

Pravděpodobnost a matematická statistika

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

dohnal@nipax.cz



IV. Normální rozdělení

<https://sms.nipax.cz/pas>

Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

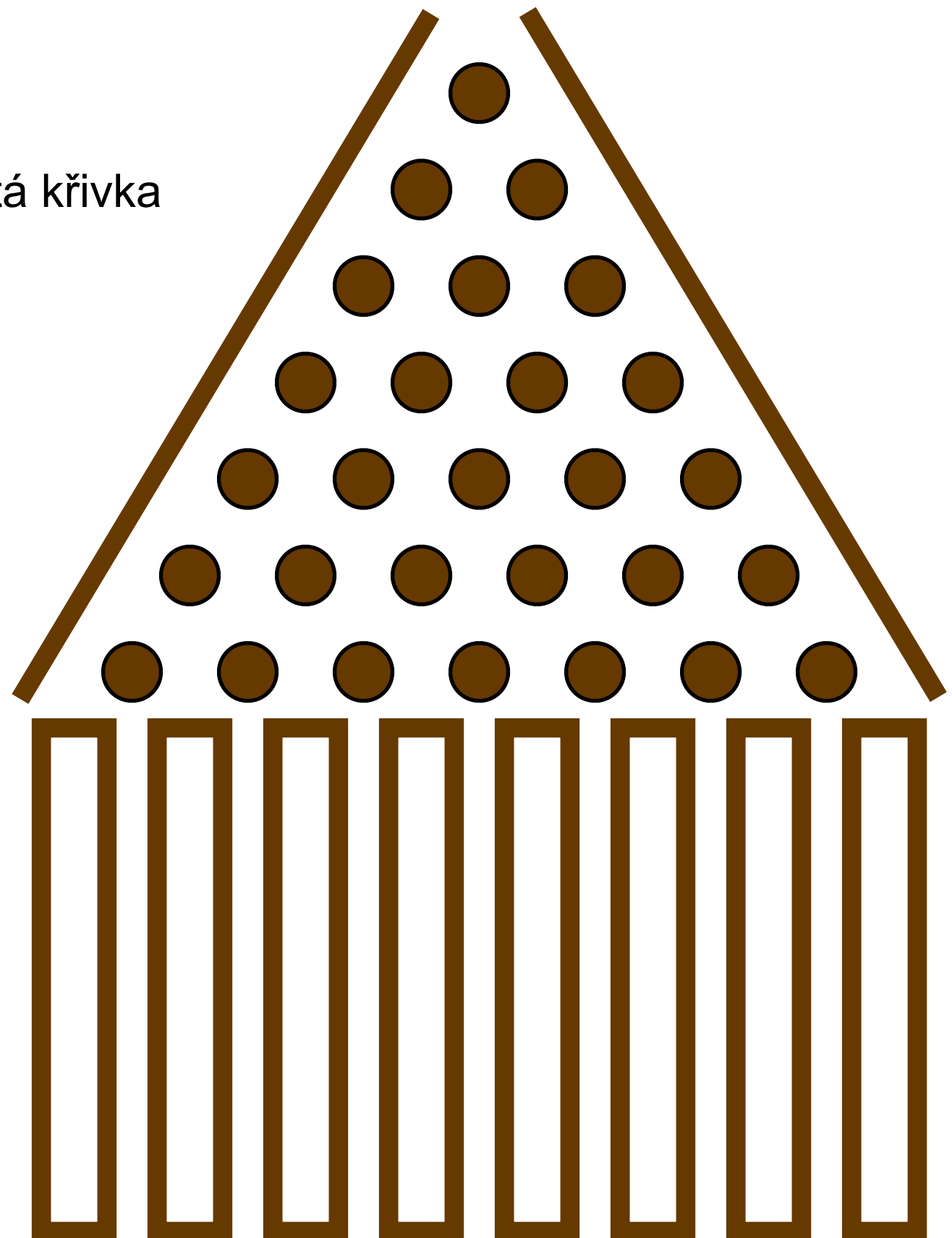
Galtonova deska:

Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska:

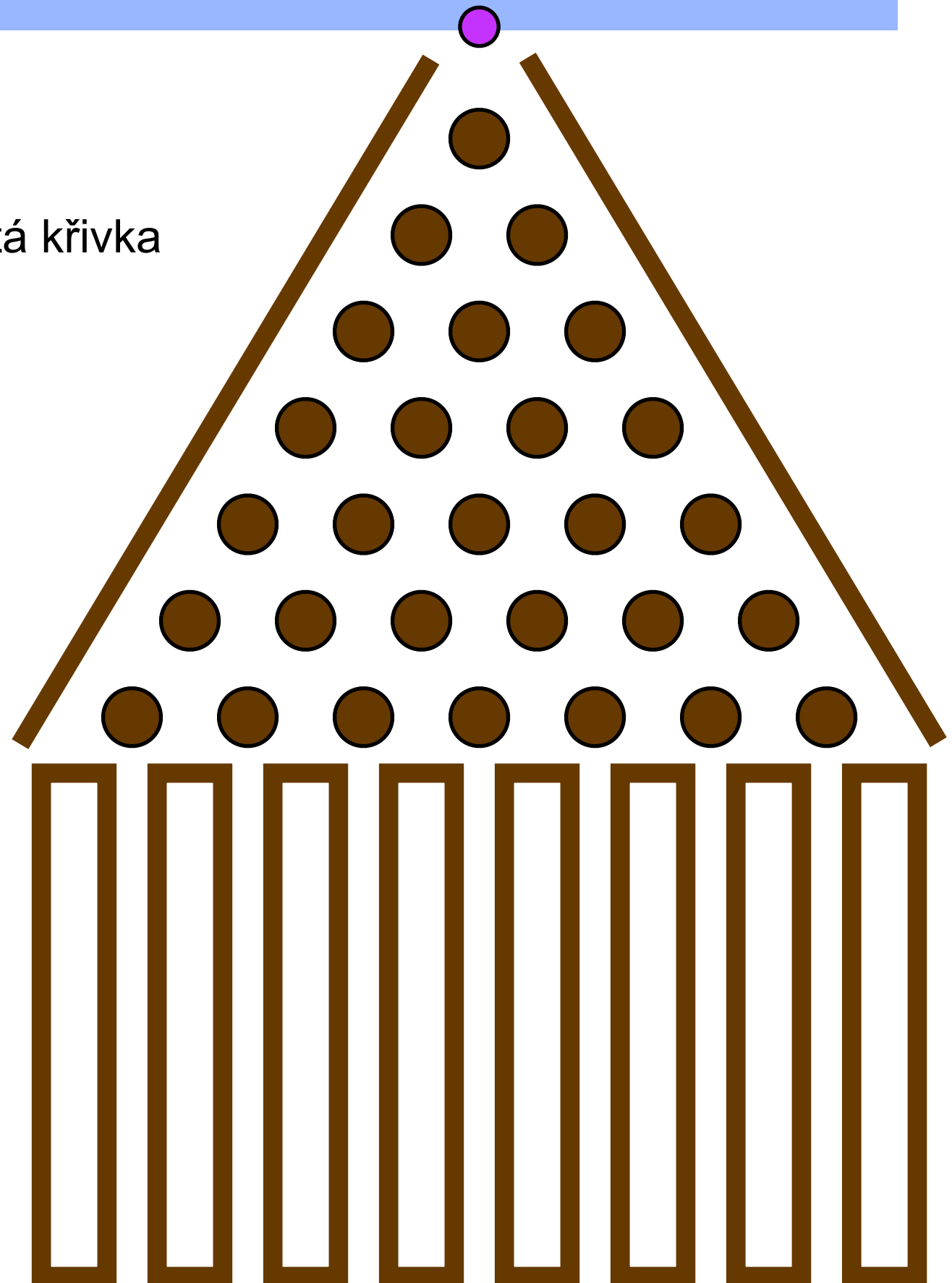


Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska:

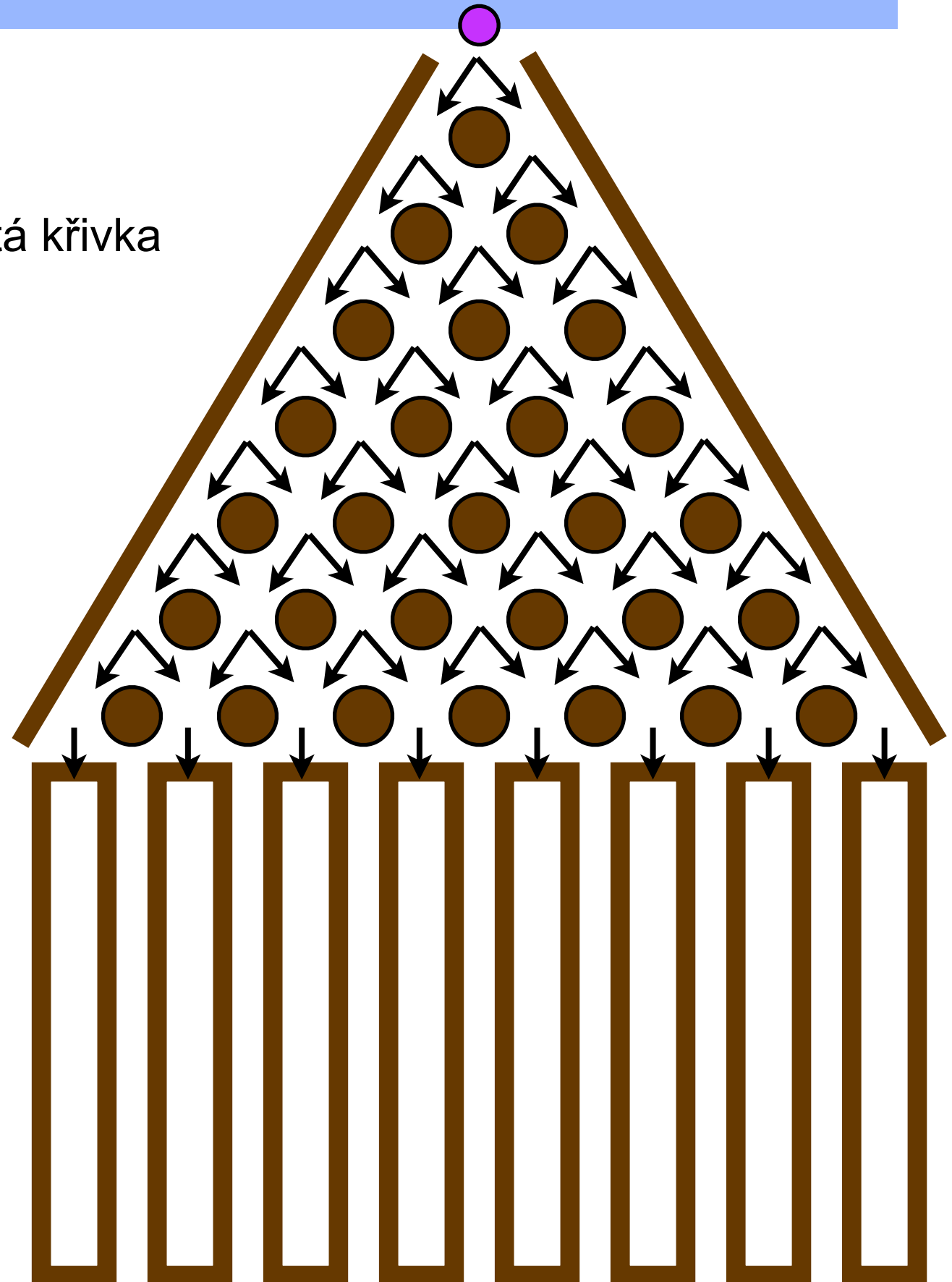


Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska:

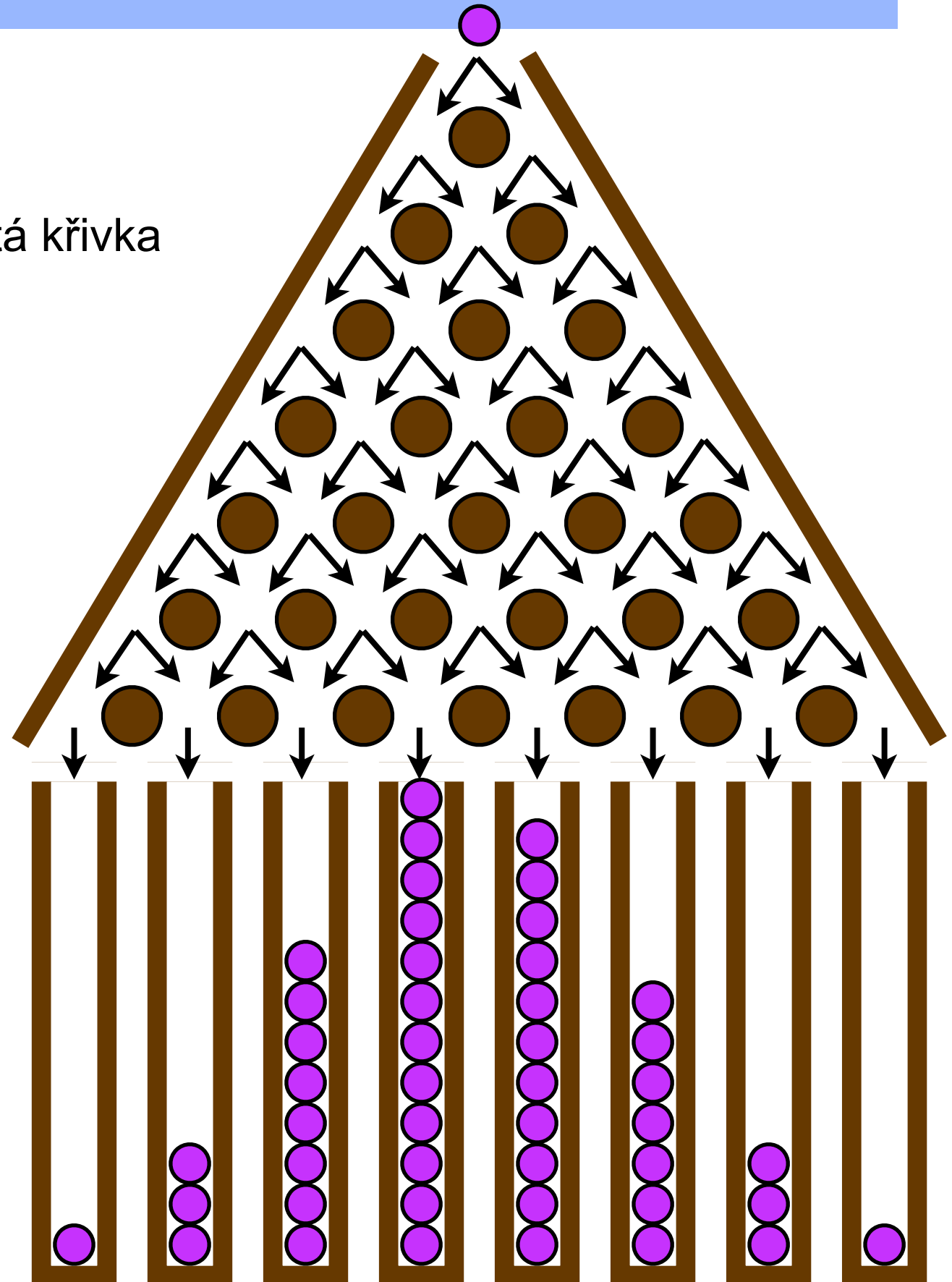


Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska:

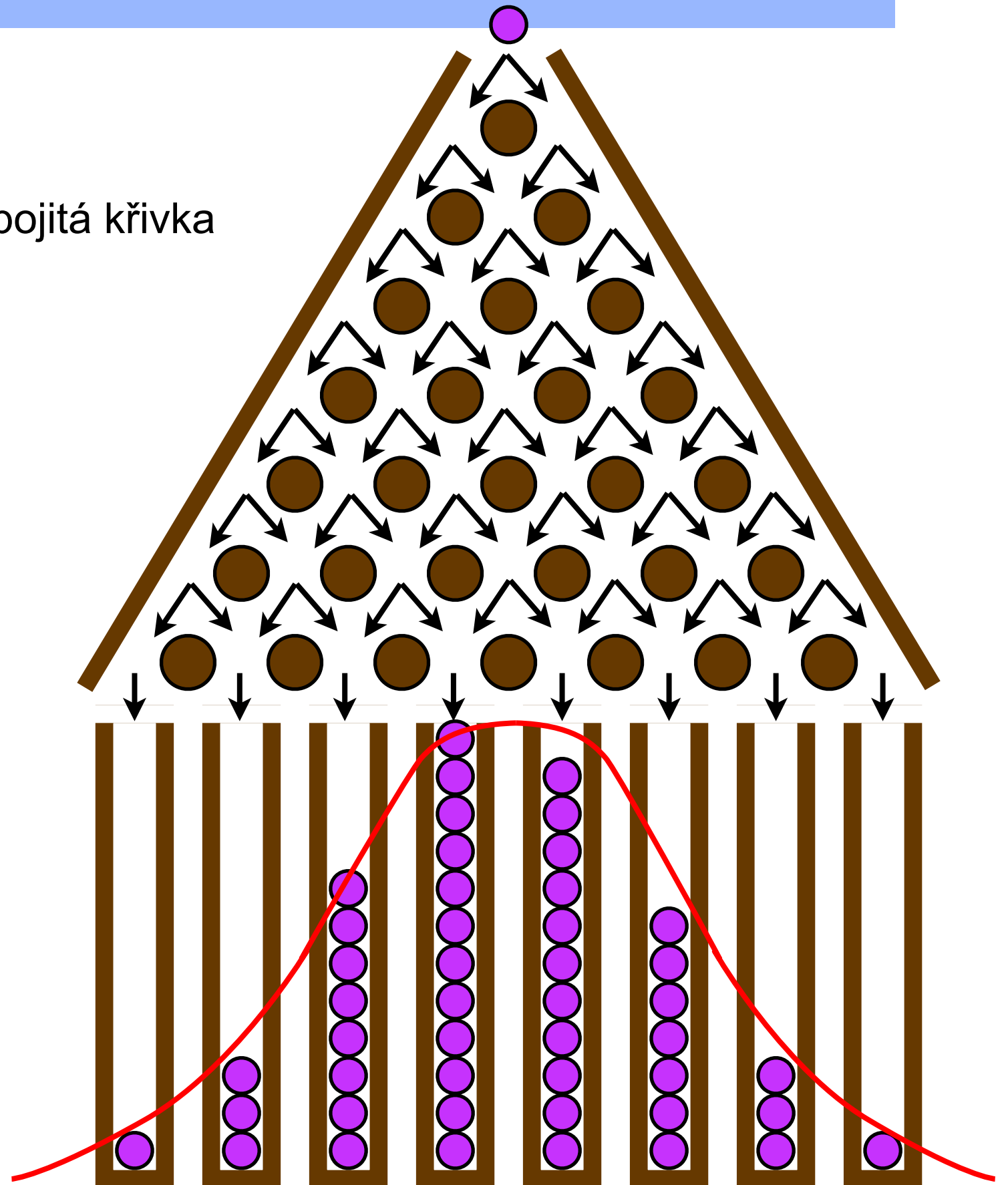


Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska:



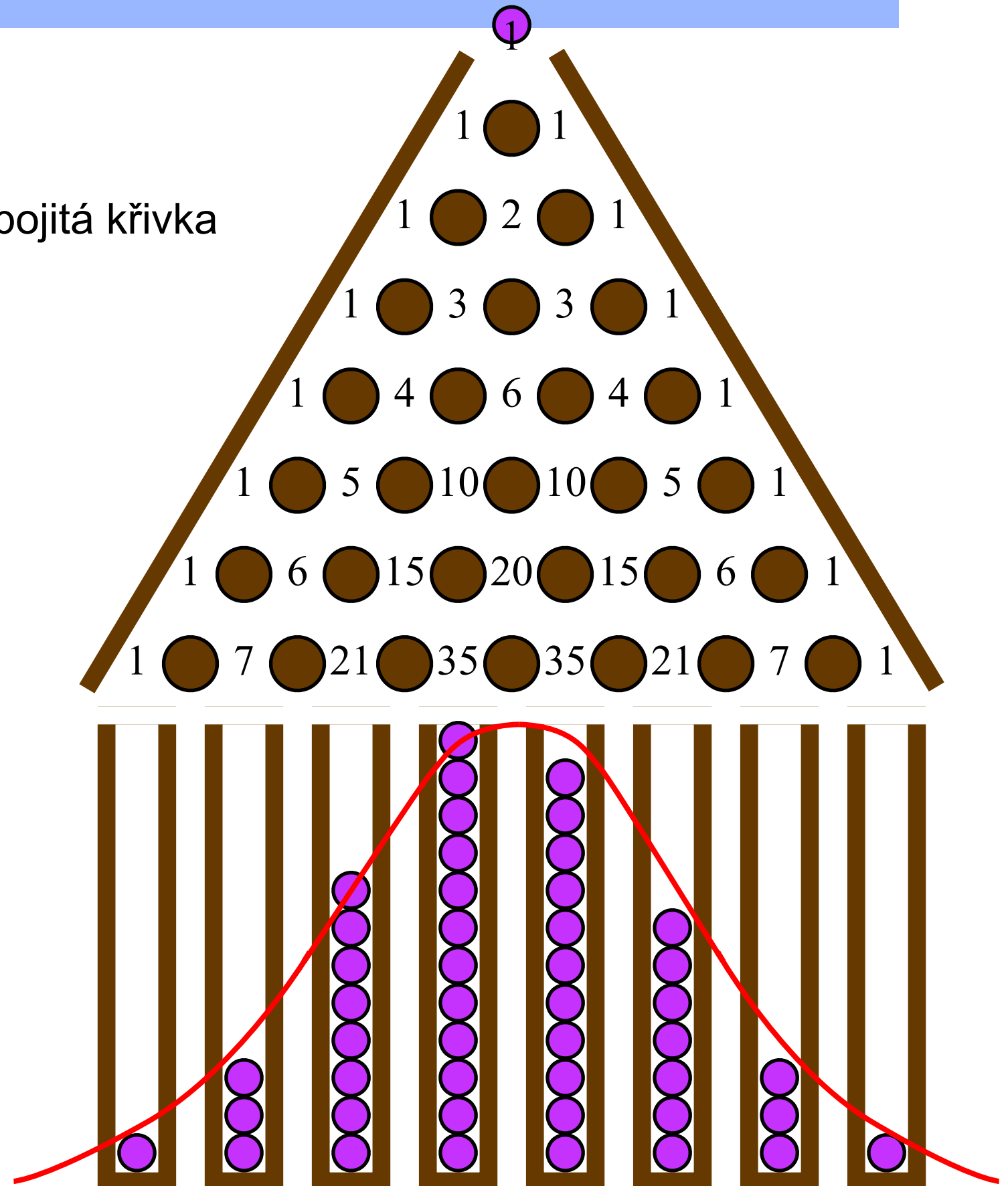
Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska:

Pascalův trojúhelník:



Od hazardu ke hvězdám ...

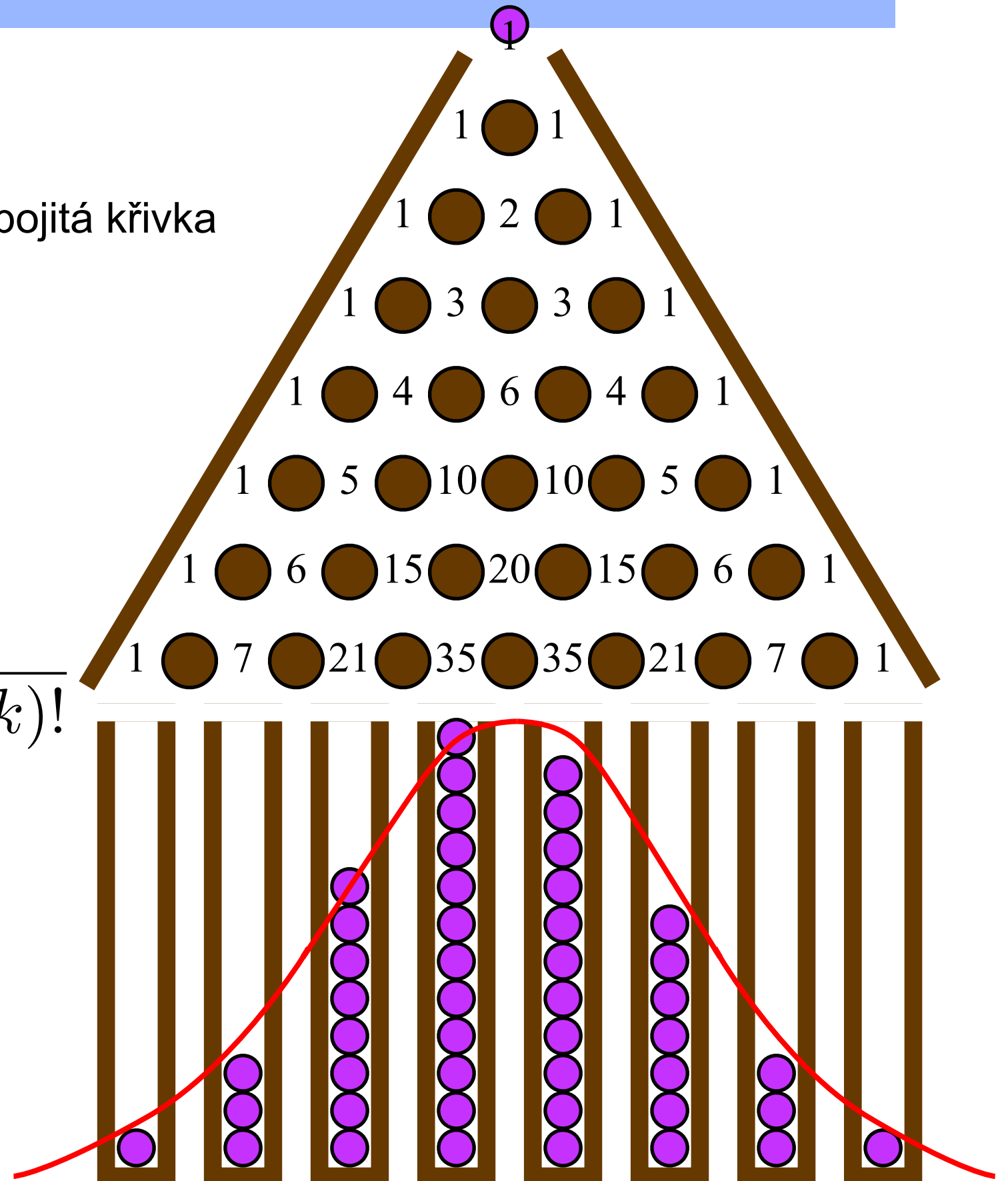
1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska:

Pascalův trojúhelník:

$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$



Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

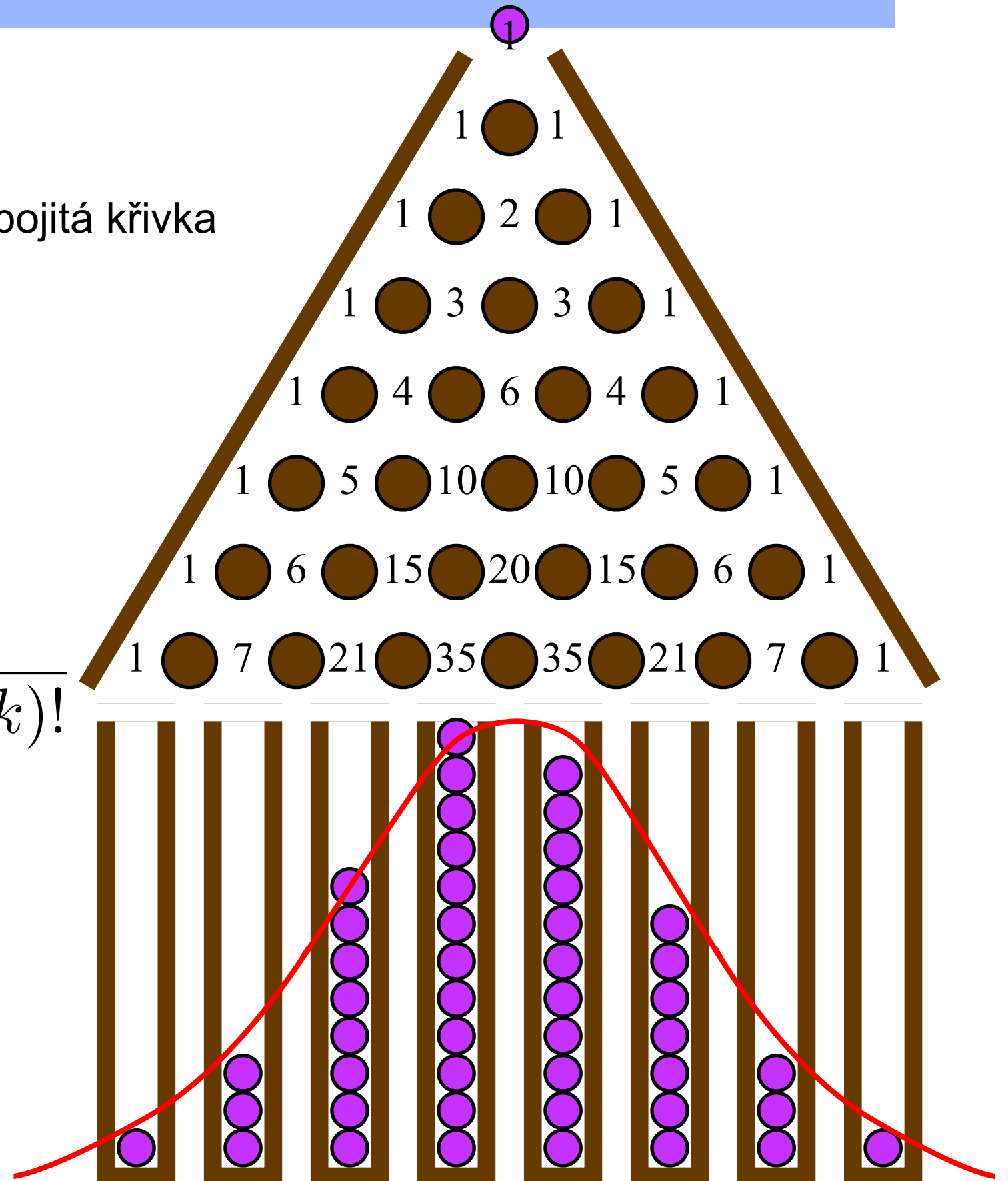
Galtonova deska:

Pascalův trojúhelník:

$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska:

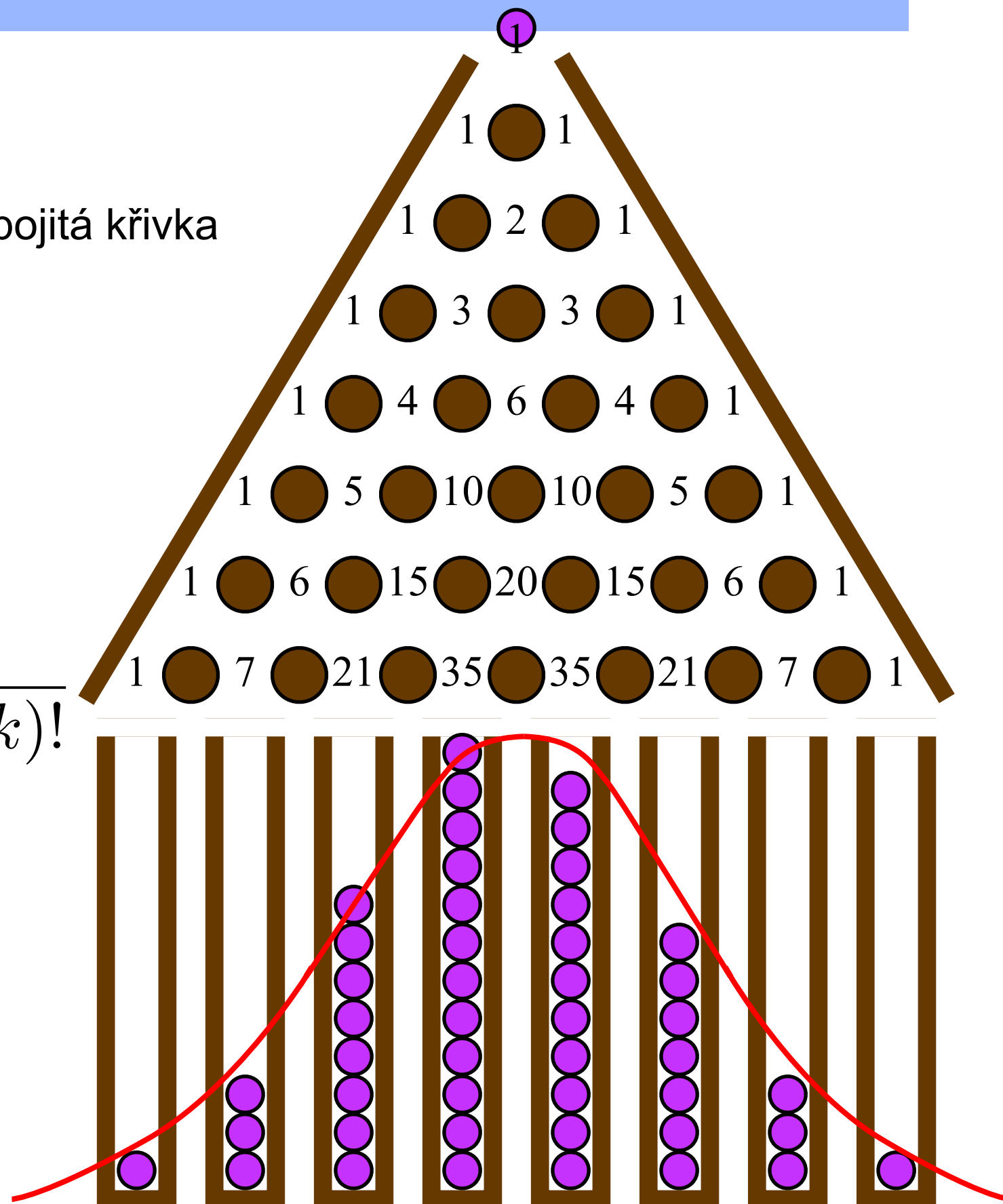
Pascalův trojúhelník:

$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = K e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$



