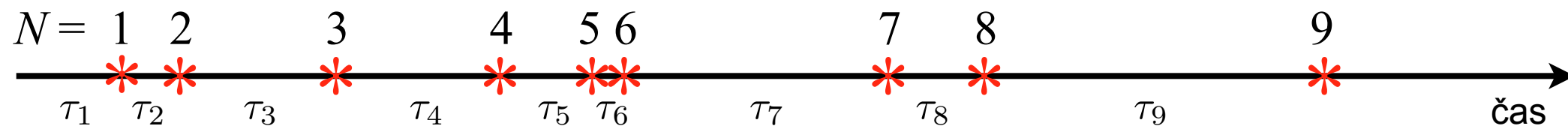
Jaká je pravděpodobnost, že za dobu  $t$  nastane  $k$  událostí?

$$P(N(t) = k) = ?$$

$$P(N(t) < k) = P(t_k \geq t)$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

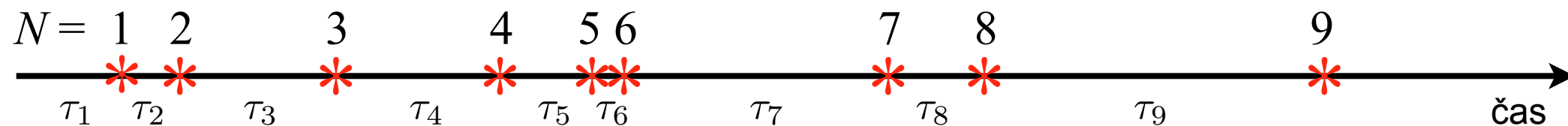
Jaká je pravděpodobnost, že za dobu  $t$  nastane  $k$  událostí?

$$P(N(t) = k) = ?$$

$$P(N(t) < k) = P(t_k \geq t) = 1 - F_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad \text{pro } t \geq 0$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

Jaká je pravděpodobnost, že za dobu  $t$  nastane  $k$  událostí?

$$P(N(t) = k) = ?$$

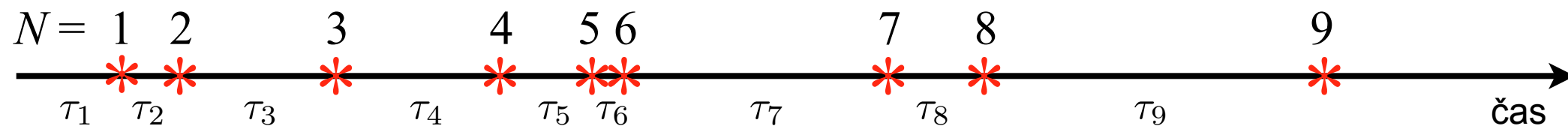
$$P(N(t) < k) = P(t_k \geq t) = 1 - F_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad \text{pro } t \geq 0$$

odtud:

$$P(N(t) = k) = P(N(t) < k+1) - P(N(t) < k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

# Náhodné události v čase

počet událostí v čase  $t$ :  $N(t)$



doby mezi událostmi:  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

Za jak dlouho nastane  $k$  událostí ?

Jaké je rozdělení časů  $t_k$  ?

$$P(t_k \leq t) = ?$$

Jaká je pravděpodobnost, že za dobu  $t$  nastane  $k$  událostí?

$$P(N(t) = k) = ?$$

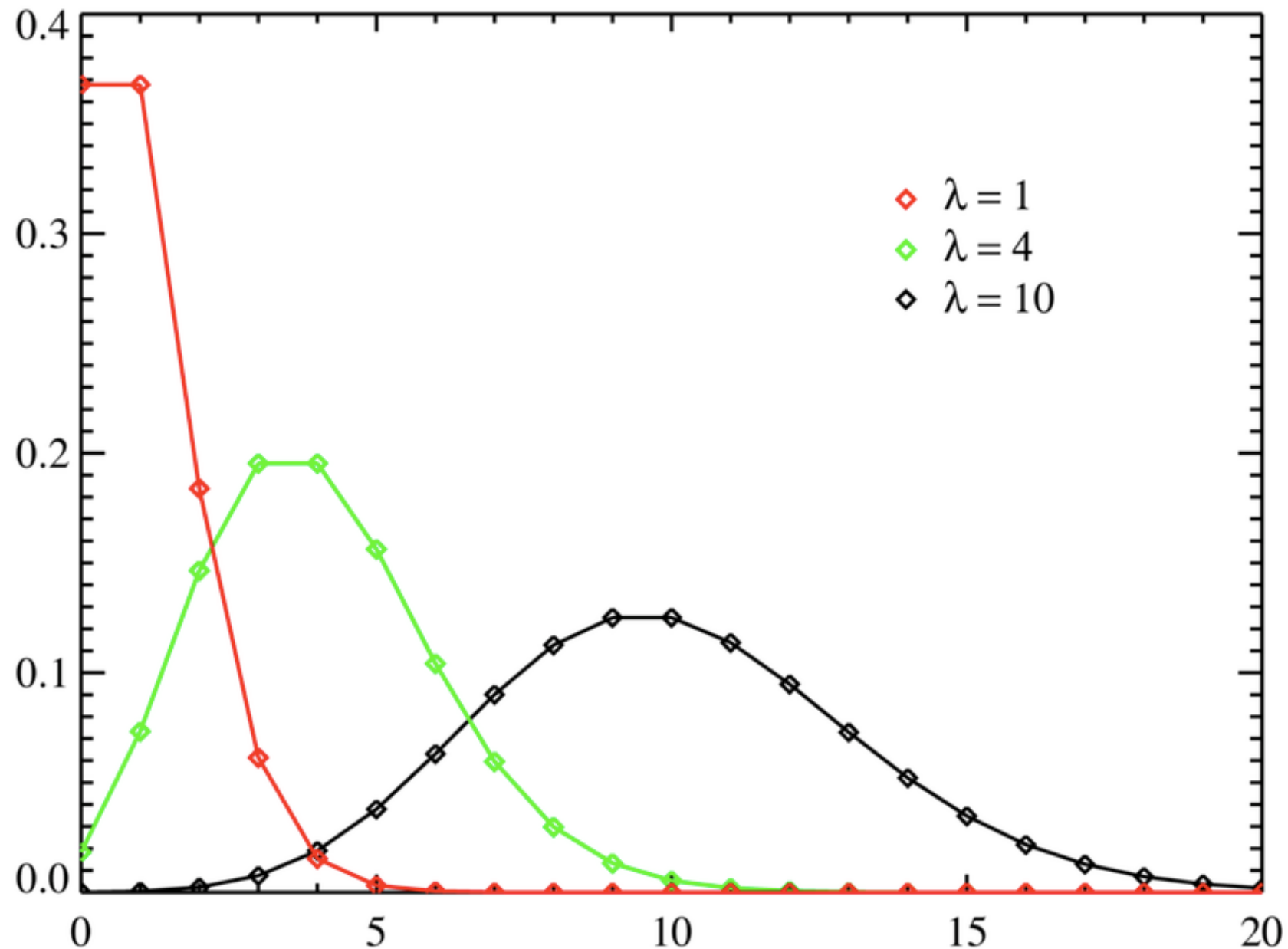
$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$E(N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t$$

# Poissonovo rozdělení

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots$$

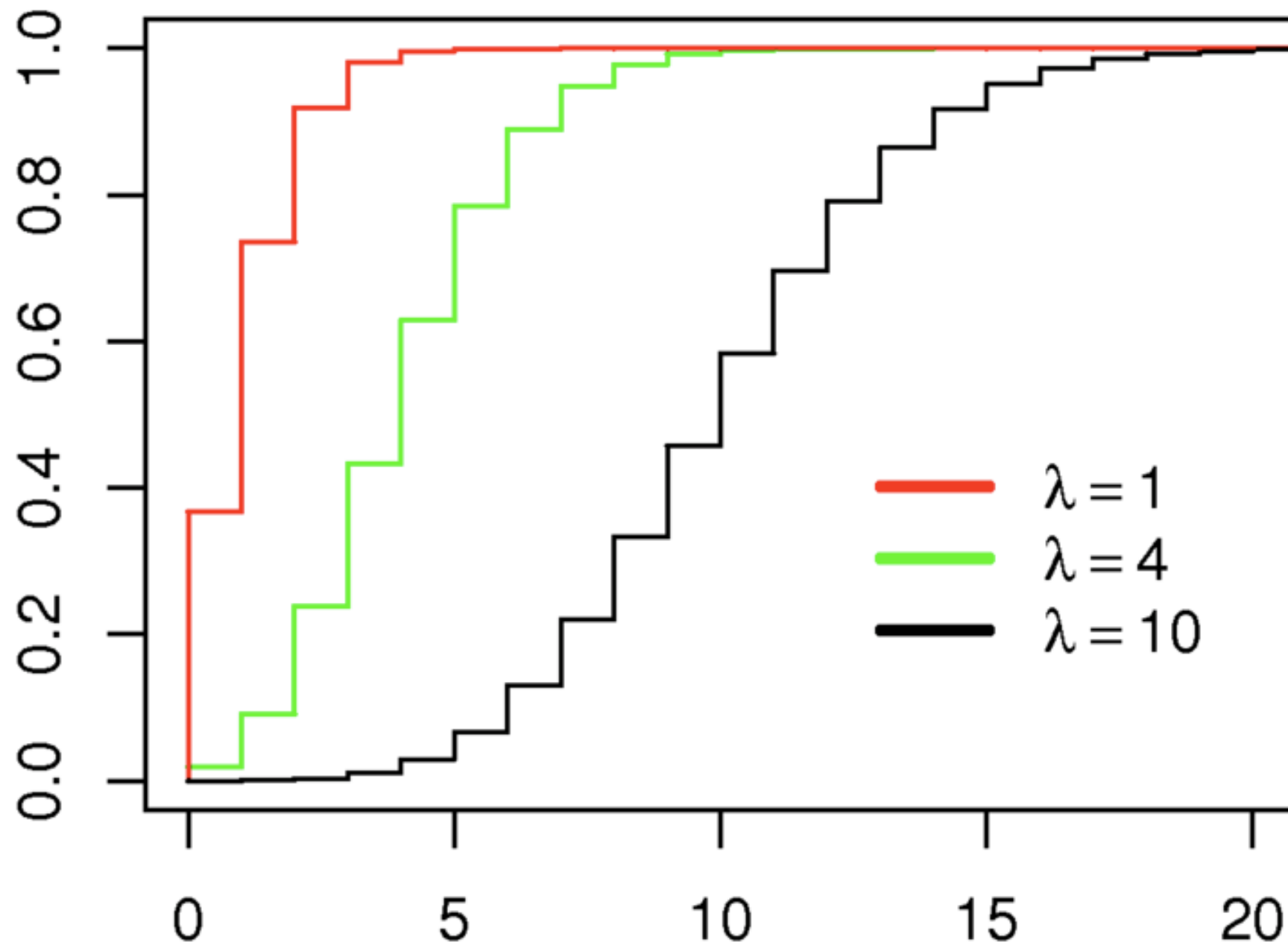
$$E(N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t$$



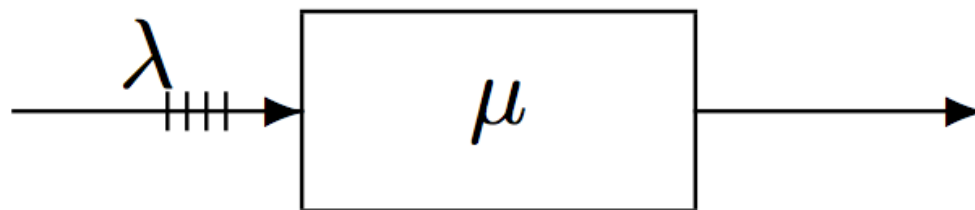
# Poissonovo rozdělení

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$E(N(t)) = \text{Var}(N(t)) = \lambda t$$



# System hromadné obsluhy

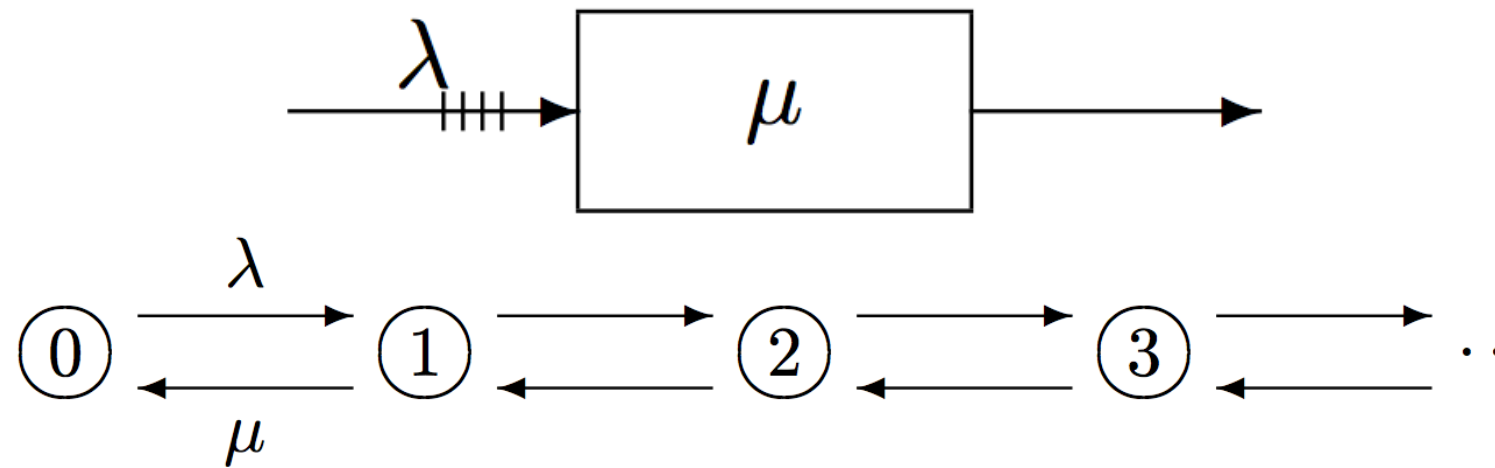


$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$



# System hromadné obsluhy

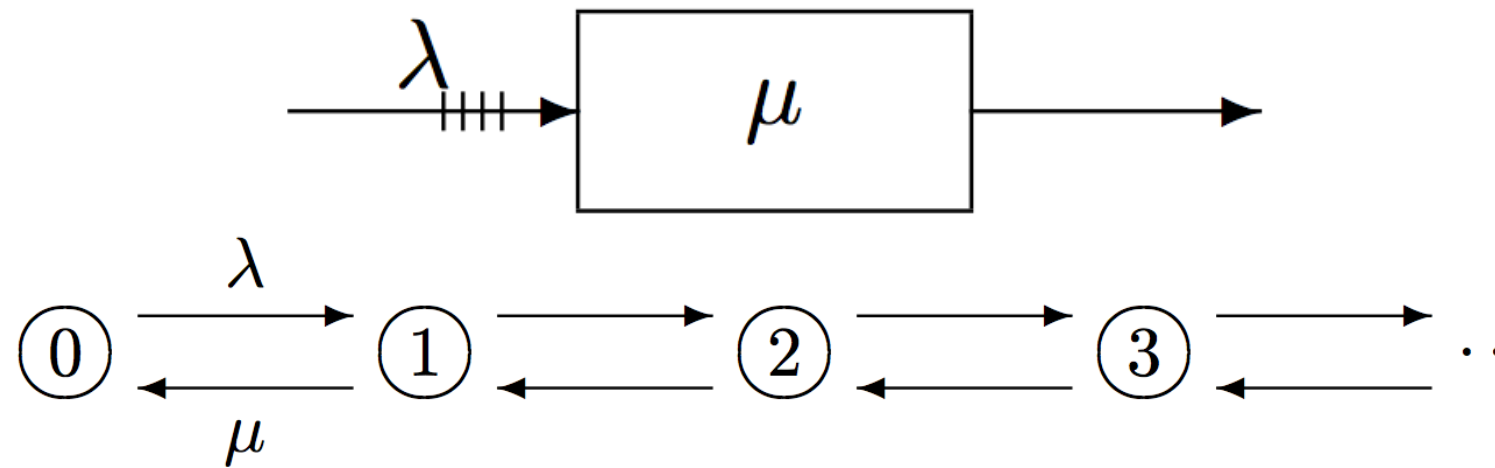


$$\begin{aligned}
 P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\
 &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\
 &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\
 &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\
 &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0
 \end{aligned}$$