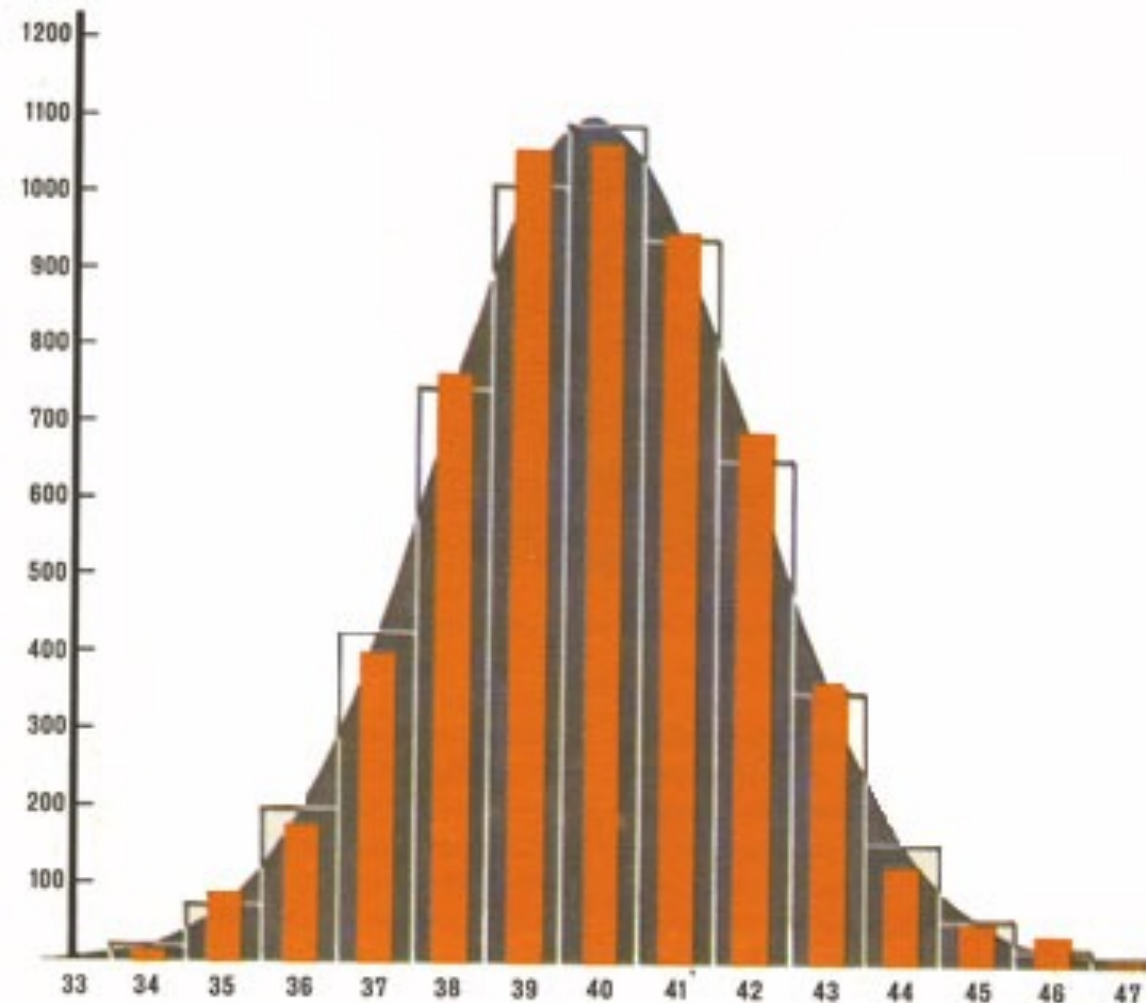
Rozdělení chyb měření

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Rozdělení chyb měření

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

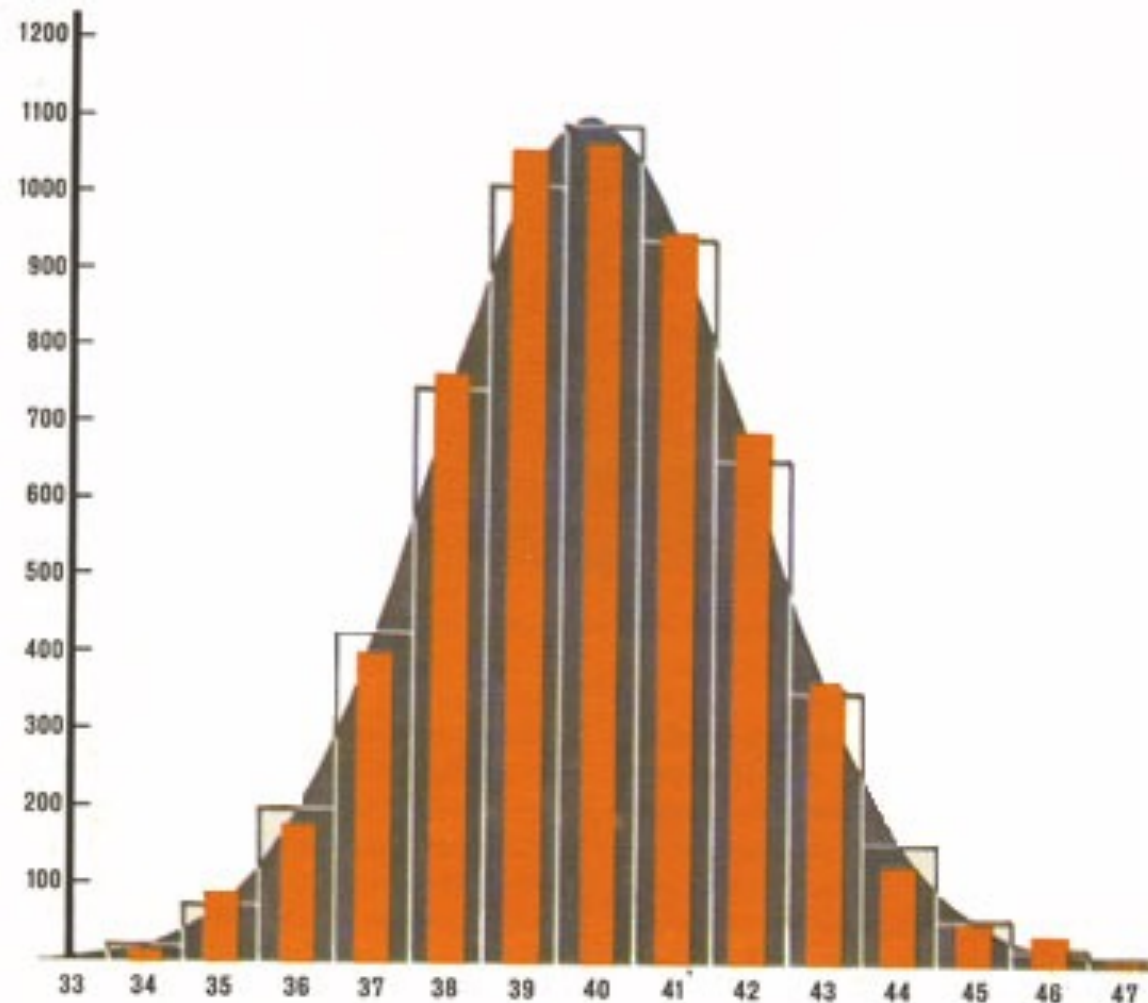


Rozdělení chyb měření

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka



Rozdělení chyb měření

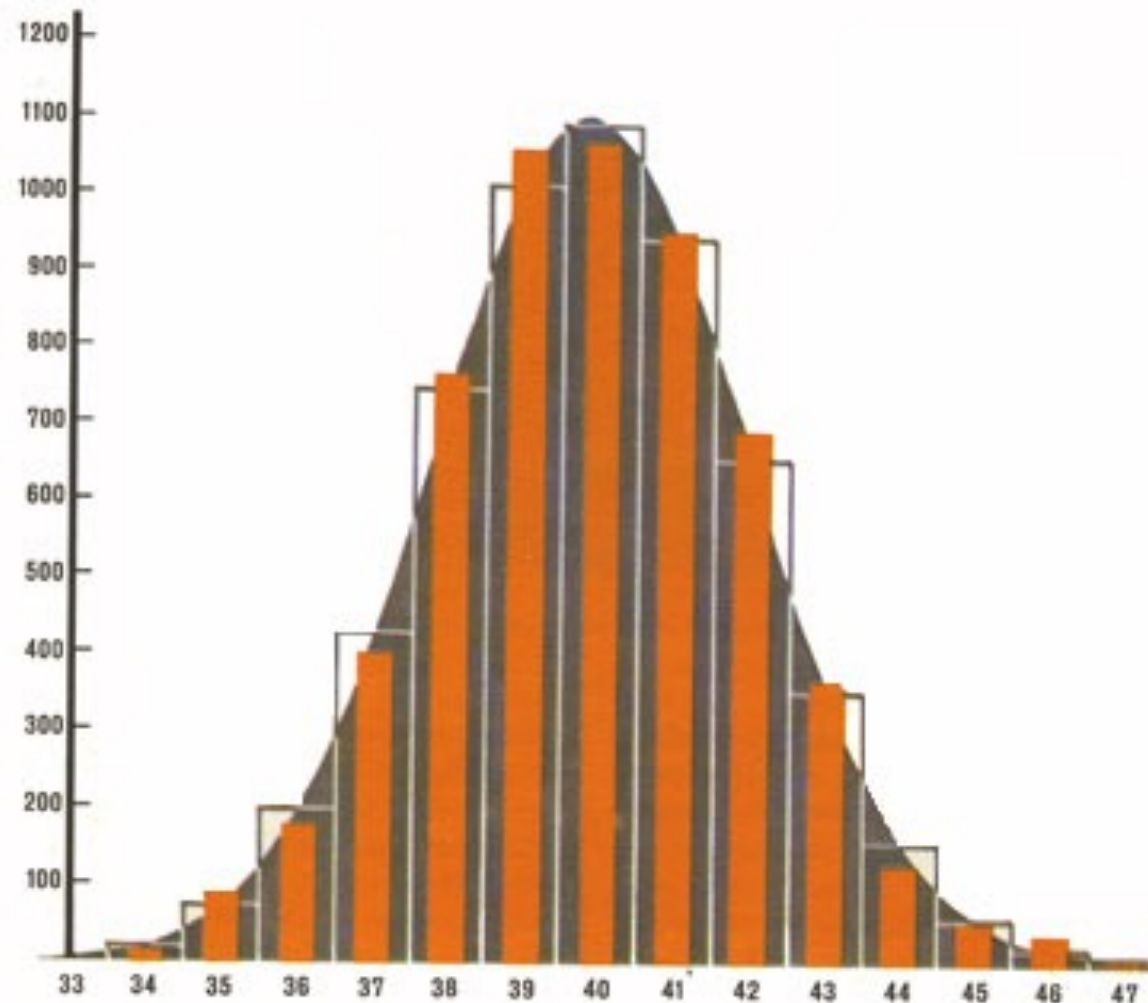
přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Pierre Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Quételet

- antropometrická měření anglických vojáků



Normální rozdělení

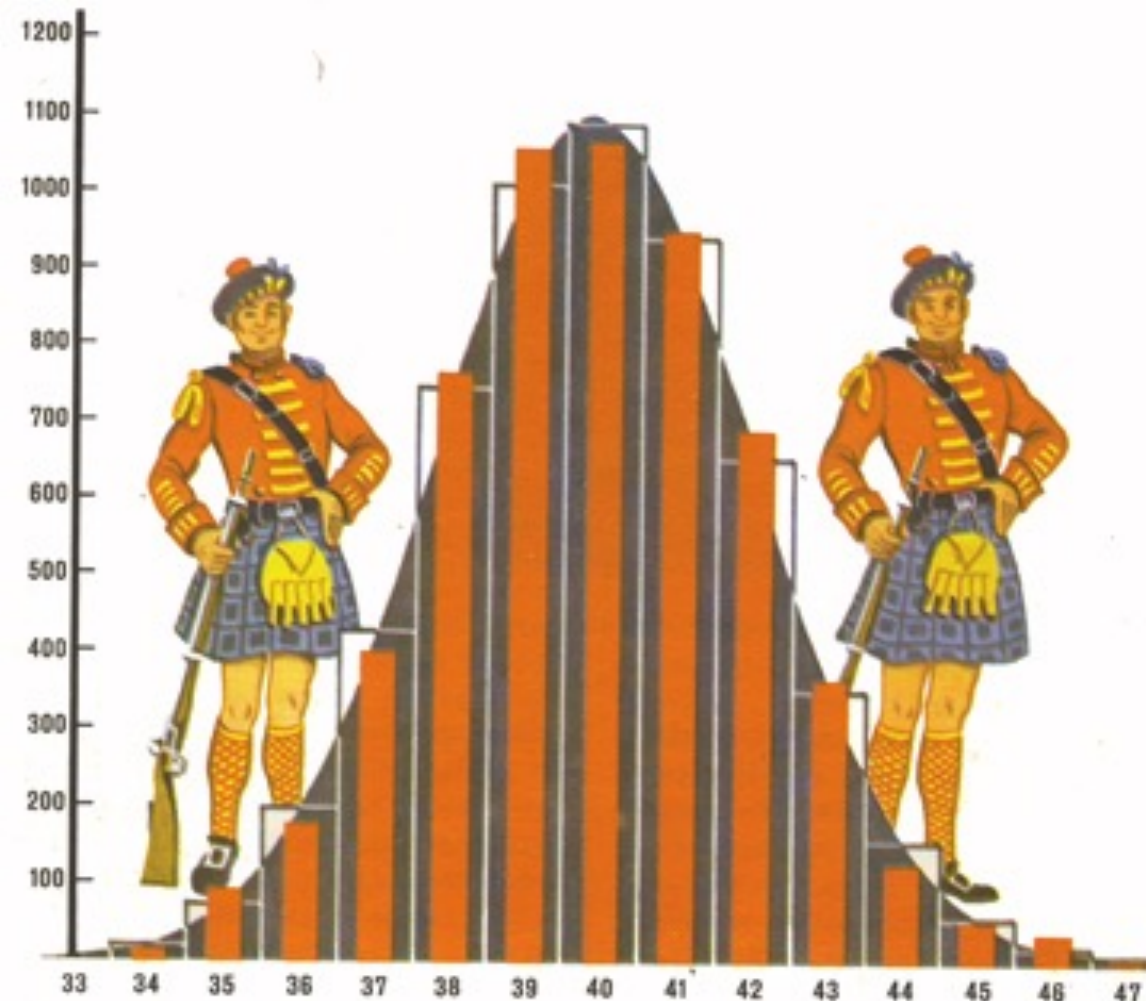
přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Quételet

- antropometrická měření anglických vojáků



Obvod hrudi skotských vojáků v
palcích, naměřený Quételetem
ve dvacátých letech 19. století

Normální rozdělení

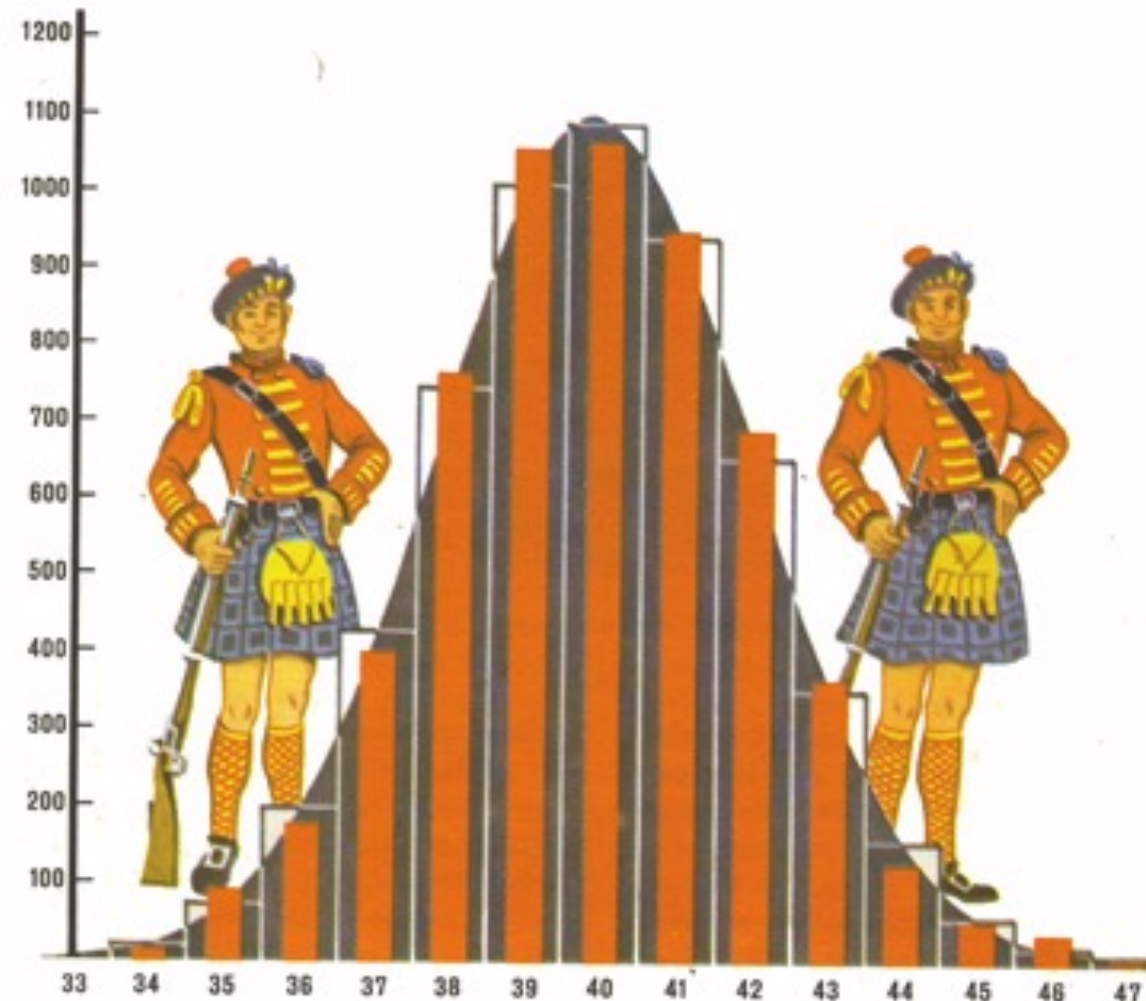
přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Quételet

- antropometrická měření anglických vojáků



Obvod hrudi skotských vojáků v
palcích, naměřený Quételetem
ve dvacátých letech 19. století

normální rozdělení

Normální rozdělení

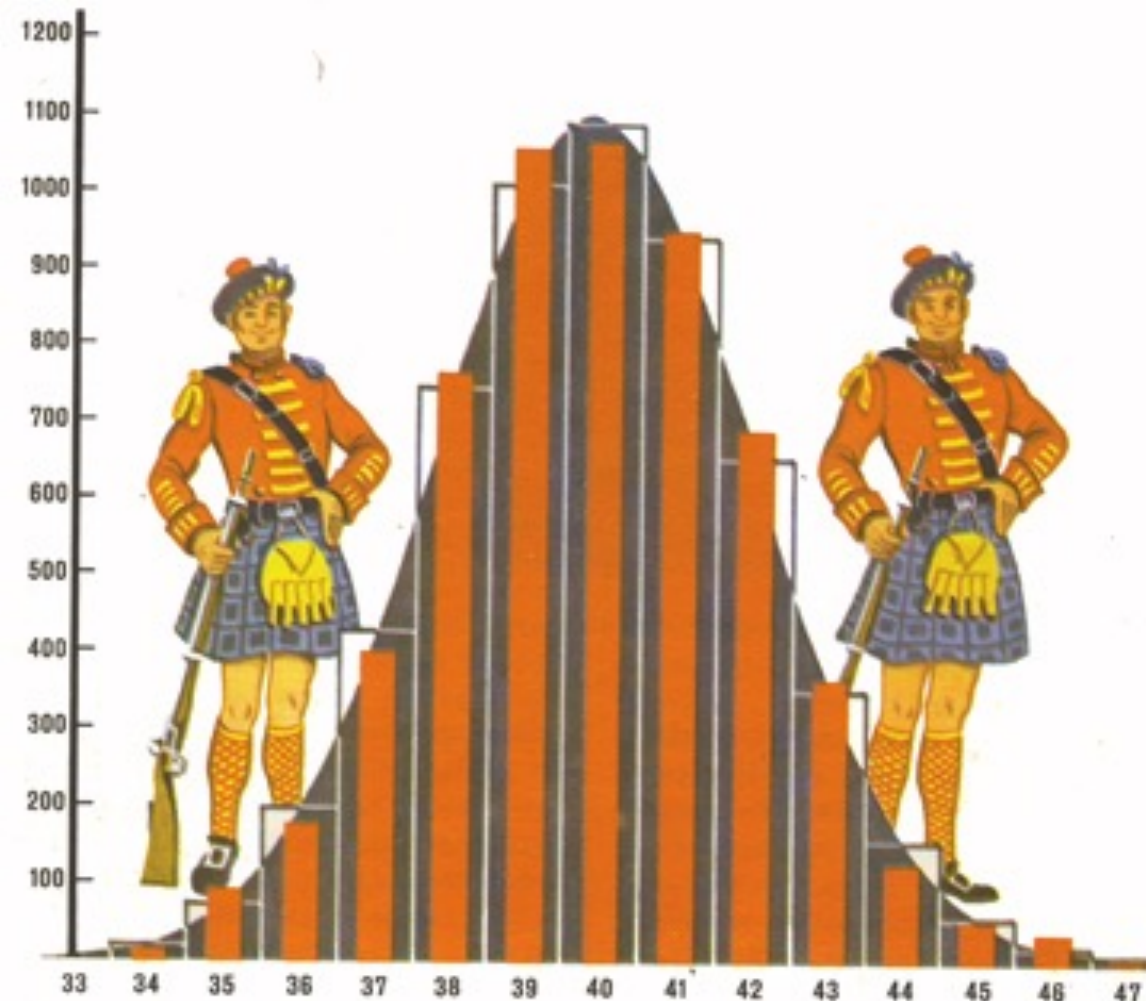
přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Pierre Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Quételet

- antropometrická měření anglických vojáků



Obvod hrudi skotských vojáků v
palcích, naměřený Quételetem
ve dvacátých letech 19. století

normální rozdělení

$$y = K e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$

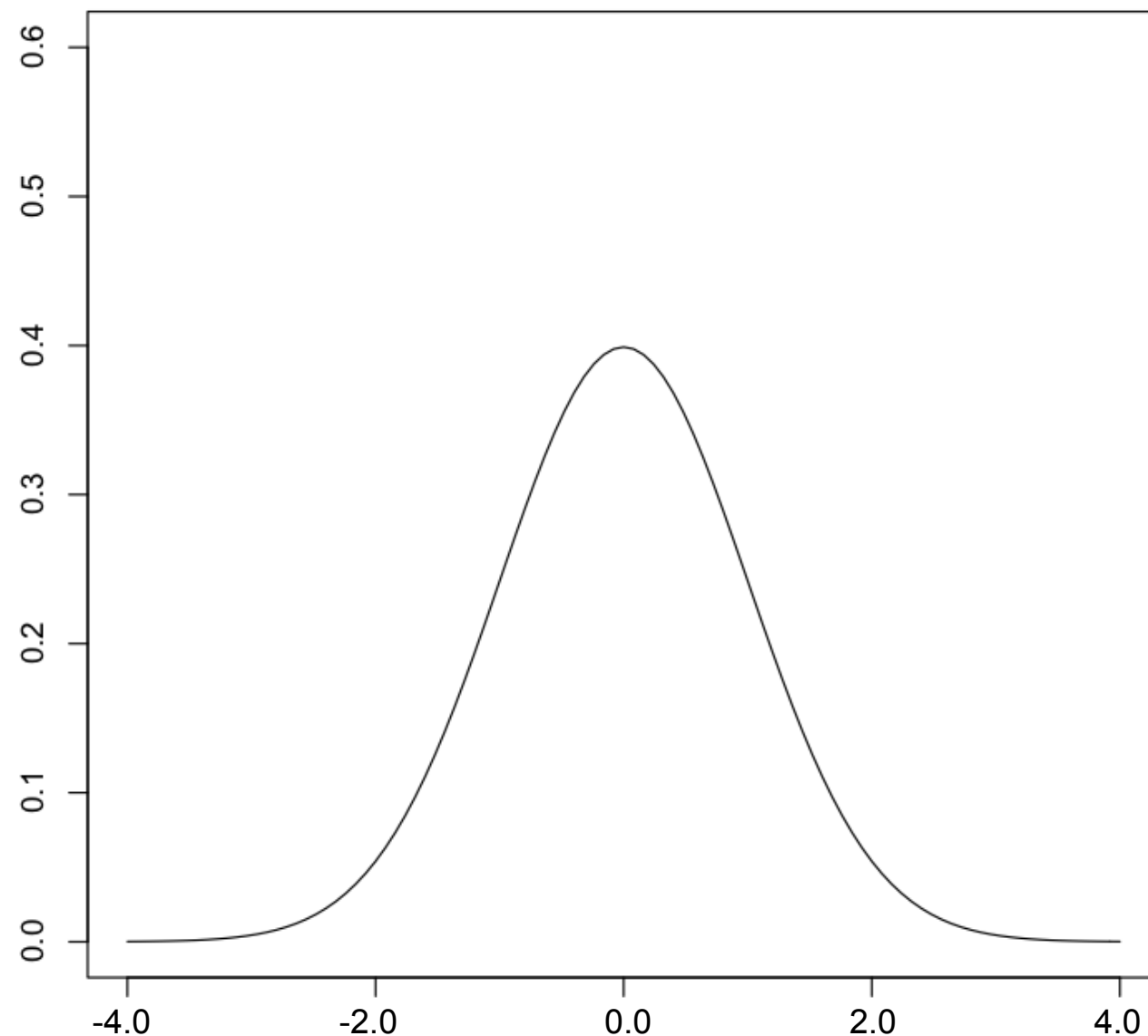
Normální rozdění

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in \mathcal{R}$ - parametr polohy

Normální rozdění $N(\mu, \sigma^2)$



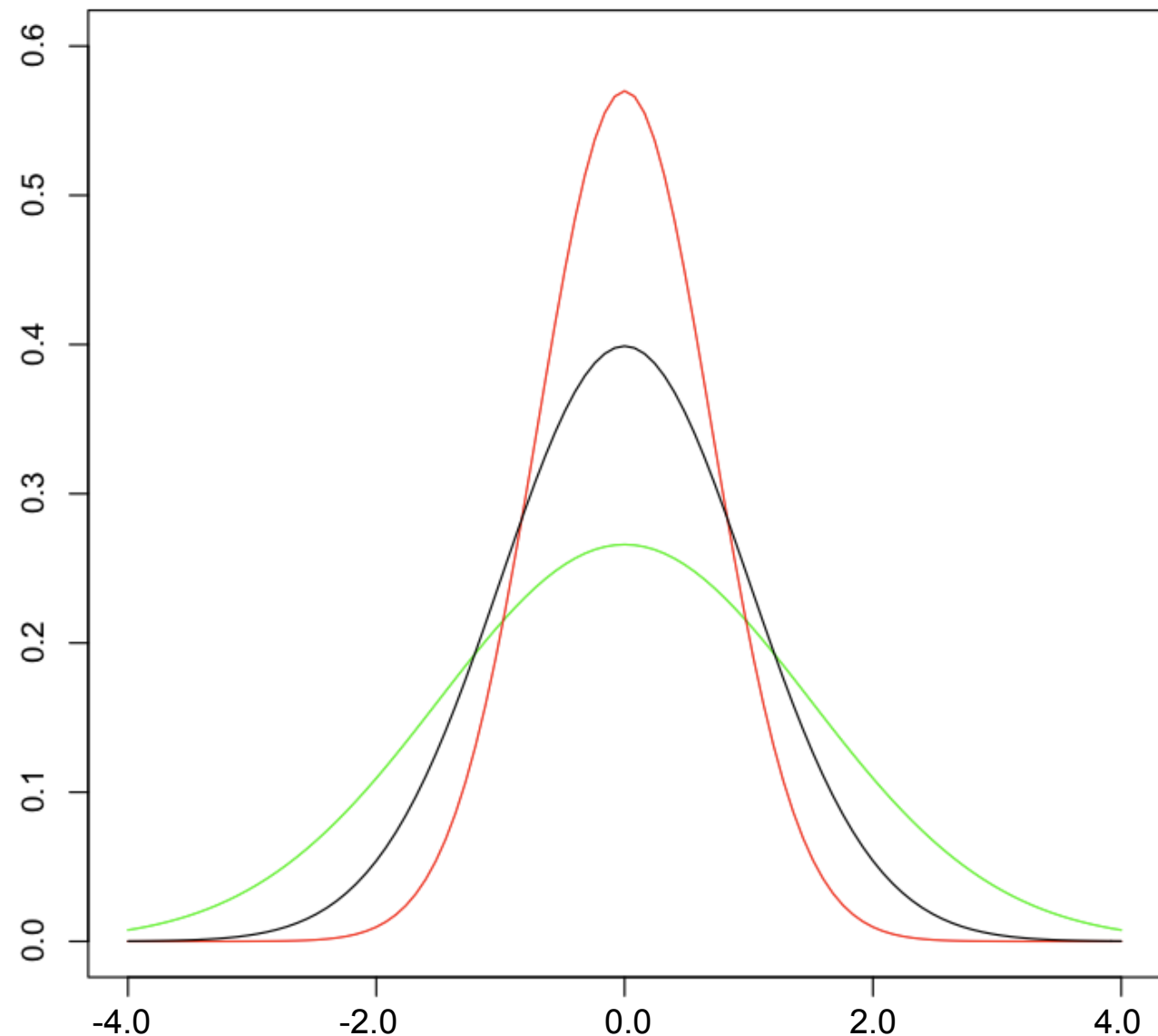
Normální rozdění

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdění $N(\mu, \sigma^2)$



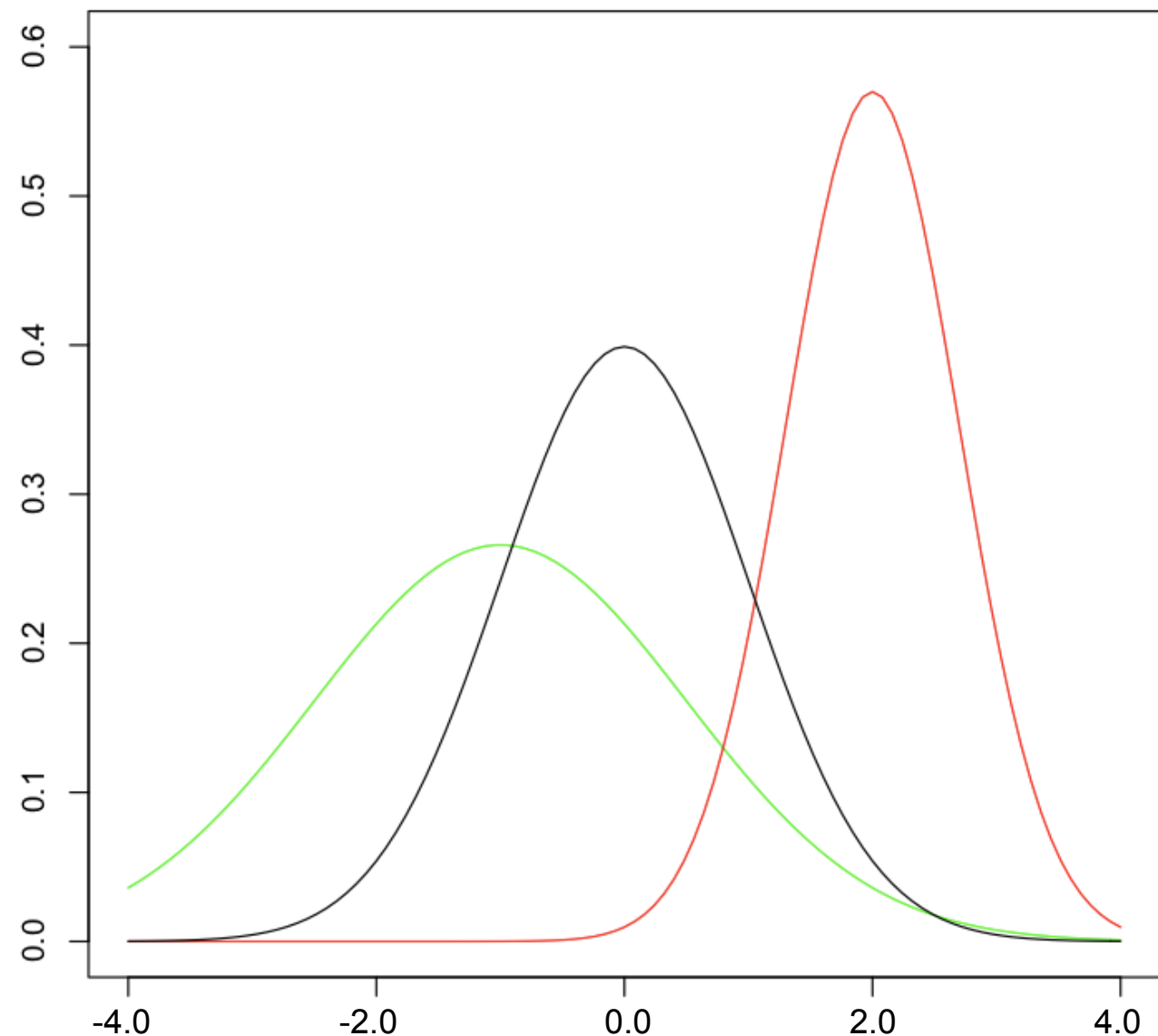
Normální rozdění

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in \mathbb{R}$ - parametr polohy

Normální rozdění $N(\mu, \sigma^2)$



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

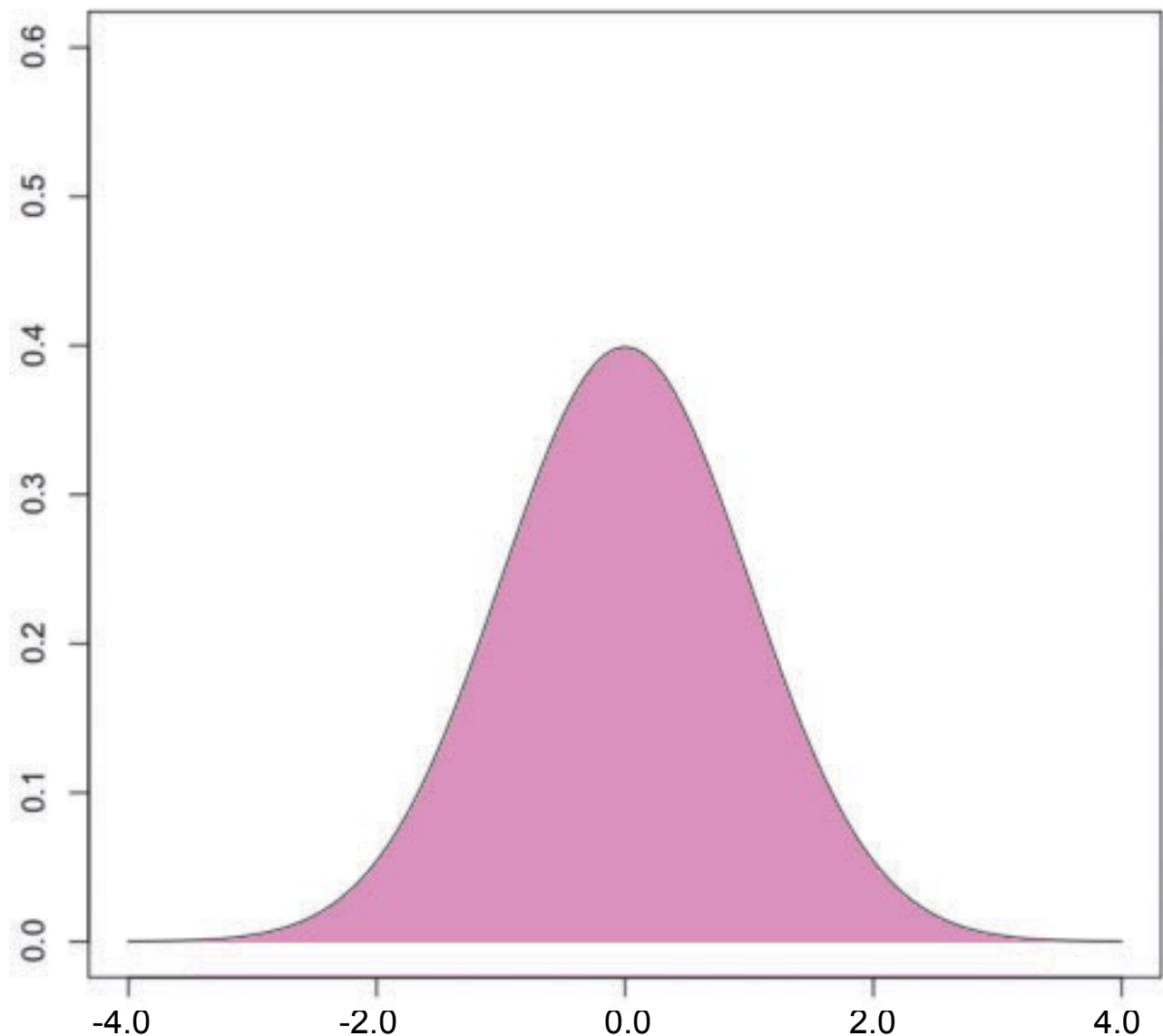
$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Standardní normální rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

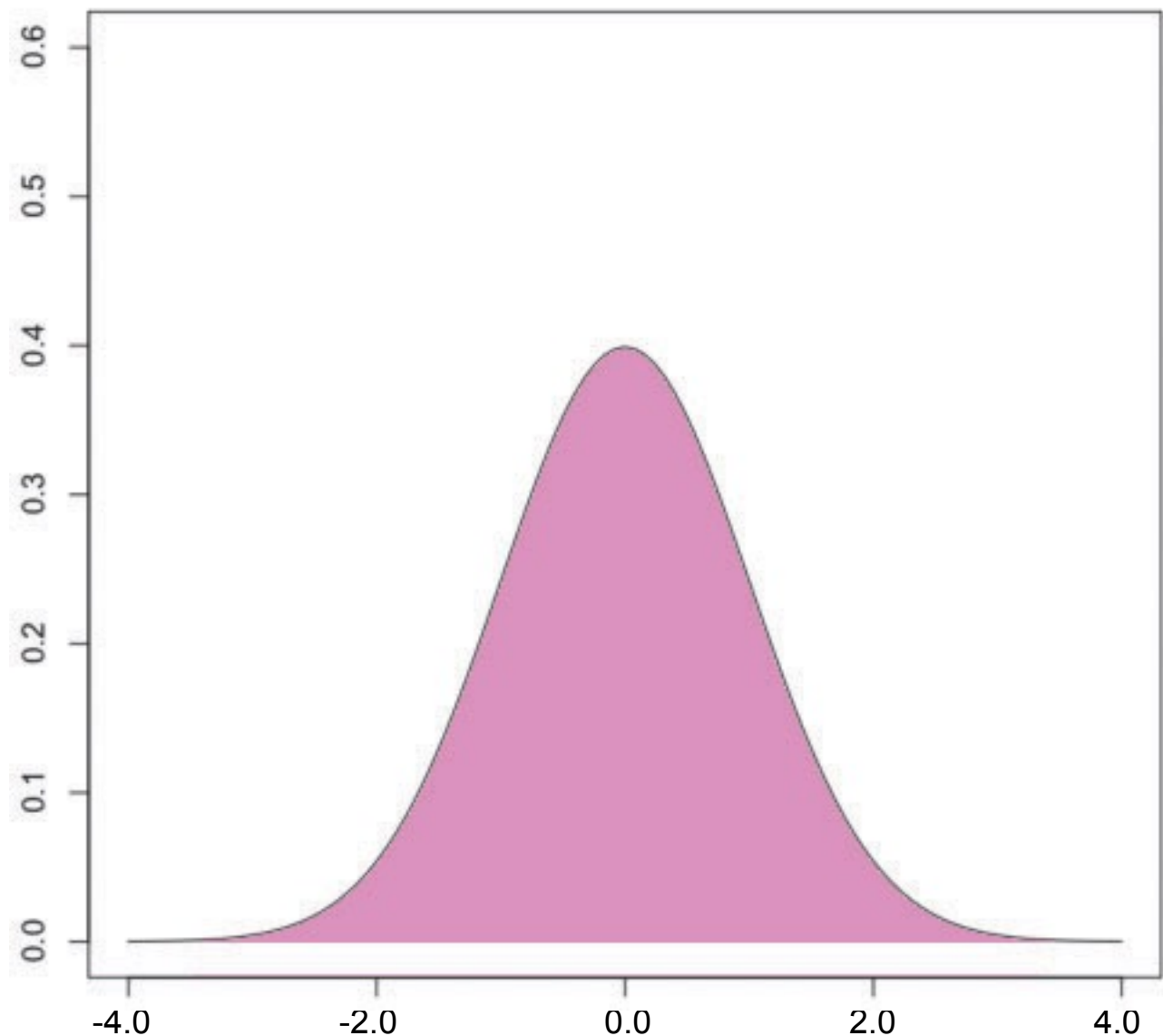
$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Standardní normální rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

$$X \sim N(0, 1)$$



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

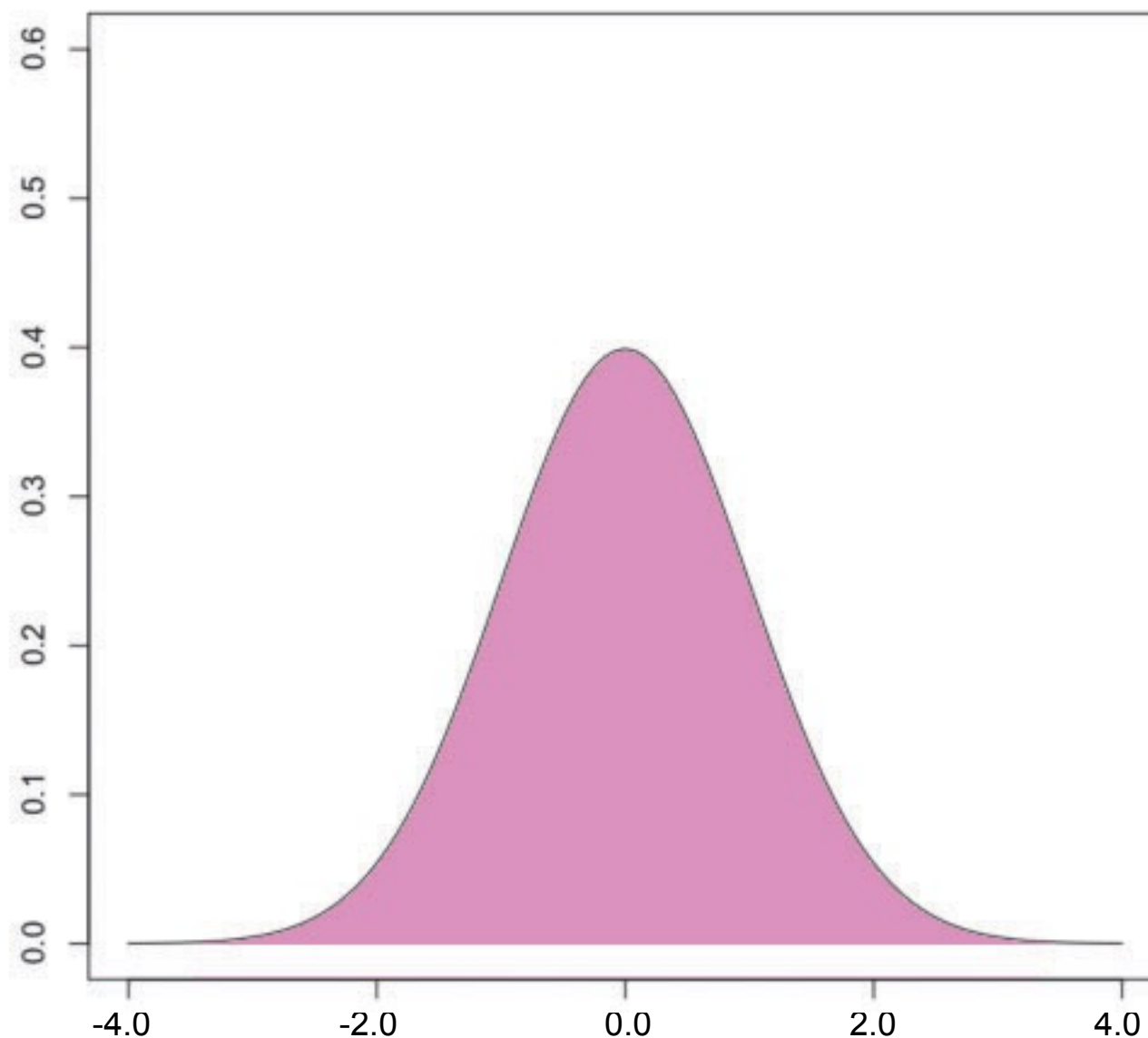
$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Standardní normální rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

$$X \sim N(0, 1)$$



$$P(a \leq X \leq b) =$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

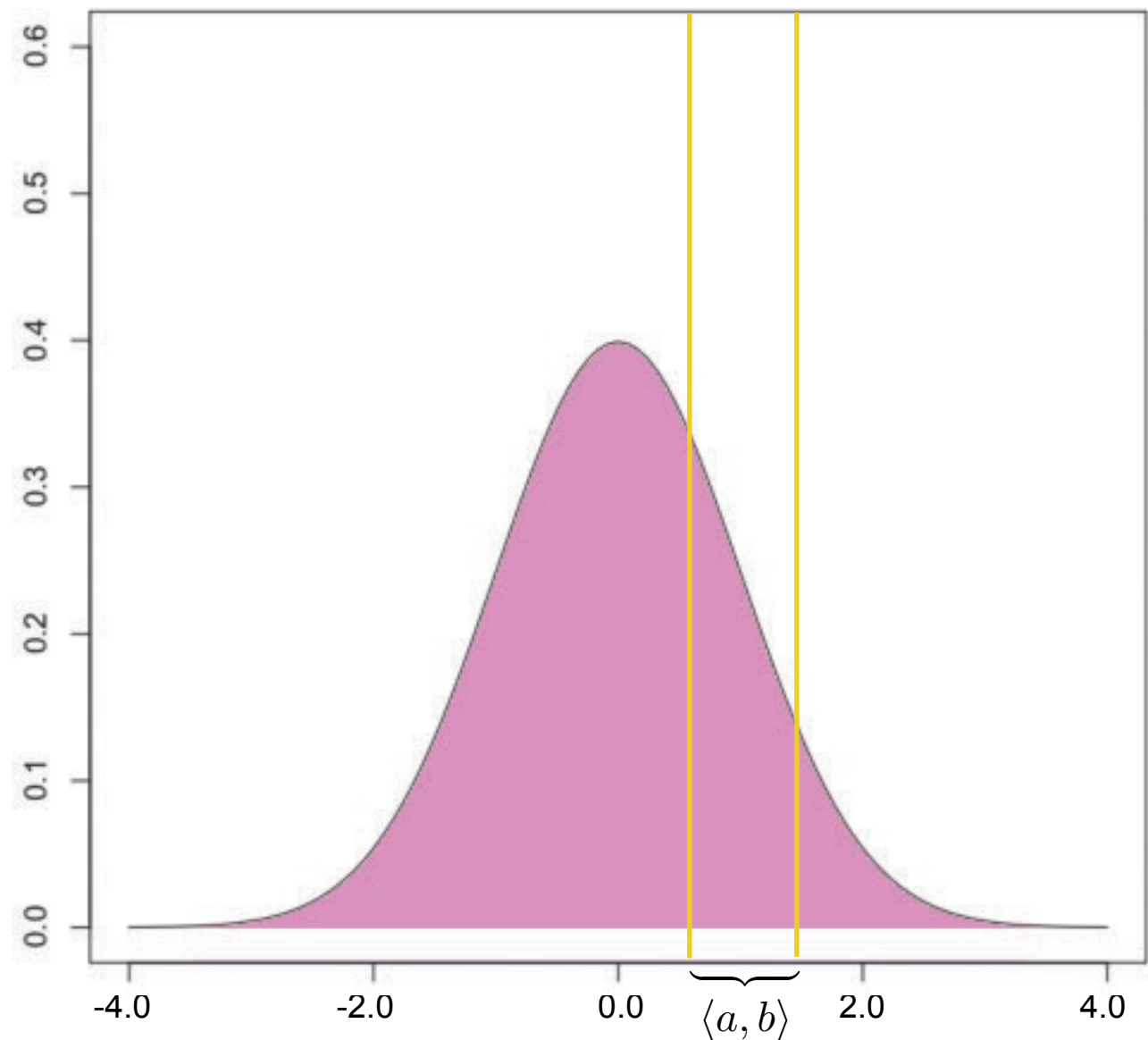
$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Standardní normální rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

$$X \sim N(0, 1)$$



$$P(a \leq X \leq b) =$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

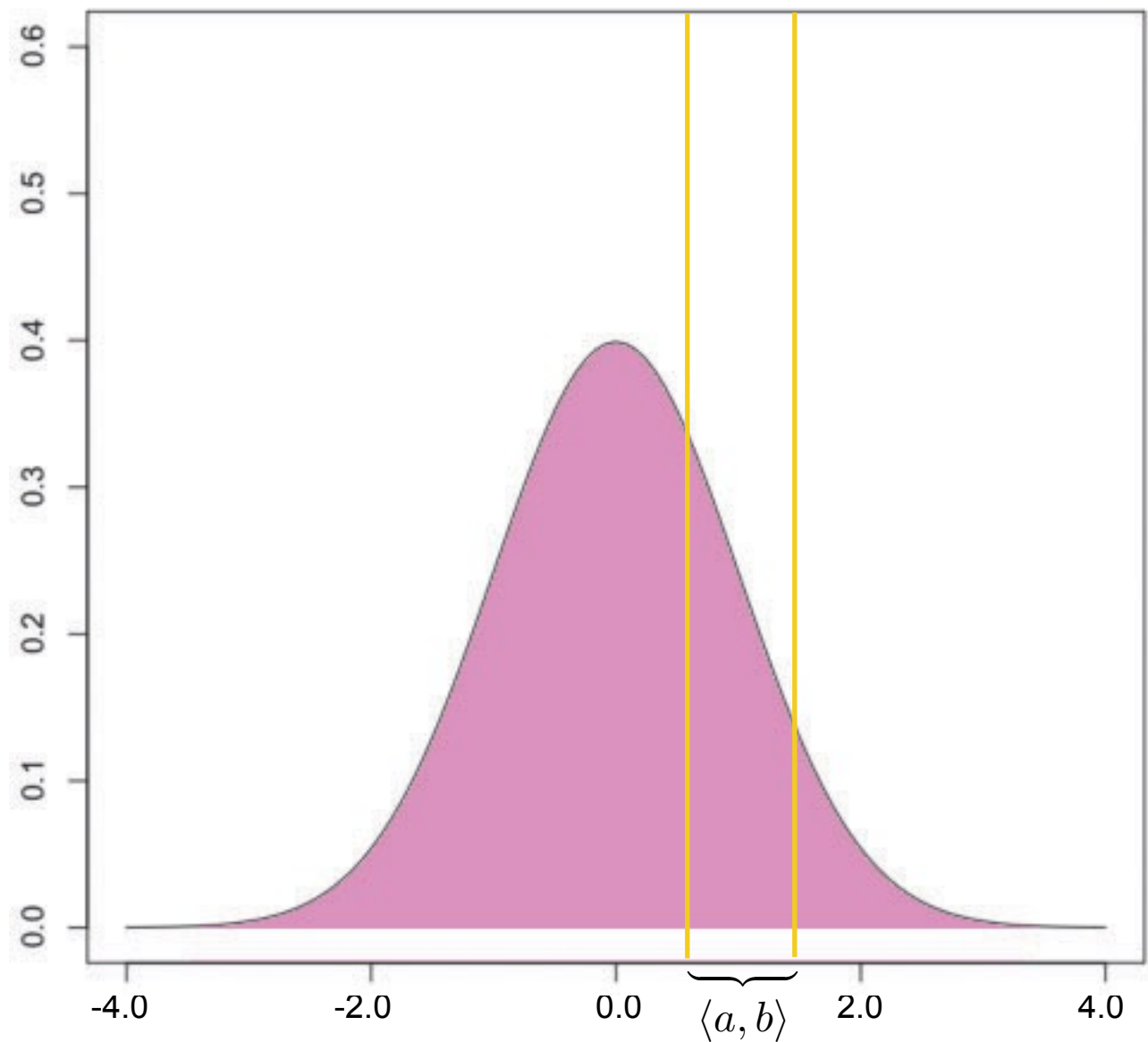
$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Standardní normální rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

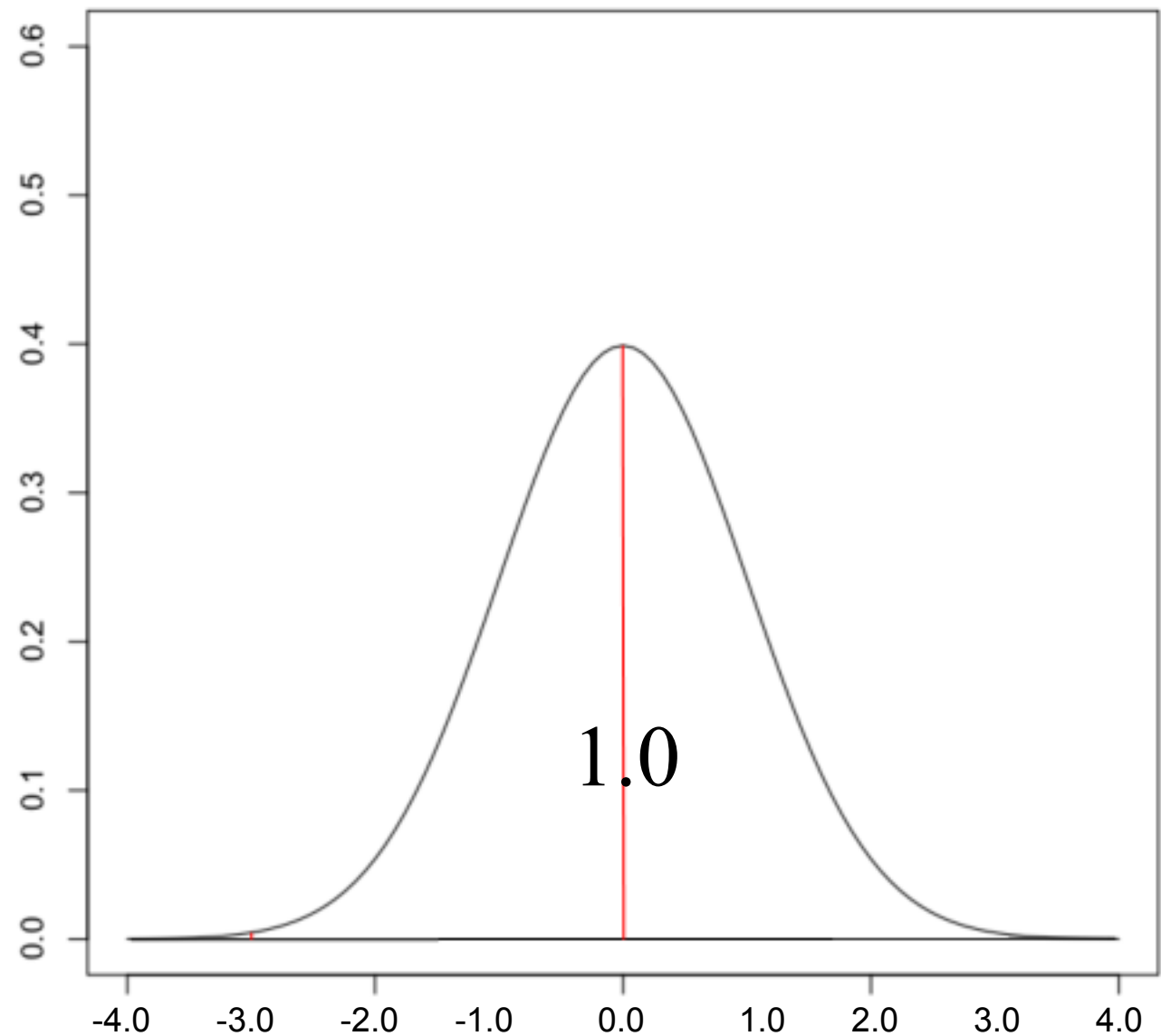
$$X \sim N(0, 1)$$



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Normální rozdělení

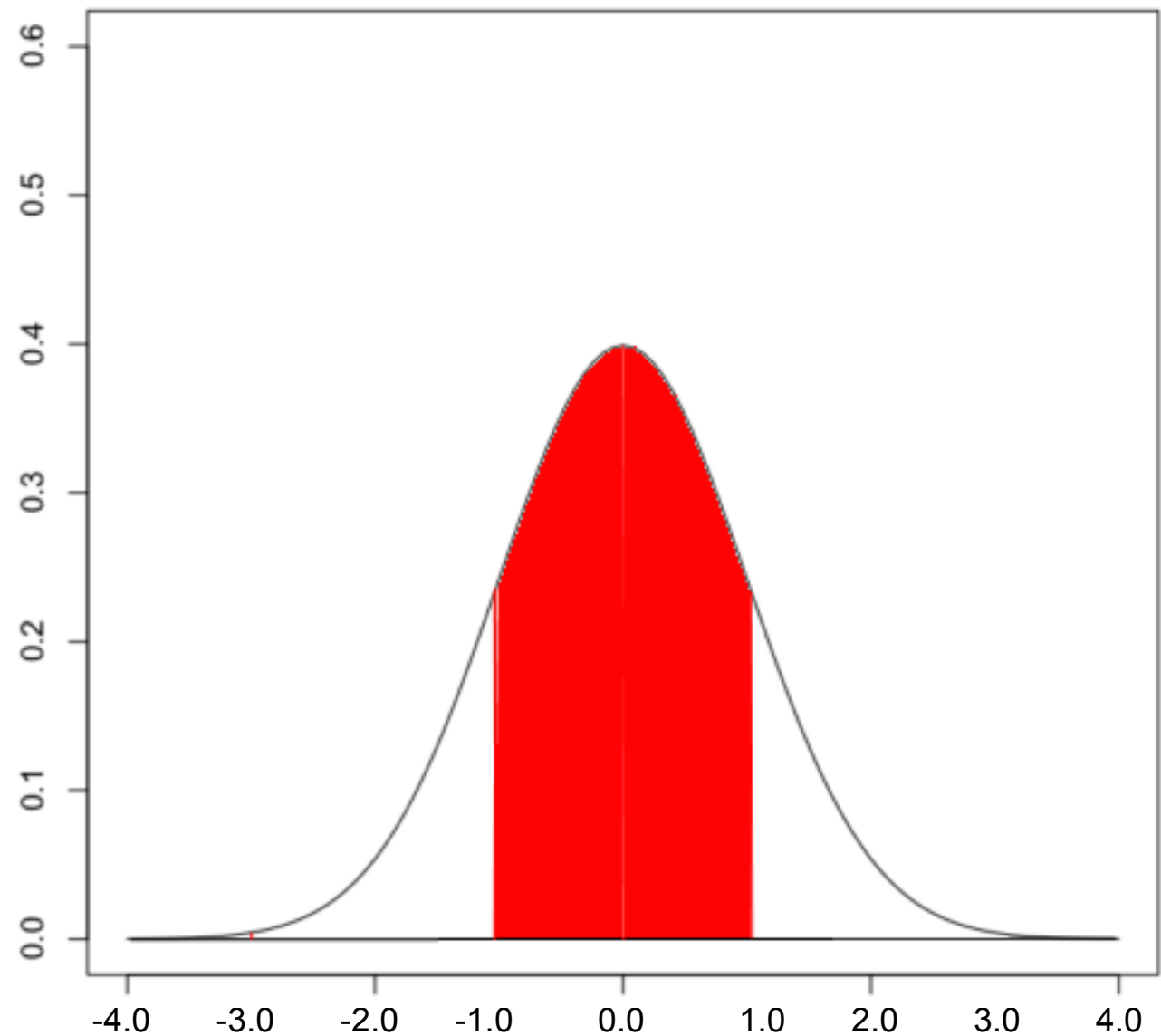
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$



$$X \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

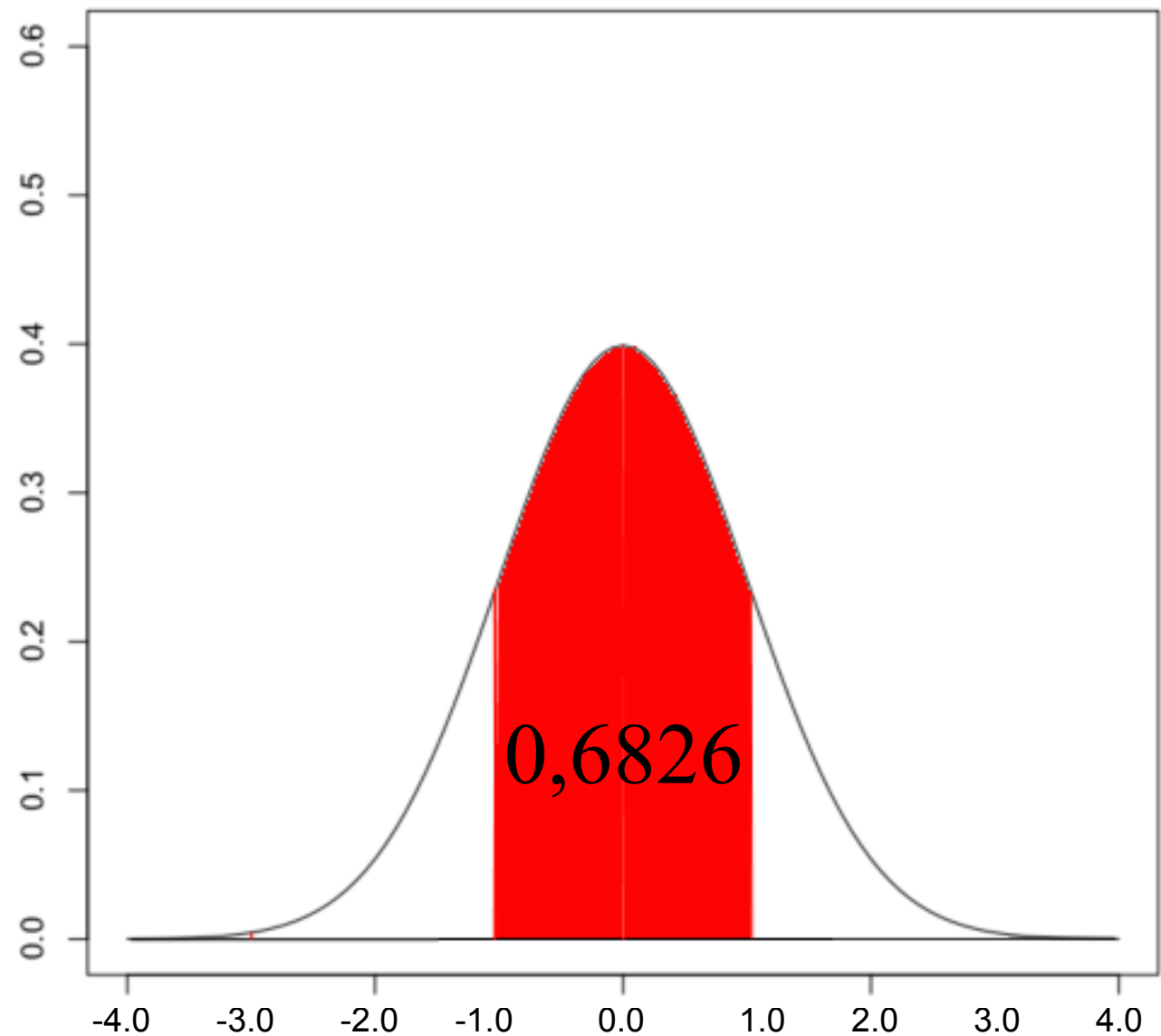
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$



$$X \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

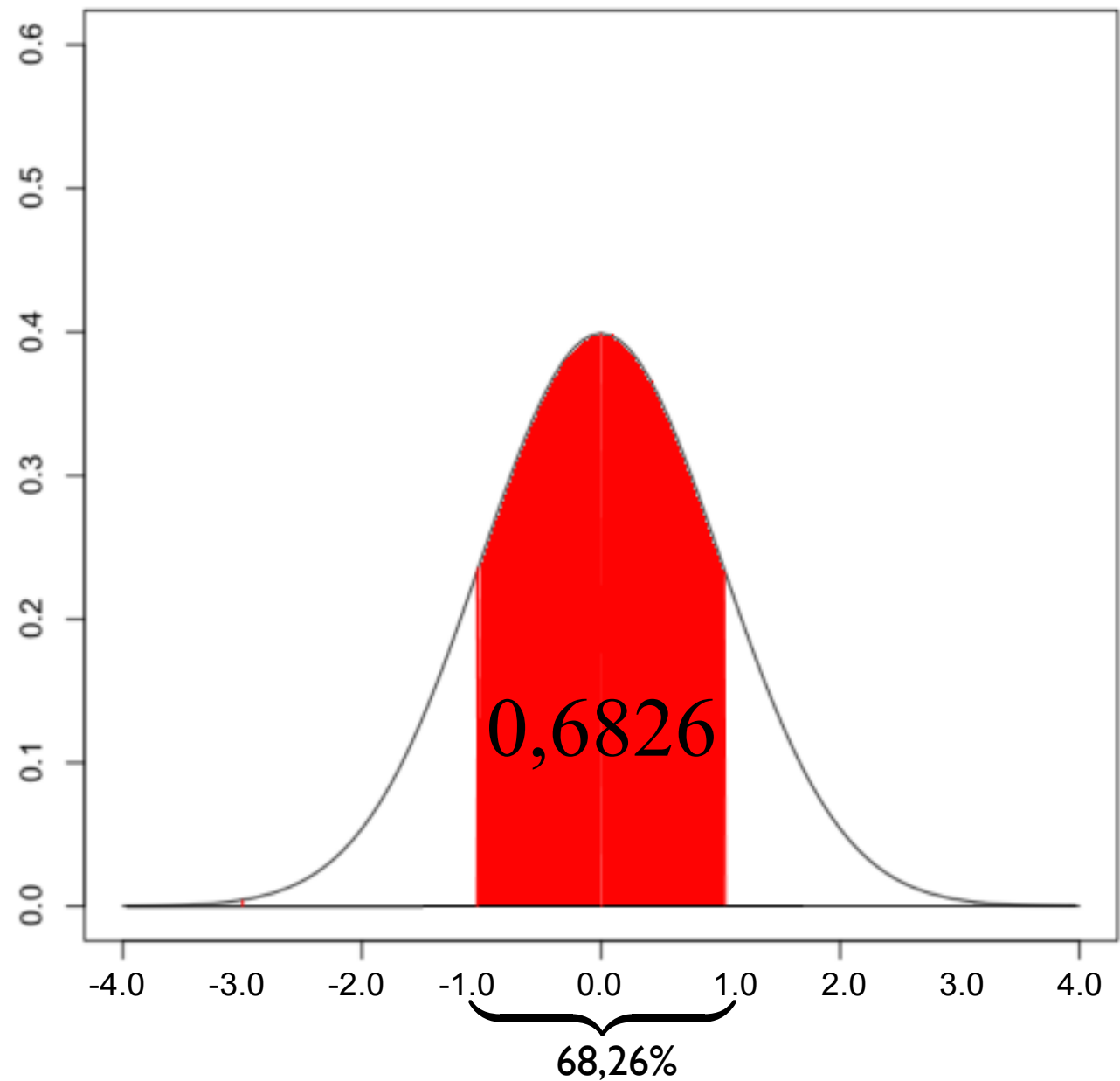
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$



$$X \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

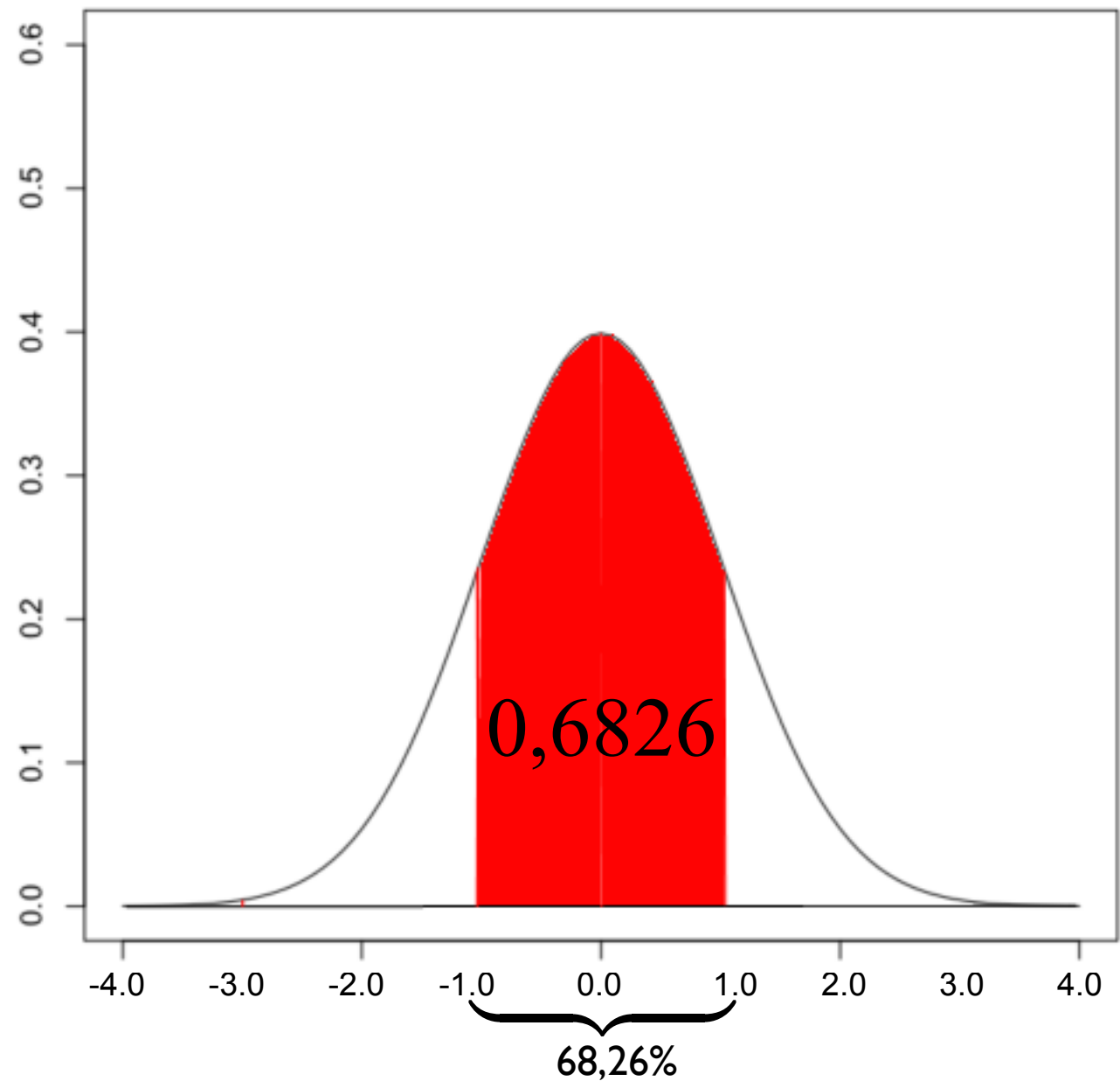
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$



$$X \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

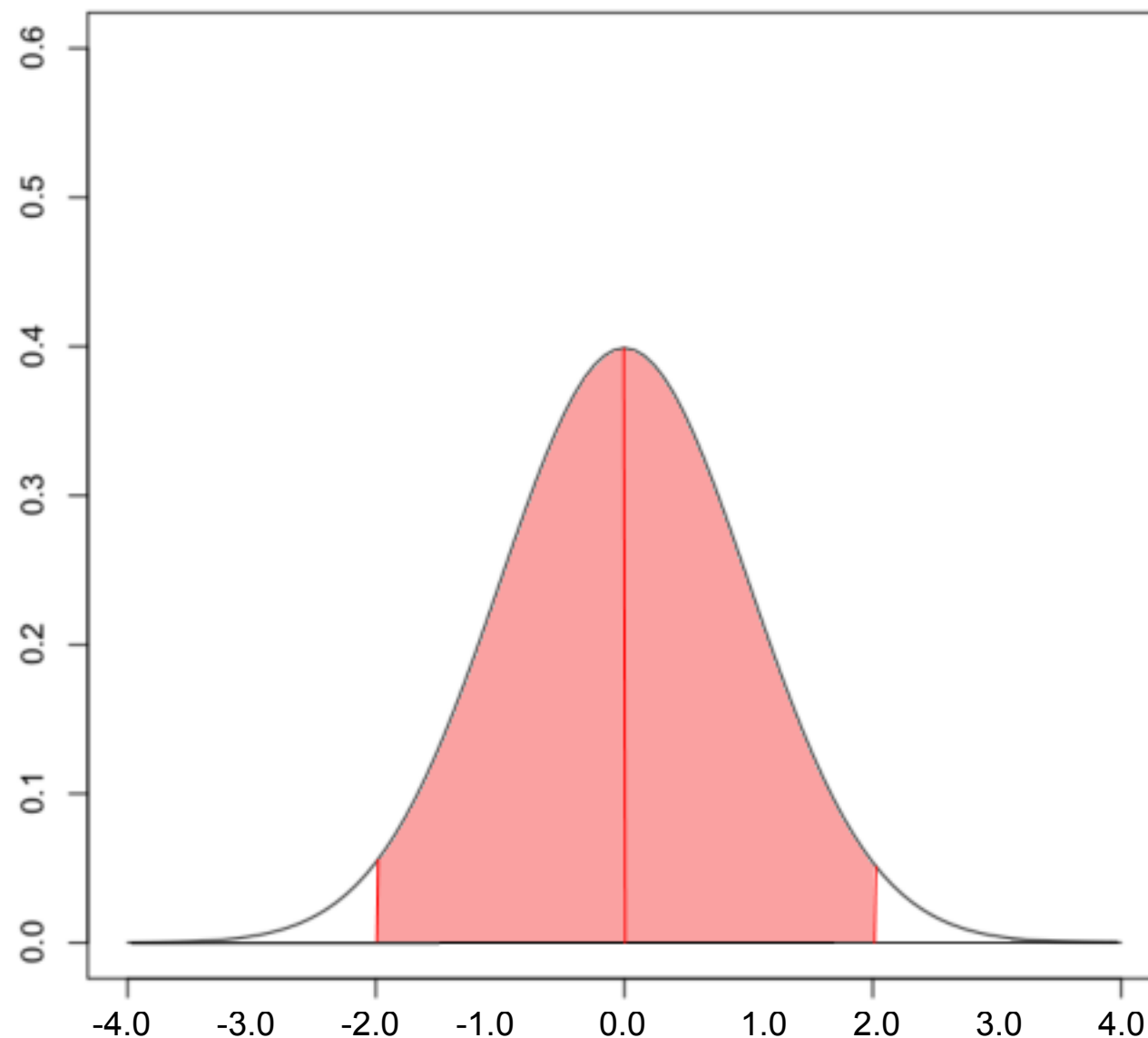


$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$X \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

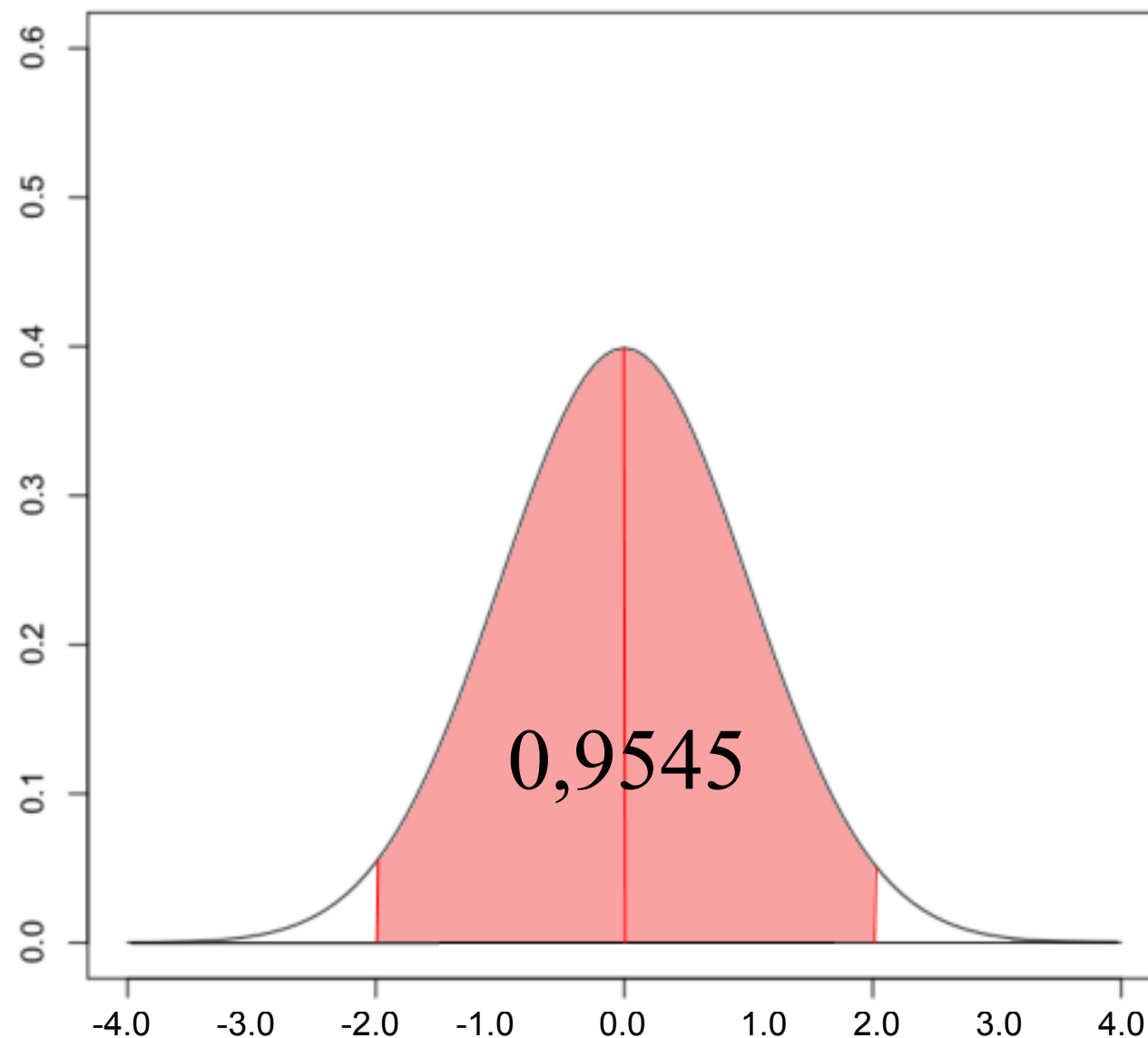


$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$X \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