# System hromadné obsluhy

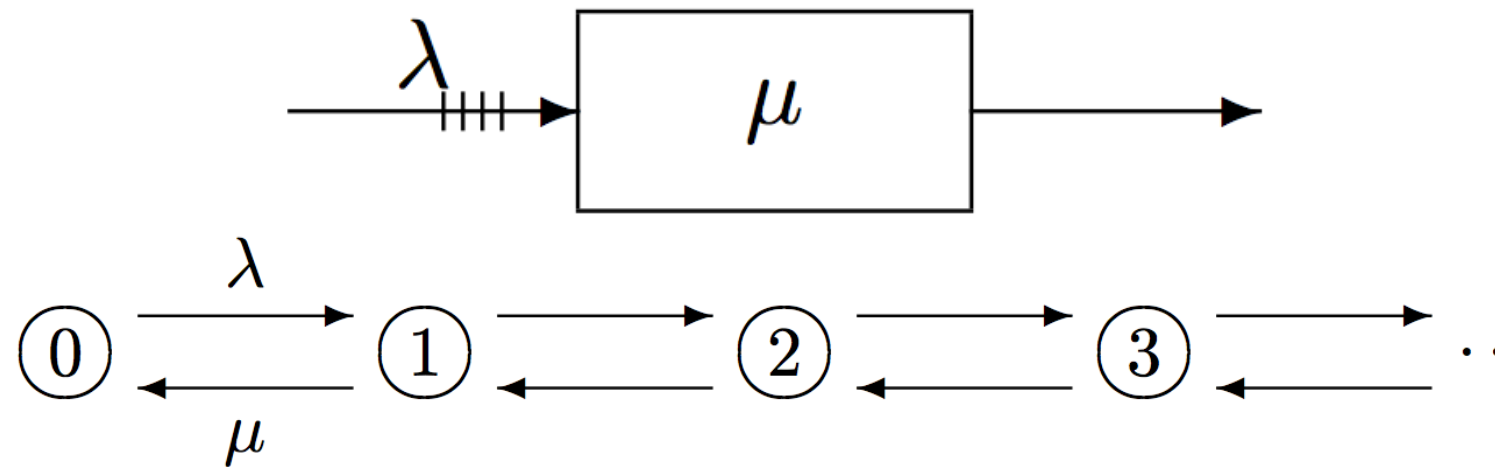


$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) =$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepříjde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

# System hromadné obsluhy

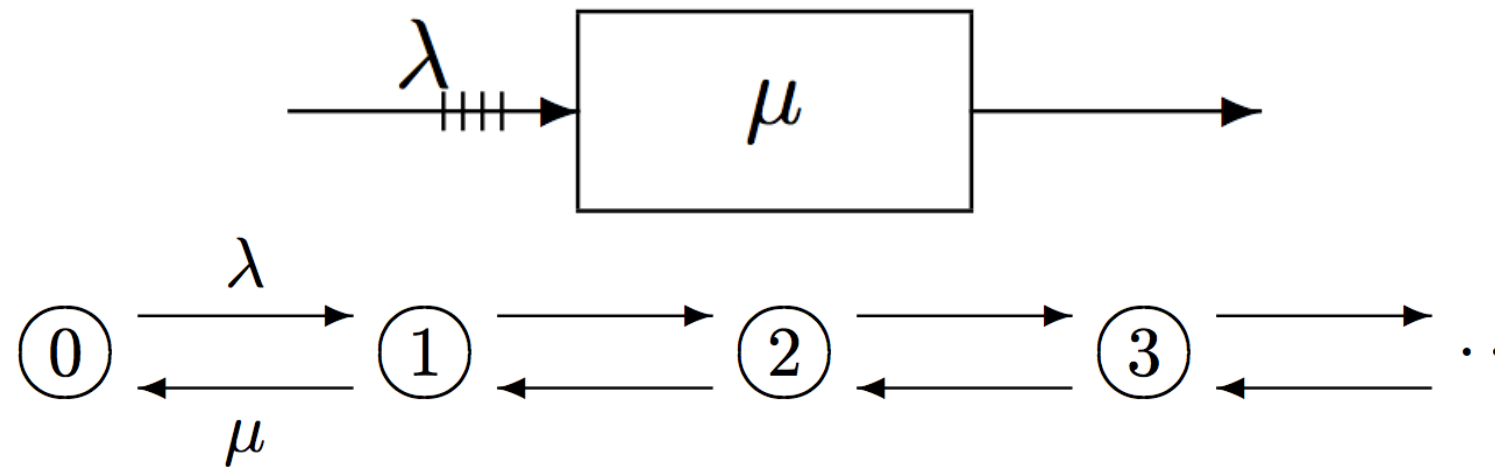


$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepříjde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

# System hromadné obsluhy

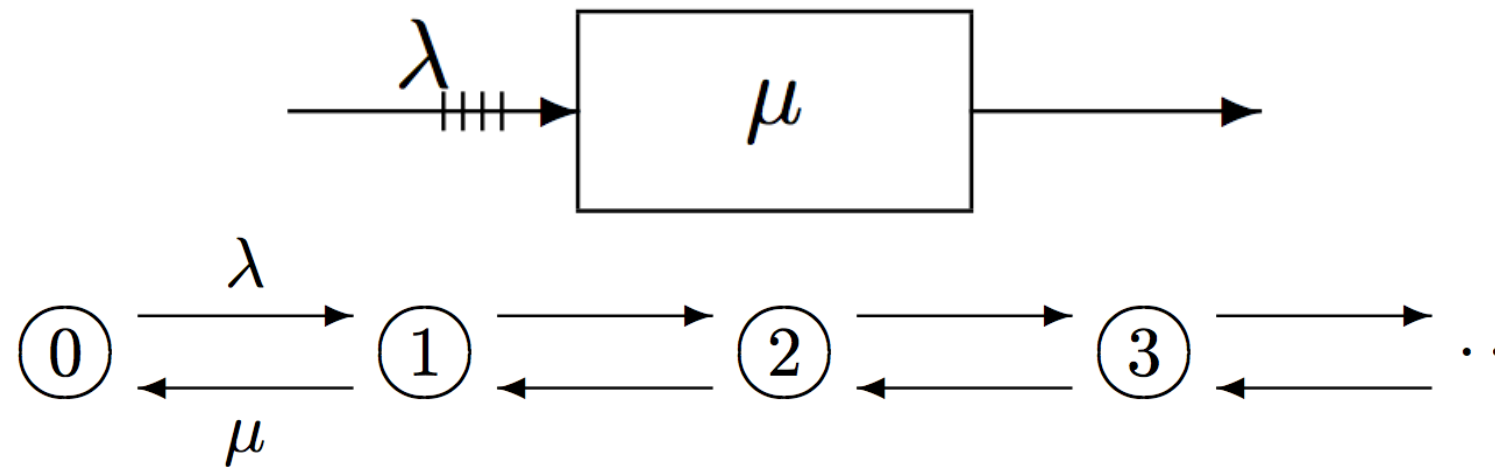


$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepříjde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

# System hromadné obsluhy



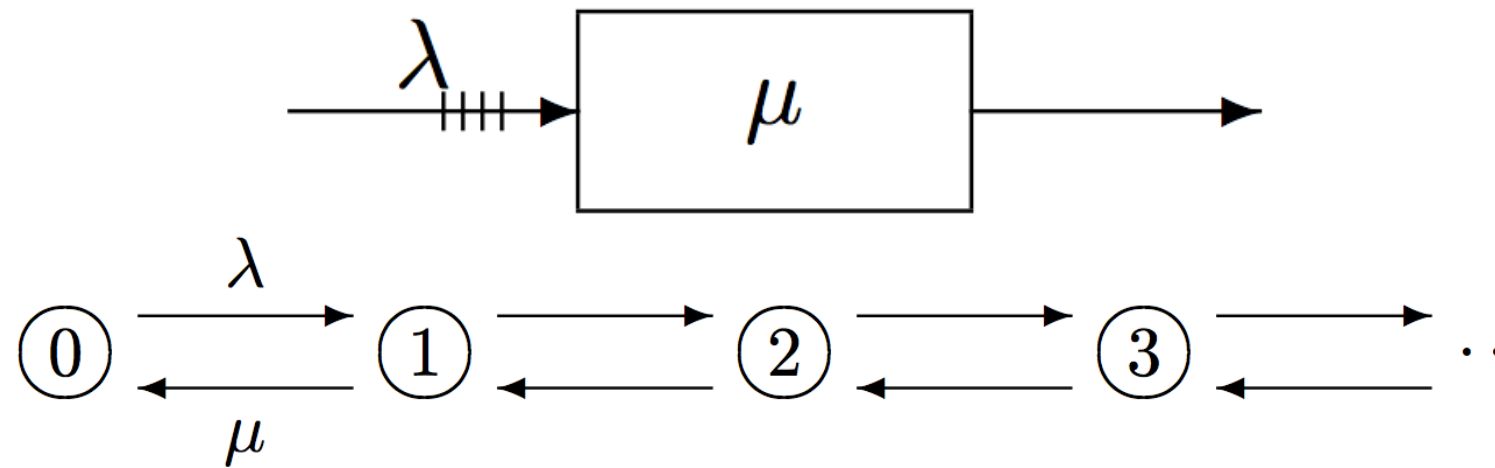
$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$

$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) =$

$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) = P(X(t+h) = j \mid X(t) = j)$   
 $= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h}$   
 $= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$

$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) = P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j)$   
 $= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h}$   
 $= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$

# System hromadné obsluhy



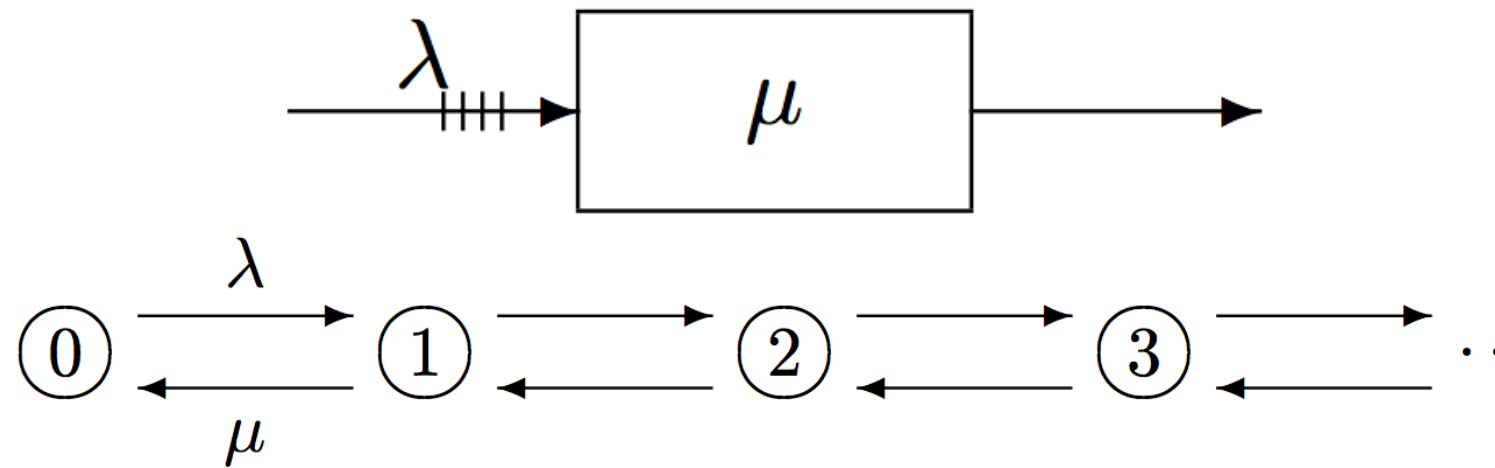
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

# System hromadné obsluhy



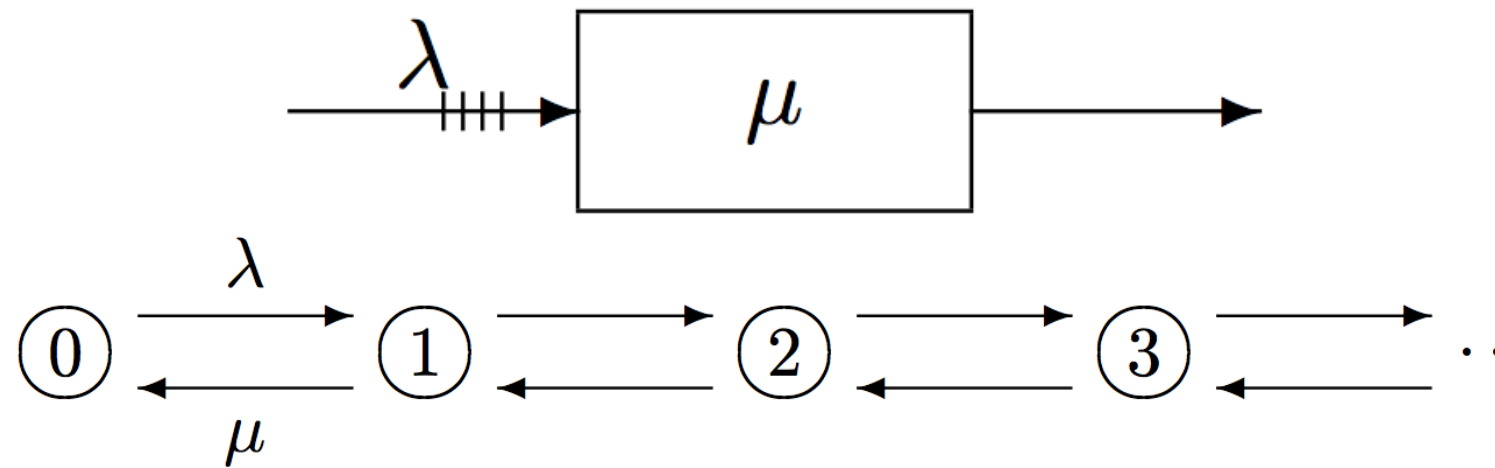
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