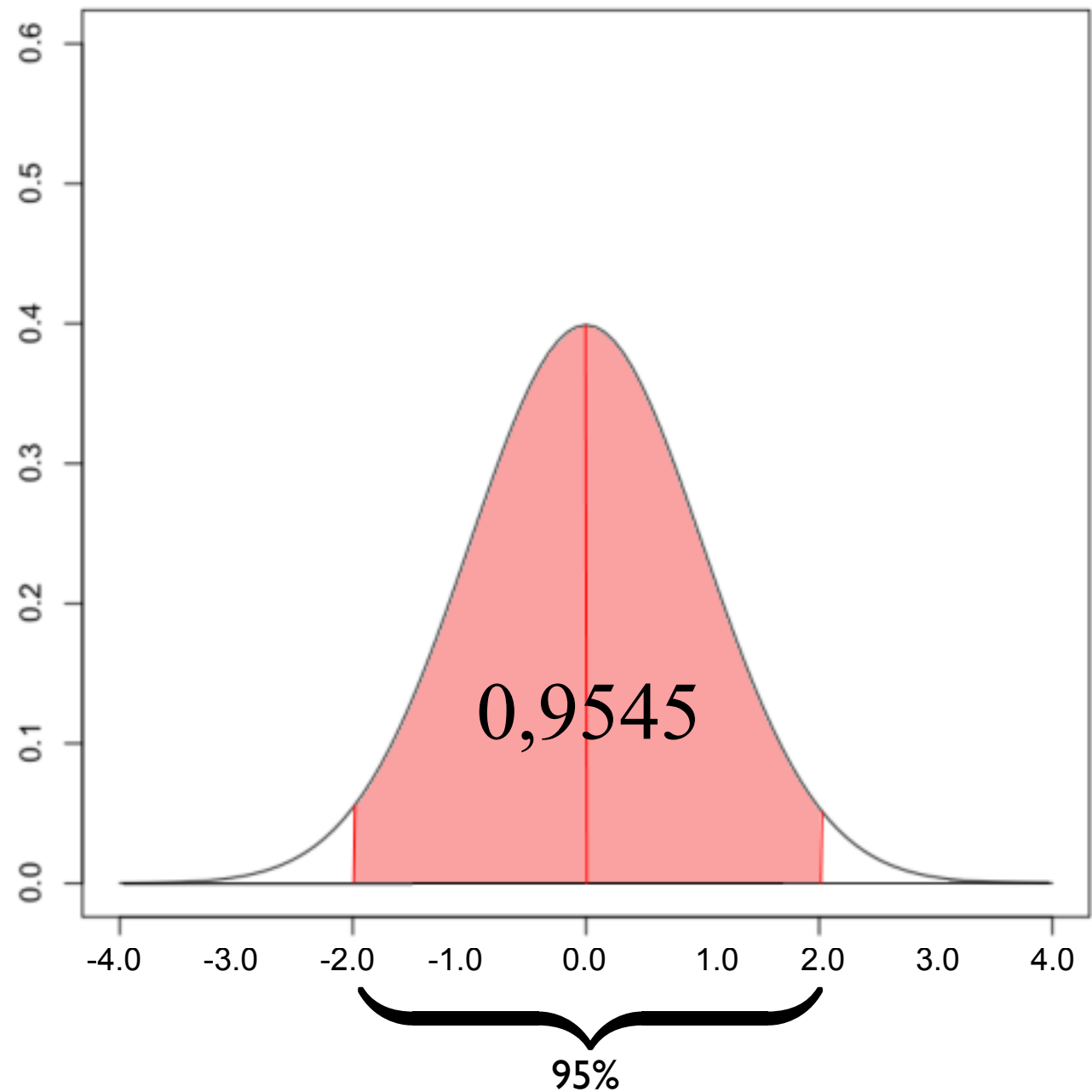


$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$X \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$



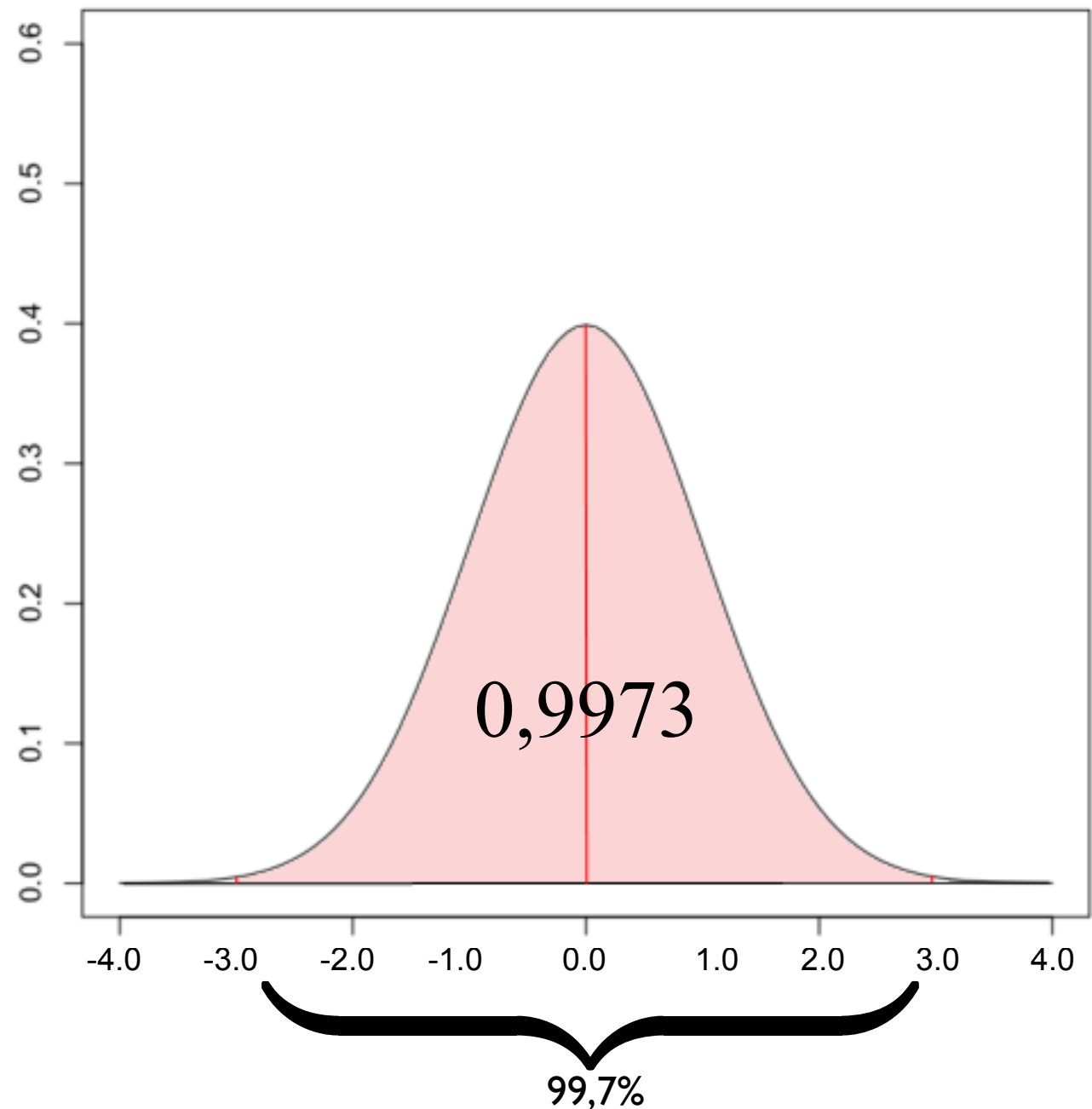
$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$



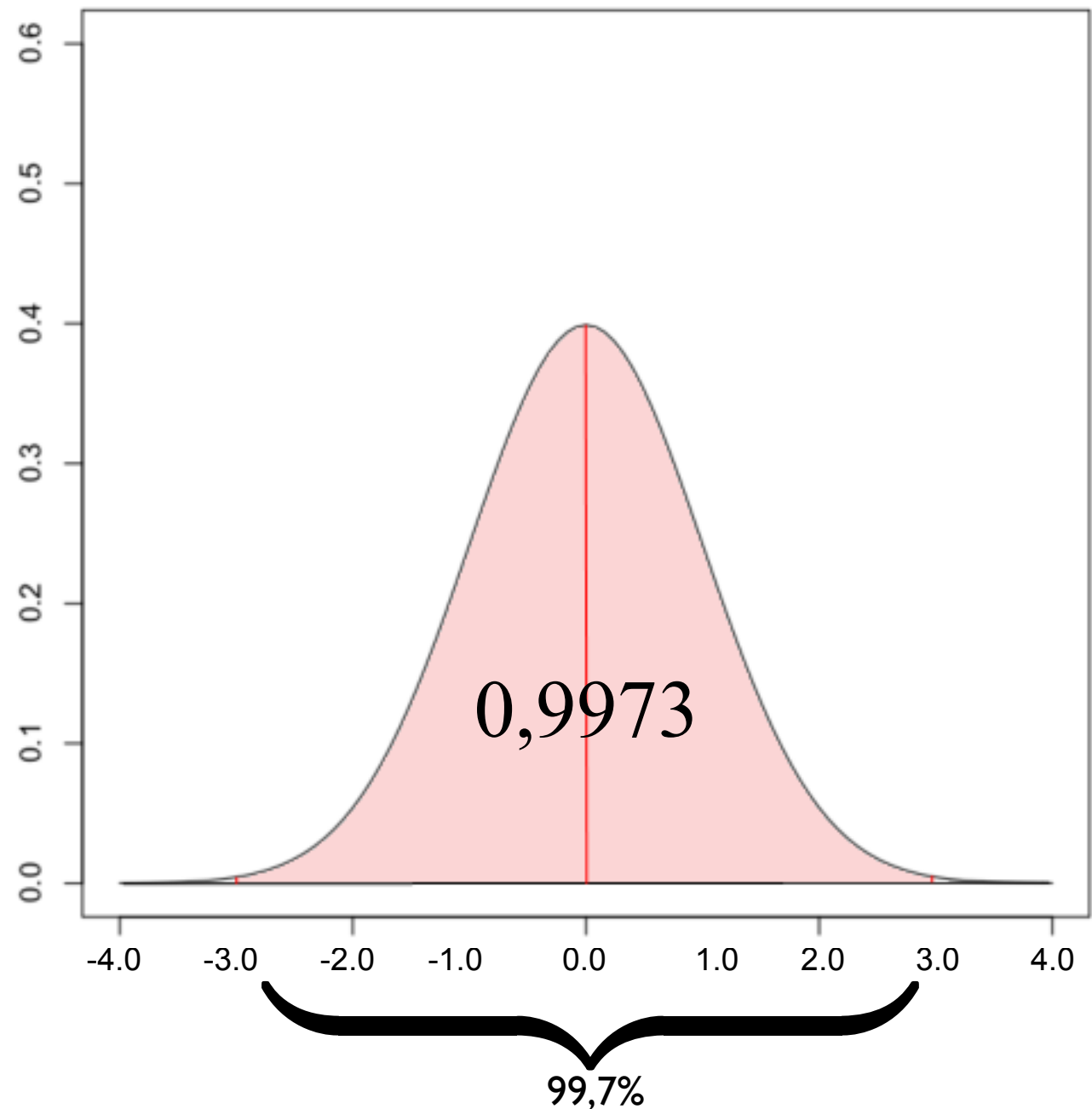
$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$



$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

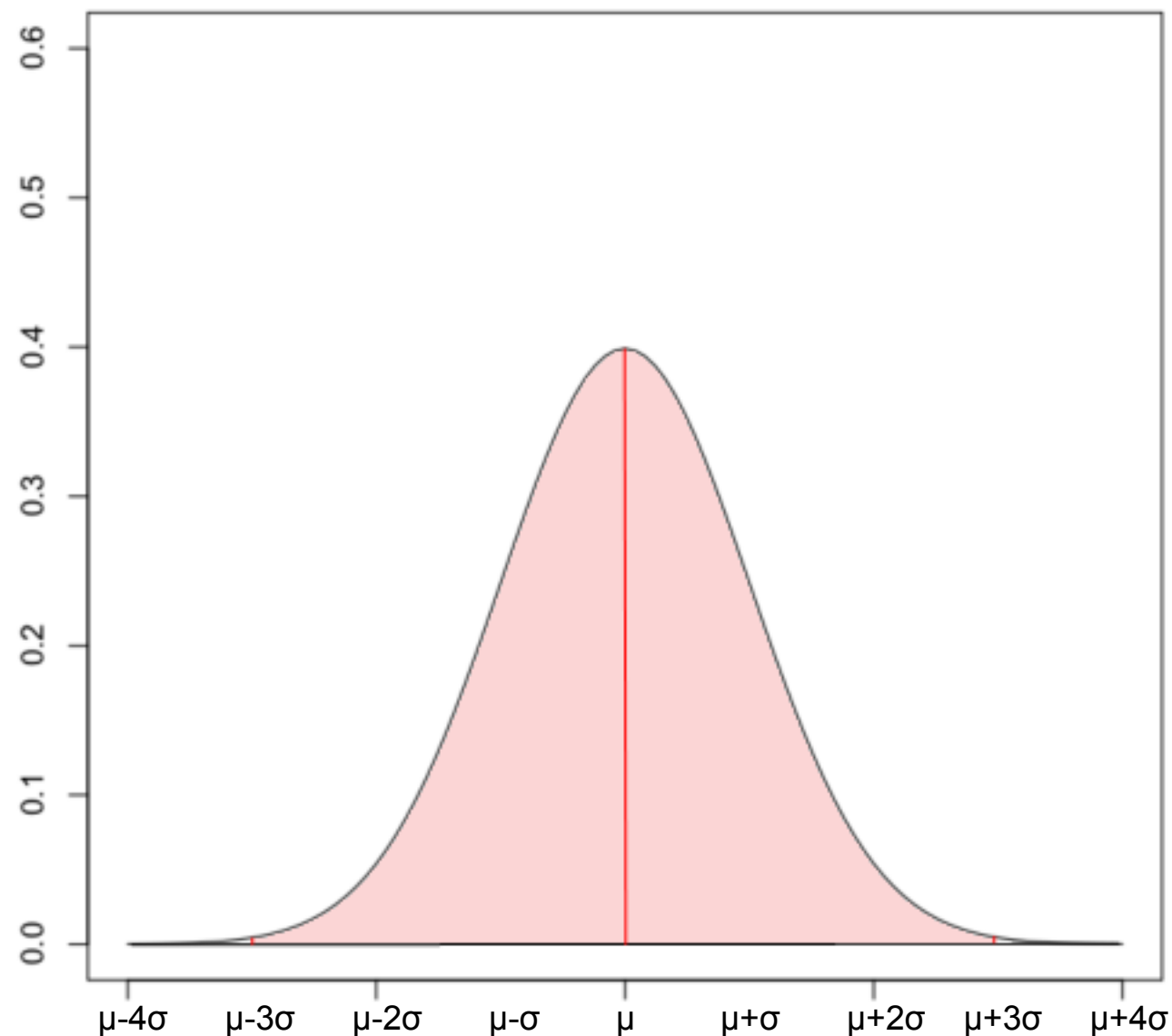
$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$



$$P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma)$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \leq Y - \mu \leq k\sigma)$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \leq Y - \mu \leq k\sigma)$$

$$= P\left(-k \leq \frac{Y - \mu}{\sigma} \leq k\right)$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \leq Y - \mu \leq k\sigma)$$

$$= P\left(-k \leq \frac{Y - \mu}{\sigma} \leq k\right) = P(-k \leq X \leq k)$$

Normální rozdělení

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \leq Y - \mu \leq k\sigma)$$

$$= P\left(-k \leq \frac{Y - \mu}{\sigma} \leq k\right) = P(-k \leq X \leq k)$$

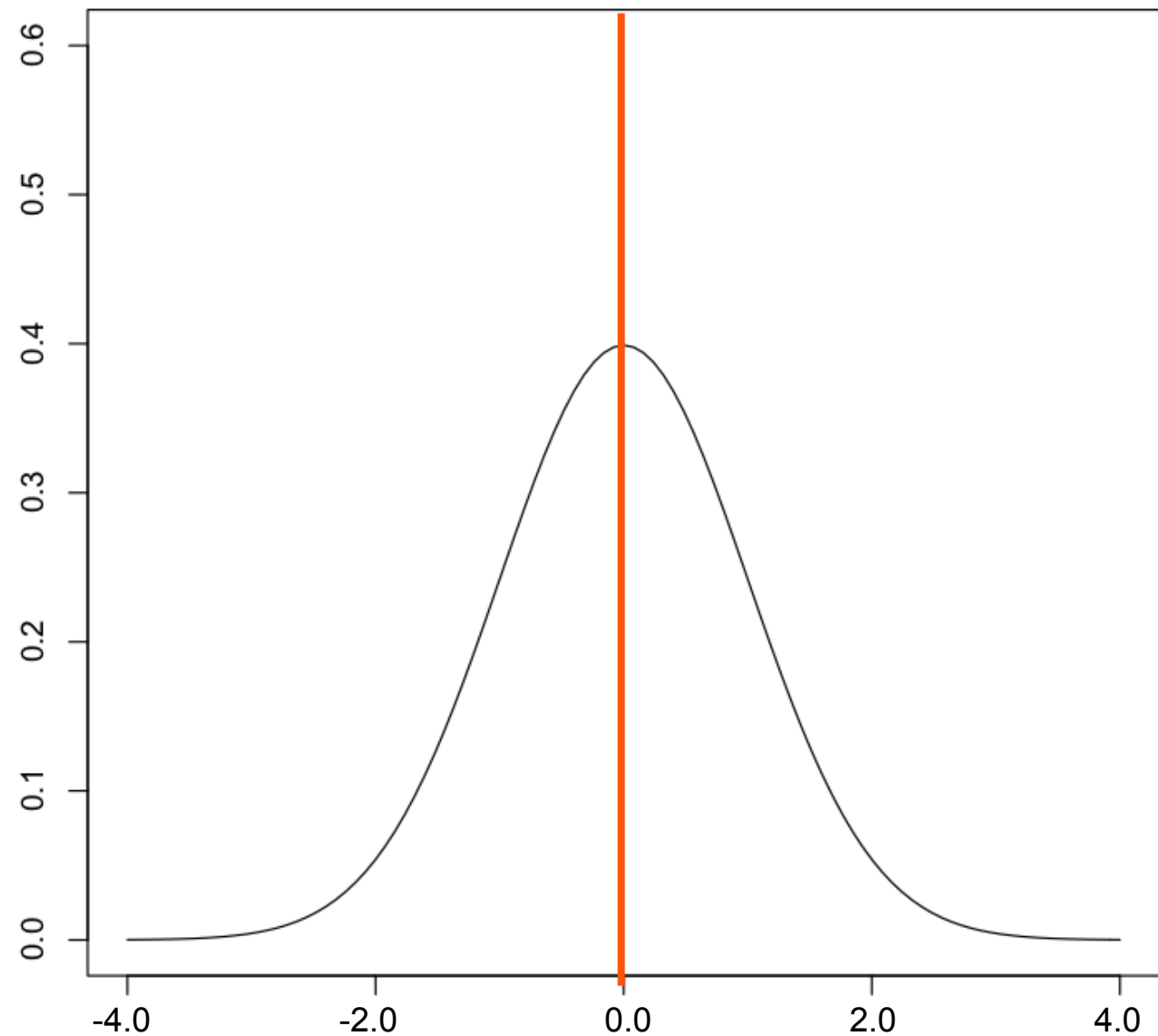
$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

$$f(x) = f(-x)$$



Normální rozdělení

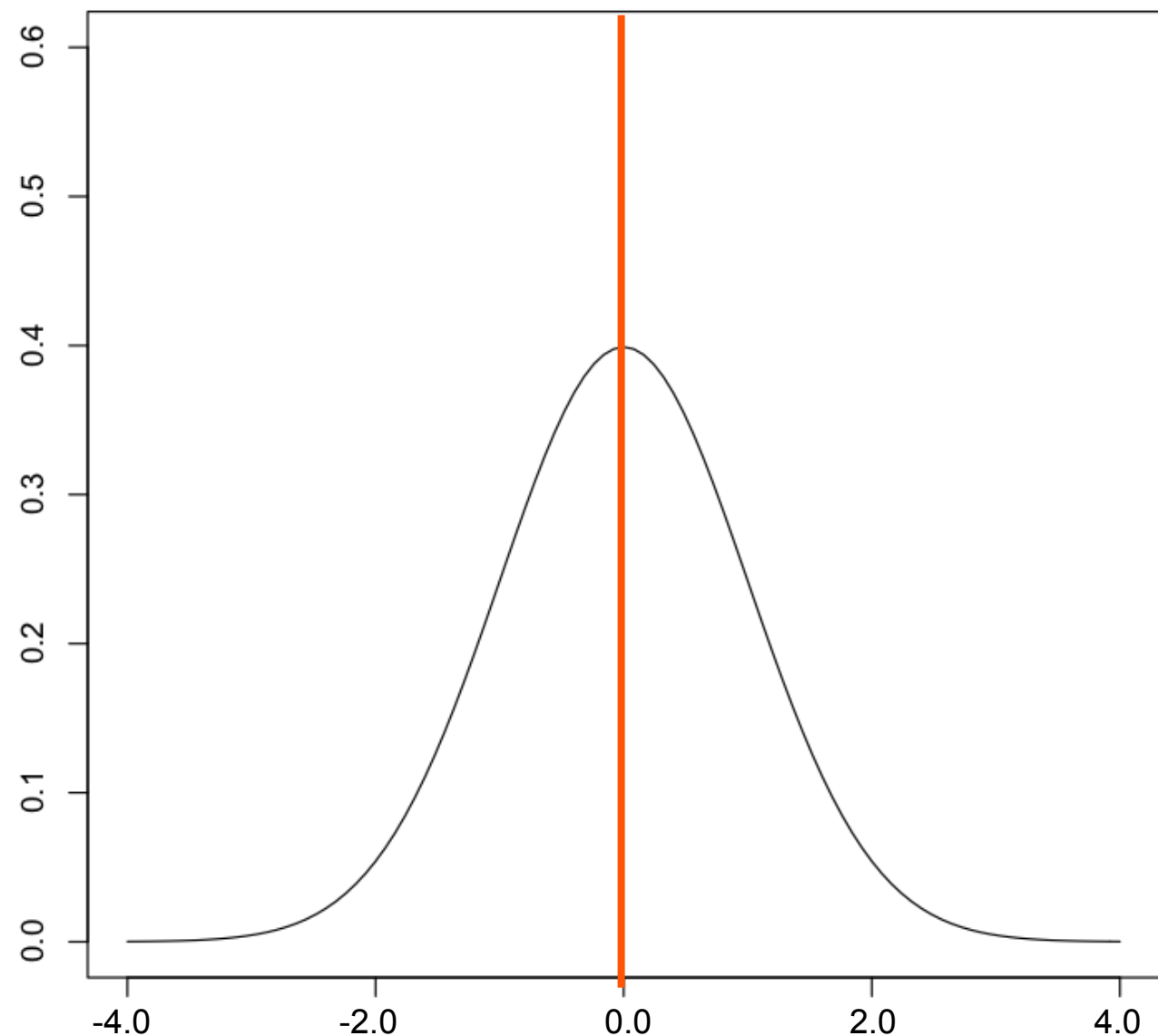
Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

Normální rozdělení

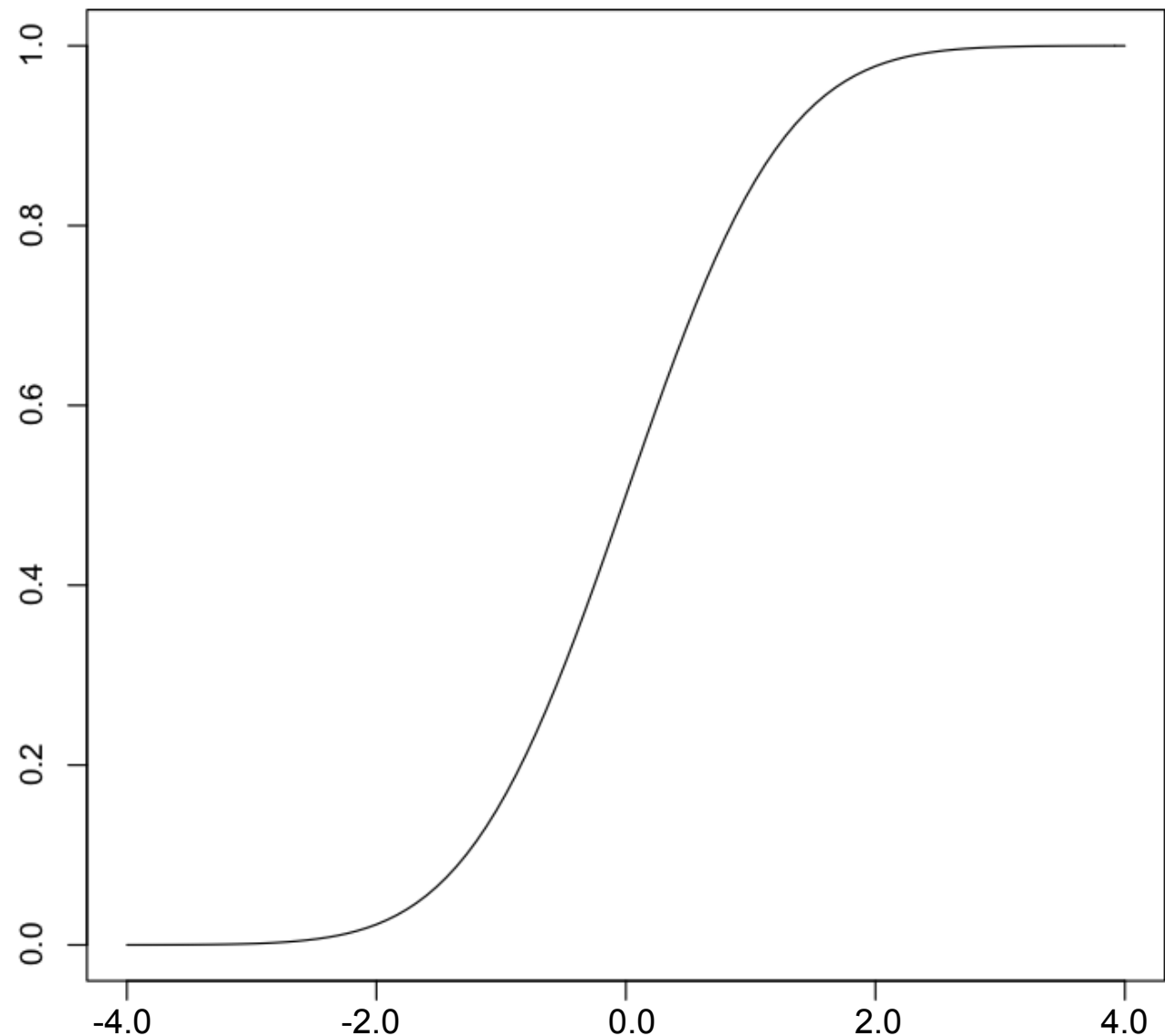
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Normální rozdělení

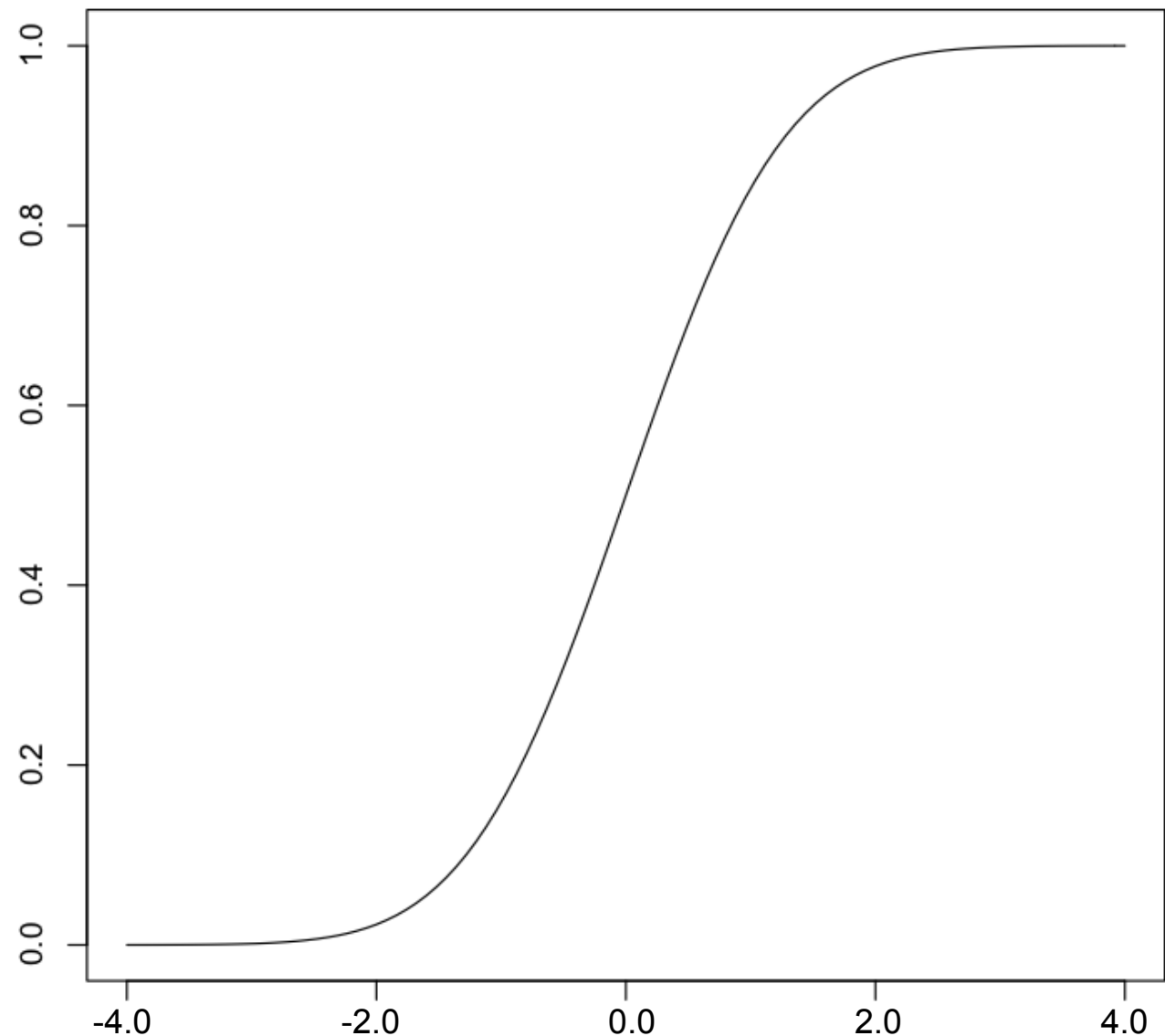
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x ?

Normální rozdělení

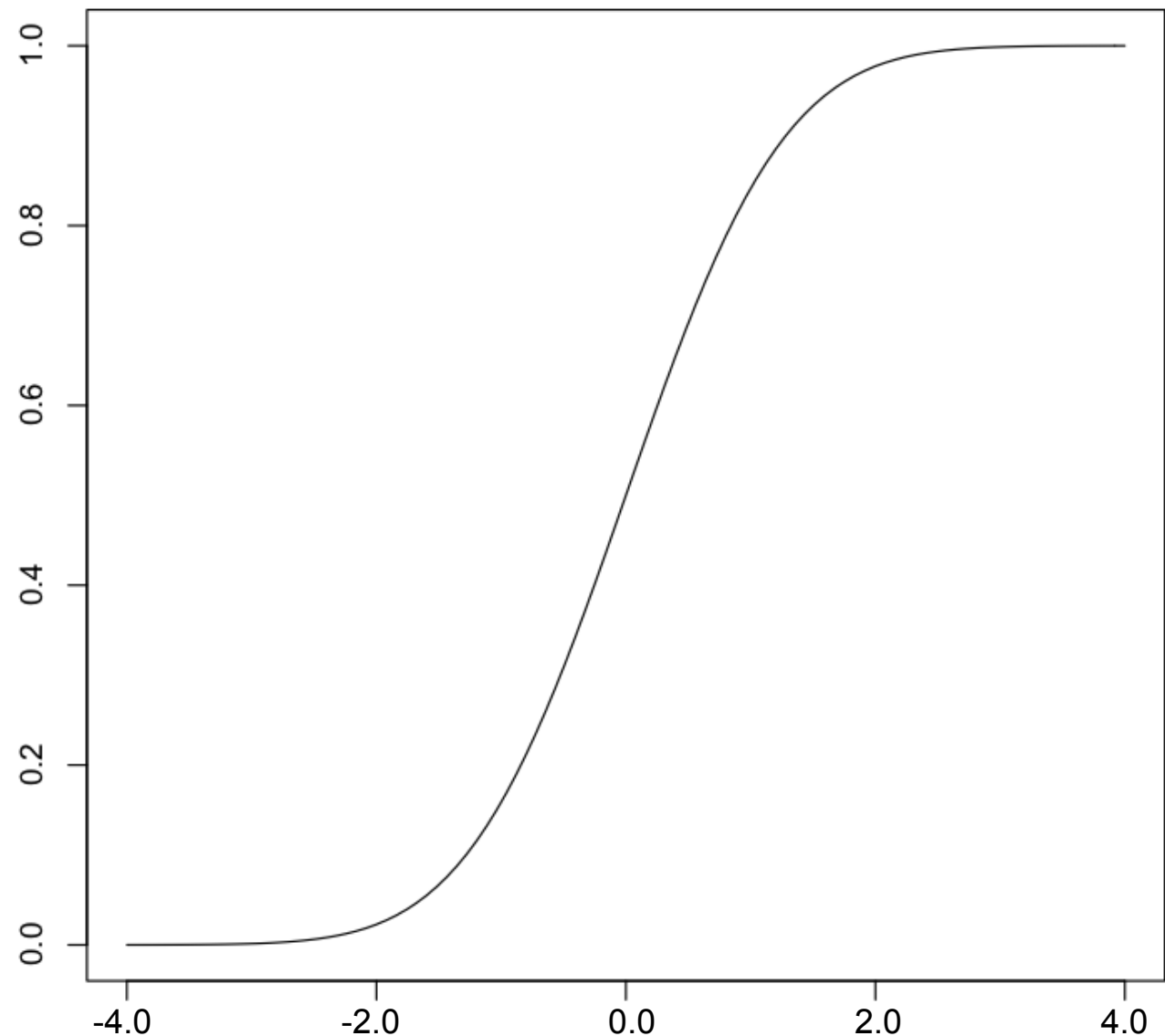
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x ?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x ?

Normální rozdělení

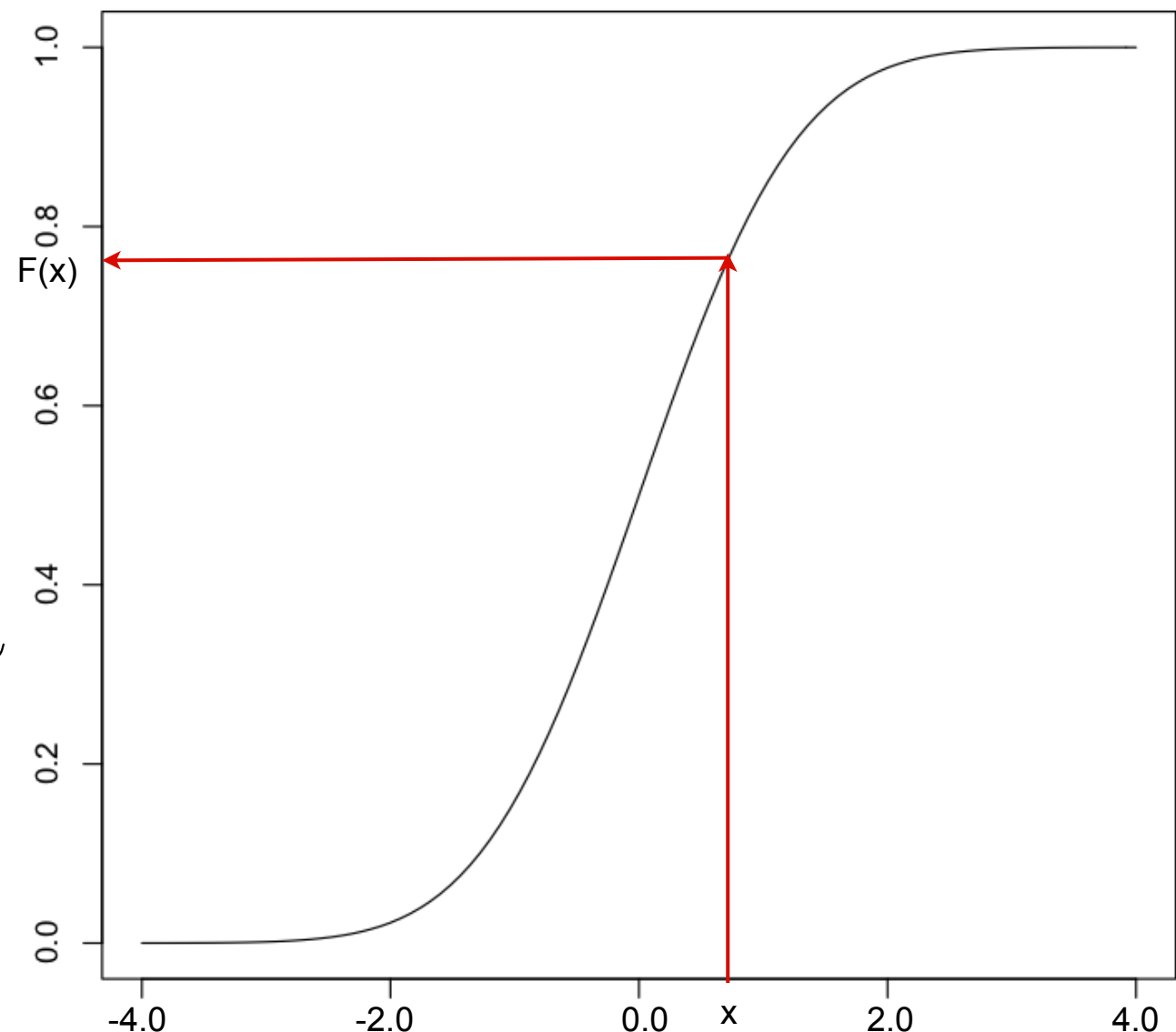
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x ?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x ?

Normální rozdělení

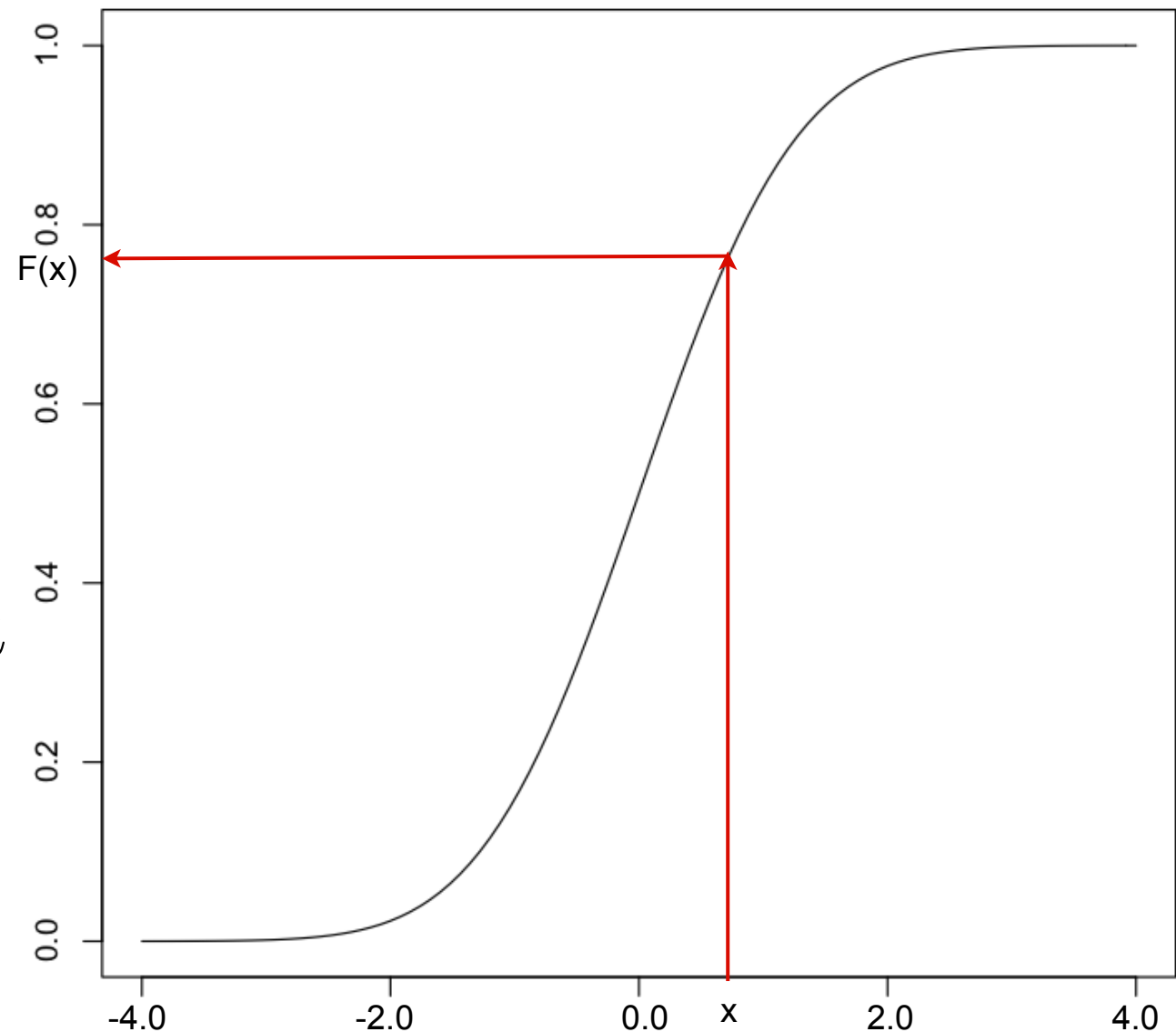
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x ?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x ?

S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X větší než x ?

Normální rozdělení

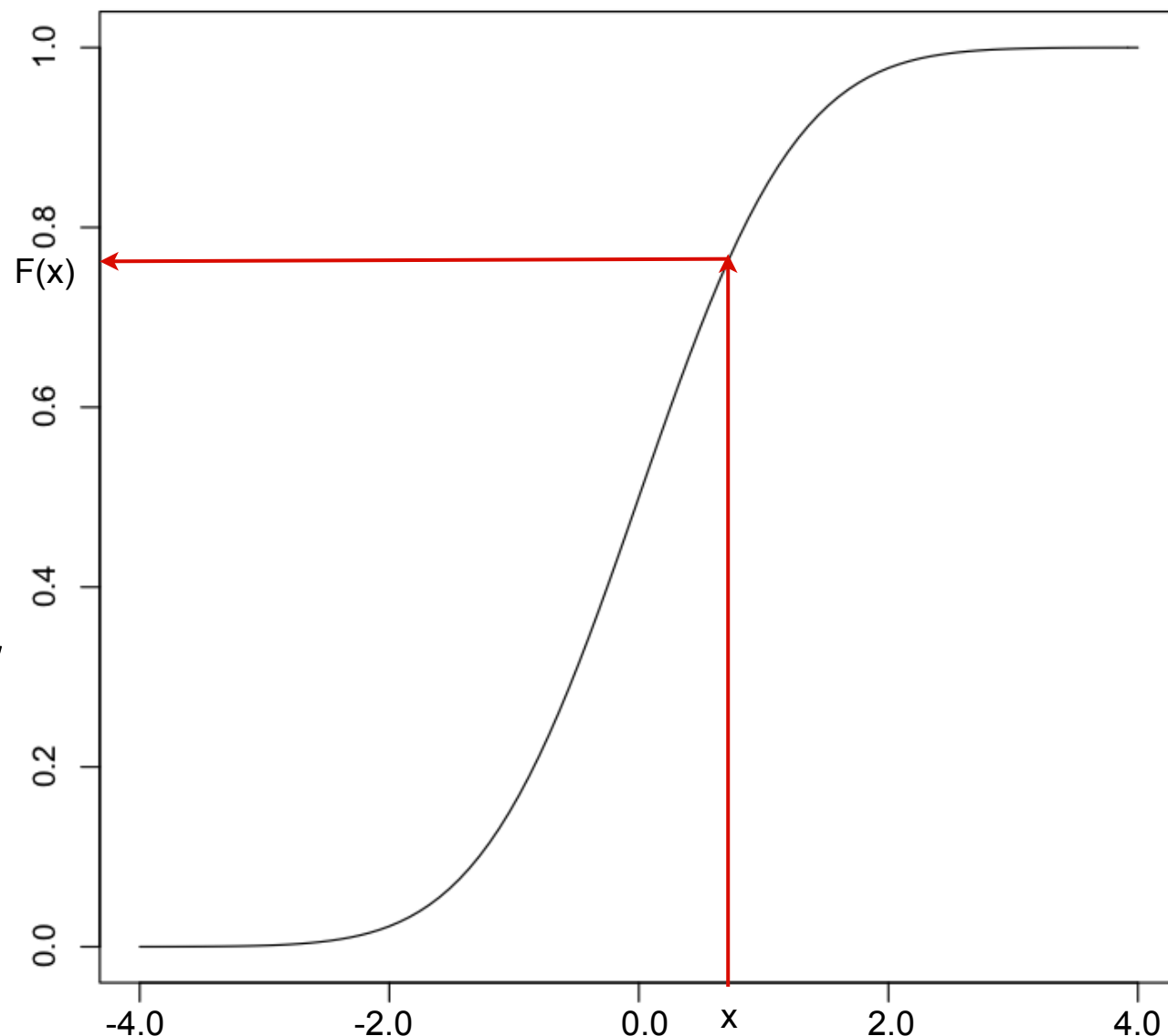
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x ?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x ?

S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X větší než x ?

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$

Normální rozdělení

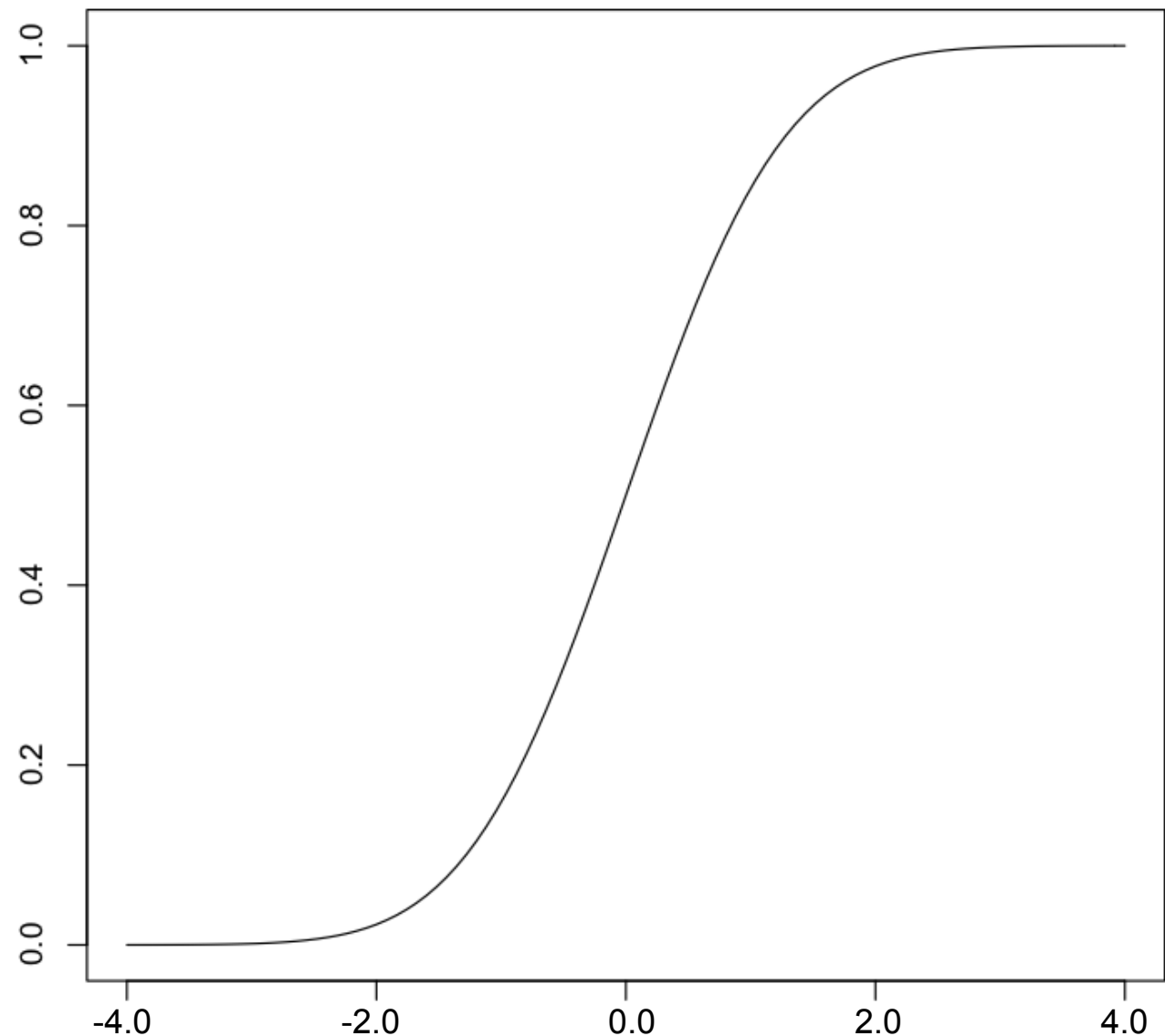
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Normální rozdělení

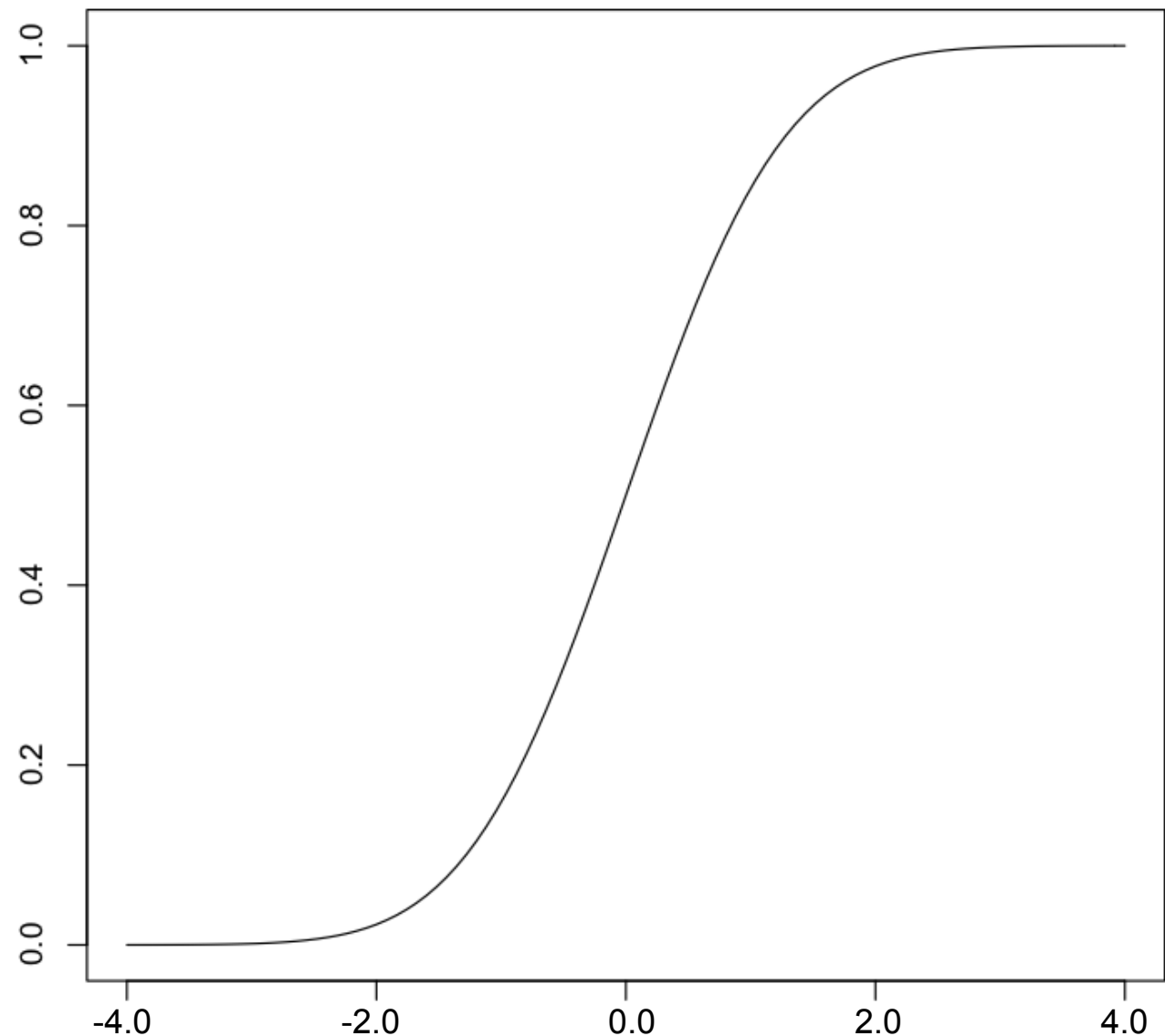
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p ?

Normální rozdělení

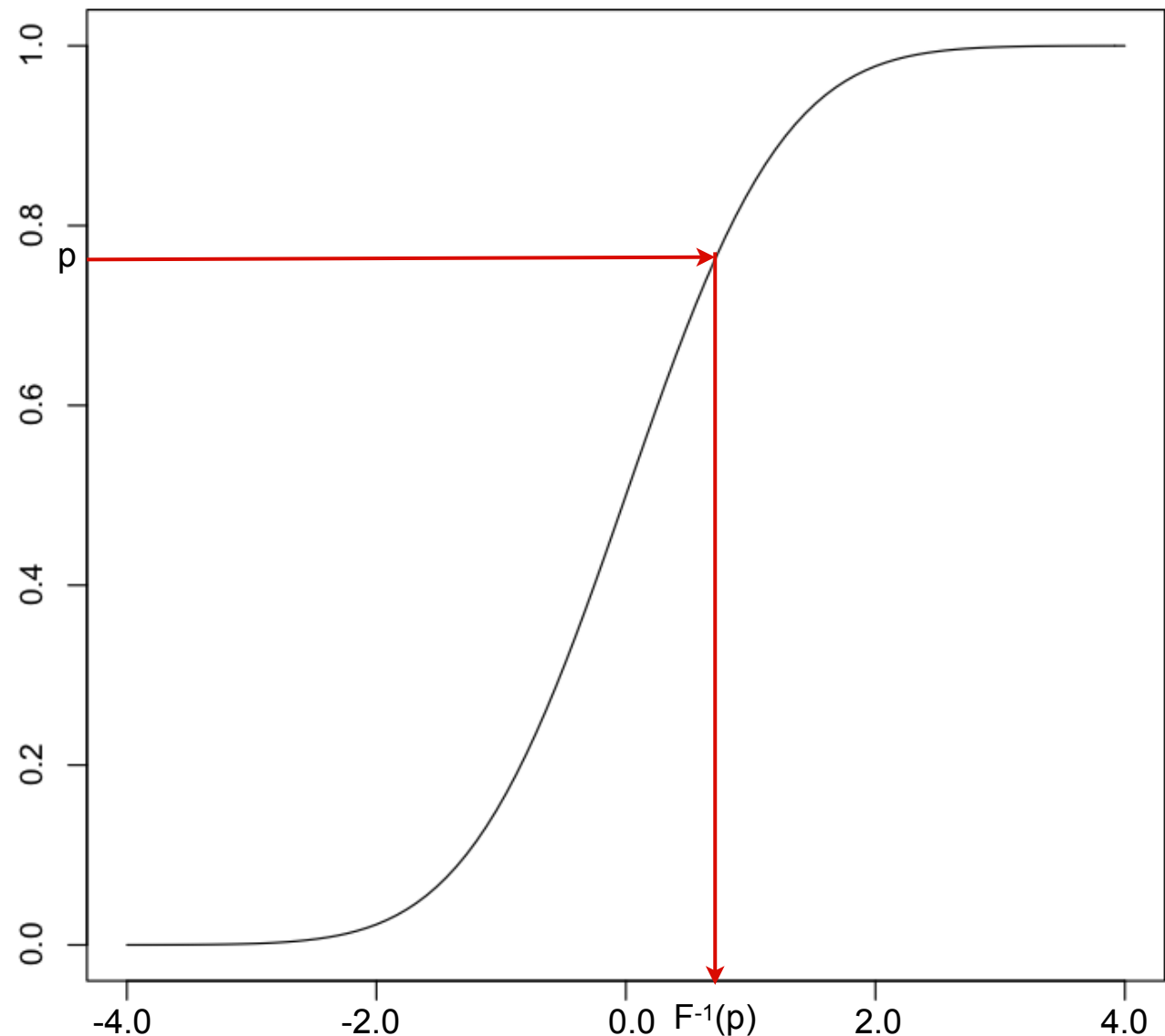
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p ?

Normální rozdělení

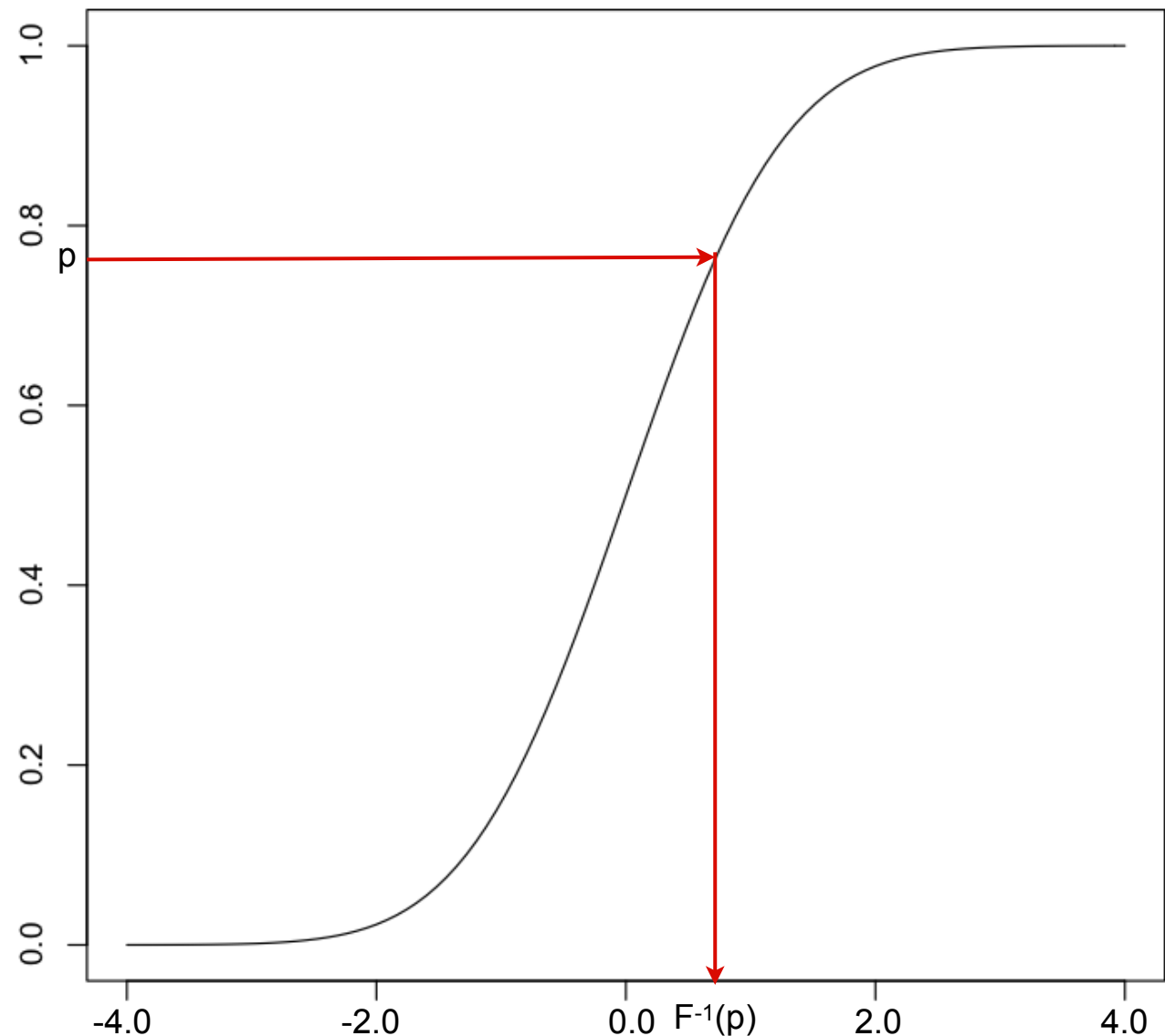
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p ?

$$x_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce

Normální rozdělení

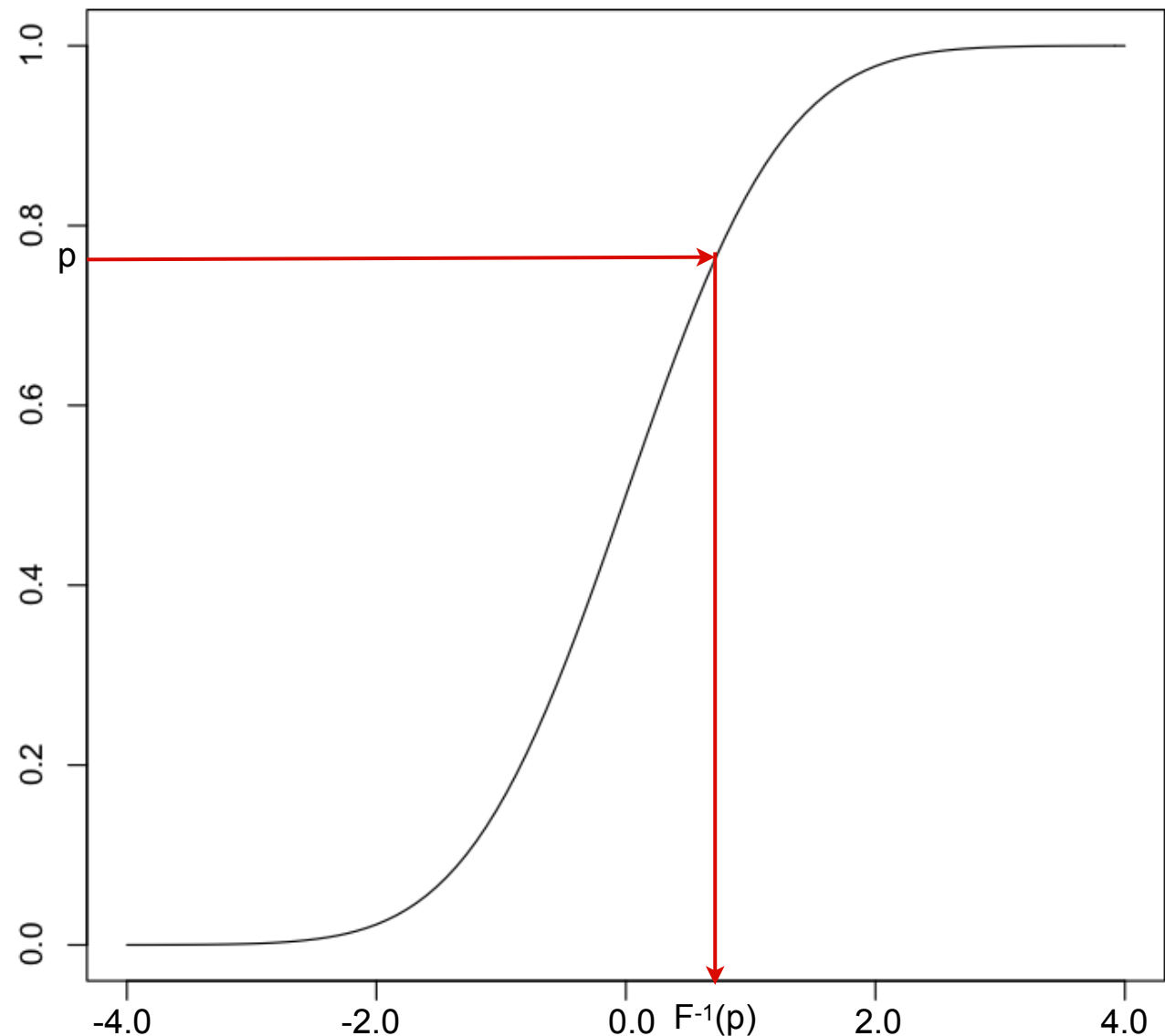
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p ?

$$x_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce

Jakých hodnot bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností p ?

Normální rozdělení

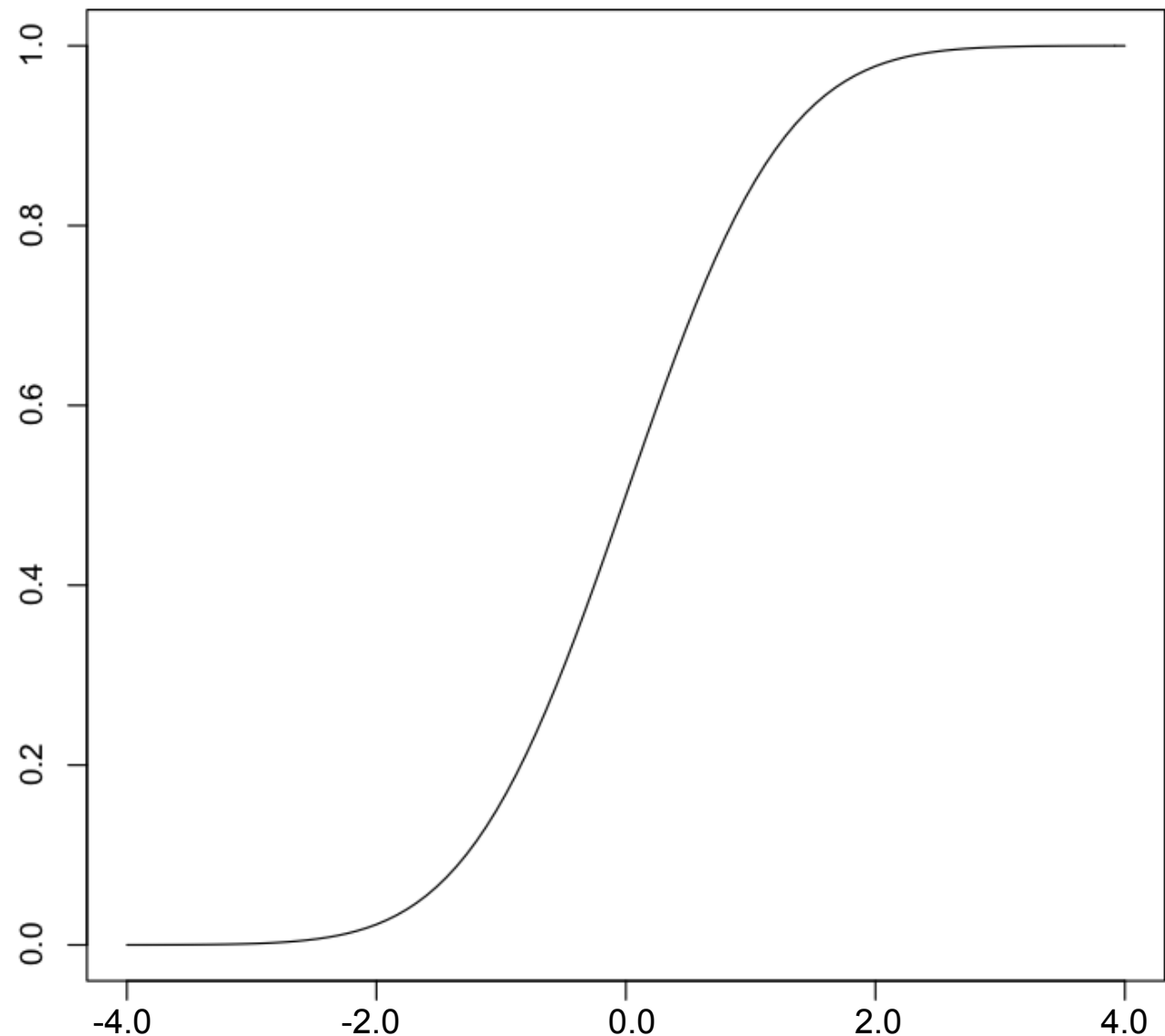
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

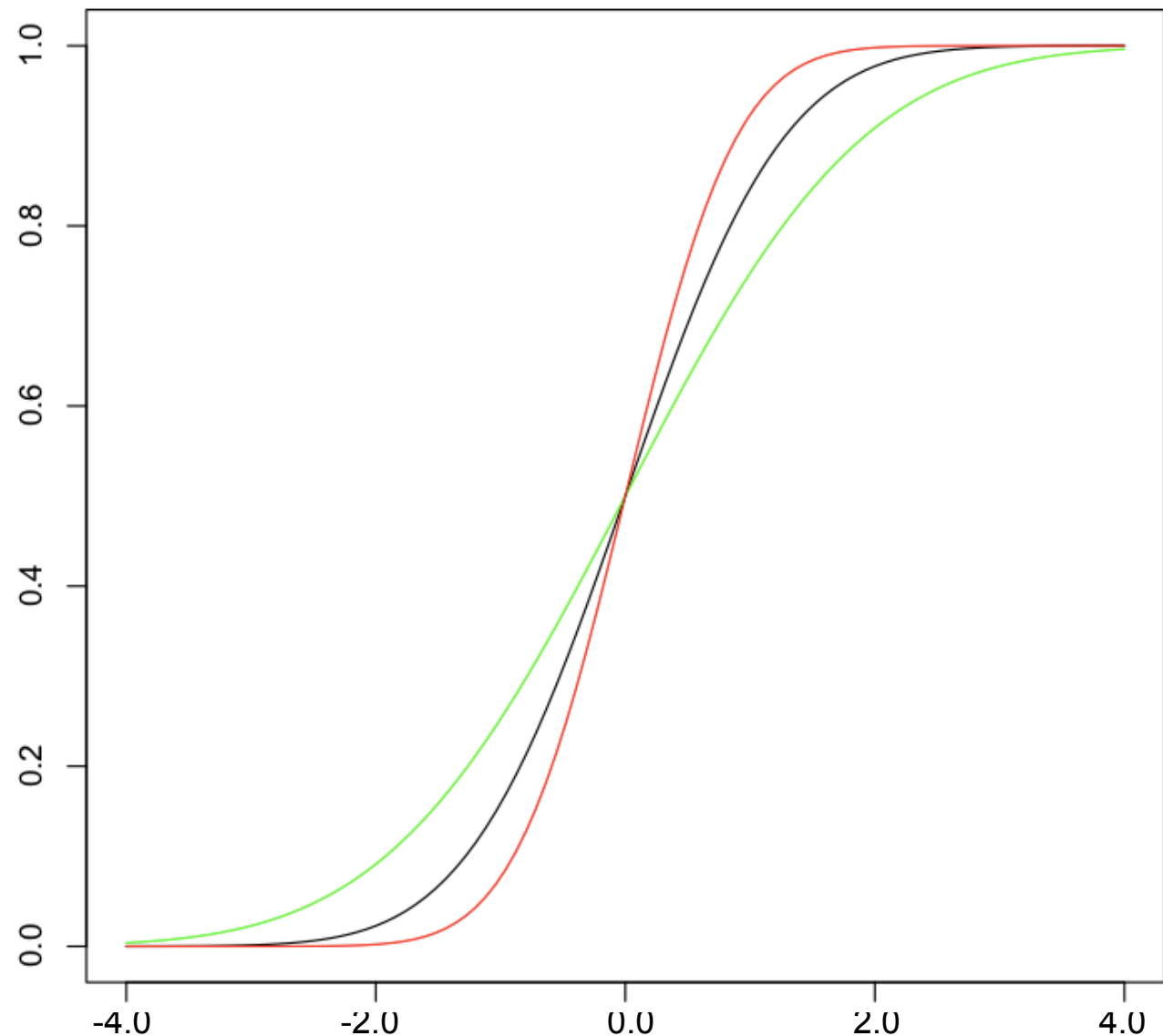
$x \in \mathbb{R}$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

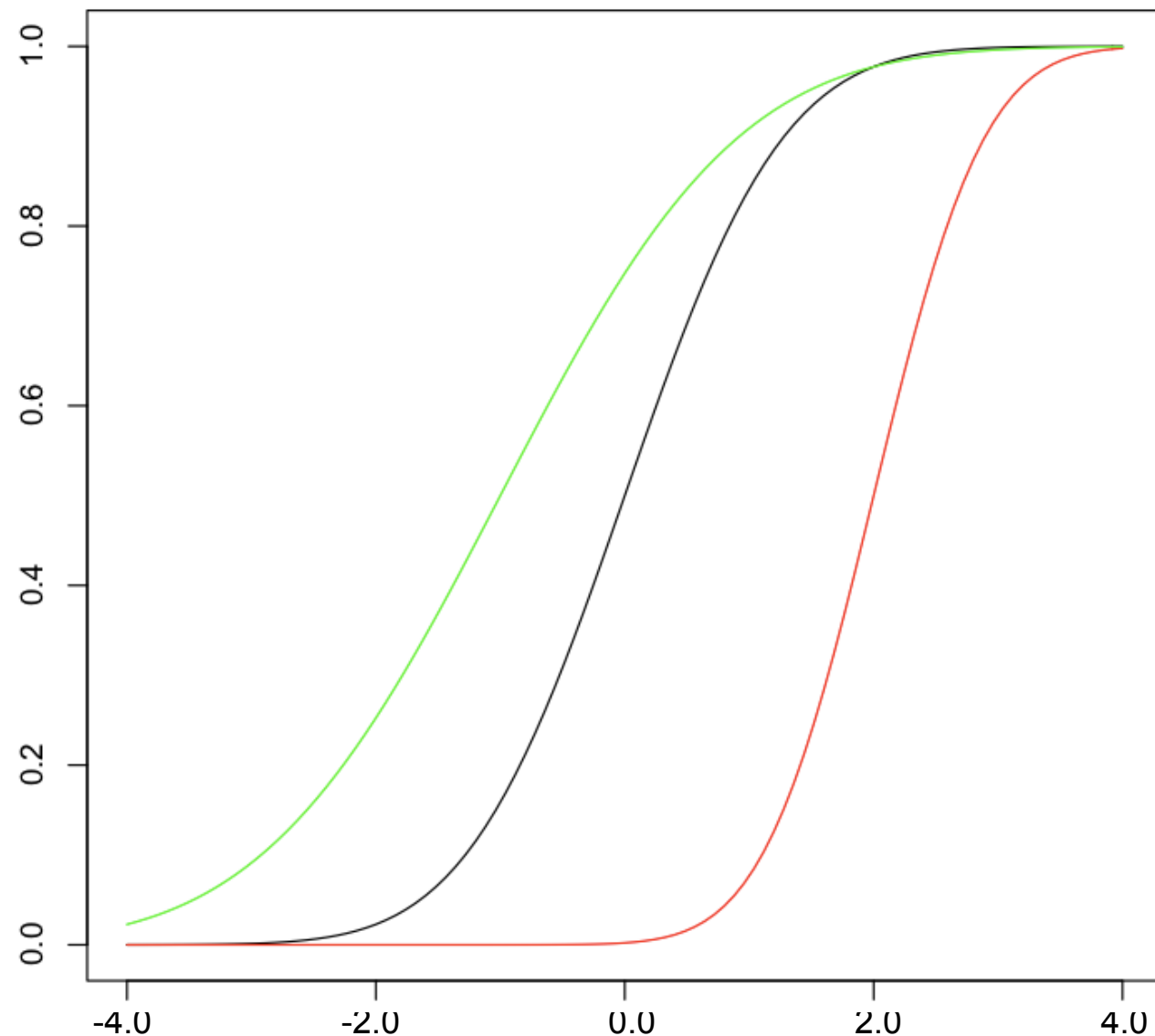
$x \in \mathbb{R}$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$x \in R$