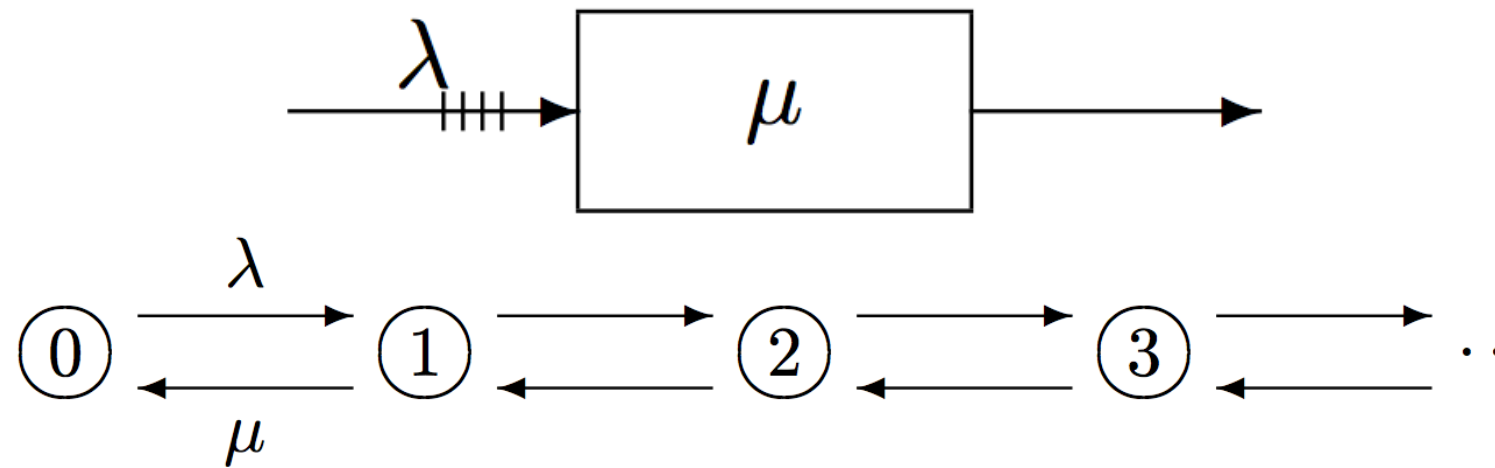
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) =$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$



# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

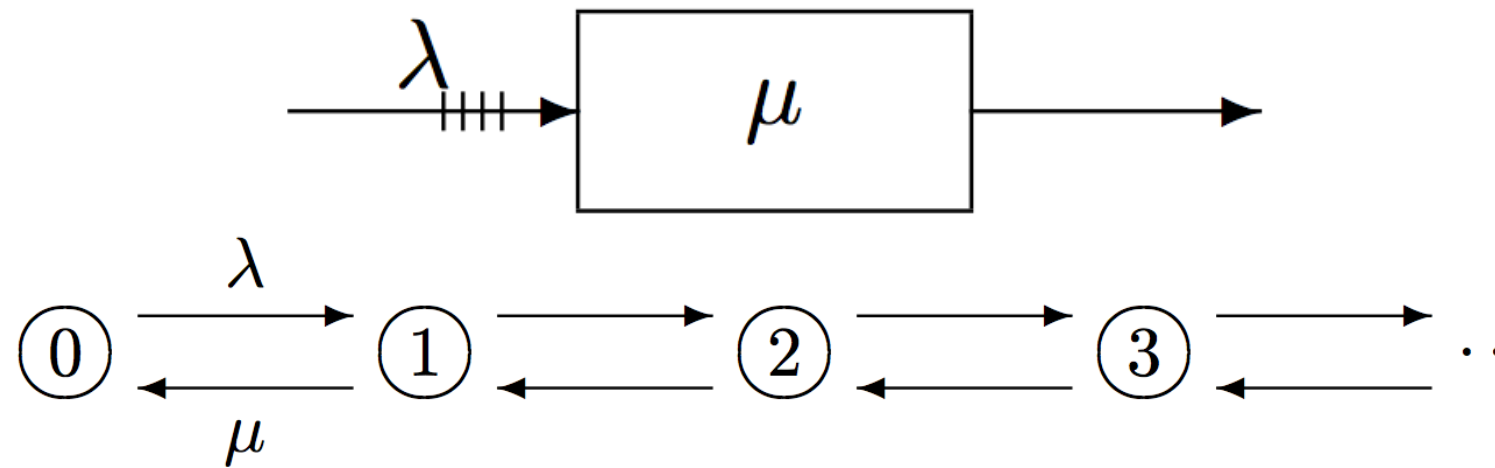
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$



# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijdou 2 zákazníci}) =$$

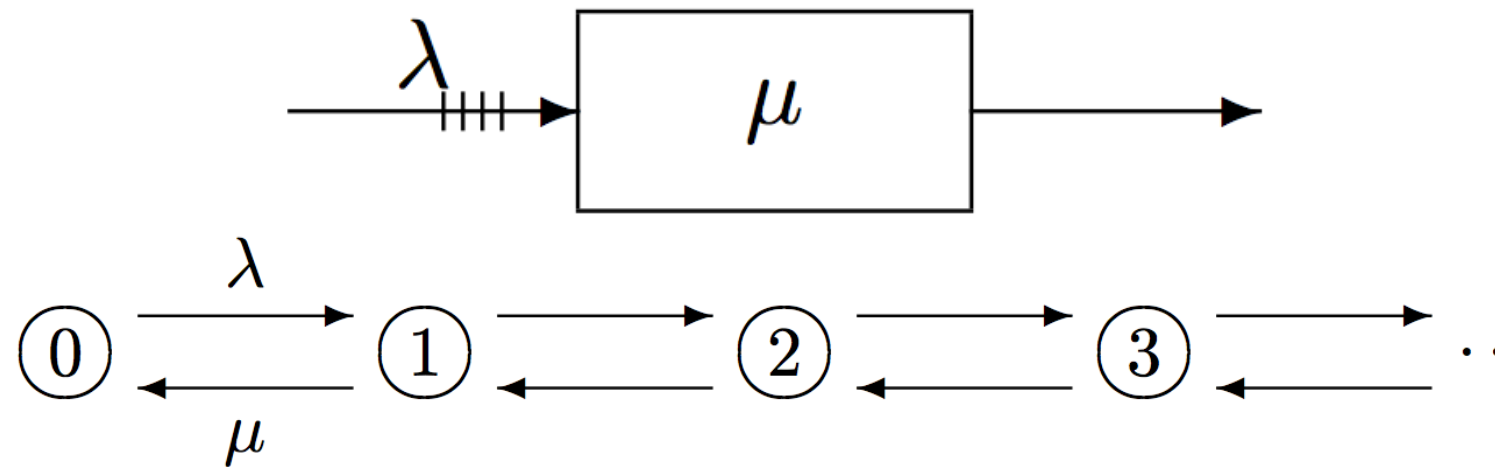
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) = P(X(t+h) = j \mid X(t) = j)$$

$$= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ = 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) = P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j)$$

$$= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} \\ = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

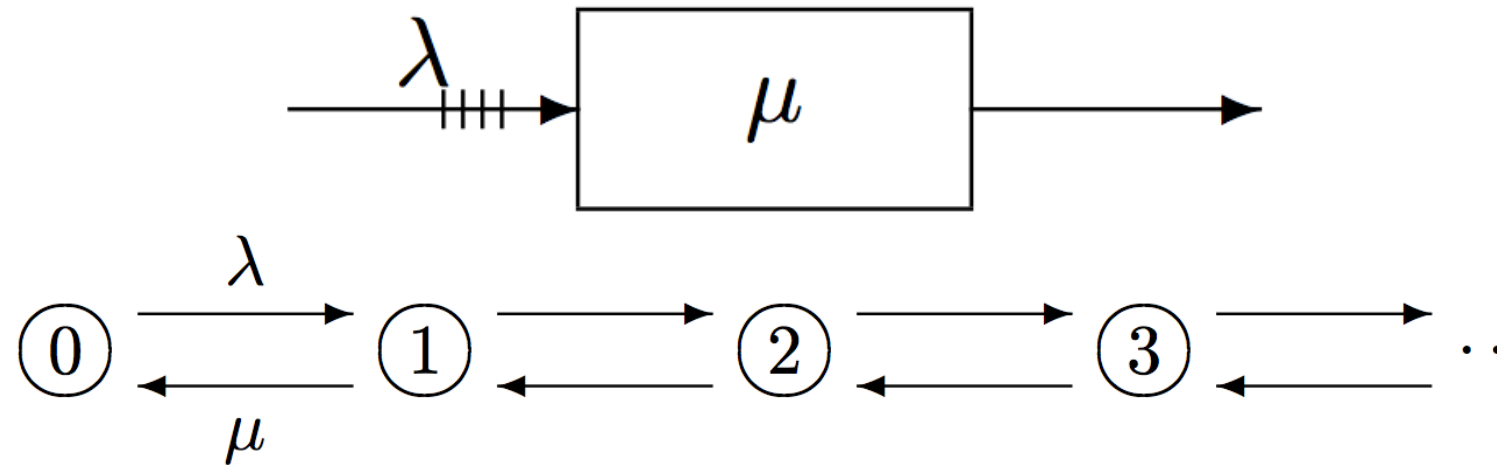
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijdou 2 zákazníci}) = (1 - e^{-\lambda h})(1 - e^{-\mu h}) = o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h})e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

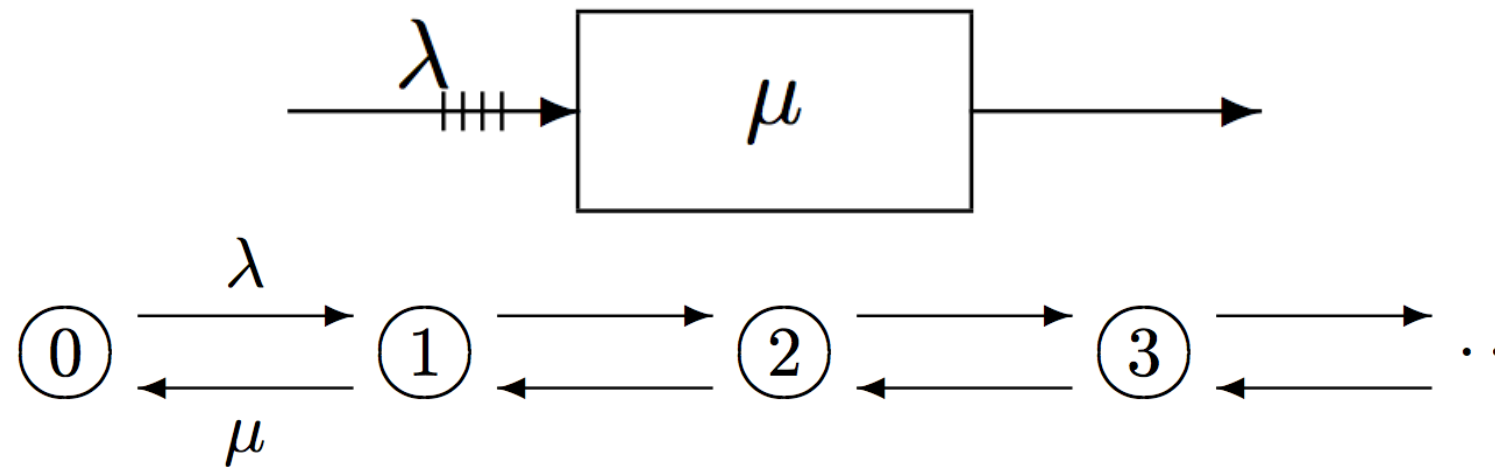
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijdou 2 zákazníci}) = (1 - e^{-\lambda h})(1 - e^{-\mu h}) = o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) = P(X(t+h) = j \mid X(t) = j)$$

# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

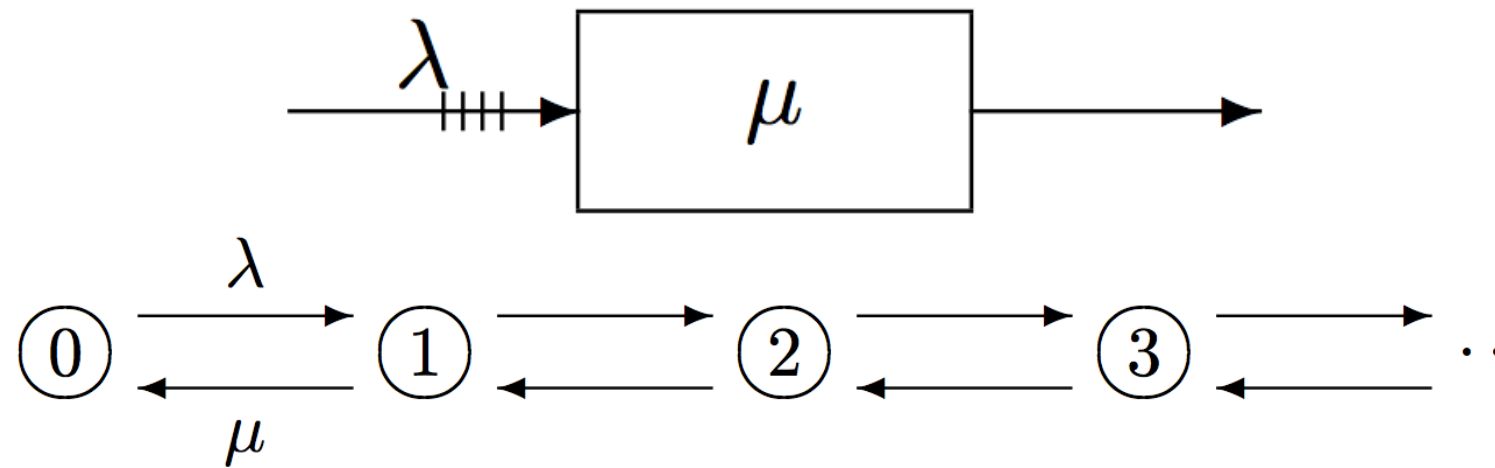
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijdou 2 zákazníci}) = (1 - e^{-\lambda h})(1 - e^{-\mu h}) = o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) = P(X(t+h) = j \mid X(t) = j)$$

$$= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) =$$

# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

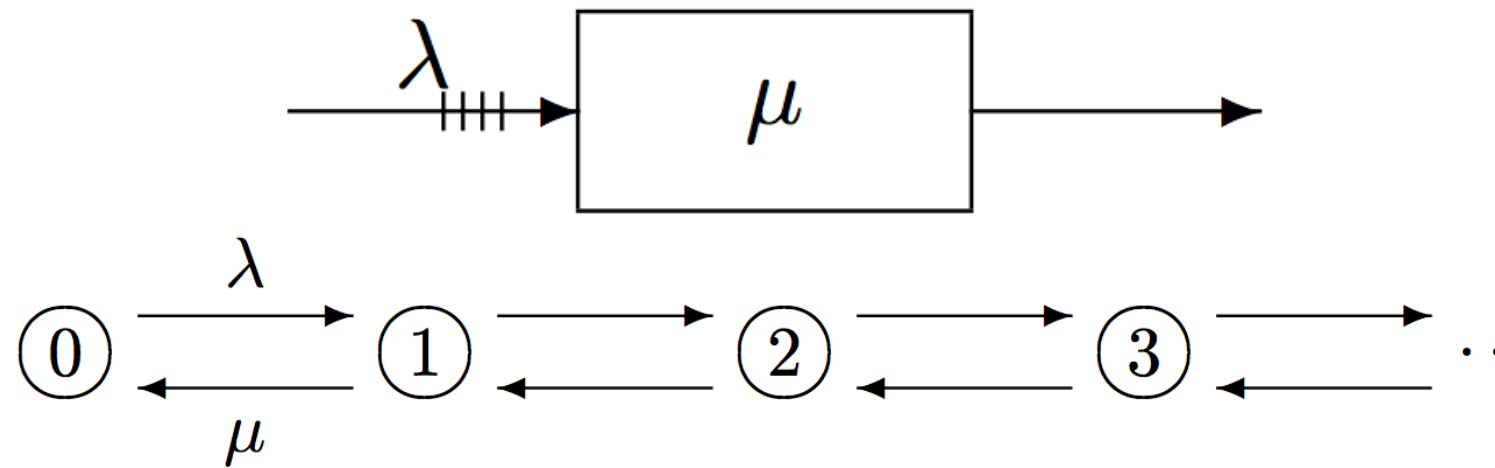
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijdou 2 zákazníci}) = (1 - e^{-\lambda h})(1 - e^{-\mu h}) = o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \end{aligned}$$

# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

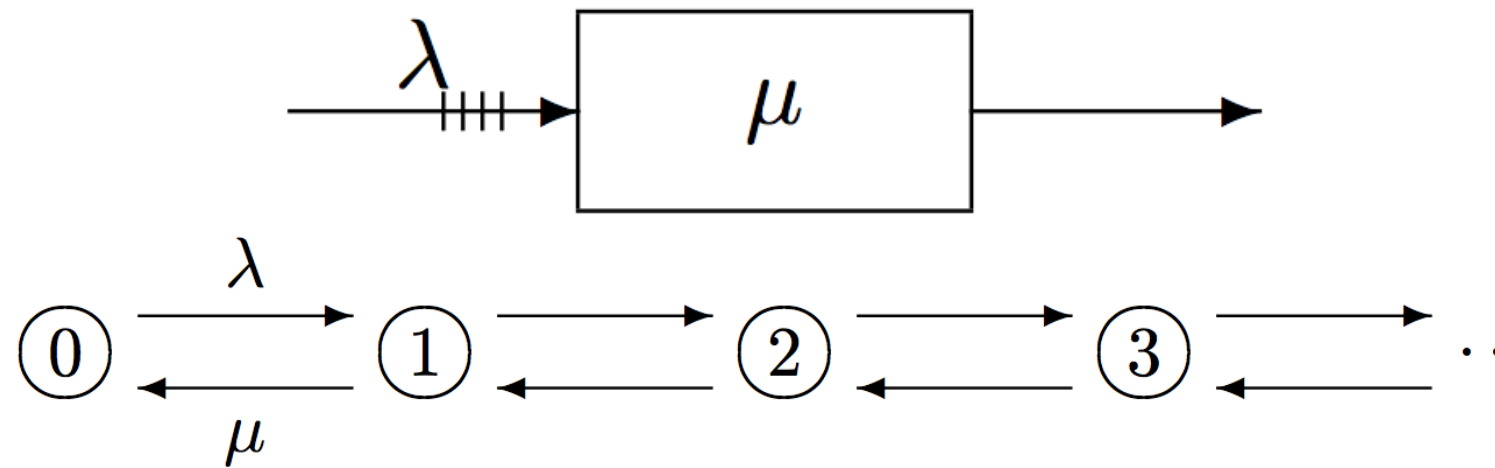
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijdou 2 zákazníci}) = (1 - e^{-\lambda h})(1 - e^{-\mu h}) = o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) = P(X(t+h) = j \mid X(t) = j)$$

$$= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ = 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijdou 2 zákazníci}) = (1 - e^{-\lambda h})(1 - e^{-\mu h}) = o(h), \quad h \rightarrow 0$$

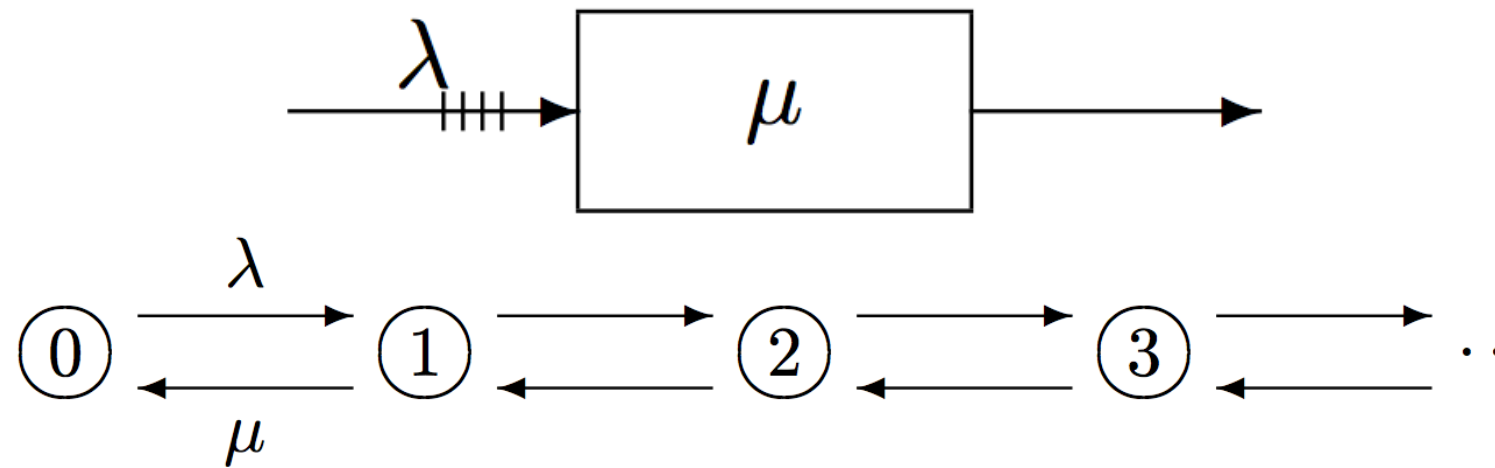
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) = P(X(t+h) = j \mid X(t) = j)$$

$$= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ = 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) = P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j)$$



# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

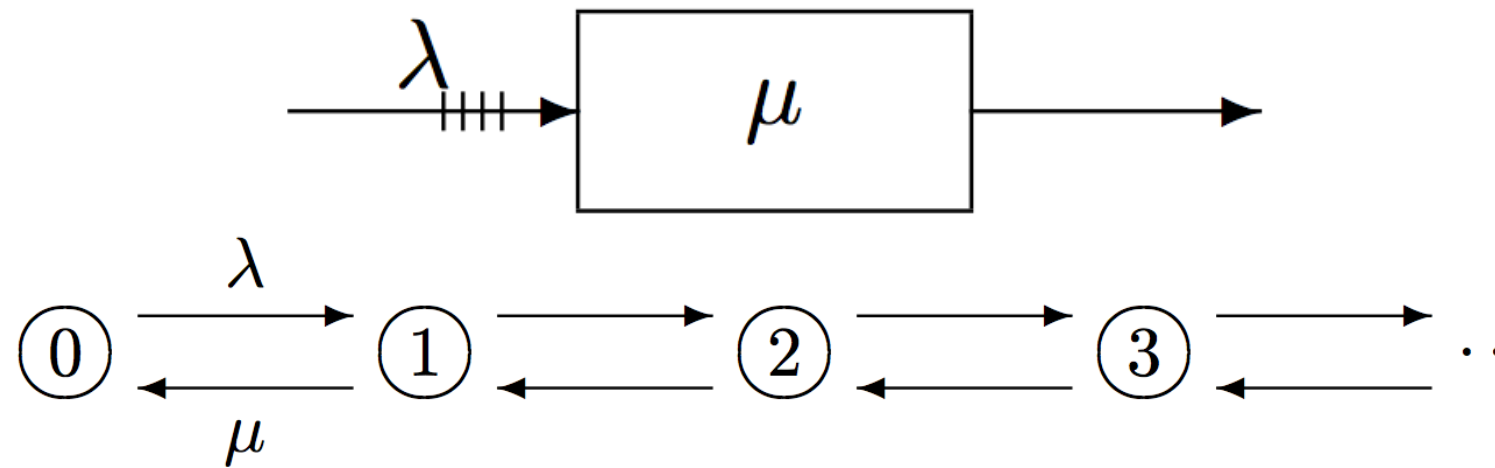
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijdou 2 zákazníci}) = (1 - e^{-\lambda h})(1 - e^{-\mu h}) = o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = \end{aligned}$$



# System hromadné obsluhy



$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ nepřijde 1 zákazník}) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

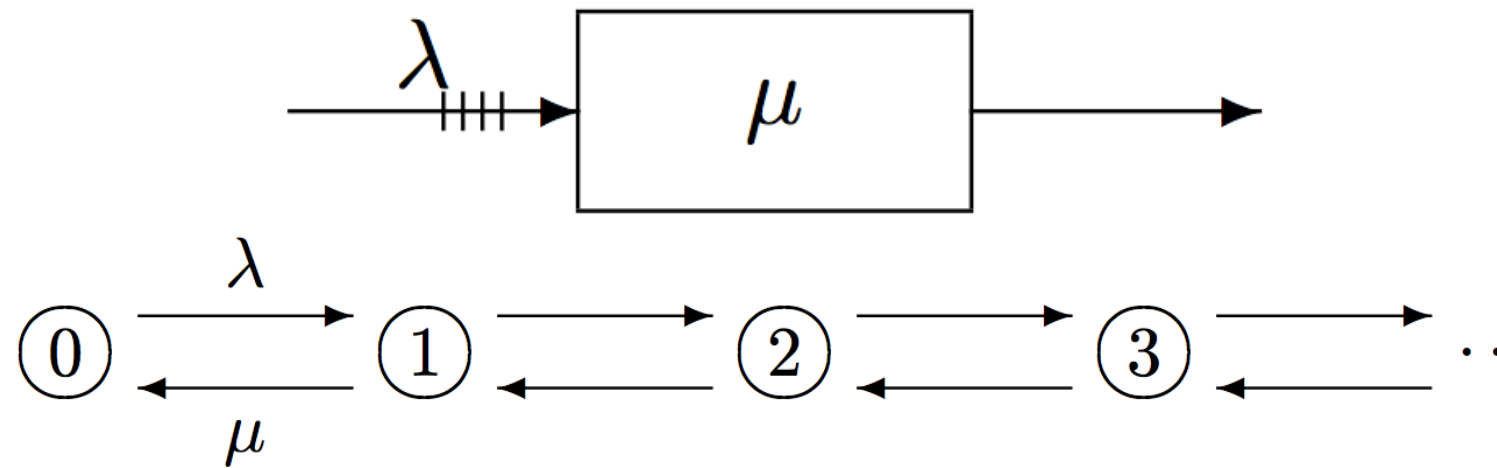
$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ odejde 1 zákazník}) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ přijdou 2 zákazníci}) = (1 - e^{-\lambda h})(1 - e^{-\mu h}) = o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků nezmění}) &= P(X(t+h) = j \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ žádný zákazník nepřijde a žádný neodejde}) = e^{-\lambda h} e^{-\mu h} \\ &= 1 - \lambda h - \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

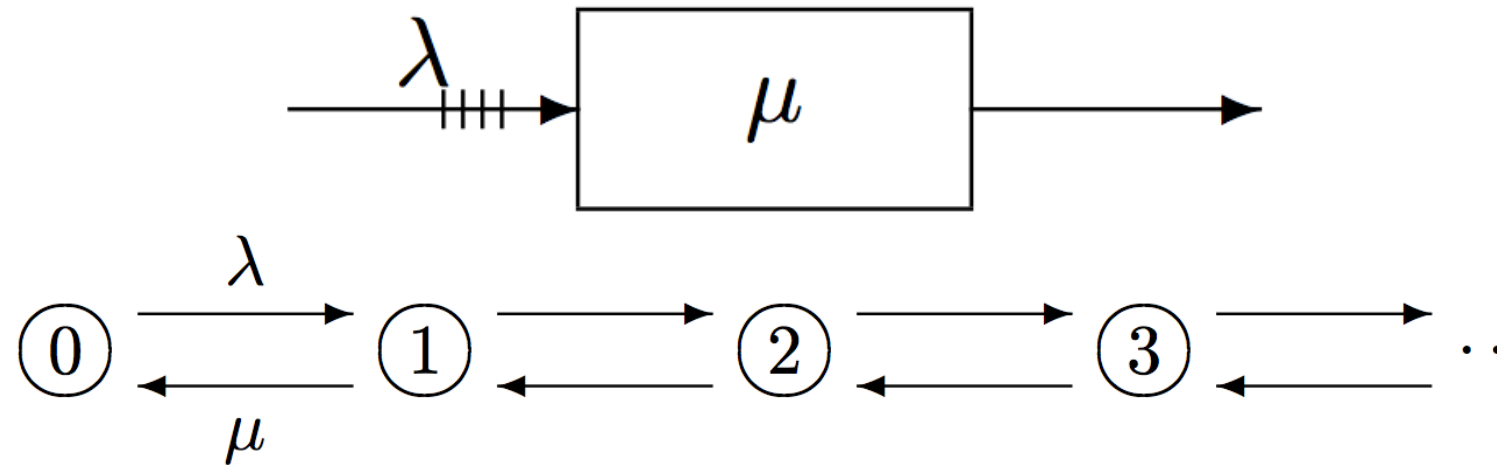
$$\begin{aligned} P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ se počet zákazníků zvýší o 1}) &= P(X(t+h) = j+1 \mid X(t) = j) \\ &= P(\text{v čase } (t, t+h) \text{ jeden zákazník přijde a žádný neodejde}) = (1 - e^{-\lambda h})e^{-\mu h} \\ &= \lambda h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

# System hromadné obsluhy



$p_k(t) = P(\text{v čase } t \text{ je systém ve stavu } k) = P(\text{v čase } t \text{ je v systému } k \text{ zákazníků})$