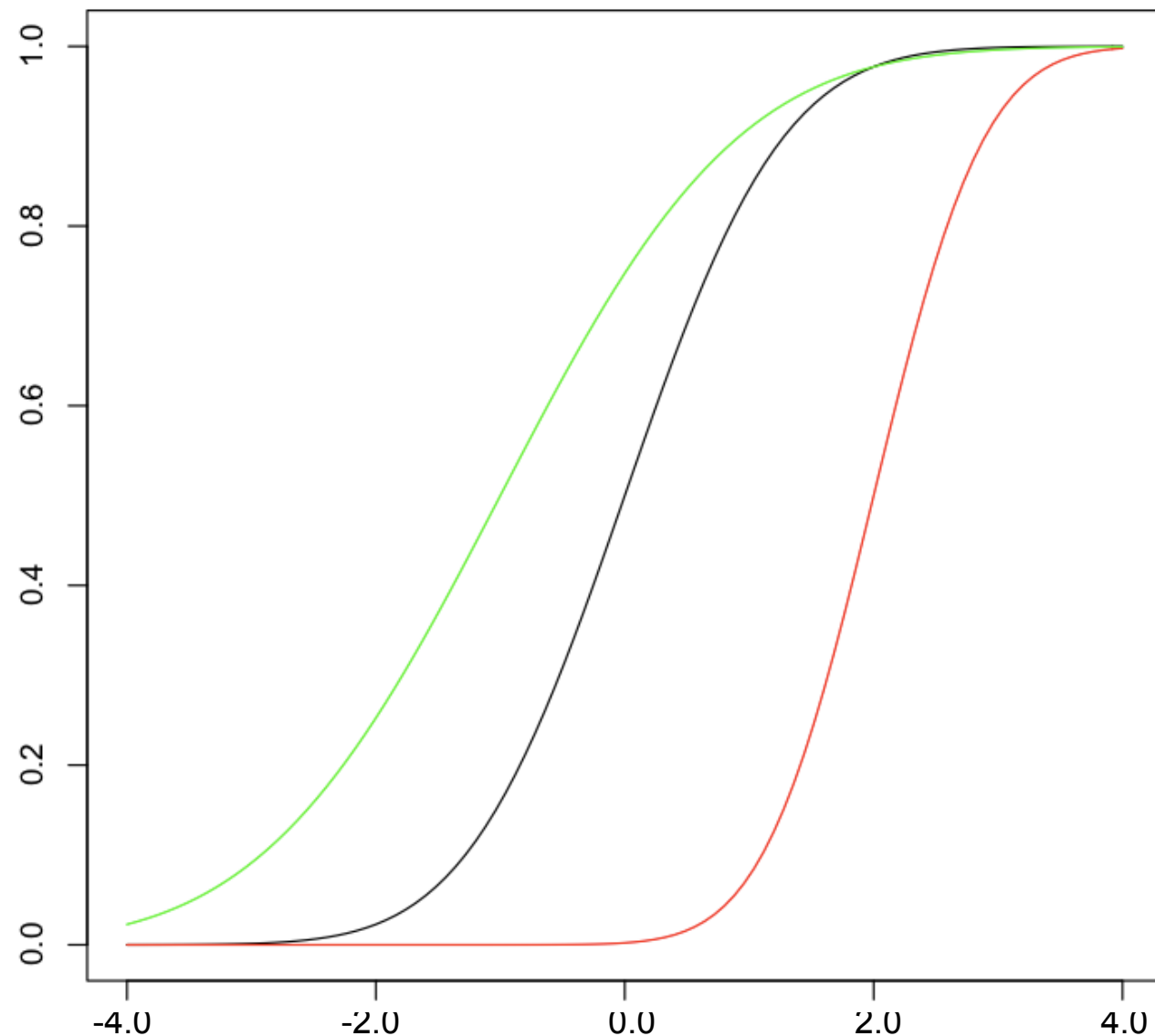
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce

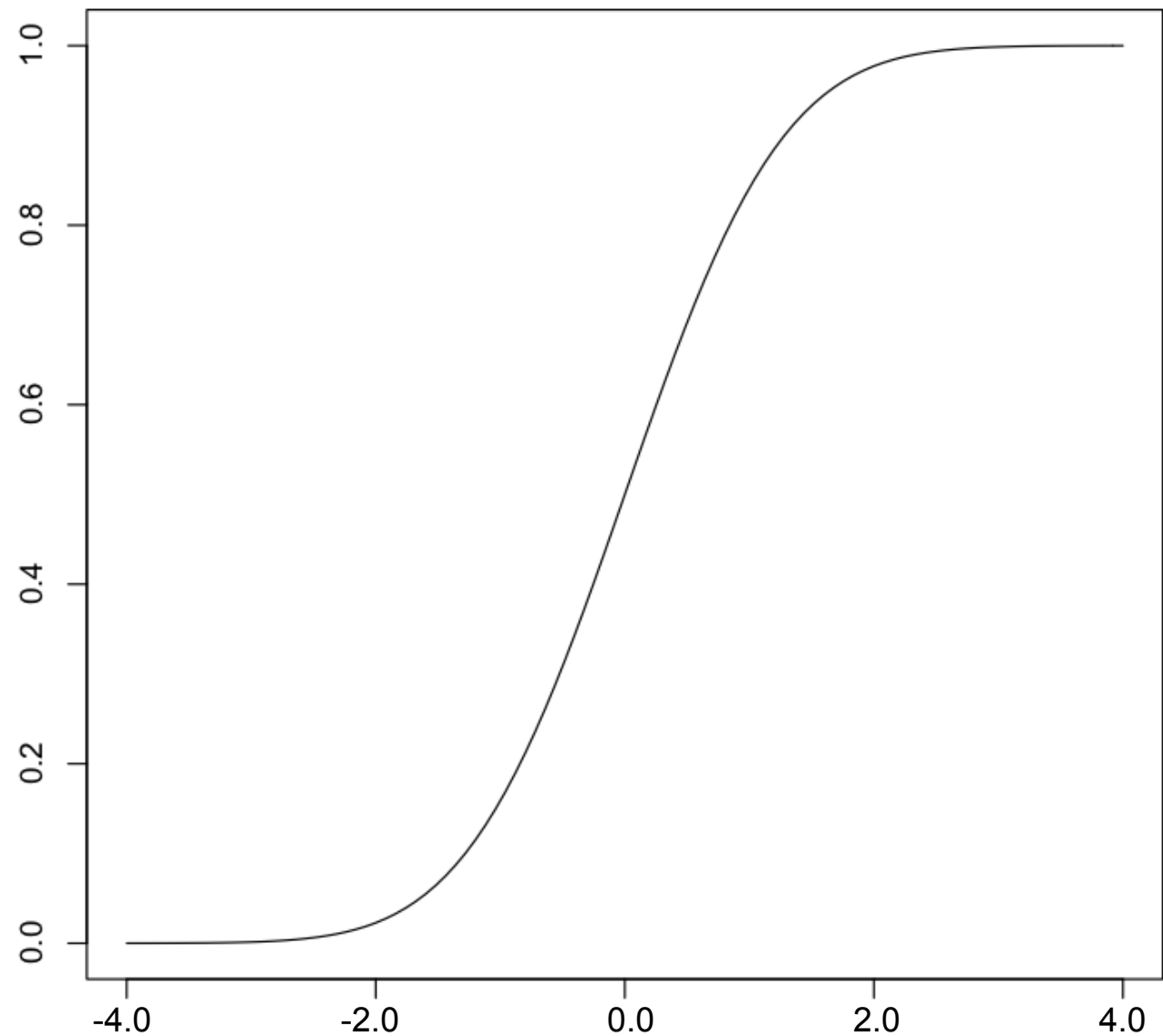
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad x \in R$$

Normální rozdělení

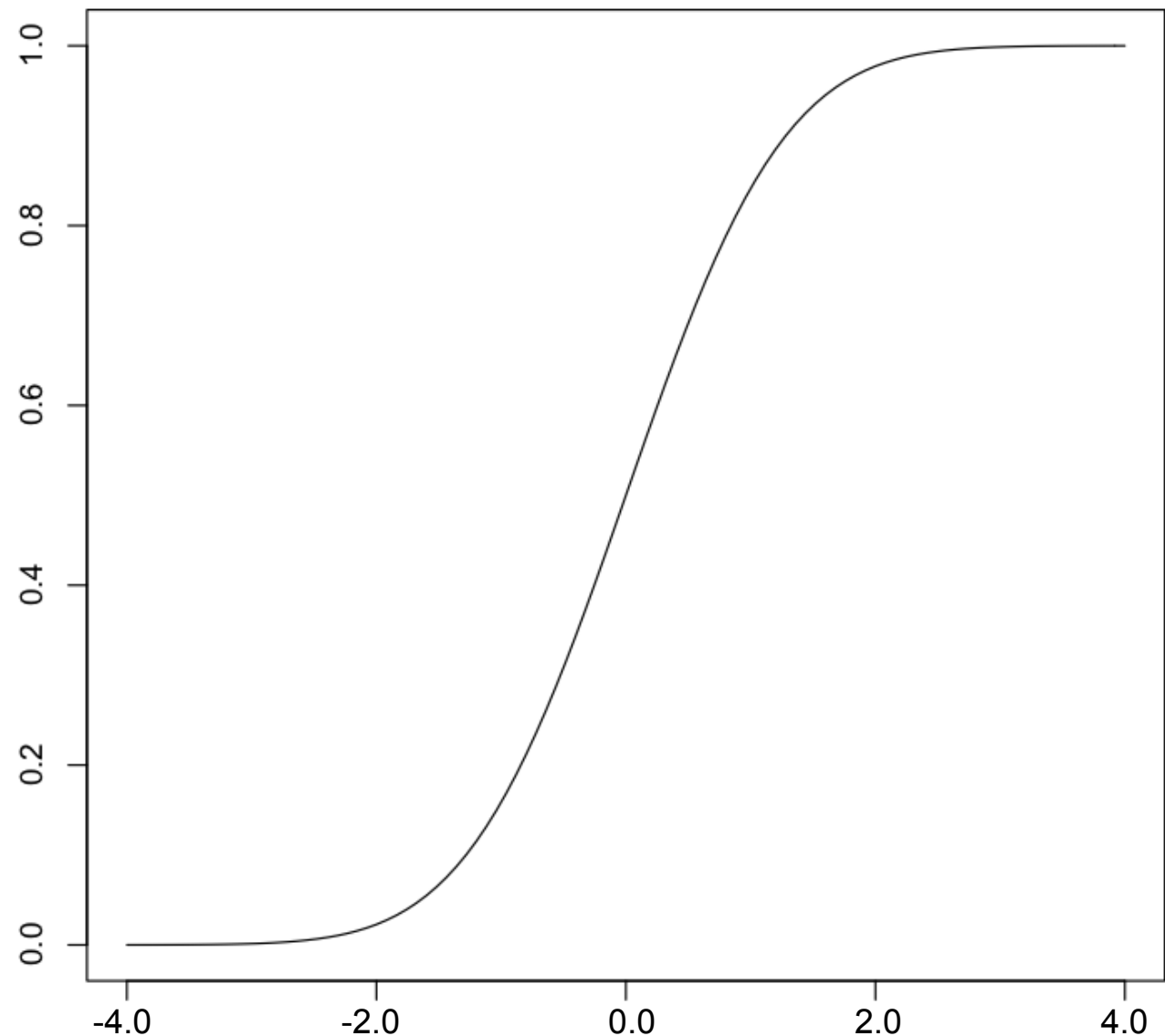
S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?



Normální rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?

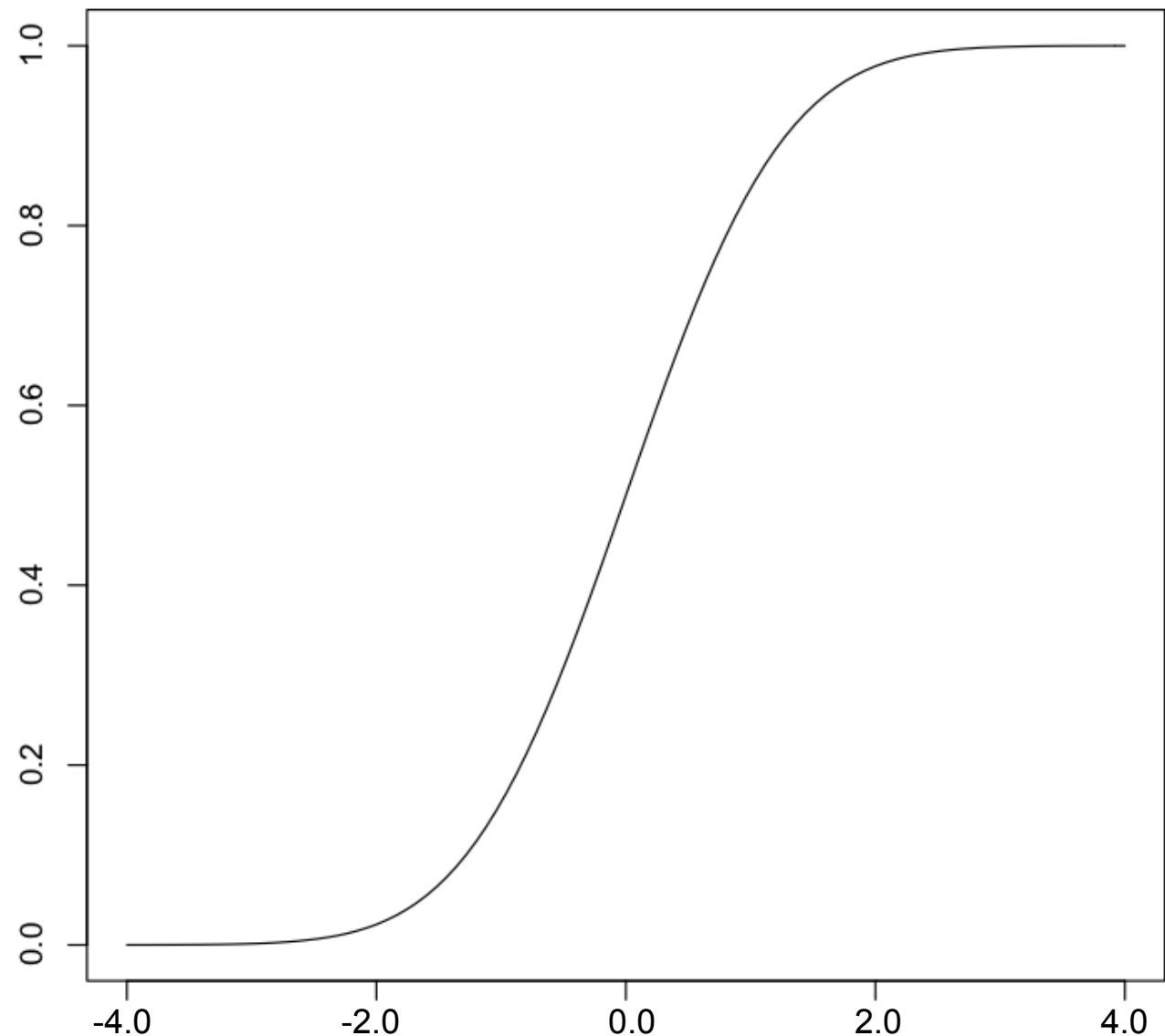
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



Normální rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

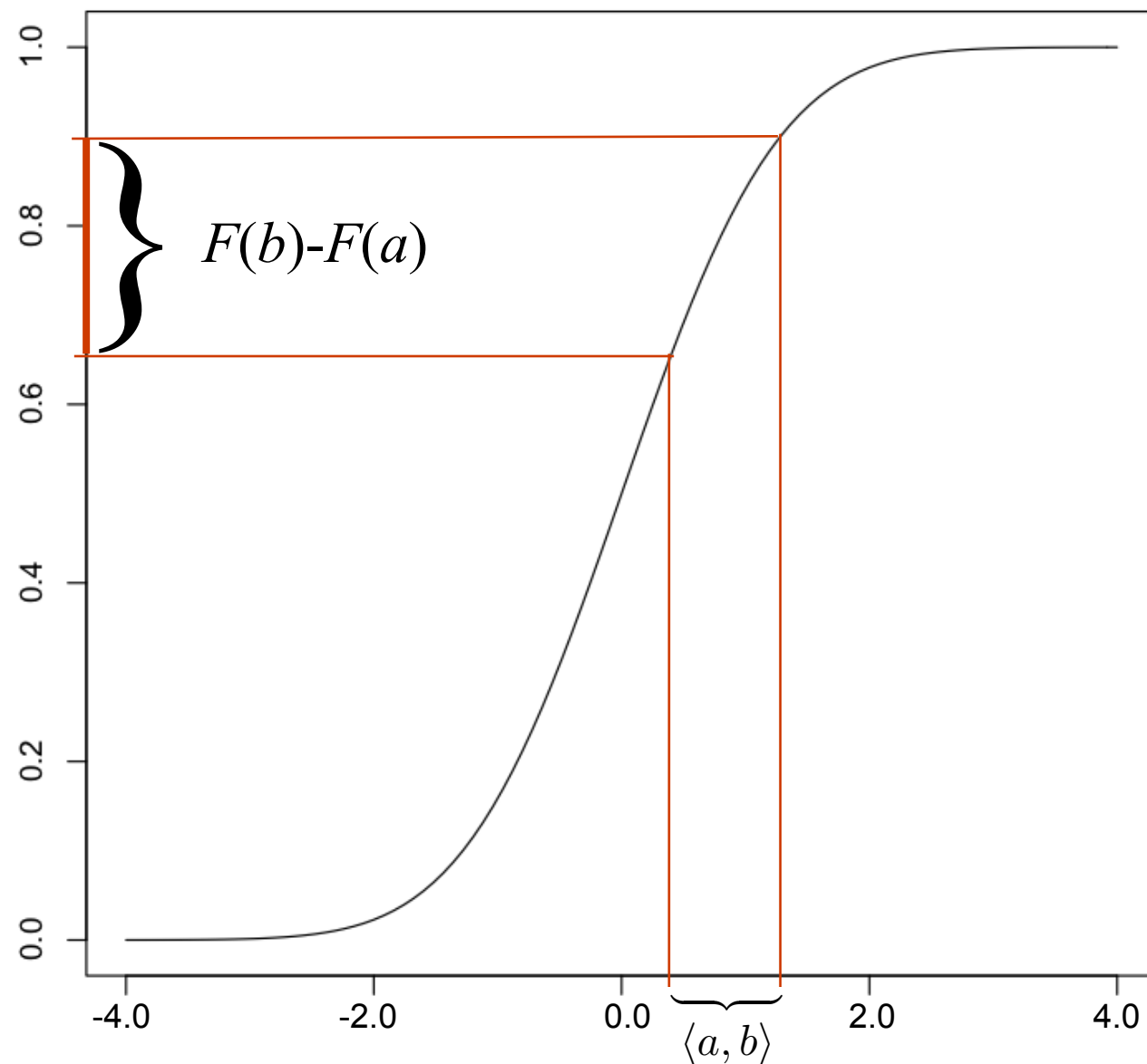


Normální rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$
$$= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

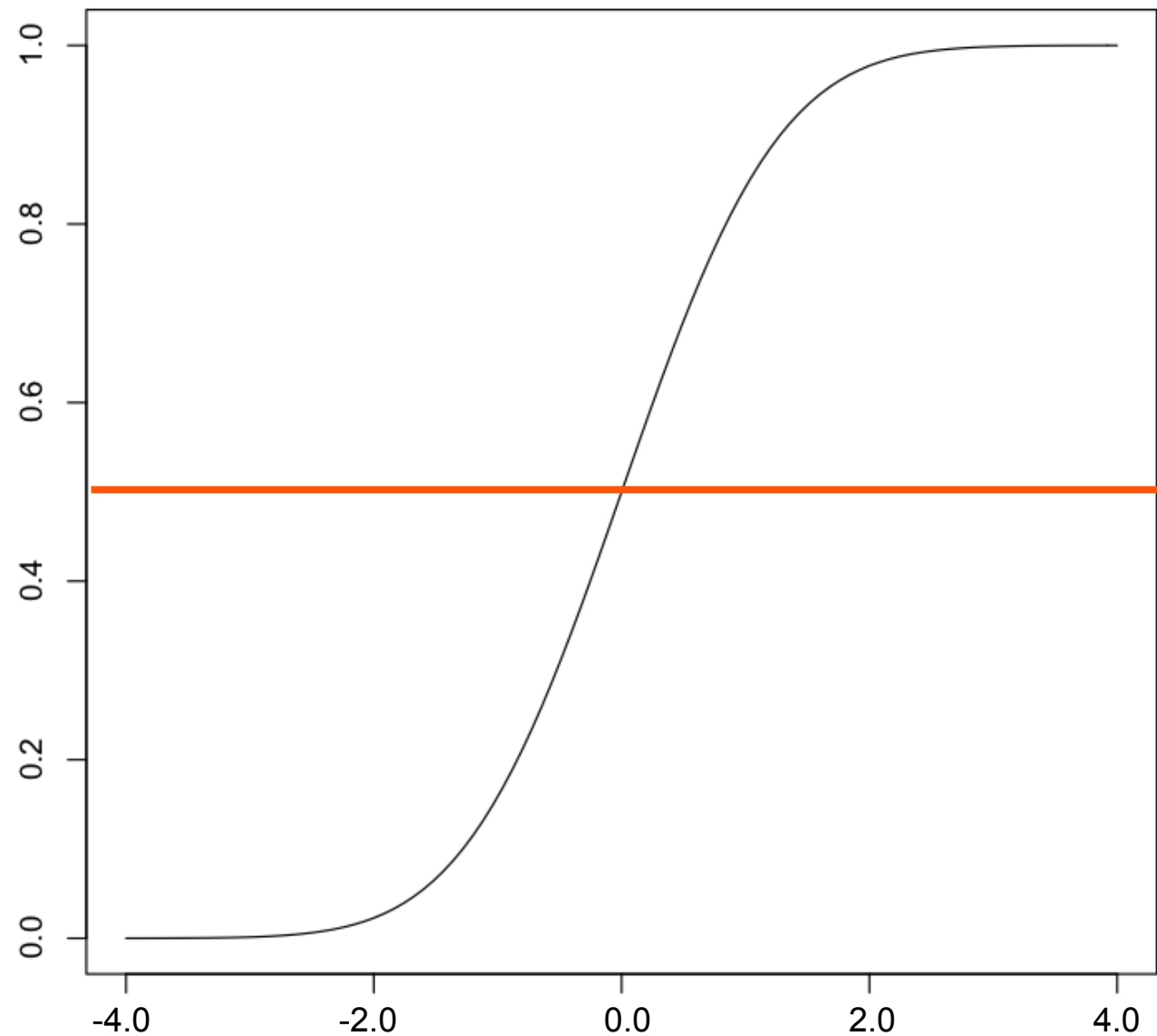


Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

$$f(x) = f(-x)$$



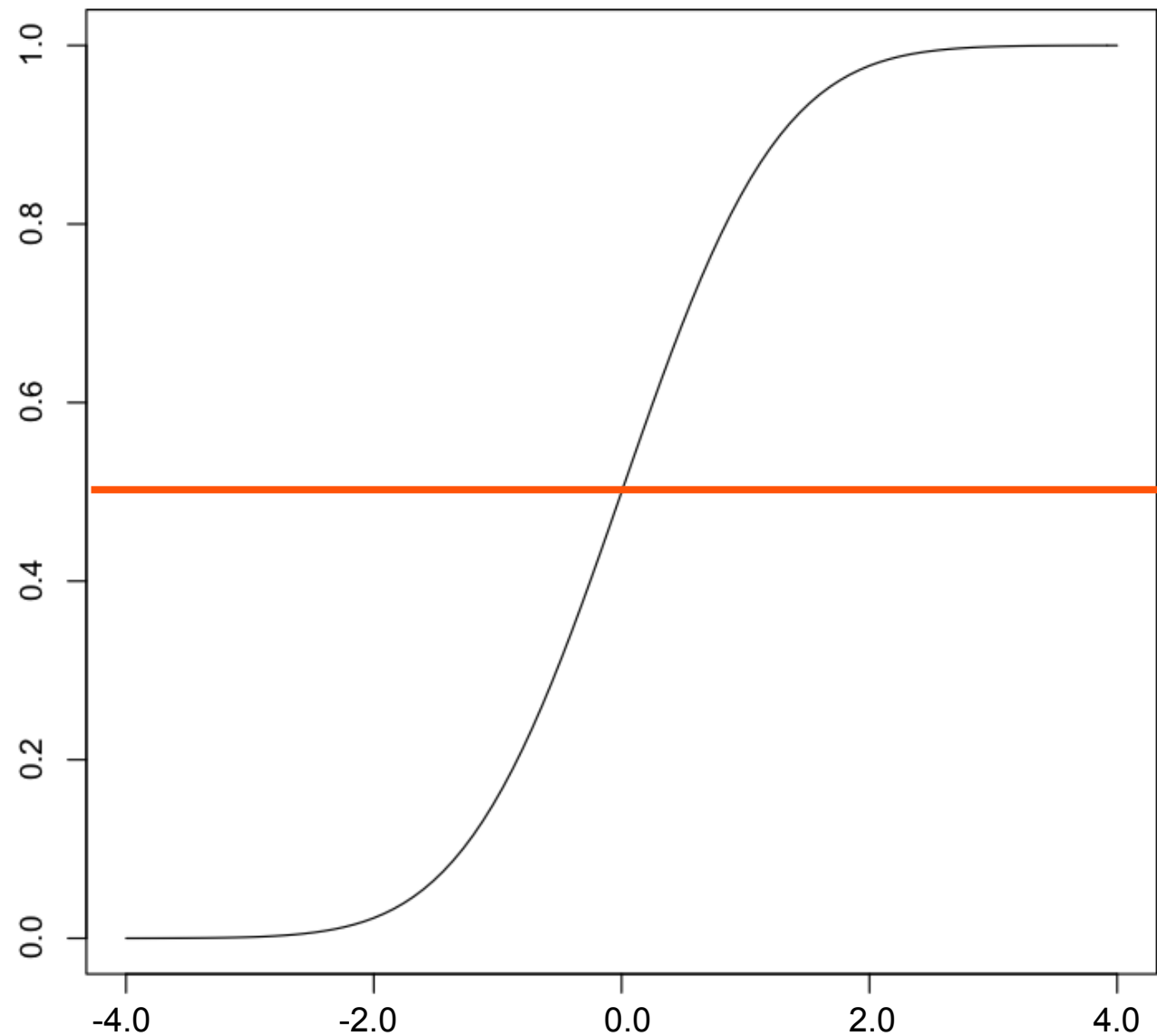
Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$



Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

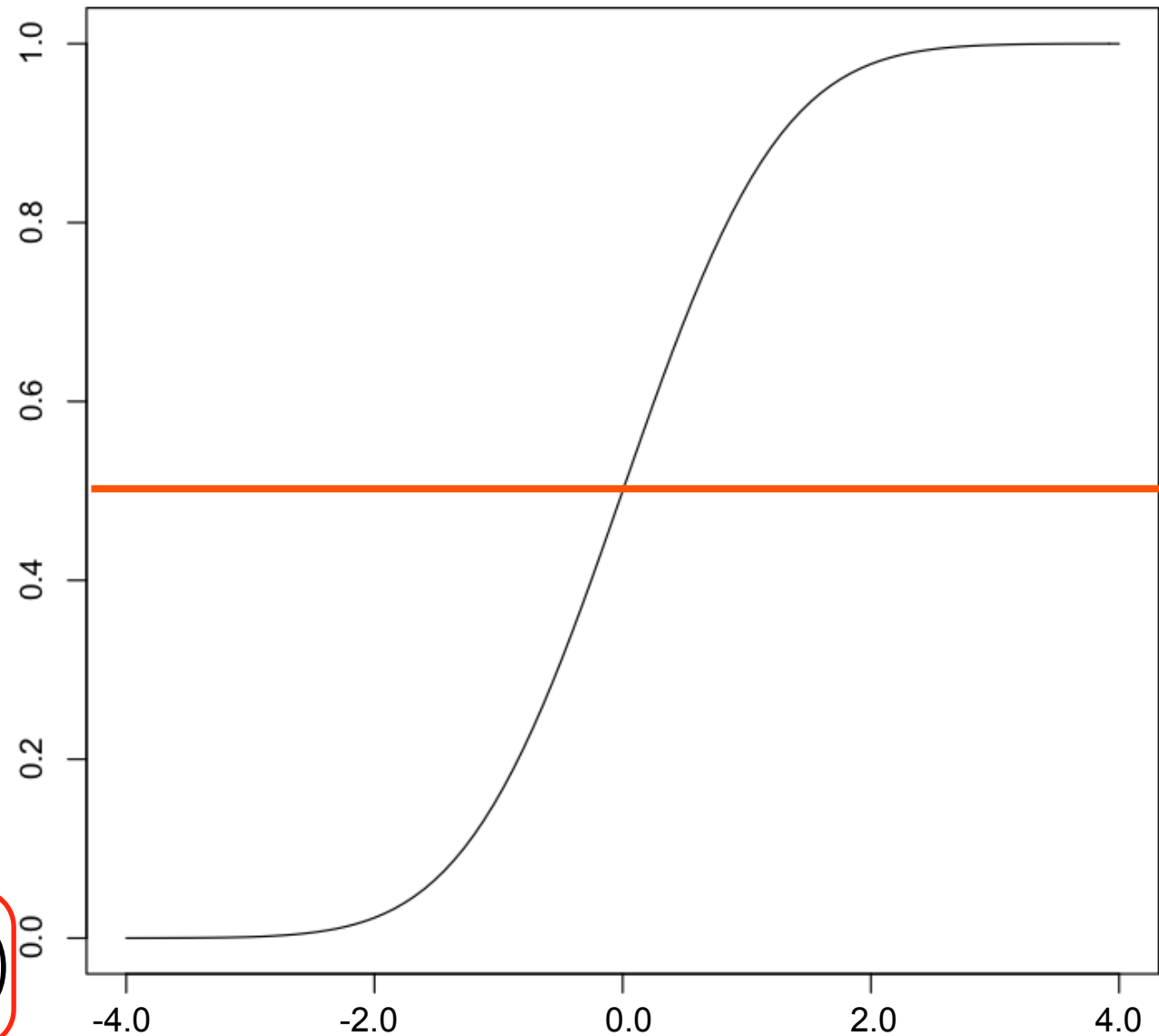
$$f(x) = f(-x)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x)$$



Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

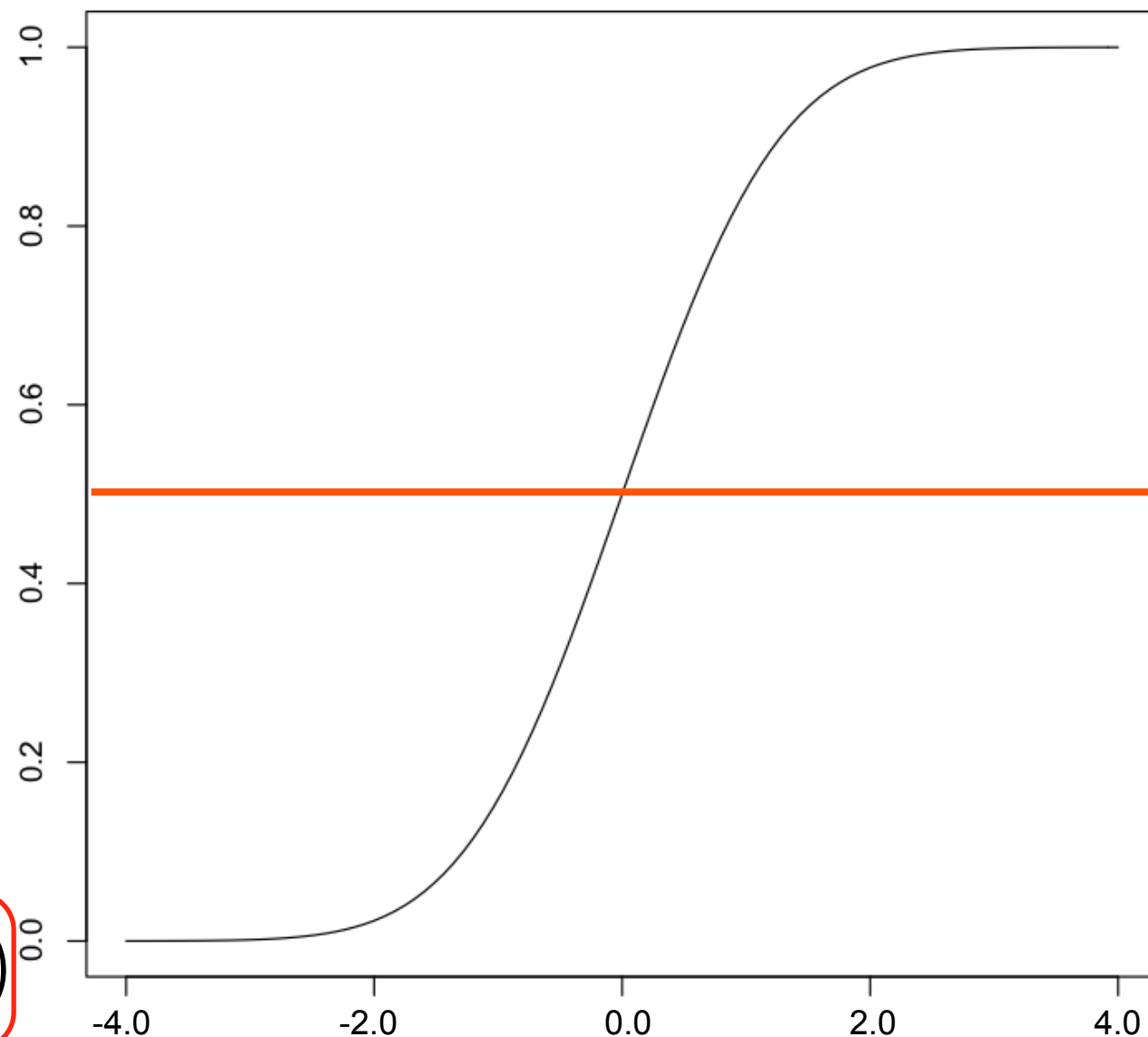
$$f(x) = f(-x)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x)$$



$$P(|X| \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$$

Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

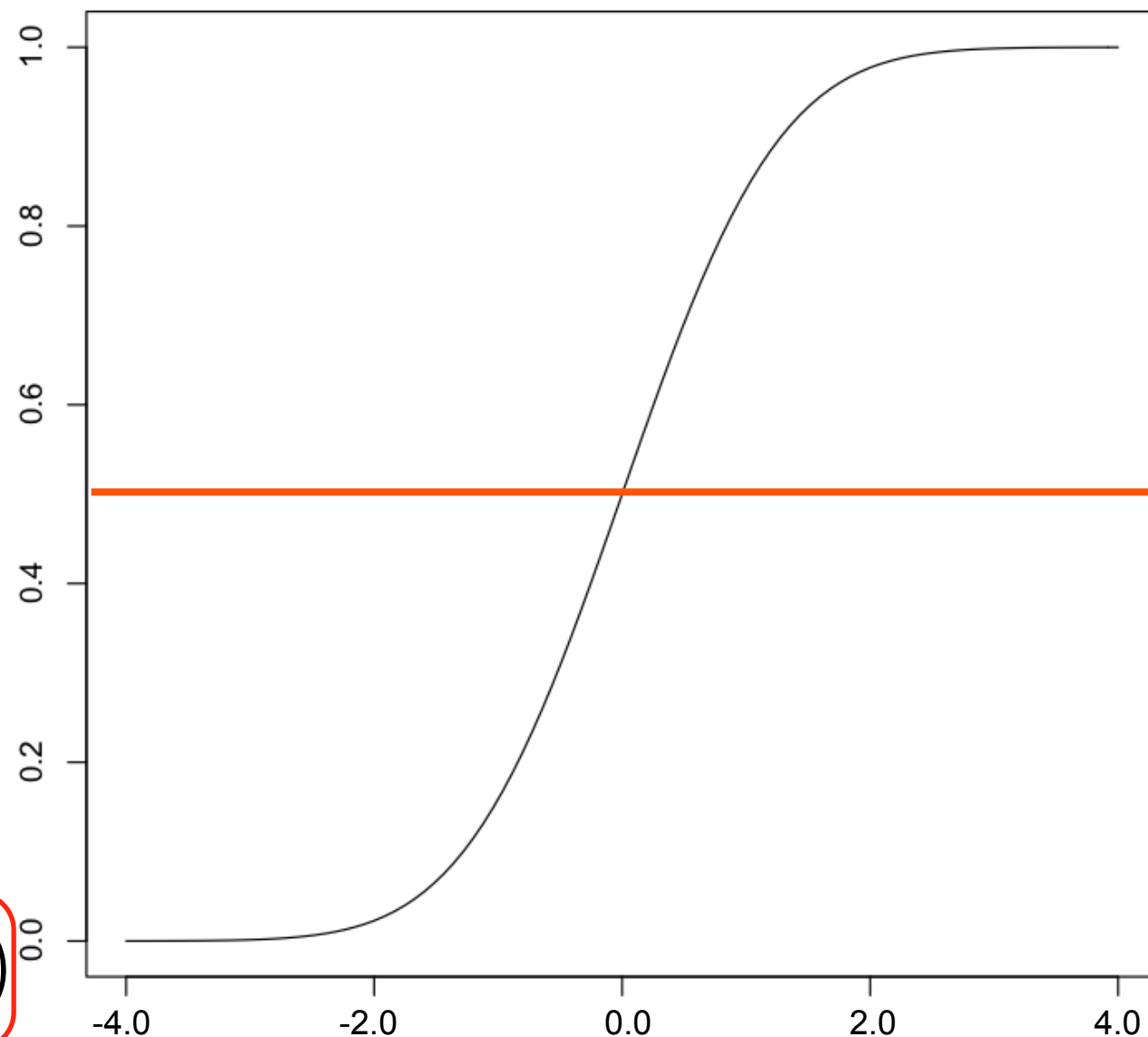
$$f(x) = f(-x)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x)$$