# System hromadné obsluhy



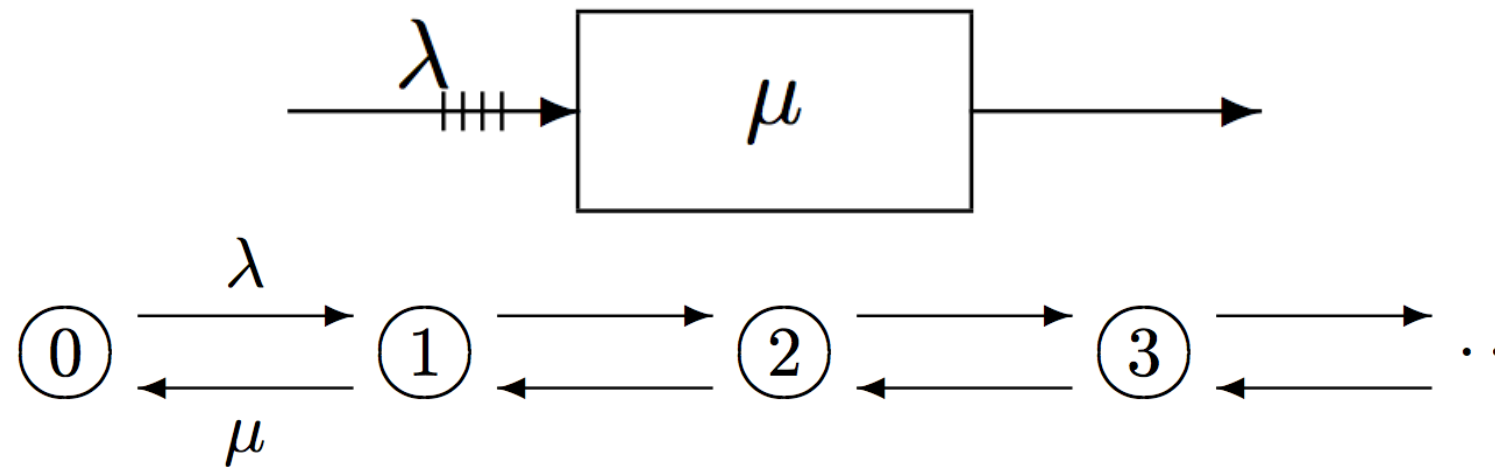
$p_k(t) = \text{P}(\text{v čase } t \text{ je systém ve stavu } k) = \text{P}(\text{v čase } t \text{ je v systému } k \text{ zákazníků})$

---

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h) + p_1 \mu h + o(h)$$

$$p_k(t+h) = p_k(t)(1 - \lambda h - \mu h) + p_{k-1}(t)\lambda h + p_{k+1}\mu h + o(h), \quad k > 0$$

# System hromadné obsluhy



$p_k(t) = P(\text{v čase } t \text{ je systém ve stavu } k) = P(\text{v čase } t \text{ je v systému } k \text{ zákazníků})$

---

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1-\lambda h) + p_1(t)\mu h + o(h)$$

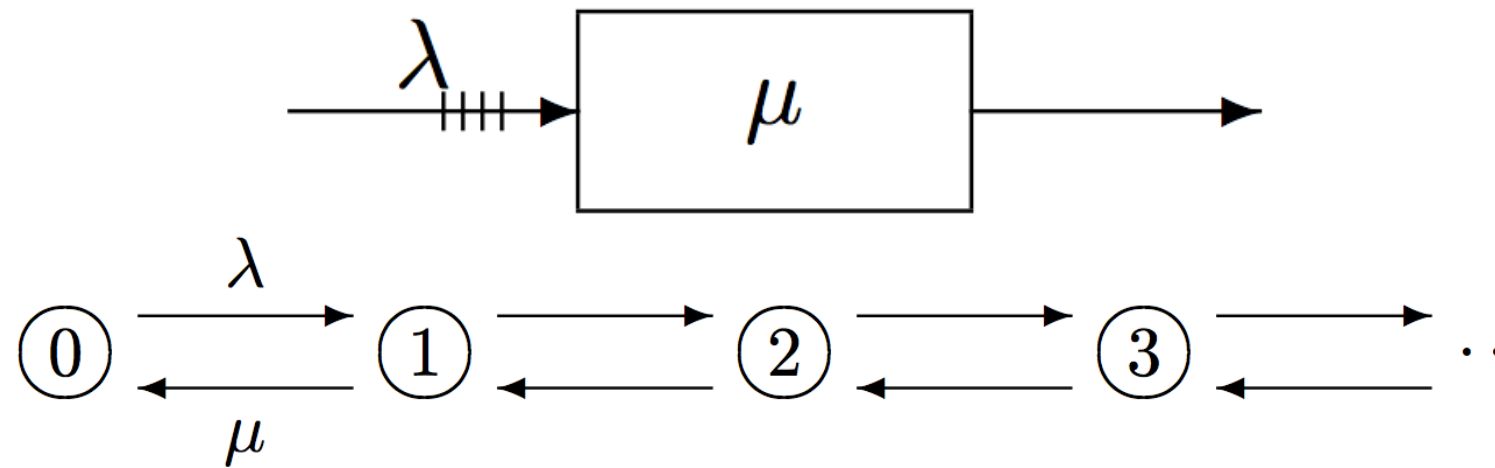
$$p_k(t+h) = p_k(t)(1-\lambda h-\mu h) + p_{k-1}(t)\lambda h + p_{k+1}(t)\mu h + o(h), \quad k > 0$$

---

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$p'_k(t) = -(\lambda + \mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

# System hromadné obsluhy



$p_k(t) = P(\text{v čase } t \text{ je systém ve stavu } k) = P(\text{v čase } t \text{ je v systému } k \text{ zákazníků})$

---

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1-\lambda h) + p_1(t)\mu h + o(h)$$

$$p_k(t+h) = p_k(t)(1-\lambda h-\mu h) + p_{k-1}(t)\lambda h + p_{k+1}(t)\mu h + o(h), \quad k > 0$$

---

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$p'_k(t) = -(\lambda + \mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

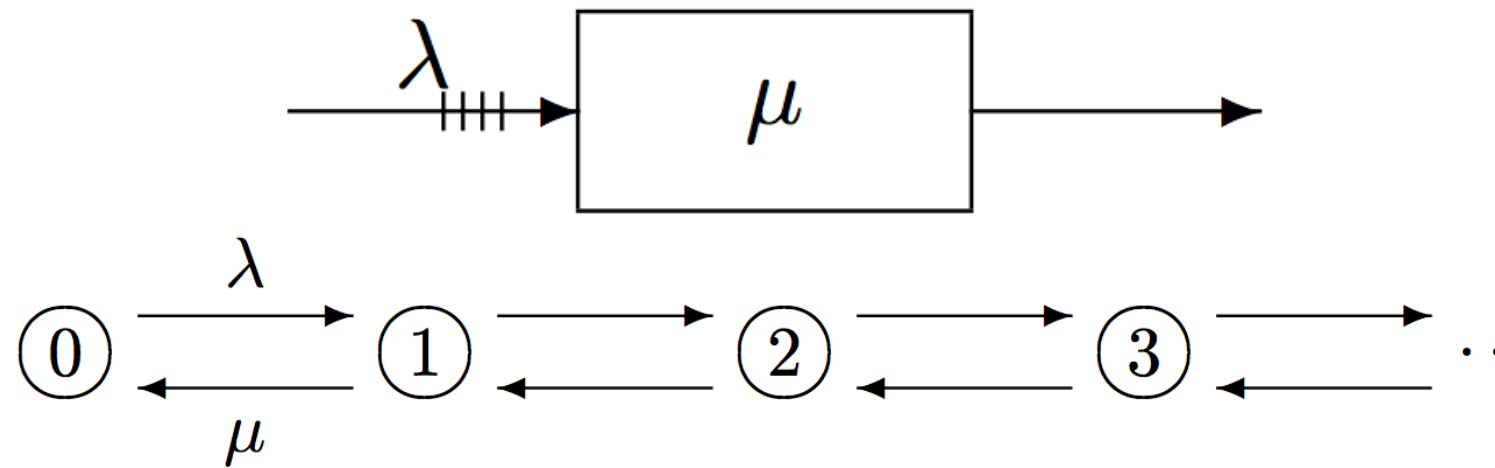
---

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

# System hromadné obsluhy



$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

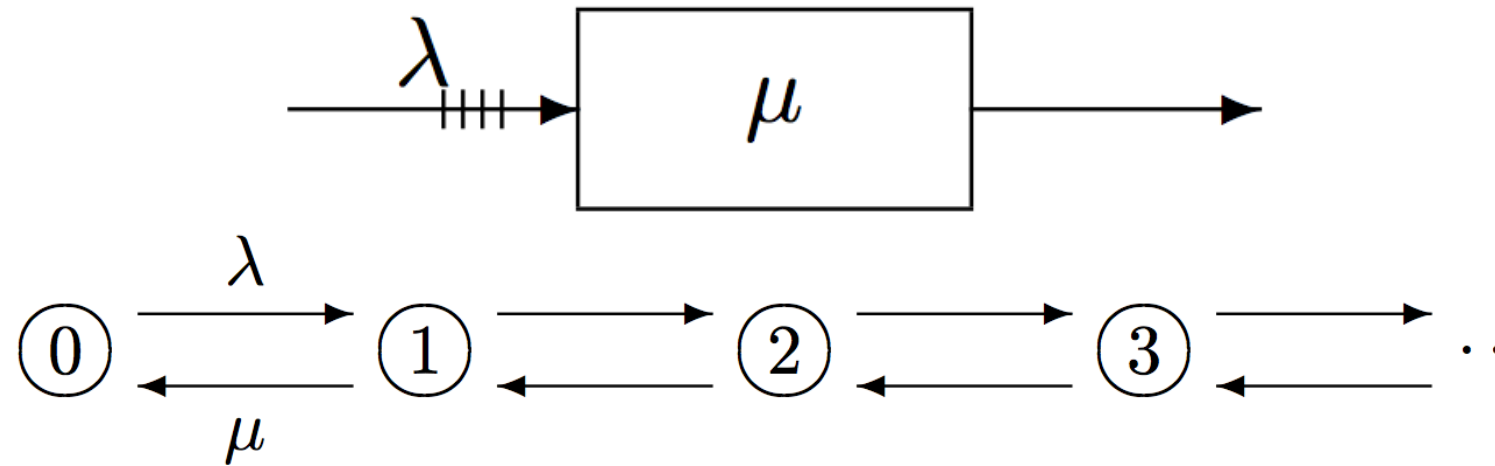
$$0 = -(\lambda + \mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

---

$$z_k = -\lambda p_k + \mu p_{k+1}$$

# System hromadné obsluhy



$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

---

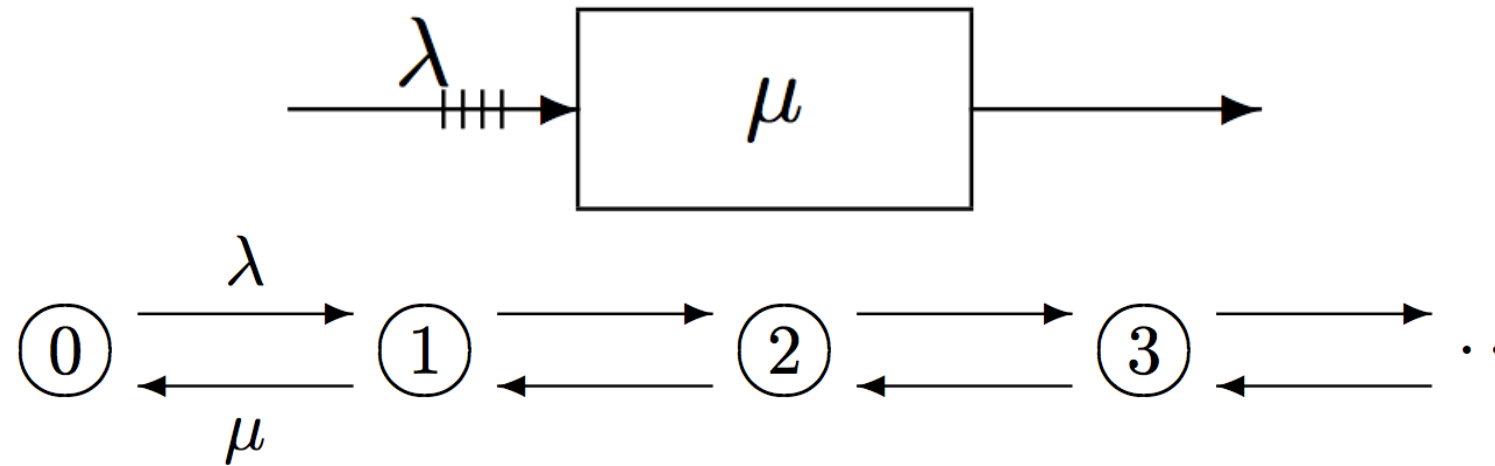
$$z_k = -\lambda p_k + \mu p_{k+1}$$

$$0 = z_0$$

$$0 = z_{k-1} + z_k, \quad k = 1, 2, \dots$$



# System hromadné obsluhy



$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

$$z_k = -\lambda p_k + \mu p_{k+1}$$

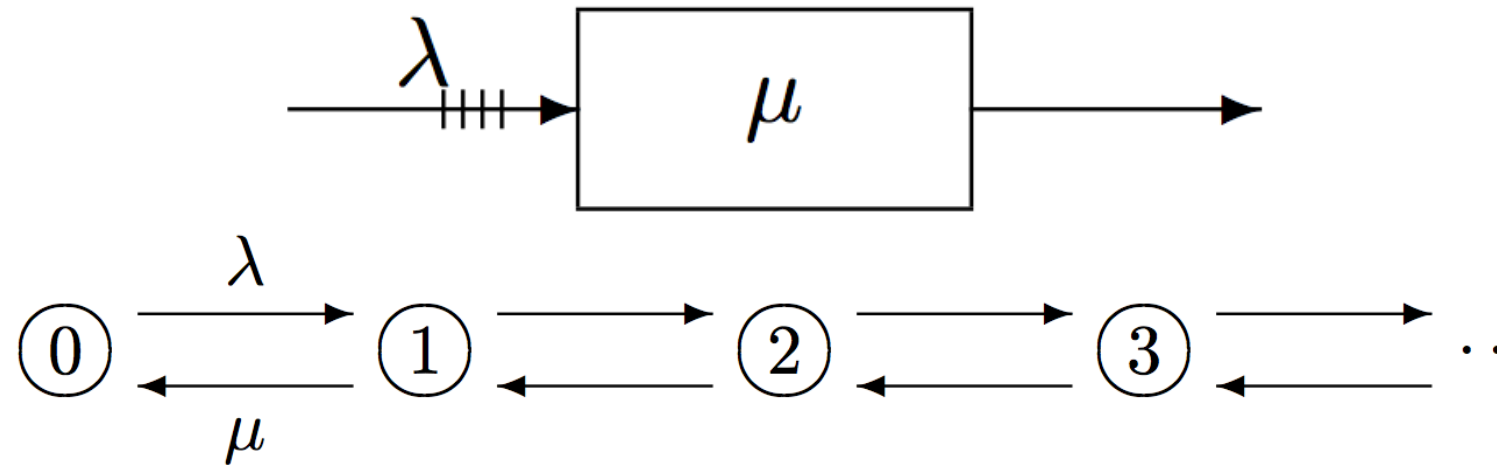
$$0 = z_0$$

$$0 = z_{k-1} + z_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\lambda p_k = \mu p_{k+1}$$



# System hromadné obsluhy



$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

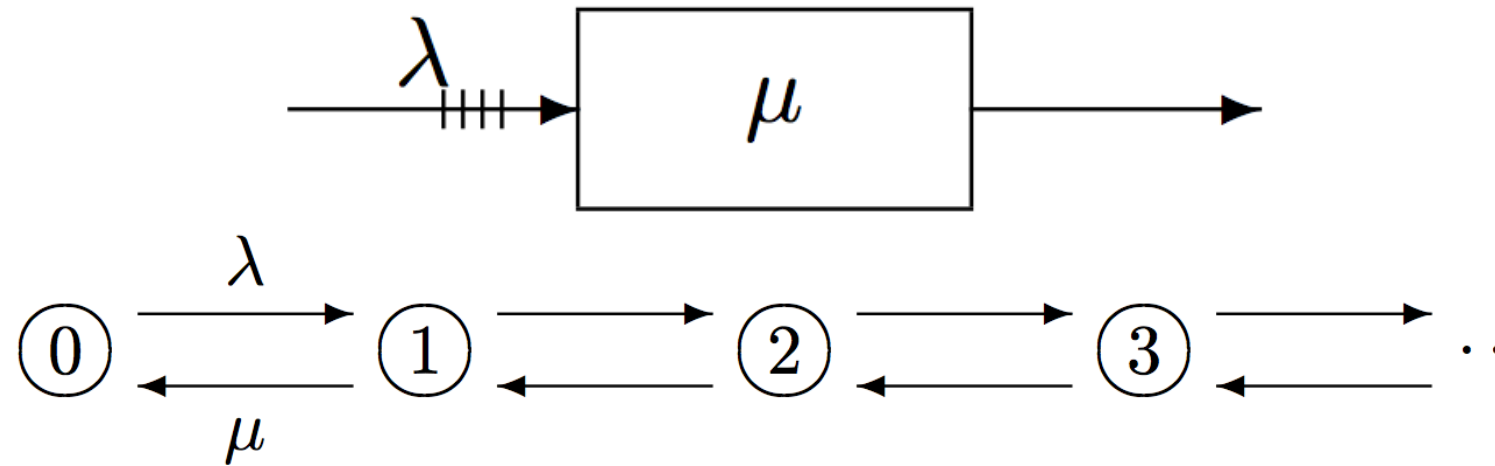
$$z_k = -\lambda p_k + \mu p_{k+1}$$

$$0 = z_0$$

$$0 = z_{k-1} + z_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\lambda p_k = \mu p_{k+1} \Rightarrow \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0$$

# System hromadné obsluhy



$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

$$z_k = -\lambda p_k + \mu p_{k+1}$$

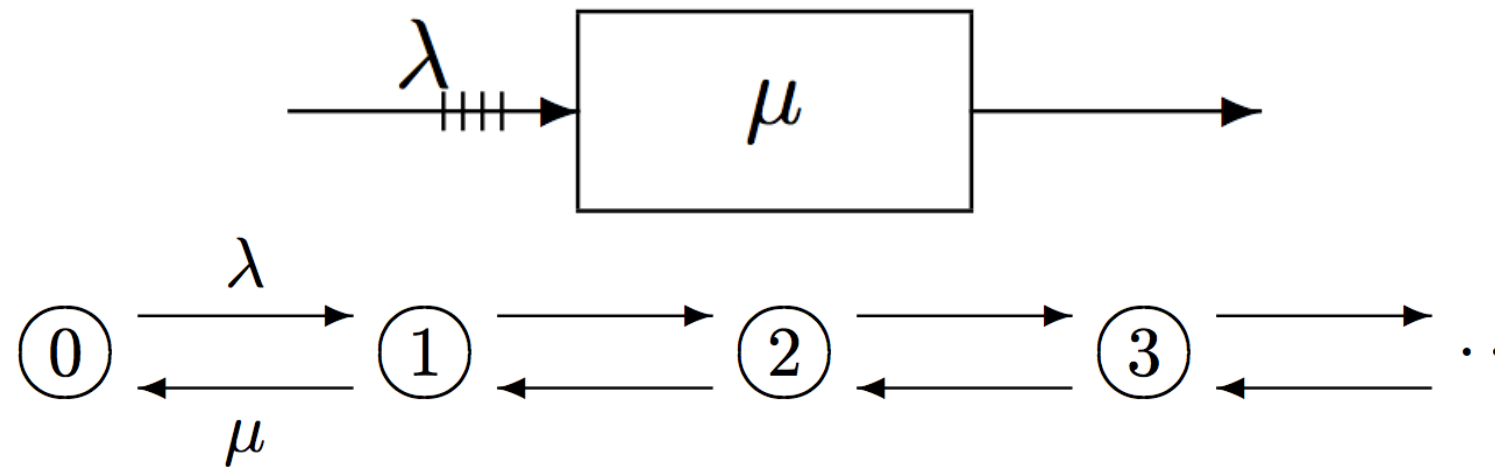
$$0 = z_0$$

$$0 = z_{k-1} + z_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\lambda p_k = \mu p_{k+1} \Rightarrow \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{p_0}{1 - \rho} = 1 \Rightarrow p_0 = 1 - \rho$$

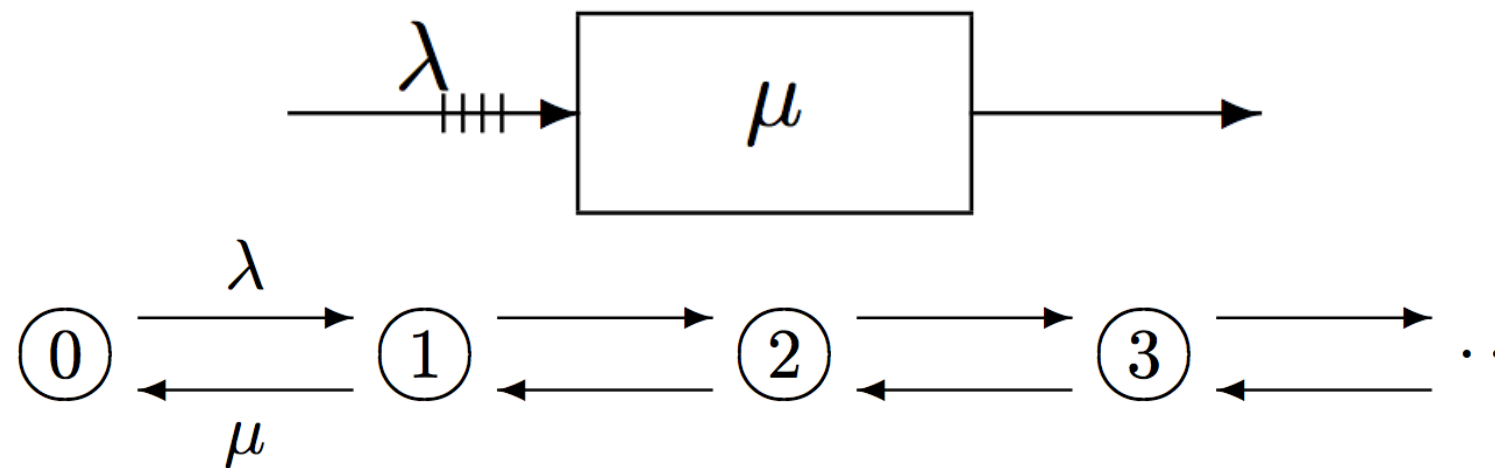
# System hromadné obsluhy



$$p_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\rho = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \text{ - intenzita obsluhy}$$

# System hromadné obsluhy

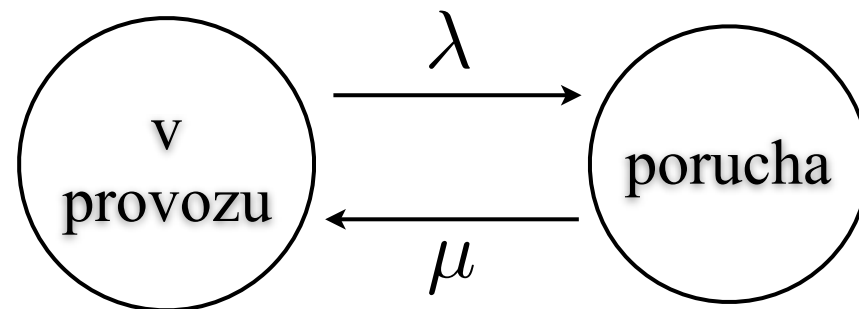


$$p_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

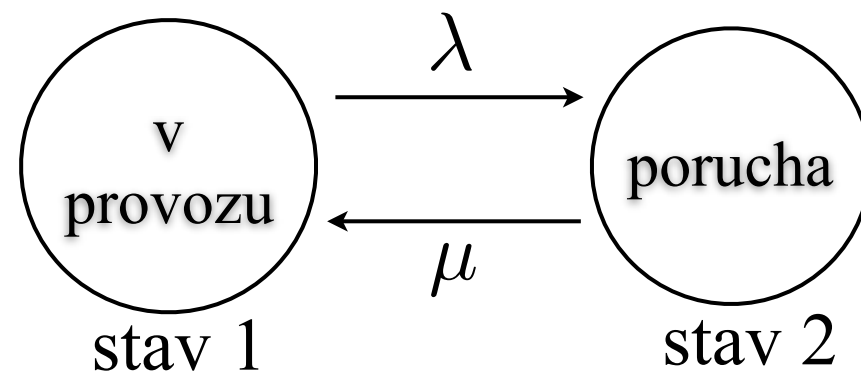
$$\rho = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \text{ - intenzita obsluhy}$$

- Otázky: 1. Jaký je průměrný počet zákazníků v systému?  
2. Jaký je průměrný počet zákazníků ve frontě?

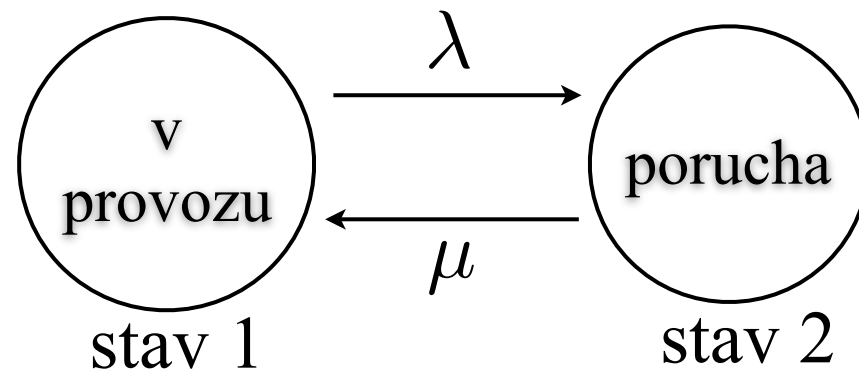
# Nespolehlivý systém



# Nespolehlivý systém



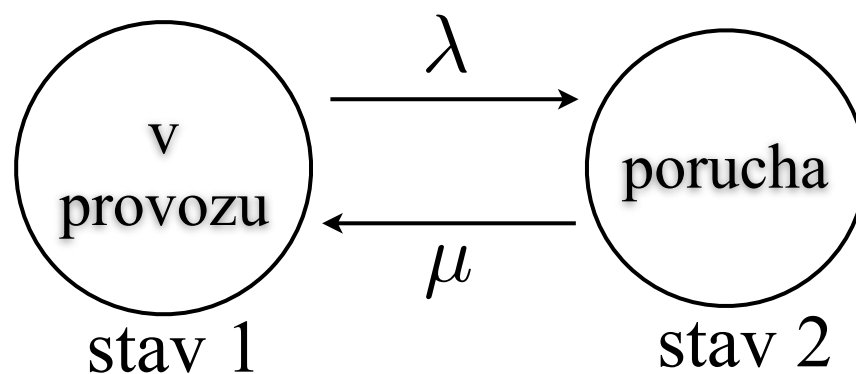
# Nespolehlivý systém



$$p_1(t + \Delta) = p_1(t)(1 - \lambda\Delta) + p_2(t)\mu\Delta$$



# Nespolehlivý systém

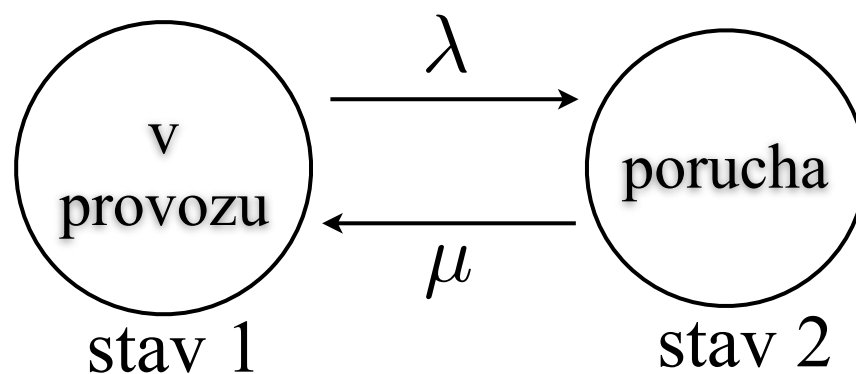


$$p_1(t + \Delta) = p_1(t)(1 - \lambda\Delta) + p_2(t)\mu\Delta$$

$$p_2(t + \Delta) = p_1(t)\lambda\Delta + p_2(t)(1 - \mu\Delta)$$



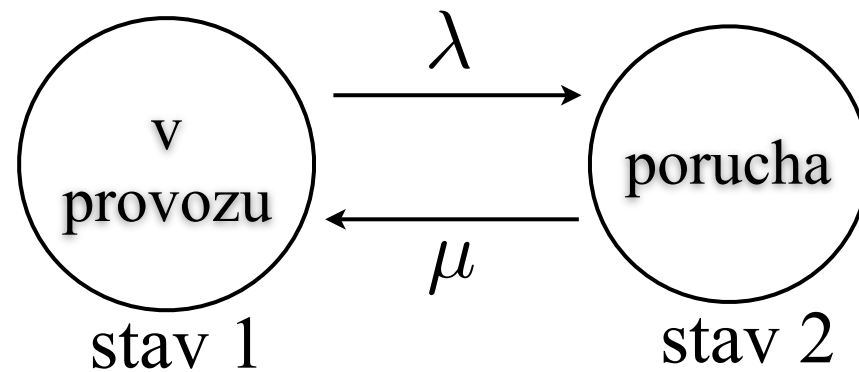
# Nespolehlivý systém



$$p_1(t + \Delta) = p_1(t)(1 - \lambda\Delta) + p_2(t)\mu\Delta$$
$$p_2(t + \Delta) = p_1(t)\lambda\Delta + p_2(t)(1 - \mu\Delta)$$

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0$$

# Nespolehlivý systém



$$p_1(t + \Delta) = p_1(t)(1 - \lambda\Delta) + p_2(t)\mu\Delta$$
$$p_2(t + \Delta) = p_1(t)\lambda\Delta + p_2(t)(1 - \mu\Delta)$$

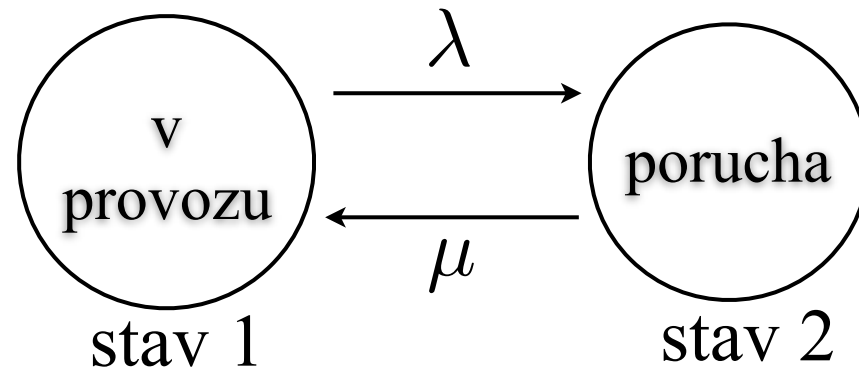
$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t)$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \mu p_2(t)$$