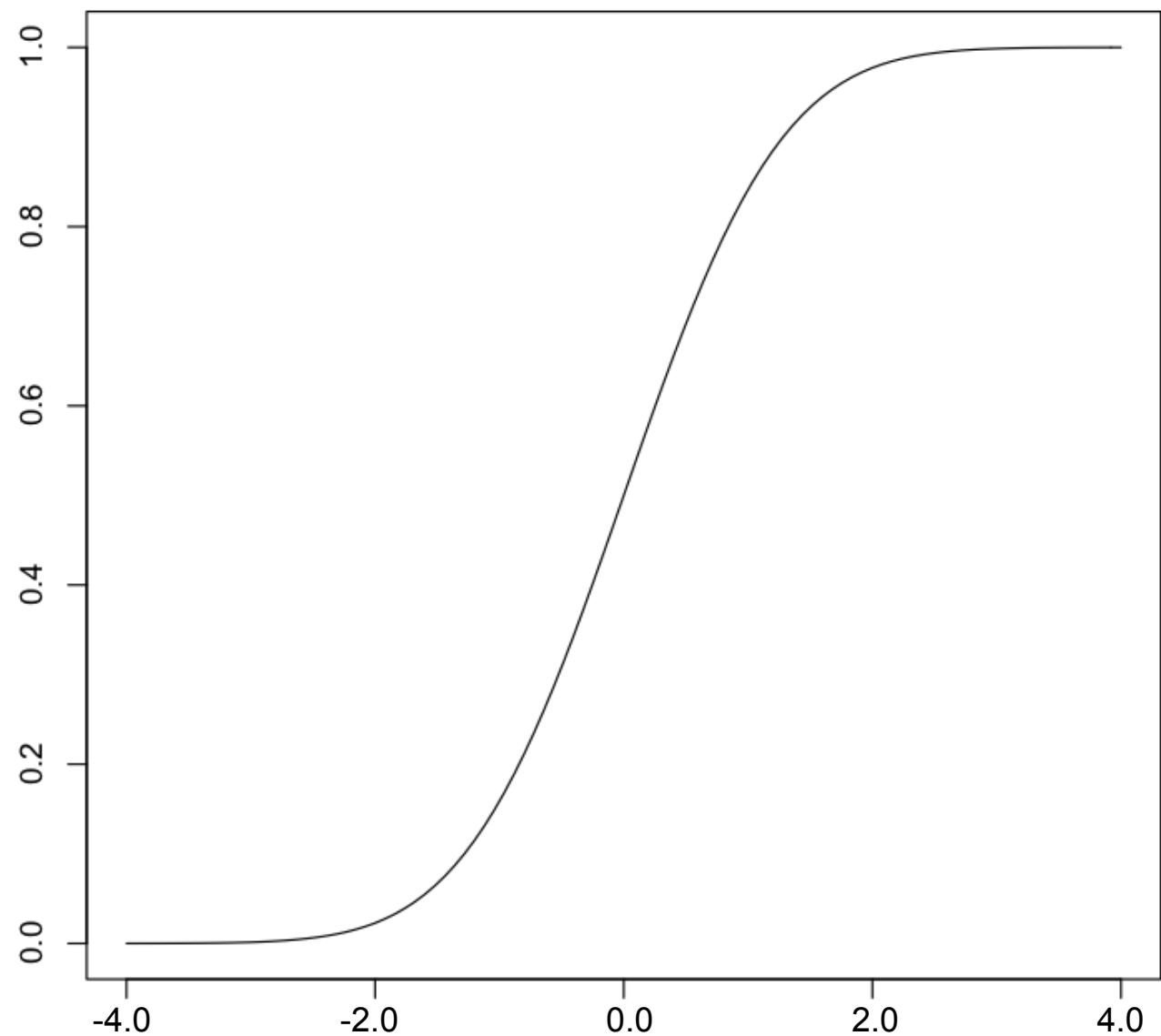


$$P(|X| \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$$

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \leq x) &= F(\mu + x) - F(\mu - x) = \\ &= F(\mu + x) - (1 - F(\mu + x)) = 2F(\mu + x) - 1 \end{aligned}$$

Normální rozdělení

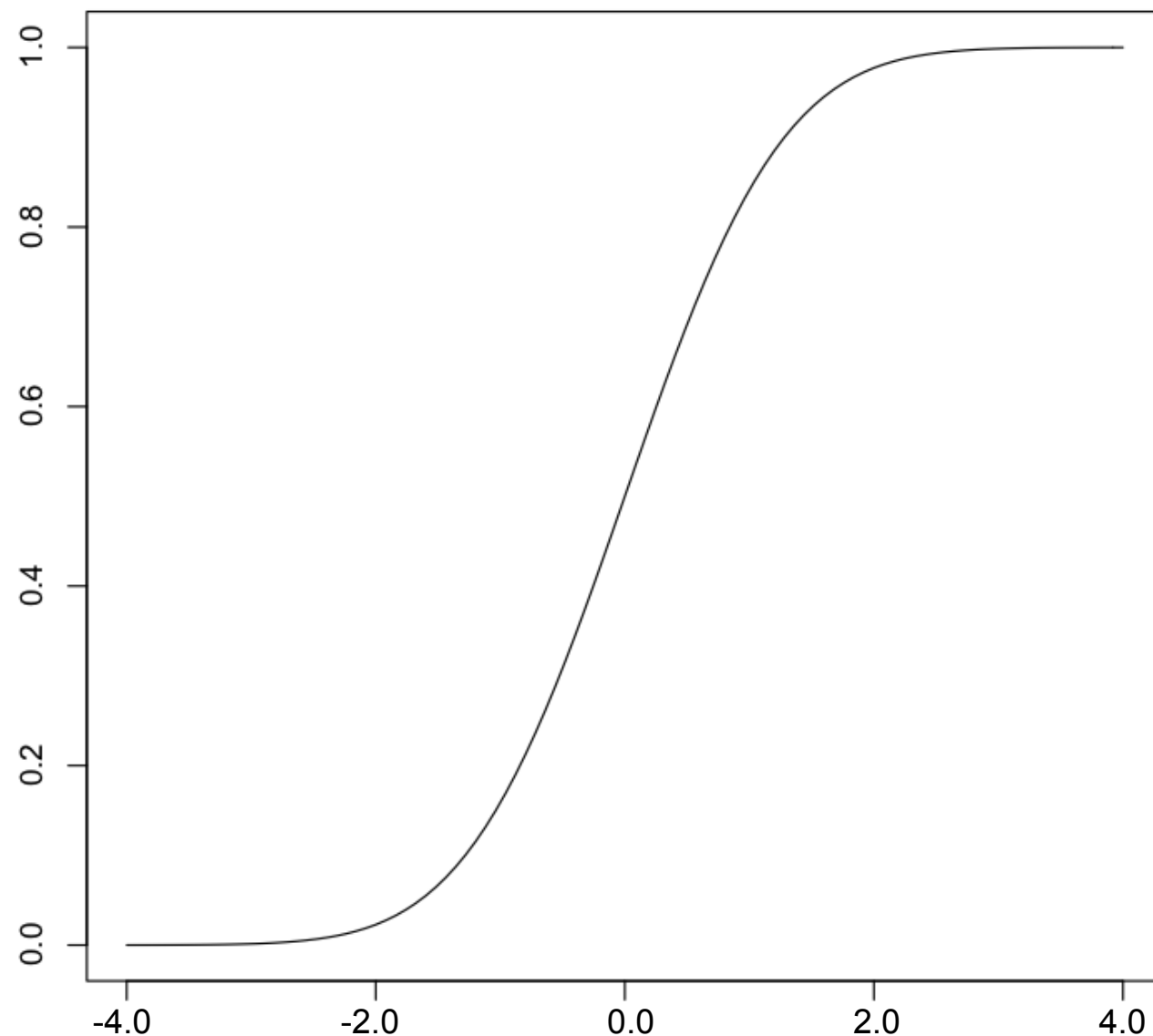
Jakých hodnot kolem střední hodnoty bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností $1-p$?



Normální rozdělení

Jakých hodnot kolem střední hodnoty bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností $1-p$?

$$P(a \leq X \leq b) = 1 - p$$



Normální rozdělení

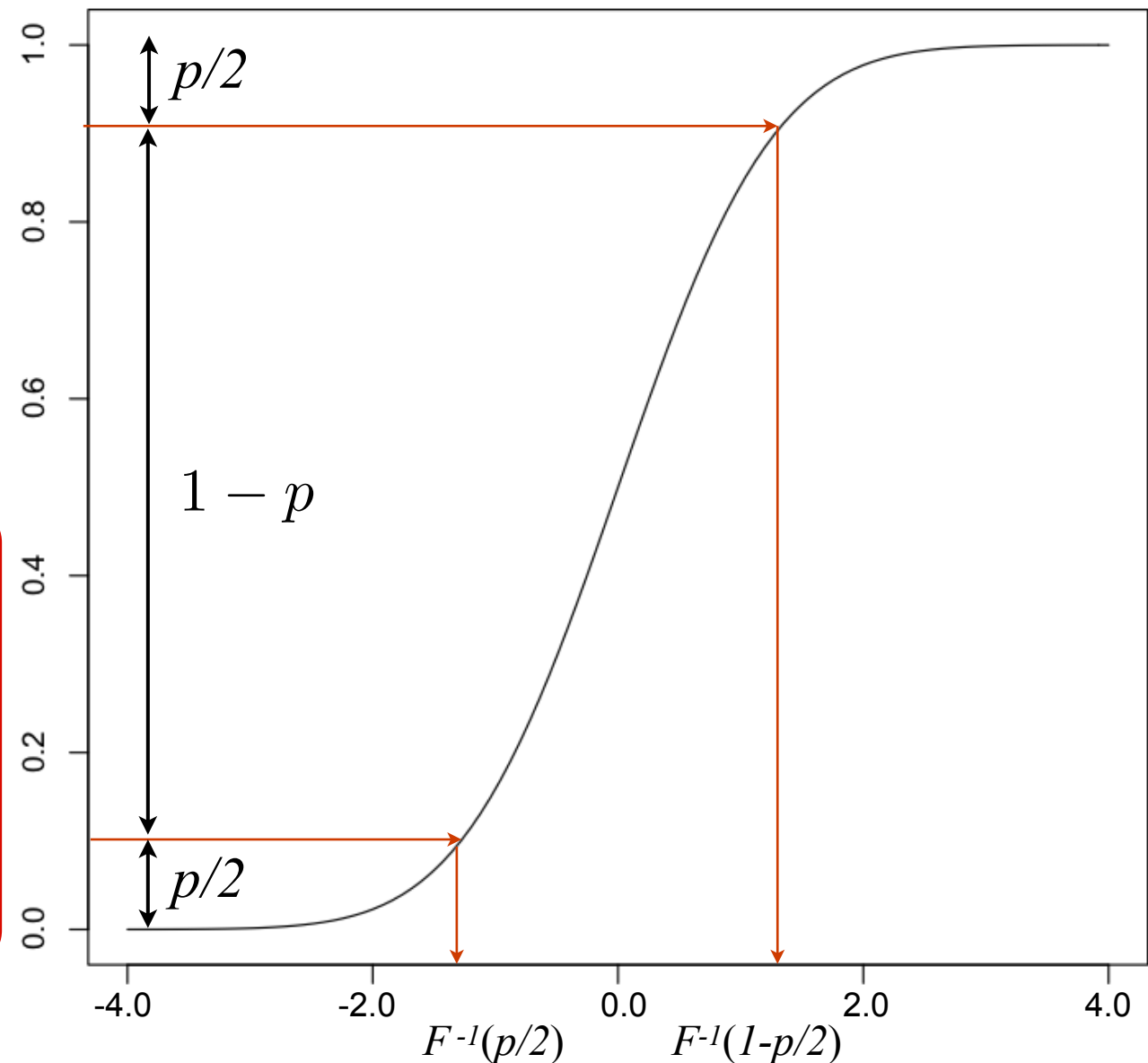
Jakých hodnot kolem střední hodnoty bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností $1-p$?

$$P(a \leq X \leq b) = 1 - p$$

$$a = F^{-1}(p/2),$$

$$b = F^{-1}(1 - p/2)$$

$(p/2)$ -kvantil normálního rozdělení a
 $(1-p/2)$ -kvantil normálního rozdělení



Normální rozdělení

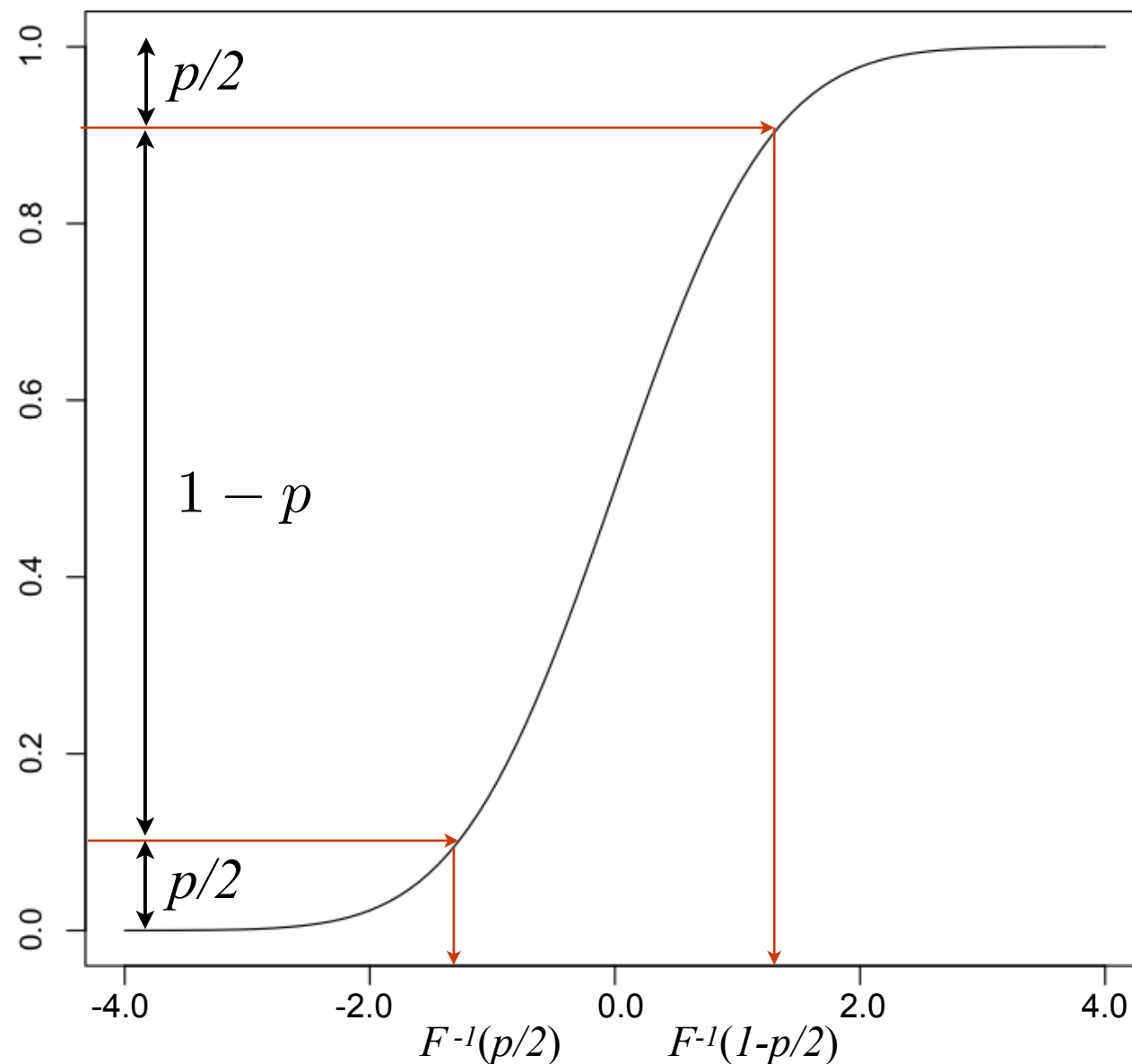
Jakých hodnot kolem střední hodnoty bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností $1-p$?

$$P(a \leq X \leq b) = 1 - p$$

$$a = F^{-1}(p/2),$$

$$b = F^{-1}(1 - p/2)$$

$(p/2)$ -kvantil normálního rozdělení a
 $(1-p/2)$ -kvantil normálního rozdělení



Ze symetrie plyne:

$$X \sim N(0, 1) : \quad x_{p/2} = \Phi^{-1}(p/2) = -x_{1-p/2} = -\Phi^{-1}(1 - p/2)$$

Normální rozdělení

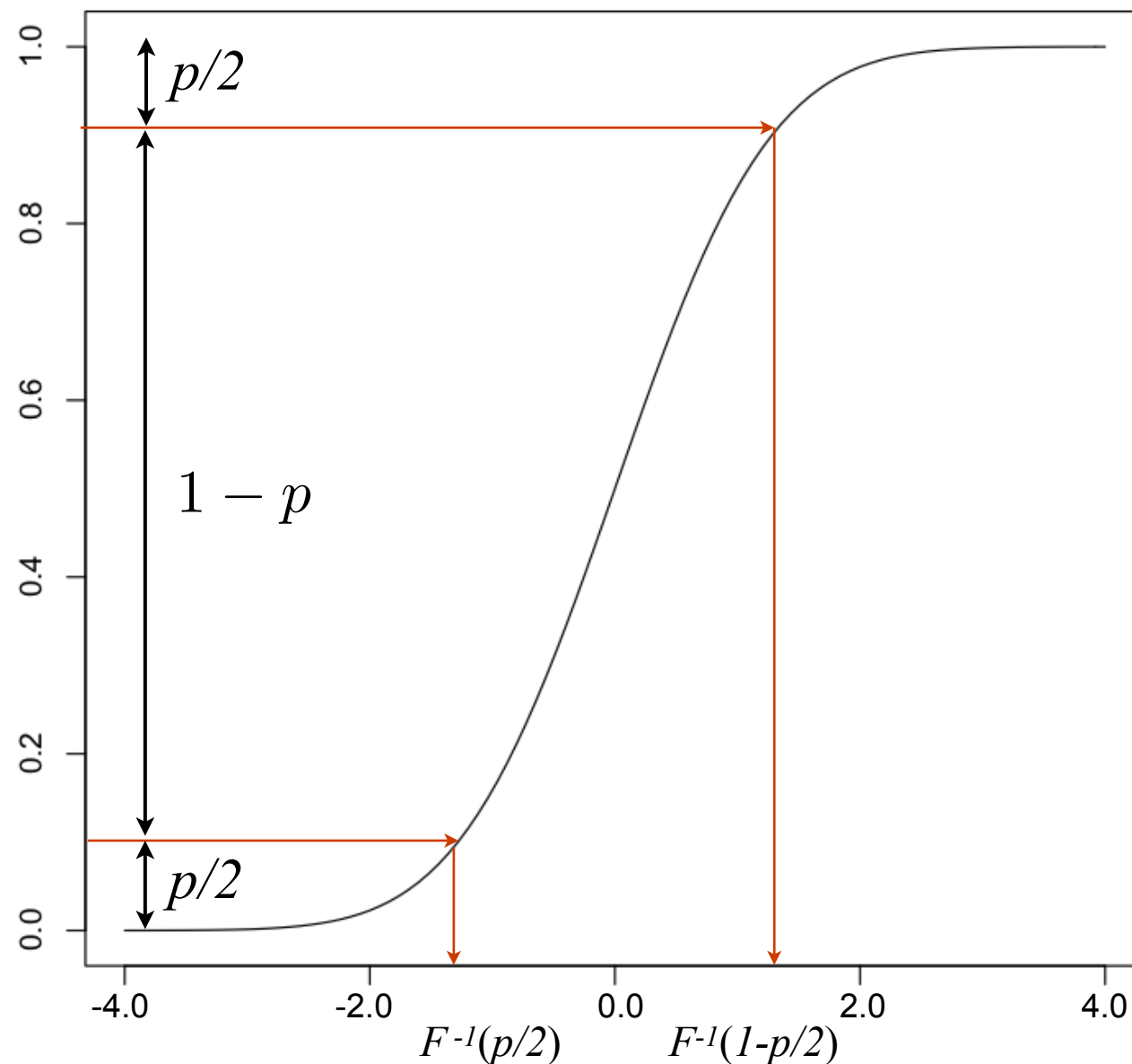
Jakých hodnot kolem střední hodnoty bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností $1-p$?

$$P(a \leq X \leq b) = 1 - p$$

$$a = F^{-1}(p/2),$$

$$b = F^{-1}(1 - p/2)$$

$(p/2)$ -kvantil normálního rozdělení a
 $(1-p/2)$ -kvantil normálního rozdělení



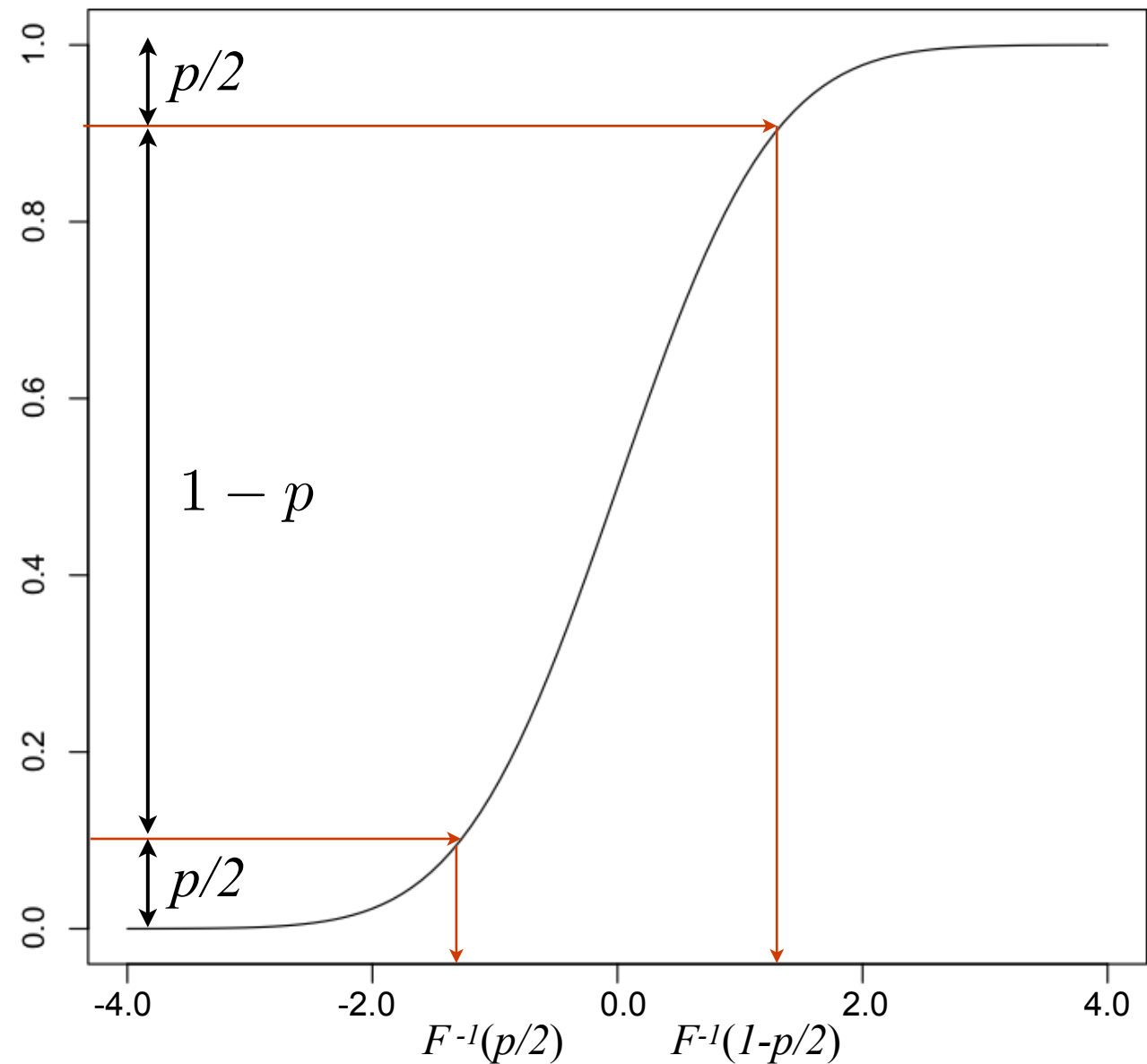
Ze symetrie plyne:

$$X \sim N(0, 1) : \quad x_{p/2} = \Phi^{-1}(p/2) = -x_{1-p/2} = -\Phi^{-1}(1 - p/2)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) : \quad y_{p/2} = F^{-1}(p/2) = 2\mu - y_{1-p/2} = 2\mu - F^{-1}(1 - p/2)$$

Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?



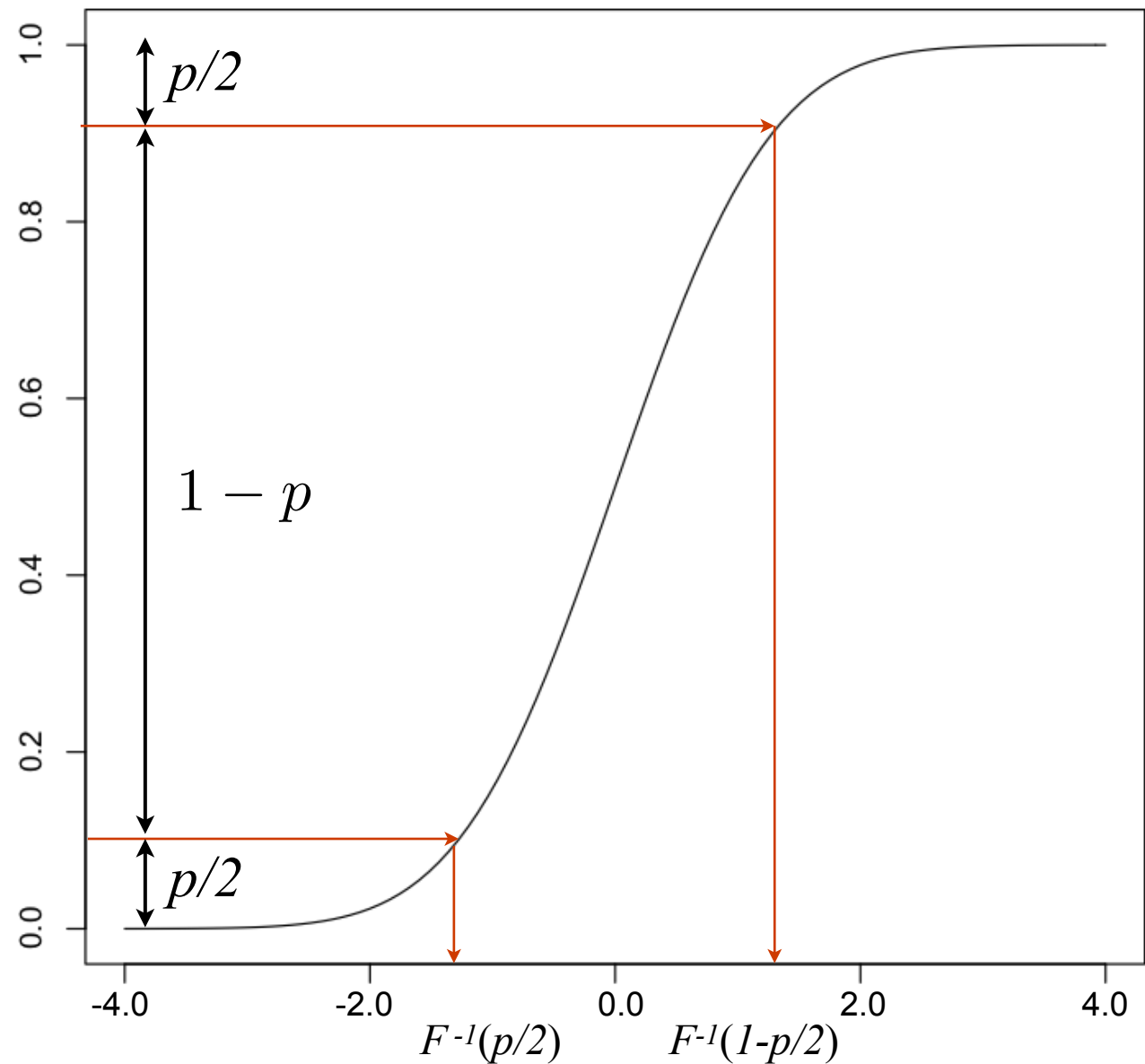
Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0, 1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$



Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0, 1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

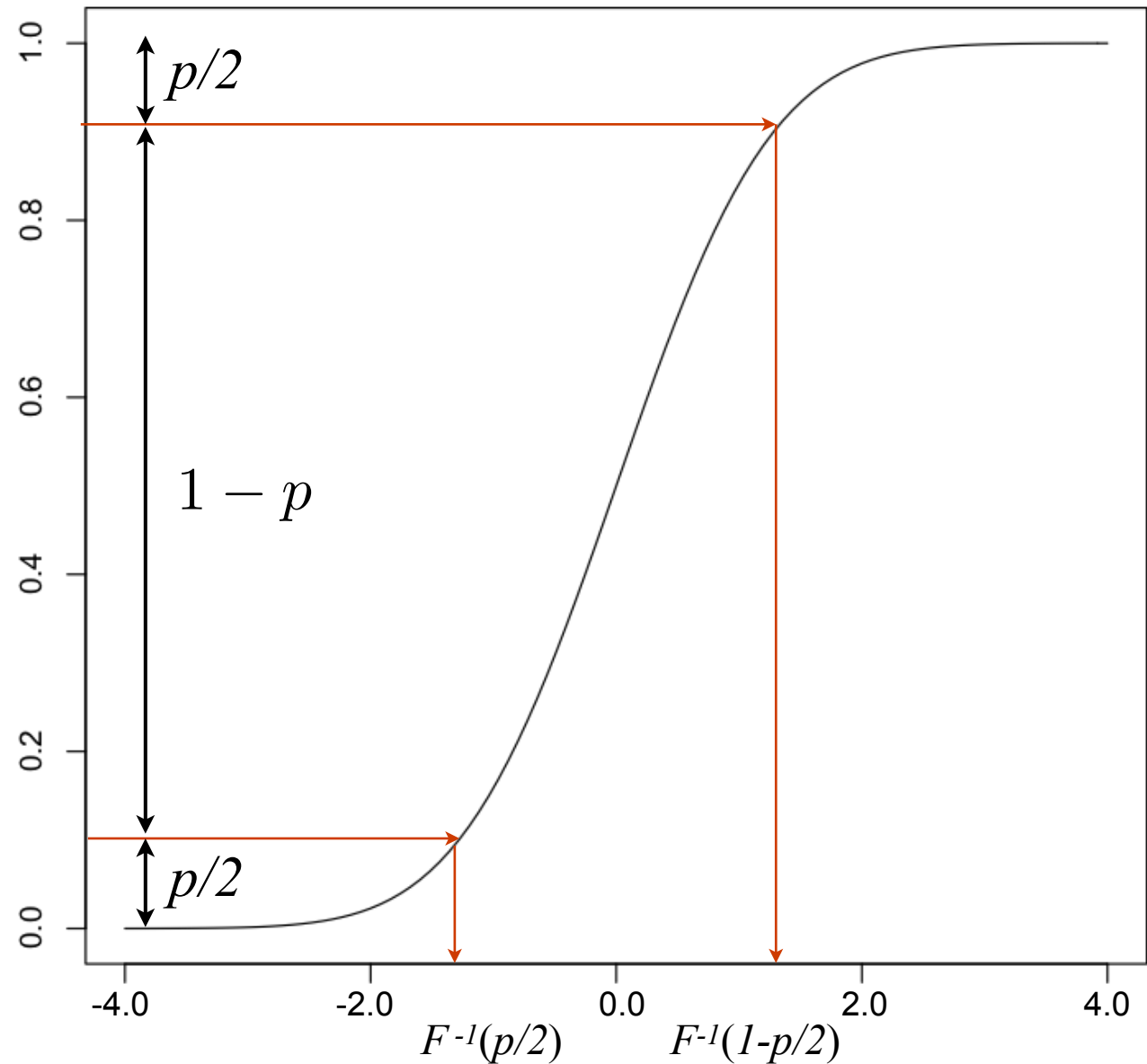
$$\Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$P\left(X \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$



Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0, 1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

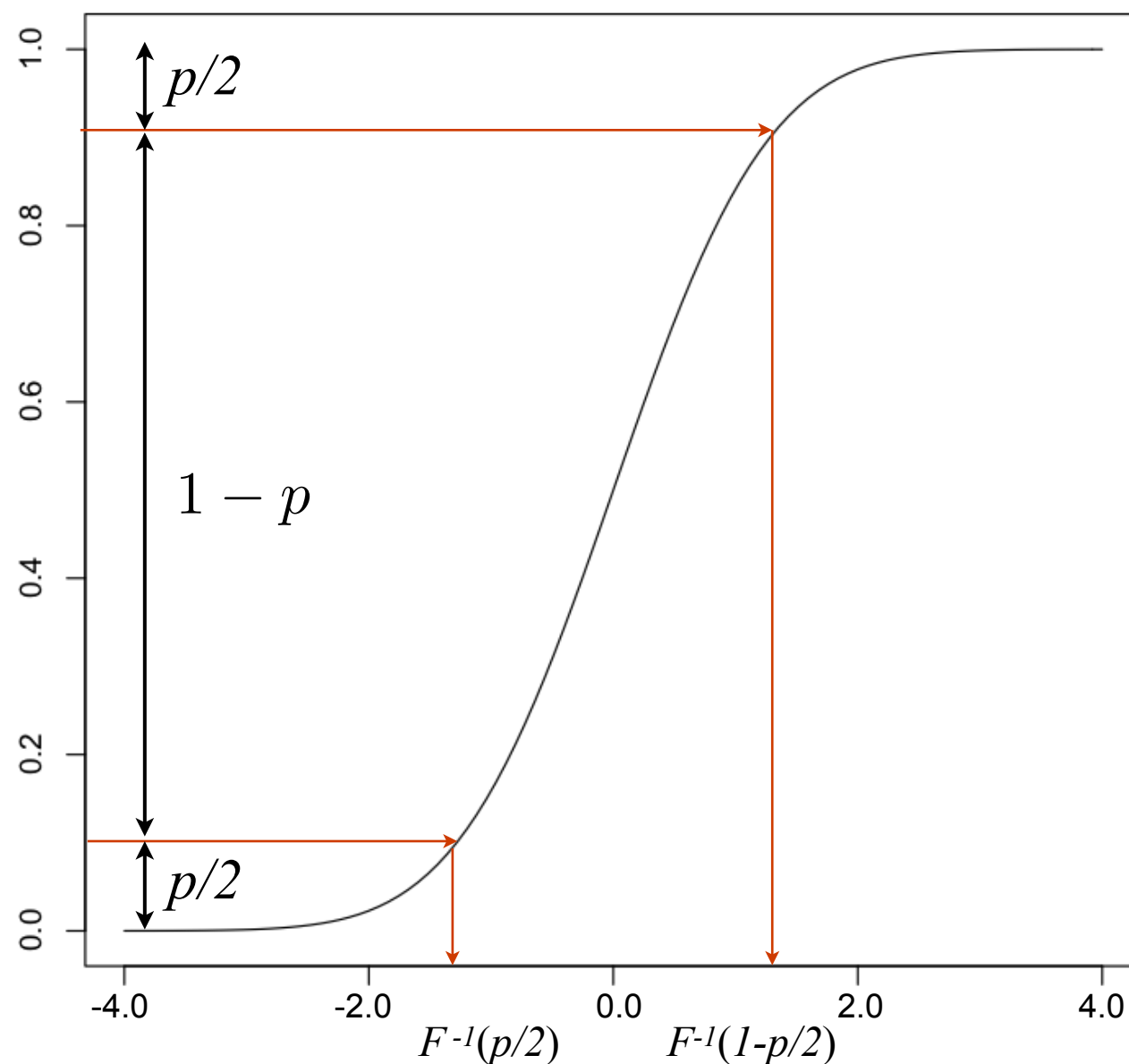
$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$P\left(X \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

Tedy je:

$$F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$



Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0, 1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

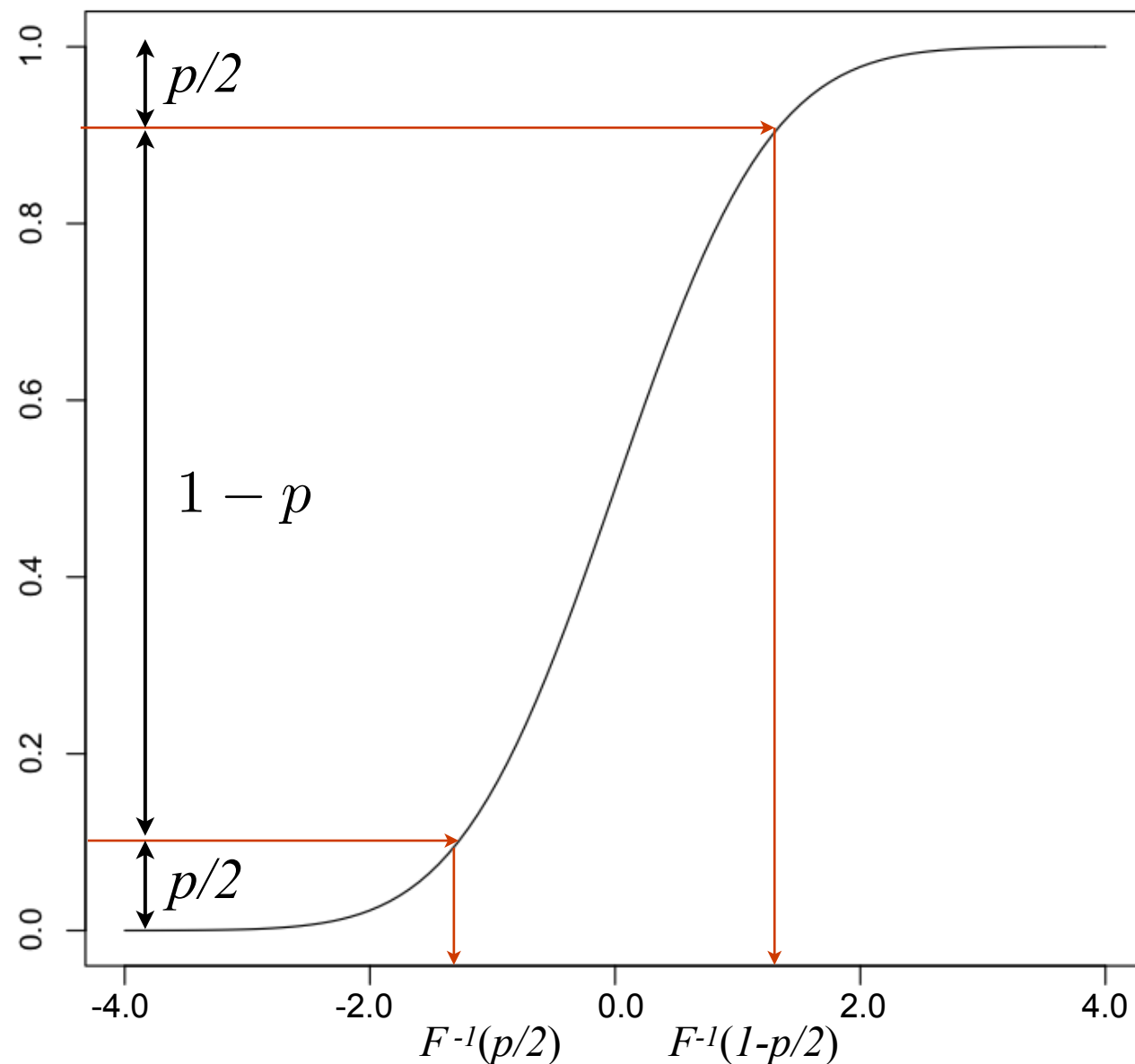
$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$P\left(X \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