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0$$

# Nespolehlivý systém



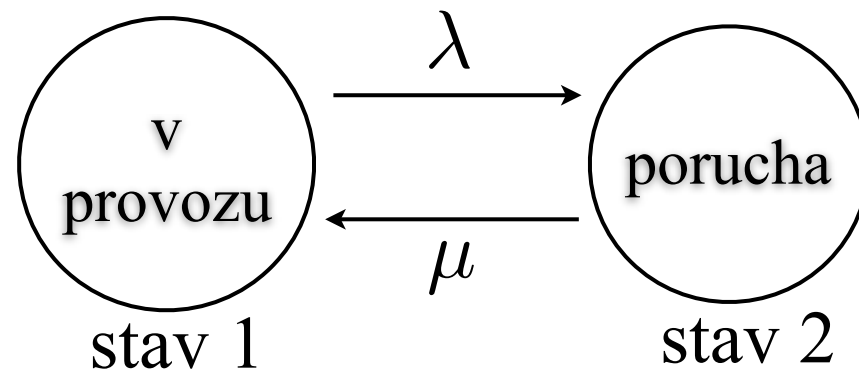
$$p_1(t + \Delta) = p_1(t)(1 - \lambda\Delta) + p_2(t)\mu\Delta$$
$$p_2(t + \Delta) = p_1(t)\lambda\Delta + p_2(t)(1 - \mu\Delta)$$

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t)$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \mu p_2(t)$$
$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0$$

$$p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$
$$p_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t})$$

# Nespolehlivý systém



$$p_1(t + \Delta) = p_1(t)(1 - \lambda\Delta) + p_2(t)\mu\Delta$$
$$p_2(t + \Delta) = p_1(t)\lambda\Delta + p_2(t)(1 - \mu\Delta)$$

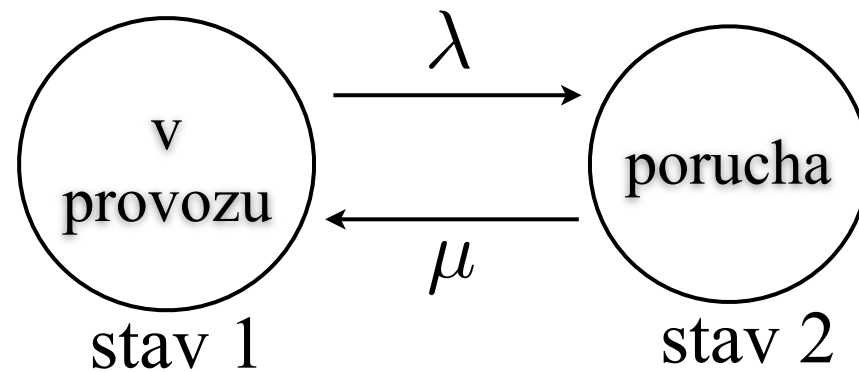
$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t)$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \mu p_2(t)$$
$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0$$

$$p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$
$$p_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

# Nespolehlivý systém



$$p_1(t + \Delta) = p_1(t)(1 - \lambda\Delta) + p_2(t)\mu\Delta$$
$$p_2(t + \Delta) = p_1(t)\lambda\Delta + p_2(t)(1 - \mu\Delta)$$

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t)$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \mu p_2(t)$$
$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0$$

$$p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$
$$p_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

*limitní pohotovost*

*limitní nepohotovost*

# Weibullovo rozdělení

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta}}, \quad t \geq 0$$

# Weibullovo rozdělení

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta}}, \quad t \geq 0$$

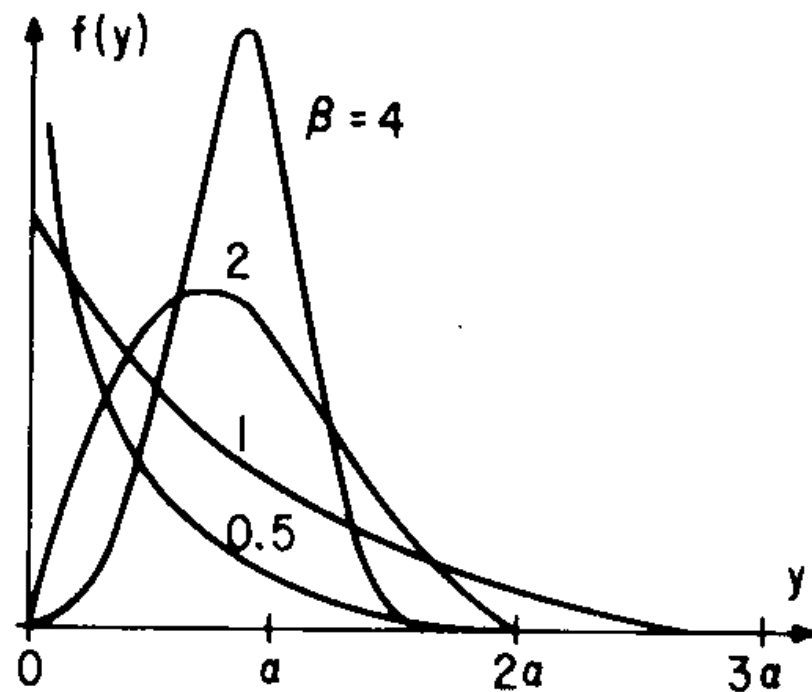
$$f(t) = \left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta-1} \frac{\beta}{\delta} e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta}}, \quad t \geq 0$$



# Weibullovo rozdělení

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta}}, \quad t \geq 0$$

$$f(t) = \left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta-1} \frac{\beta}{\delta} e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta}}, \quad t \geq 0$$

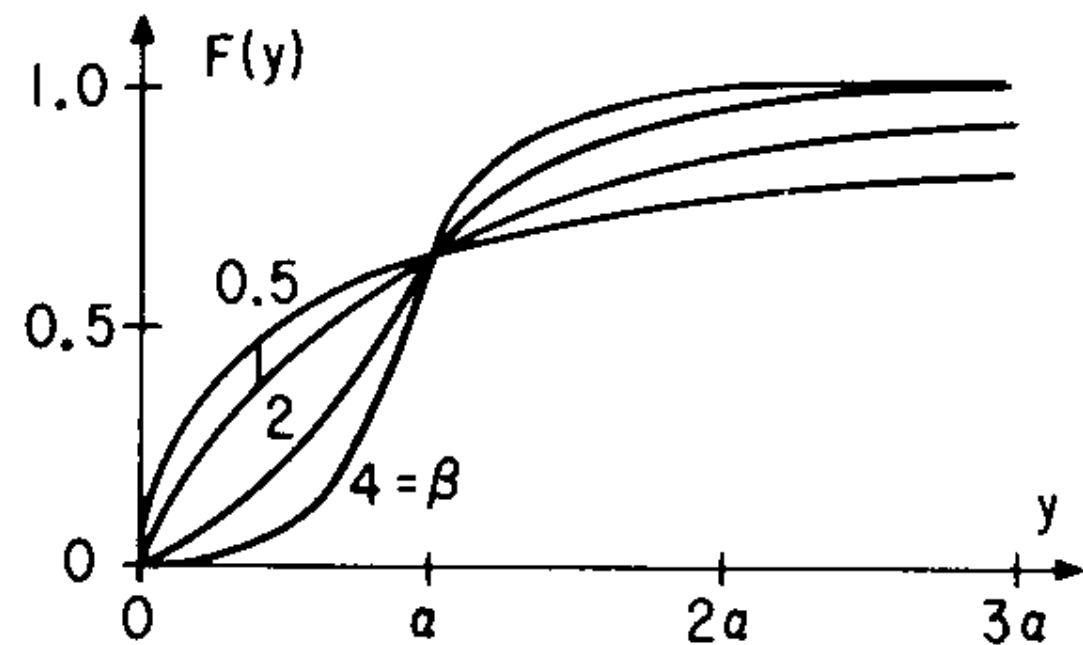
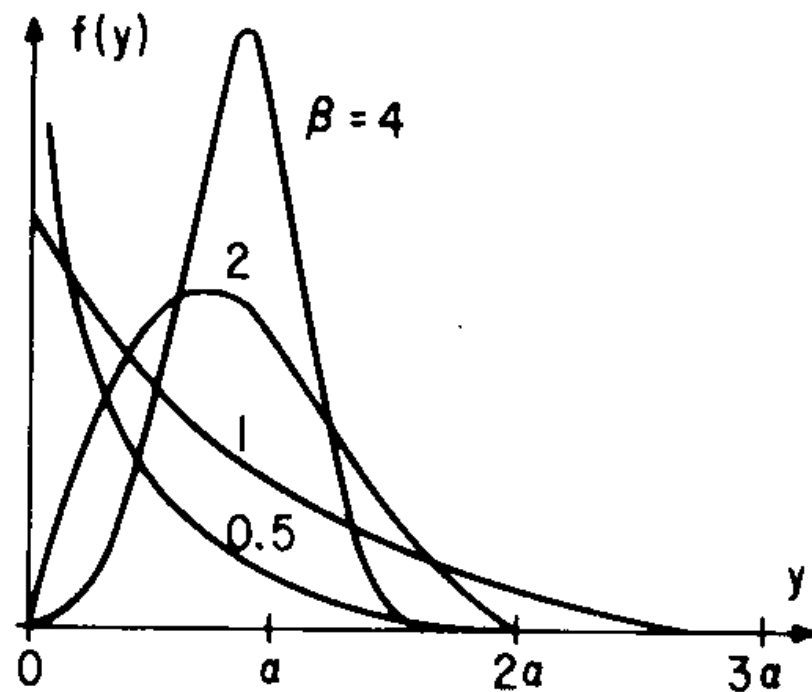




# Weibullovo rozdělení

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^\beta}, \quad t \geq 0$$

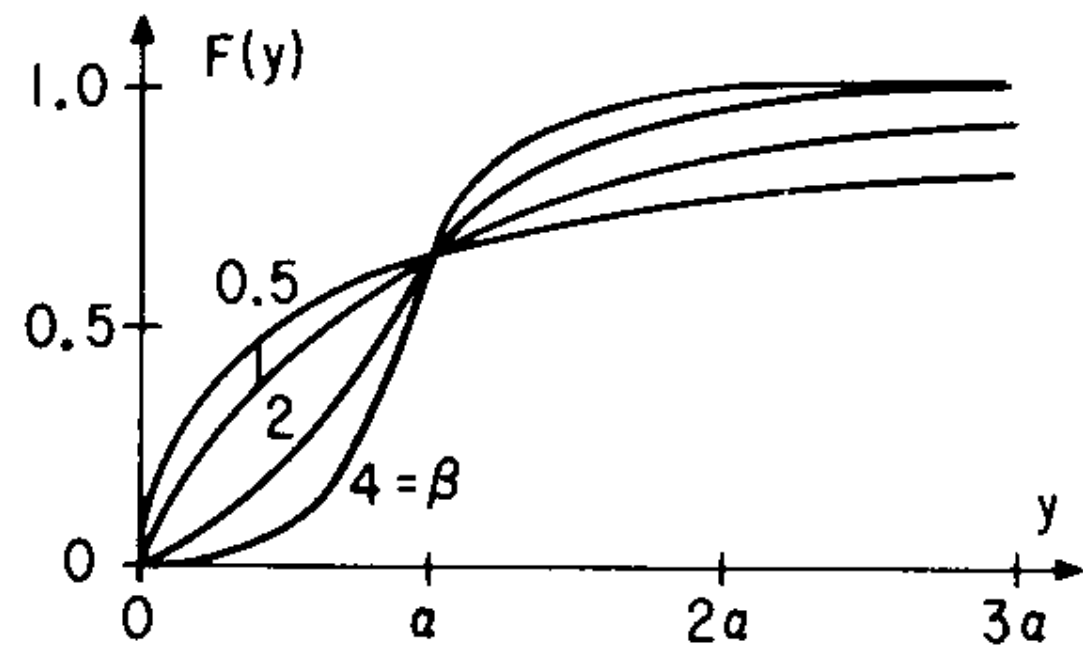
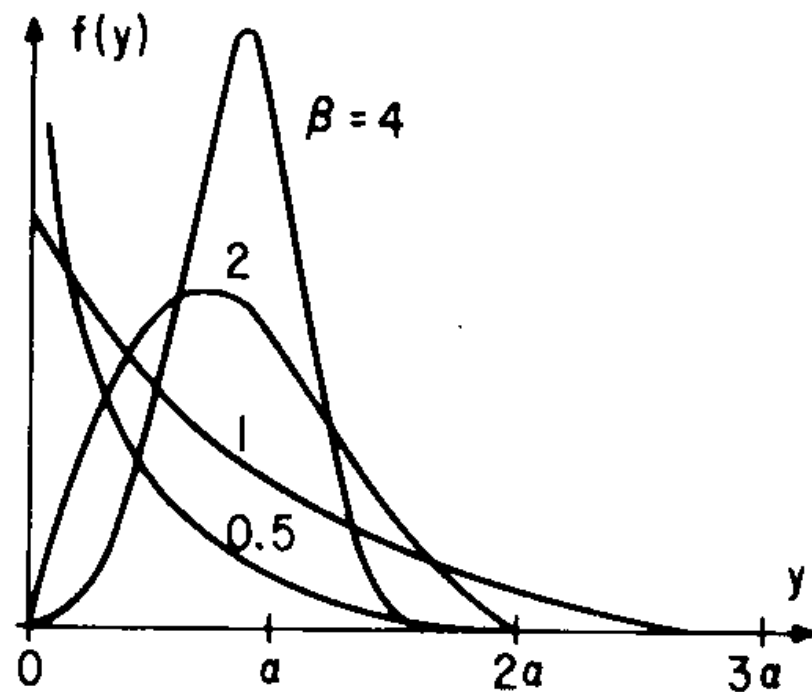
$$f(t) = \left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta-1} \frac{\beta}{\delta} e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^\beta}, \quad t \geq 0$$



# Weibullovo rozdělení

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^\beta}, \quad t \geq 0$$

$$f(t) = \left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta-1} \frac{\beta}{\delta} e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^\beta}, \quad t \geq 0$$



$$E(T) = \delta \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right), \quad Var(T) = \delta^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[ \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$$

# Intenzita poruchy

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t \in R$$

# Intenzita poruchy

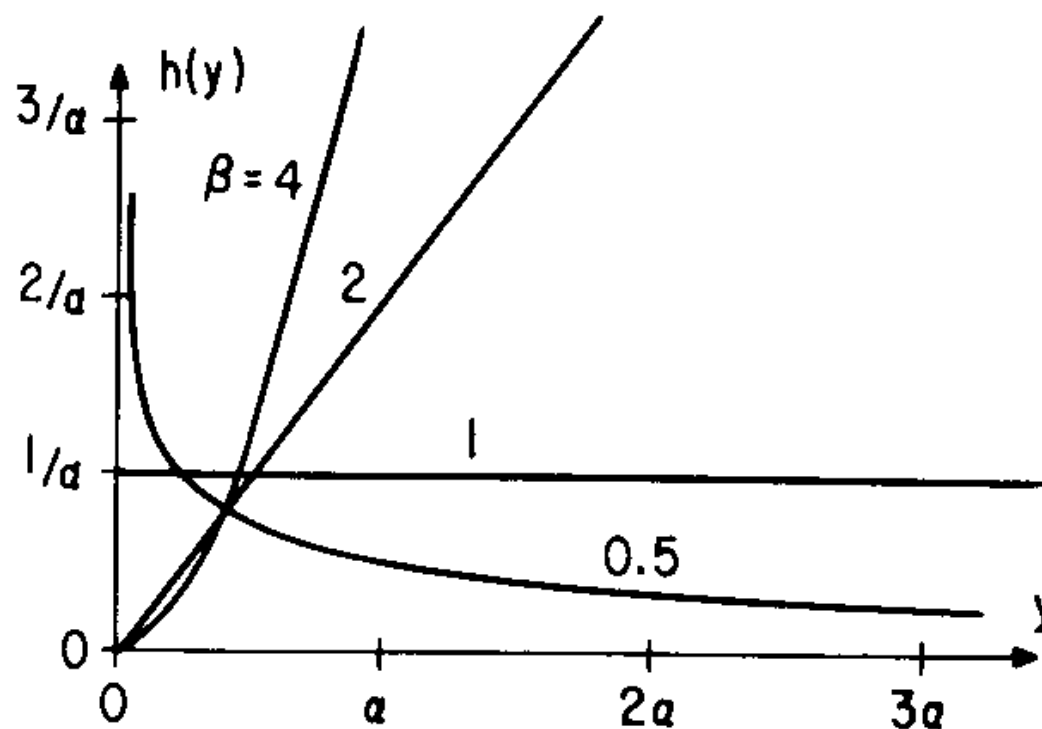
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t \in R$$

Pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v čase  $t + \Delta$ , když víme, že se do doby  $t$  neporouchalo (pro hodně malá  $\Delta$ ) je rovna přibližně  $\Delta \lambda(t)$ .

# Intenzita poruchy

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t \in R$$

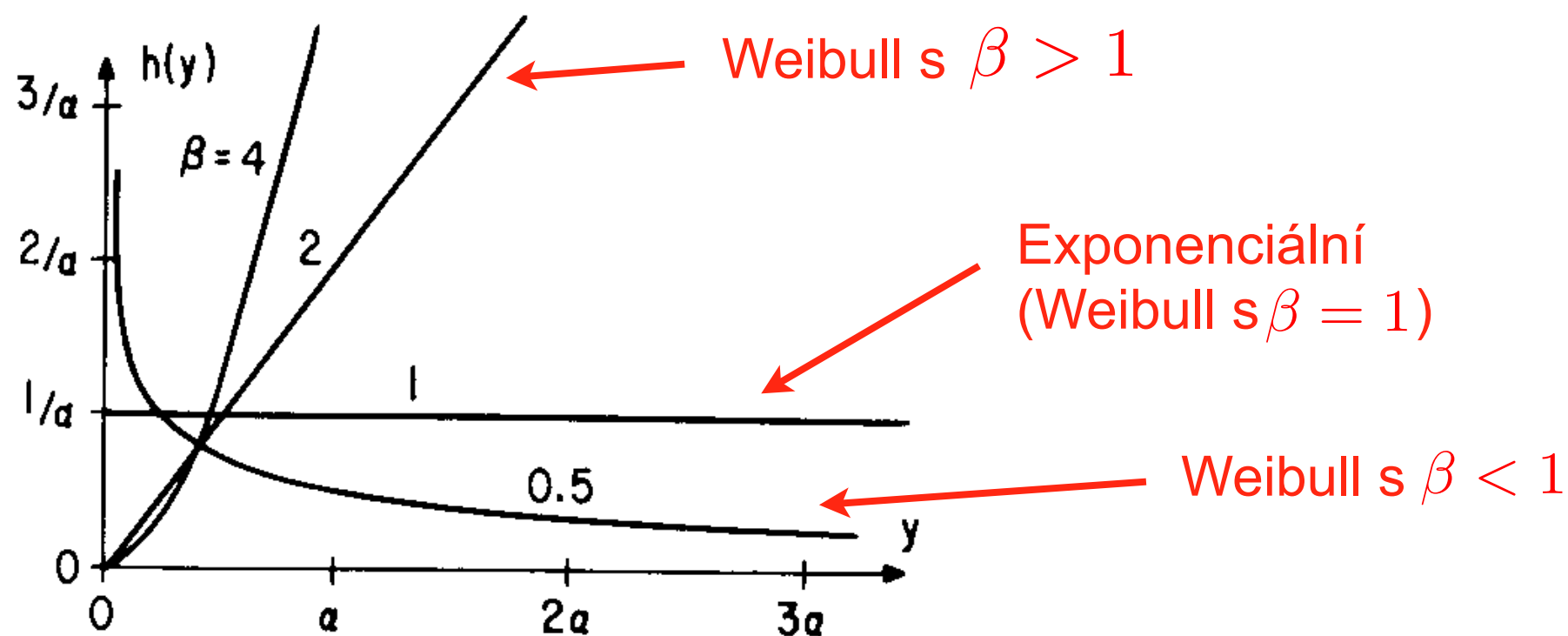
Pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v čase  $t + \Delta$ , když víme, že se do doby  $t$  neporouchalo (pro hodně malá  $\Delta$ ) je rovna přibližně  $\Delta \lambda(t)$ .



# Intenzita poruchy

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t \in R$$

Pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v čase  $t + \Delta$ , když víme, že se do doby  $t$  neporouchalo (pro hodně malá  $\Delta$ ) je rovna přibližně  $\Delta \lambda(t)$ .



# Logaritmicko-normální rozdělení

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$X = \exp(Y)$$

$$X \sim LN(\mu, \sigma^2)$$



# Logaritmicko-normální rozdělení

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad \text{Var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (\exp \sigma^2 - 1)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$X = \exp(Y)$$

$$X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$$



# Logaritmicko-normální rozdělení

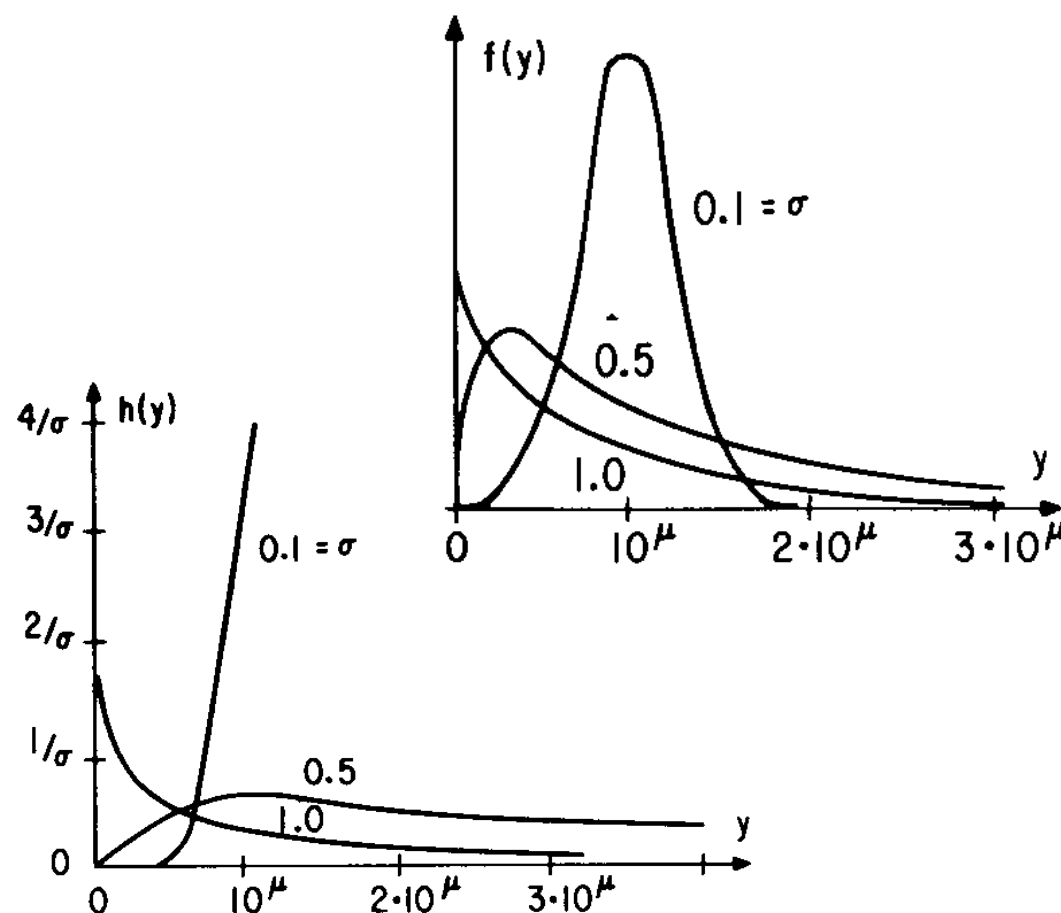
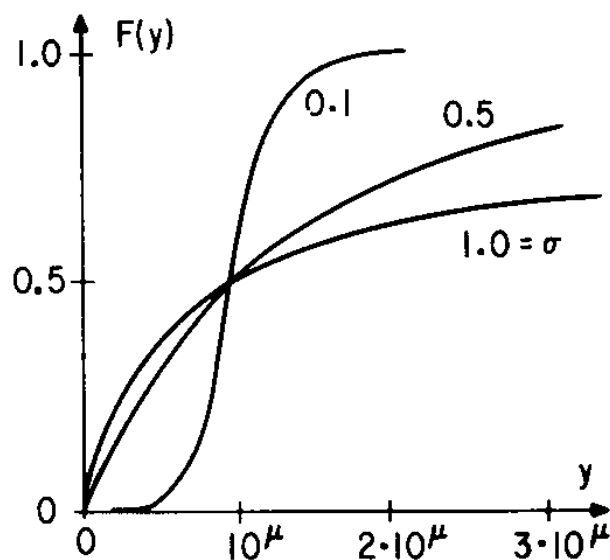
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq 0 \end{cases}$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$X = \exp(Y)$$

$$X \sim LN(\mu, \sigma^2)$$

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad \text{Var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (\exp \sigma^2 - 1)$$



# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

1. S jakou pravděpodobností se ventilátor porouchá během prvních 100 hodin?

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

1. S jakou pravděpodobností se ventilátor porouchá během prvních 100 hodin?

$$P(X \leq 100) = \int_0^{100} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = 1 - e^{-\frac{100}{28700}} = 0,003478$$

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

1. S jakou pravděpodobností se ventilátor porouchá během prvních 100 hodin?

$$P(X \leq 100) = \int_0^{100} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = 1 - e^{-\frac{100}{28700}} = 0,003478$$

2. Jaká je pravděpodobnost, že ventilátor vydrží bez poruchy záruční dobu 8.000 hodin?

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

1. S jakou pravděpodobností se ventilátor porouchá během prvních 100 hodin?

$$P(X \leq 100) = \int_0^{100} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = 1 - e^{-\frac{100}{28700}} = 0,003478$$

2. Jaká je pravděpodobnost, že ventilátor vydrží bez poruchy záruční dobu 8.000 hodin?

$$P(X > 8000) = \int_{8000}^{\infty} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = e^{-\frac{8000}{28700}} = 0,76$$

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

1. S jakou pravděpodobností se ventilátor porouchá během prvních 100 hodin?

$$P(X \leq 100) = \int_0^{100} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = 1 - e^{-\frac{100}{28700}} = 0,003478$$

2. Jaká je pravděpodobnost, že ventilátor vydrží bez poruchy záruční dobu 8.000 hodin?

$$P(X > 8000) = \int_{8000}^{\infty} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = e^{-\frac{8000}{28700}} = 0,76$$

3. Jaká je intenzita poruchy?



# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

1. S jakou pravděpodobností se ventilátor porouchá během prvních 100 hodin?

$$P(X \leq 100) = \int_0^{100} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = 1 - e^{-\frac{100}{28700}} = 0,003478$$

2. Jaká je pravděpodobnost, že ventilátor vydrží bez poruchy záruční dobu 8.000 hodin?

$$P(X > 8000) = \int_{8000}^{\infty} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = e^{-\frac{8000}{28700}} = 0,76$$

3. Jaká je intenzita poruchy?

Intenzita poruchy je potom  $\lambda = 1/\theta = 1/28.700 = 34,8$  ppm.



# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

1. S jakou pravděpodobností se ventilátor porouchá během prvních 100 hodin?

$$P(X \leq 100) = \int_0^{100} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = 1 - e^{-\frac{100}{28700}} = 0,003478$$

2. Jaká je pravděpodobnost, že ventilátor vydrží bez poruchy záruční dobu 8.000 hodin?

$$P(X > 8000) = \int_{8000}^{\infty} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28700}\right) dx = e^{-\frac{8000}{28700}} = 0,76$$

3. Jaká je intenzita poruchy?

Intenzita poruchy je potom  $\lambda = 1/\theta = 1/28.700 = 34,8$  ppm.

$$P(X \leq 100) \cong \lambda \cdot 100 = 100 \cdot 0,00003484 = 0,003484$$

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

4. Jaká je „typická“ délka života ventilátoru?

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

4. Jaká je „typická“ délka života ventilátoru?

$$\text{median} = \tilde{x}_{0,5} = -28.700 \ln(1 - 0.5) = 19.900$$

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

4. Jaká je „typická“ délka života ventilátoru?

$$\text{median} = \tilde{x}_{0,5} = -28.700 \ln(1 - 0.5) = 19.900$$

5. Jaká je střední doba života ventilátoru?

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

4. Jaká je „typická“ délka života ventilátoru?

$$\text{median} = \tilde{x}_{0,5} = -28.700 \ln(1 - 0.5) = 19.900$$

5. Jaká je střední doba života ventilátoru?

$$E(X) = \theta = 28.700$$

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

4. Jaká je „typická“ délka života ventilátoru?

$$\text{median} = \tilde{x}_{0,5} = -28.700 \ln(1 - 0.5) = 19.900$$

5. Jaká je střední doba života ventilátoru?

$$E(X) = \theta = 28.700$$

6. Do jaké doby se porouchá v průměru 90% všech ventilátorů?

# Charakteristiky doby života

**Příklad:** Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat pomocí exponenciálního rozdělení se střední dobou  $\theta = 28.700$  hod.

4. Jaká je „typická“ délka života ventilátoru?

$$\text{median} = \tilde{x}_{0,5} = -28.700 \ln(1 - 0.5) = 19.900$$

5. Jaká je střední doba života ventilátoru?

$$E(X) = \theta = 28.700$$

6. Do jaké doby se porouchá v průměru 90% všech ventilátorů?

$$\tilde{x}_{0,9} = -28.700 \ln(1 - 0.9) = 66.084$$