Tedy je:

$$F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$



... a odtud:

$$F^{-1}(p) = \sigma \Phi^{-1}(p) + \mu$$

Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0, 1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$P\left(X \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

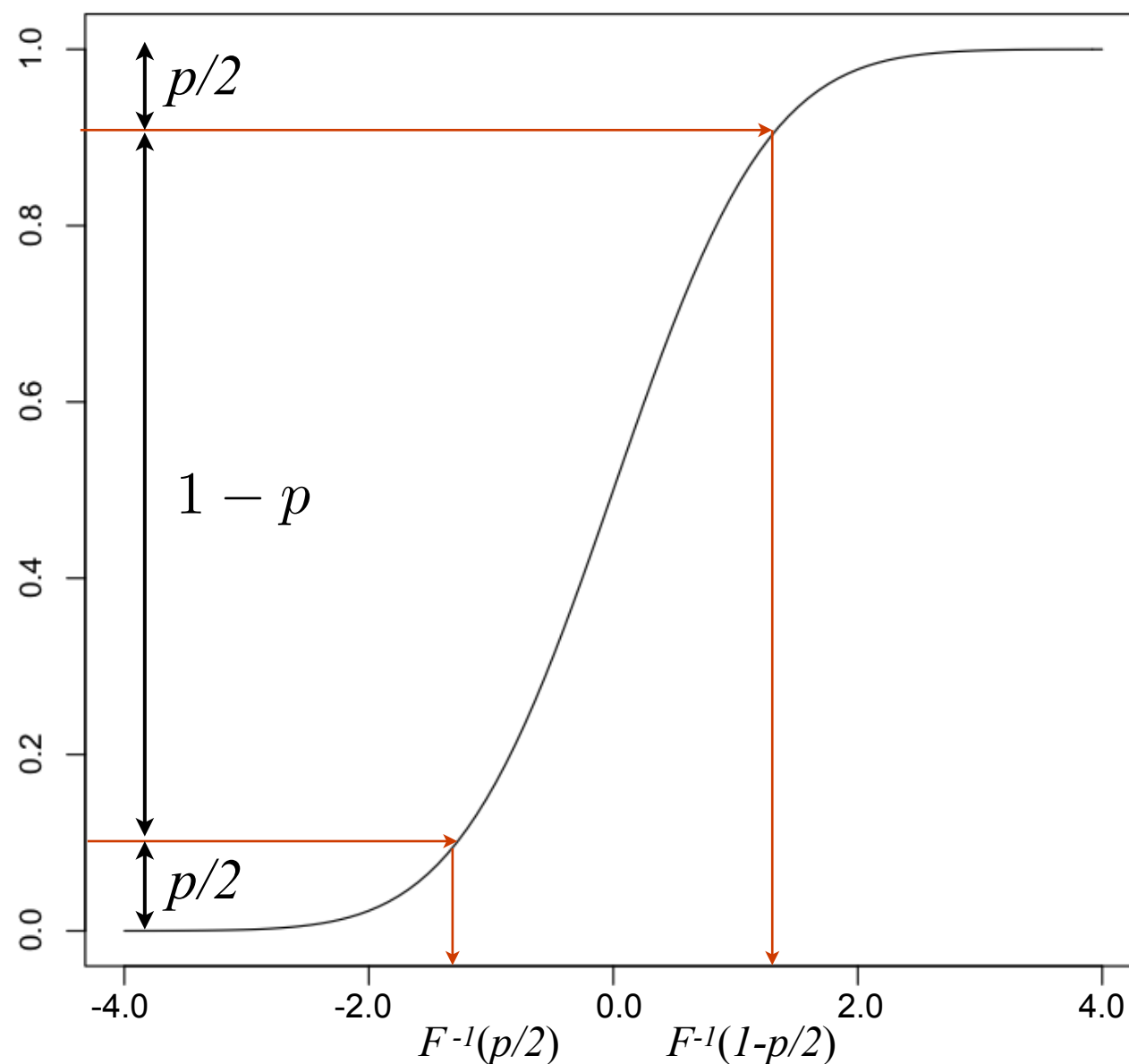
Tedy je:

$$F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

... a odtud:

$$F^{-1}(p) = \sigma \Phi^{-1}(p) + \mu$$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$

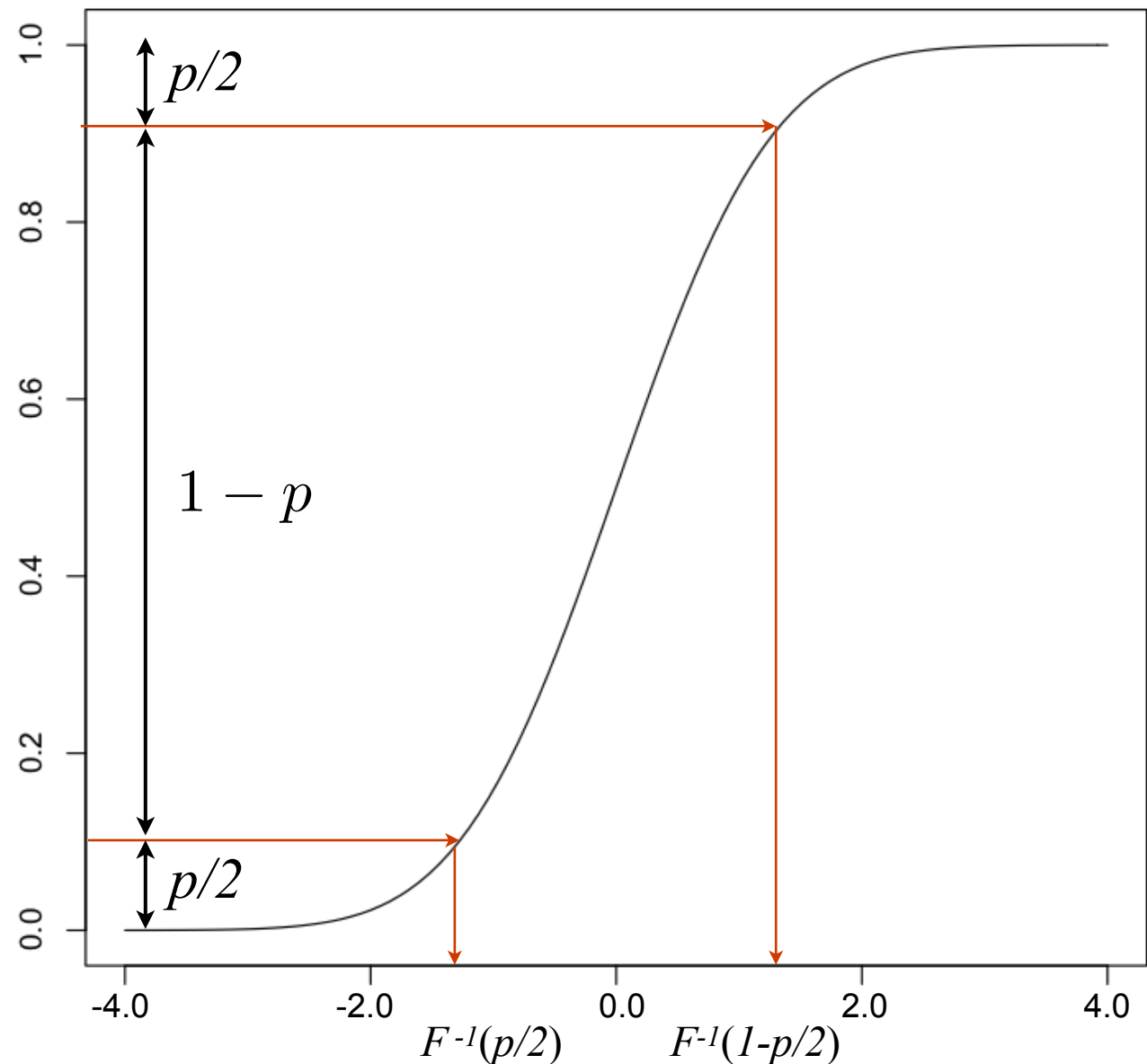


Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$



Tedy je: $F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$

... a odtud: $F^{-1}(p) = \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$

Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

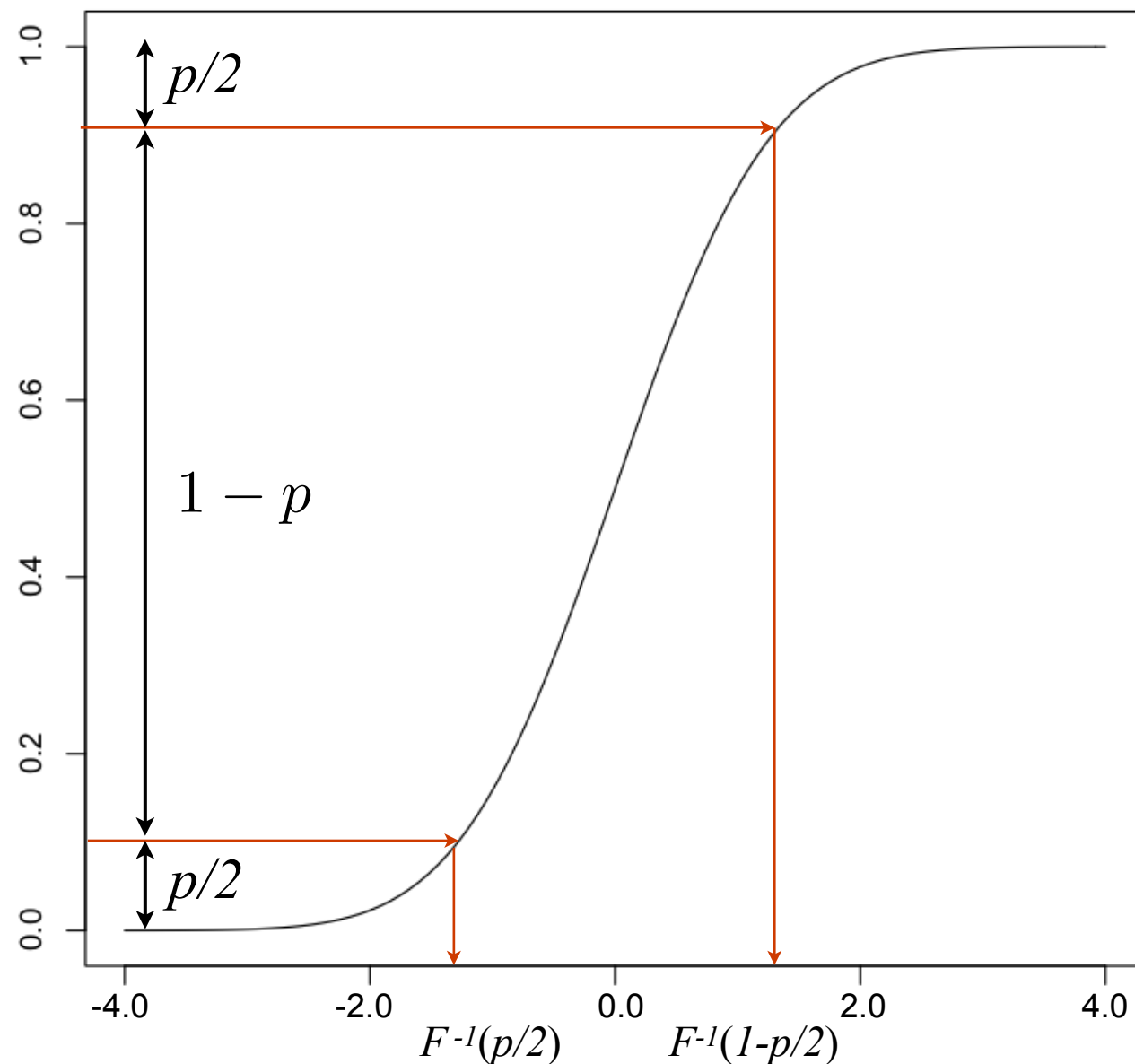
$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$

... potom

$$\Phi^{-1}(p/2) = -u_p$$

$$F^{-1}(1 - p/2) = \mu + \sigma u_p$$

$$F^{-1}(p/2) = \mu - \sigma u_p$$



Tedy je: $F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$

... a odtud: $F^{-1}(p) = \sigma \Phi^{-1}(p) + \mu$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$

Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$

... potom

$$\Phi^{-1}(p/2) = -u_p$$

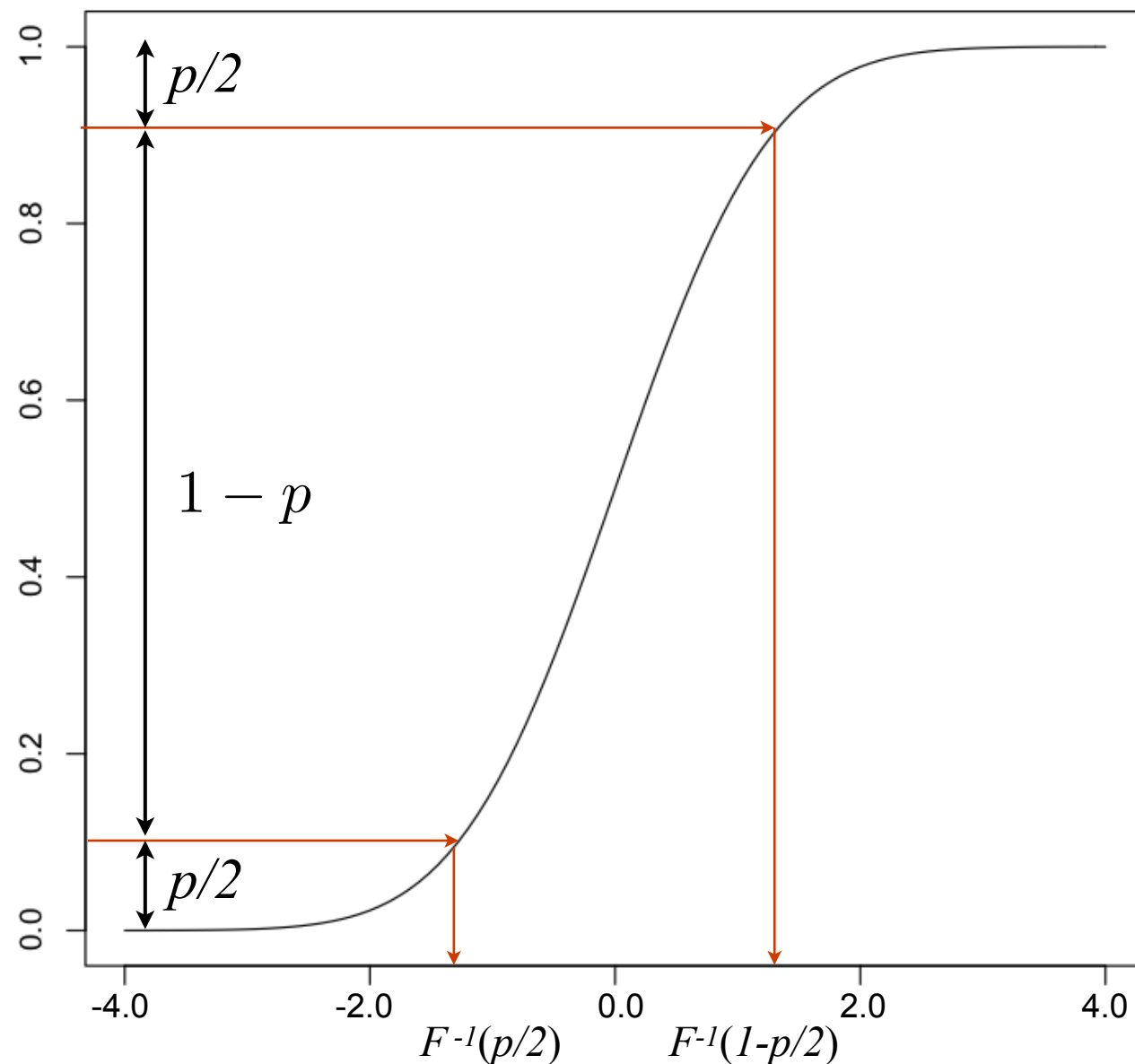
$$F^{-1}(1 - p/2) = \mu + \sigma u_p$$

$$F^{-1}(p/2) = \mu - \sigma u_p$$

Tedy pro $\alpha \in (0, 1)$

$$X \sim N(0, 1) \Rightarrow$$

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$



Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$

... potom

$$\Phi^{-1}(p/2) = -u_p$$

$$F^{-1}(1 - p/2) = \mu + \sigma u_p$$

$$F^{-1}(p/2) = \mu - \sigma u_p$$

Tedy pro $\alpha \in (0, 1)$

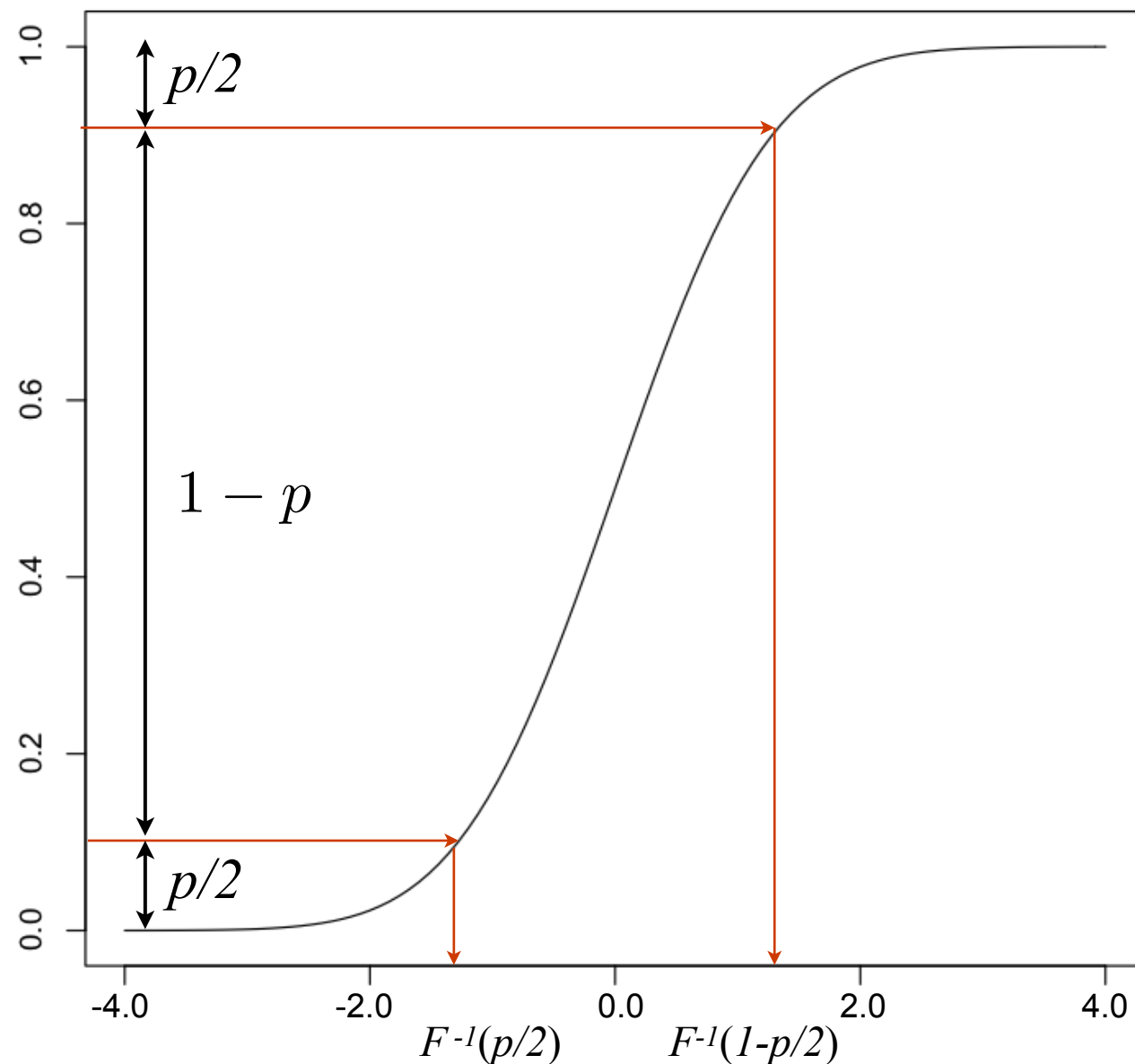
$$X \sim N(0, 1) \Rightarrow$$

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$$

$$P(\mu - \sigma u_\alpha \leq Y \leq \mu + \sigma u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P(-u_\alpha \leq \frac{Y - \mu}{\sigma} \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$



Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Rozptyl náhodné veličiny X :

$$\text{var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Rozptyl náhodné veličiny X :

$$\text{var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu \quad \text{var}(X) = \sigma^2$$

Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Rozptyl náhodné veličiny X :

$$\text{var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu \quad \text{var}(X) = \sigma^2$$

Jak tyto parametry najít, když máme k dispozici pouze několik měření veličiny X ?

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

Bodový odhad střední hodnoty náhodné veličiny X :

$$\widehat{E(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} = \hat{\mu}$$

výběrový průměr

Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

Bodový odhad střední hodnoty náhodné veličiny X :

$$\widehat{E(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} = \hat{\mu}$$

výběrový průměr

Bodové odhady rozptylu náhodné veličiny X :

$$\text{var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

Bodový odhad střední hodnoty náhodné veličiny X :

$$\widehat{E(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} = \hat{\mu}$$

výběrový průměr

Bodové odhady rozptylu náhodné veličiny X :

$$\text{var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\widehat{\text{var}(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - (\bar{X})^2 = \hat{\sigma}^2$$

rozptyl základního souboru

Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

Bodový odhad střední hodnoty náhodné veličiny X:

$$\widehat{E(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} = \hat{\mu} \quad \text{výběrový průměr}$$

Bodové odhady rozptylu náhodné veličiny X:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \\ \widehat{\text{var}(X)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - (\bar{X})^2 = \hat{\sigma}^2 \end{aligned} \quad \text{rozptyl základního souboru}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{var}(X)} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \frac{n}{n-1} (\bar{X})^2 = s^2 \end{aligned} \quad \text{výběrový rozptyl}$$

Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

Kdy použít který odhad rozptylu náhodné veličiny X ?

Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

Kdy použít který odhad rozptylu náhodné veličiny X ?

$$\widehat{var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - (\bar{X})^2 = \hat{\sigma}^2$$

rozptyl základního souboru použijeme pro velká n (řádově stovky)

Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

Kdy použít který odhad rozptylu náhodné veličiny X ?

$$\widehat{var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - (\bar{X})^2 = \hat{\sigma}^2$$

rozptyl základního souboru použijeme pro velká n (řádově stovky)

$$\widetilde{var}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \frac{n}{n-1} (\bar{X})^2 = s^2$$

výběrový rozptyl použijeme pro malé rozsahy výběru n

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Odtud:

$$P\left(-u_\alpha \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Odtud:

$$P\left(-u_\alpha \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Odtud:

$$P\left(-u_\alpha \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \leq -\mu \leq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Odtud:

$$P\left(-u_\alpha \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \leq -\mu \leq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Odtud:

$$P\left(-u_\alpha \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \leq -\mu \leq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P(\mu \in \langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha \rangle) = 1 - \alpha$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Odtud $(1 - \alpha)$ -intervalový odhad střední hodnoty při známém parametru σ je

$$\left\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \right\rangle$$

$$P(\mu \in \left\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \right\rangle) = 1 - \alpha$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Odtud $(1 - \alpha)$ -intervalový odhad střední hodnoty při známém parametru σ je

$$\left\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha} \right\rangle$$

$(1 - \alpha)$ -intervalový odhad střední hodnoty při neznámém parametru σ je

$$\left\langle \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n - 1), \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n - 1) \right\rangle$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Odtud $(1 - \alpha)$ -intervalový odhad střední hodnoty při známém parametru σ je

$$\left\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \right\rangle$$

$(1 - \alpha)$ -intervalový odhad střední hodnoty při neznámém parametru σ je

$$\left\langle \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n - 1), \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n - 1) \right\rangle$$

Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Odtud $(1 - \alpha)$ -intervalový odhad střední hodnoty při známém parametru σ je

$$\left\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \right\rangle$$

$(1 - \alpha)$ -intervalový odhad střední hodnoty při neznámém parametru σ je

$$\left\langle \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n - 1), \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n - 1) \right\rangle$$

kde $t_\alpha(n - 1)$ je kritická hodnota Studentova t -rozdělení s parametrem $(n - 1)$

$(1 - \alpha/2)$ - kvantil

takzvané “stupně volnosti”

Interval spolehlivosti pro průměr

$$P(L \leq \bar{X} \leq U) = 1 - \alpha$$

$(1 - \alpha)$ -interval spolehlivosti pro průměr dat z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

$$\left\langle \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha}, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha} \right\rangle$$

v případě, že známe rozptyl σ^2 , nebo též

$$\left\langle \mu - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n - 1), \mu + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n - 1) \right\rangle$$

pokud rozptyl odhadujeme z dat pomocí výběrového rozptylu s^2 .

Všimněte si, že oba intervaly jsou ve tvaru

$$(\mu - SE, \mu + SE)$$

Interval spolehlivosti pro průměr

$$P(L \leq \bar{X} \leq U) = 1 - \alpha$$

$(1 - \alpha)$ -interval spolehlivosti pro průměr dat z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

$$\left\langle \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \right\rangle$$

v případě, že známe rozptyl σ^2 , nebo též

$$\left\langle \mu - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n - 1), \mu + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n - 1) \right\rangle$$

pokud rozptyl odhadujeme z dat pomocí výběrového rozptylu s^2 .

Všimněte si, že oba intervaly jsou ve tvaru

$$(\mu - SE, \mu + SE)$$

SE je tzv. “standardní chyba” (Standard Error)

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

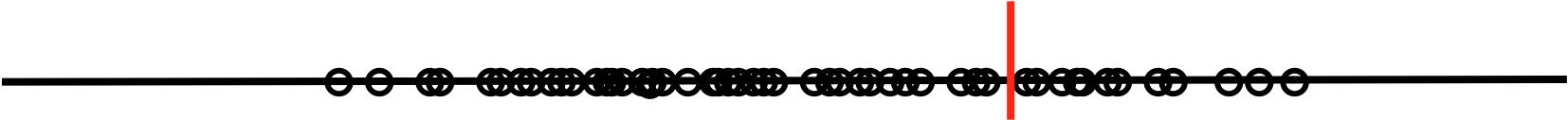
Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

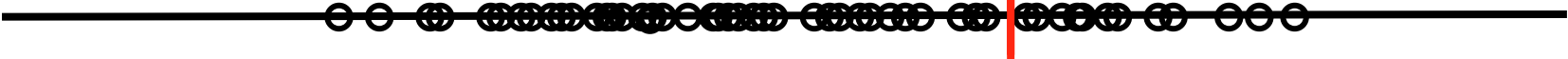
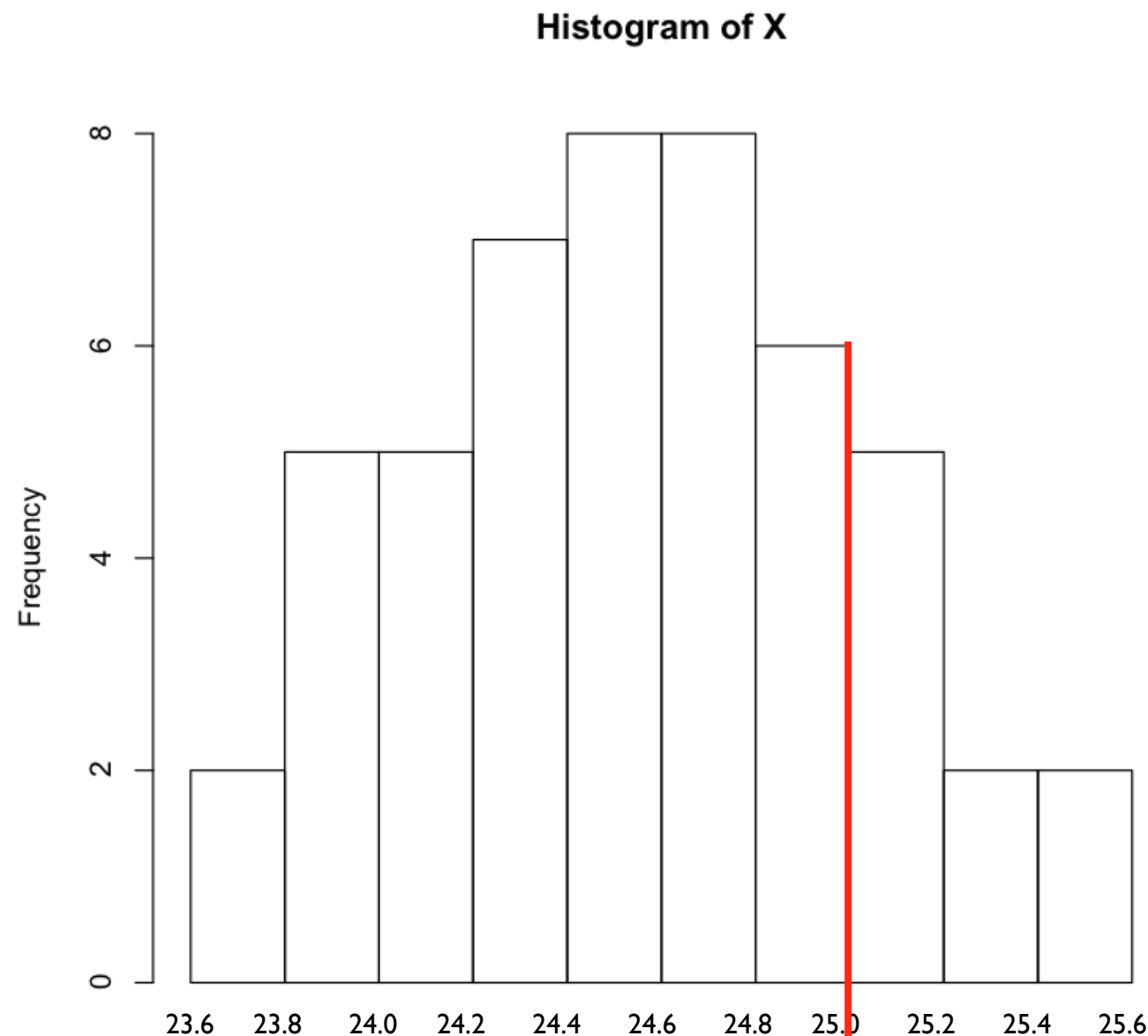
Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906



Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

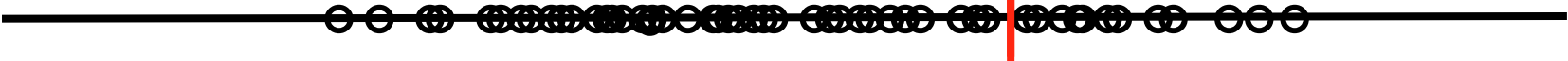
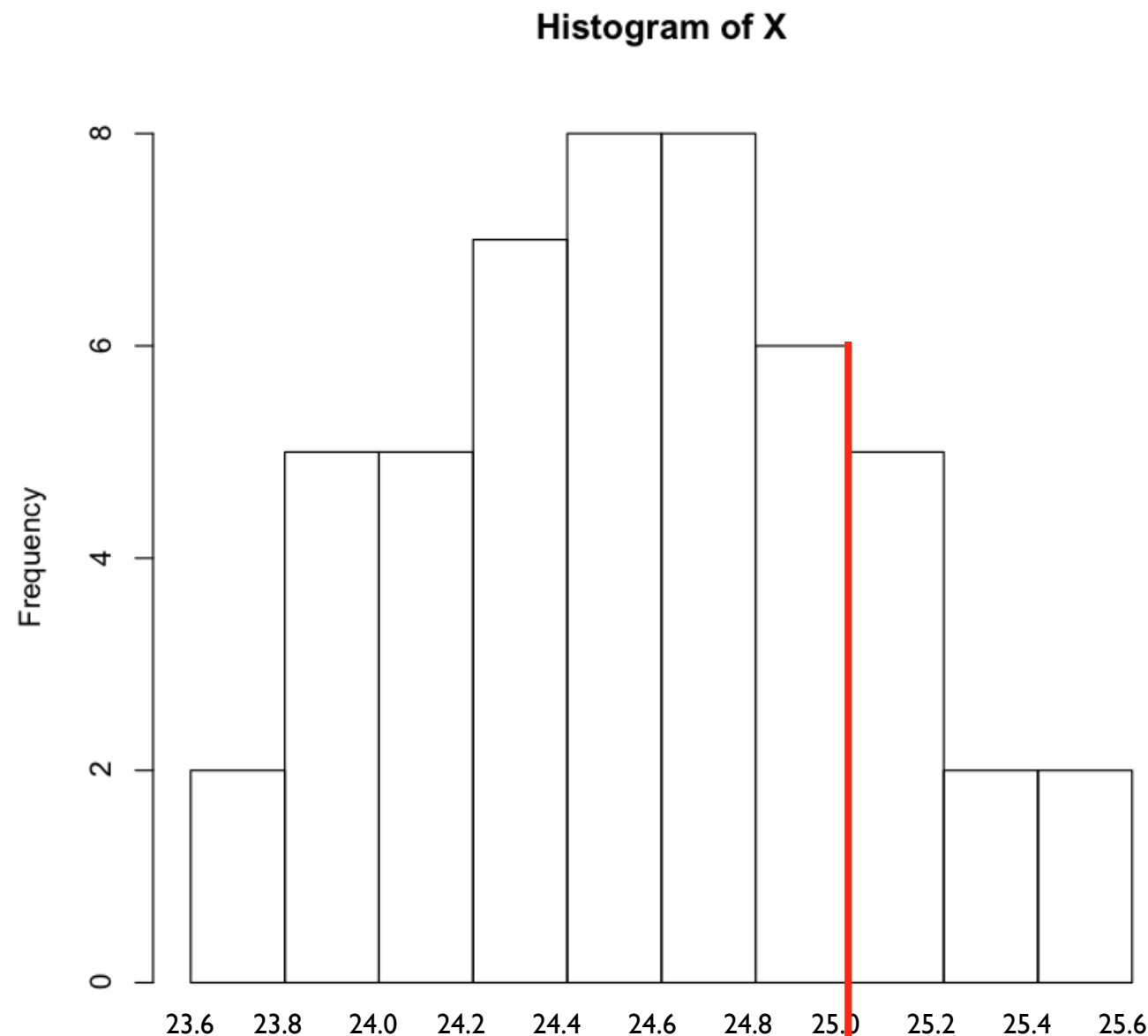
Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?

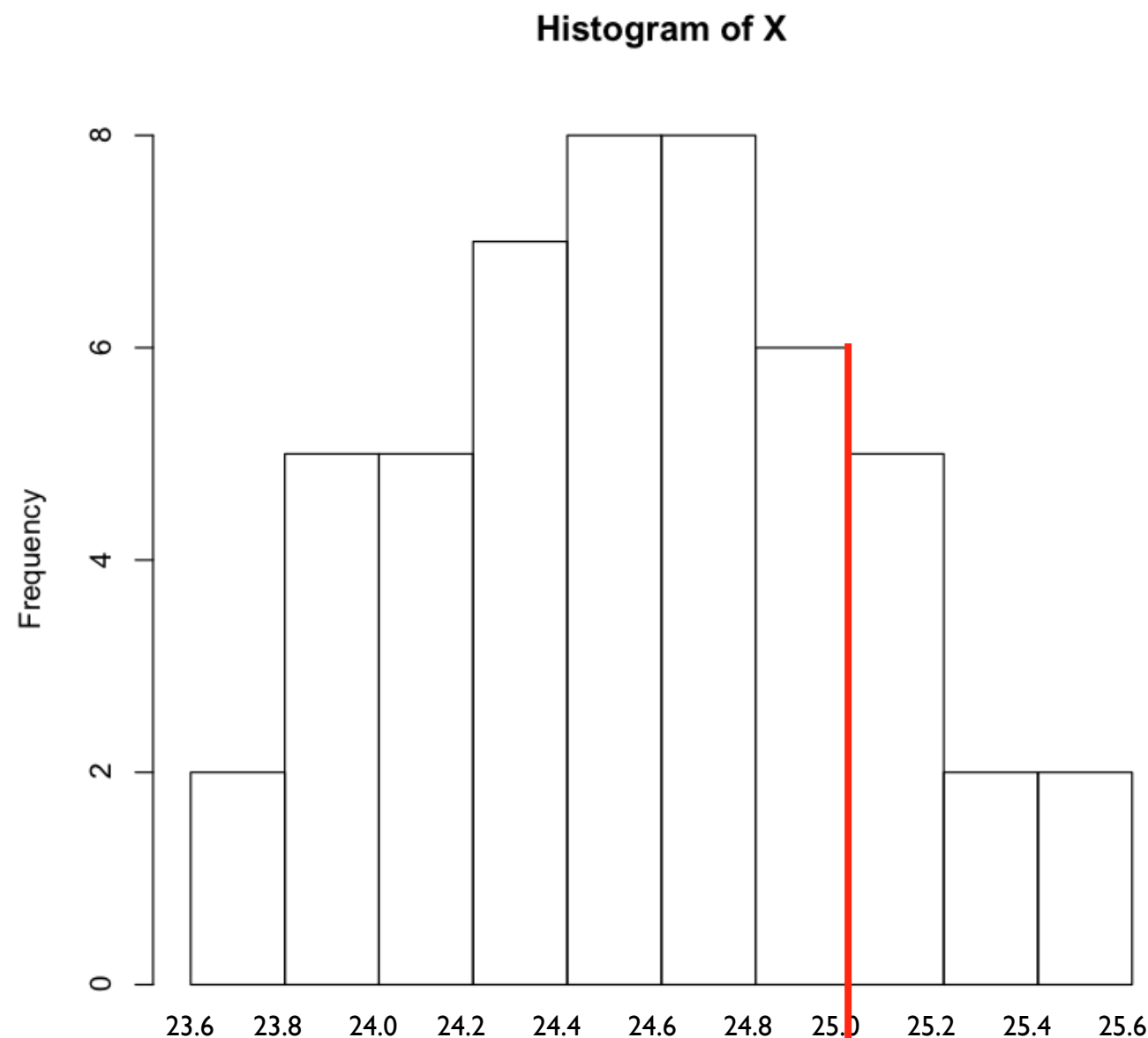


$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



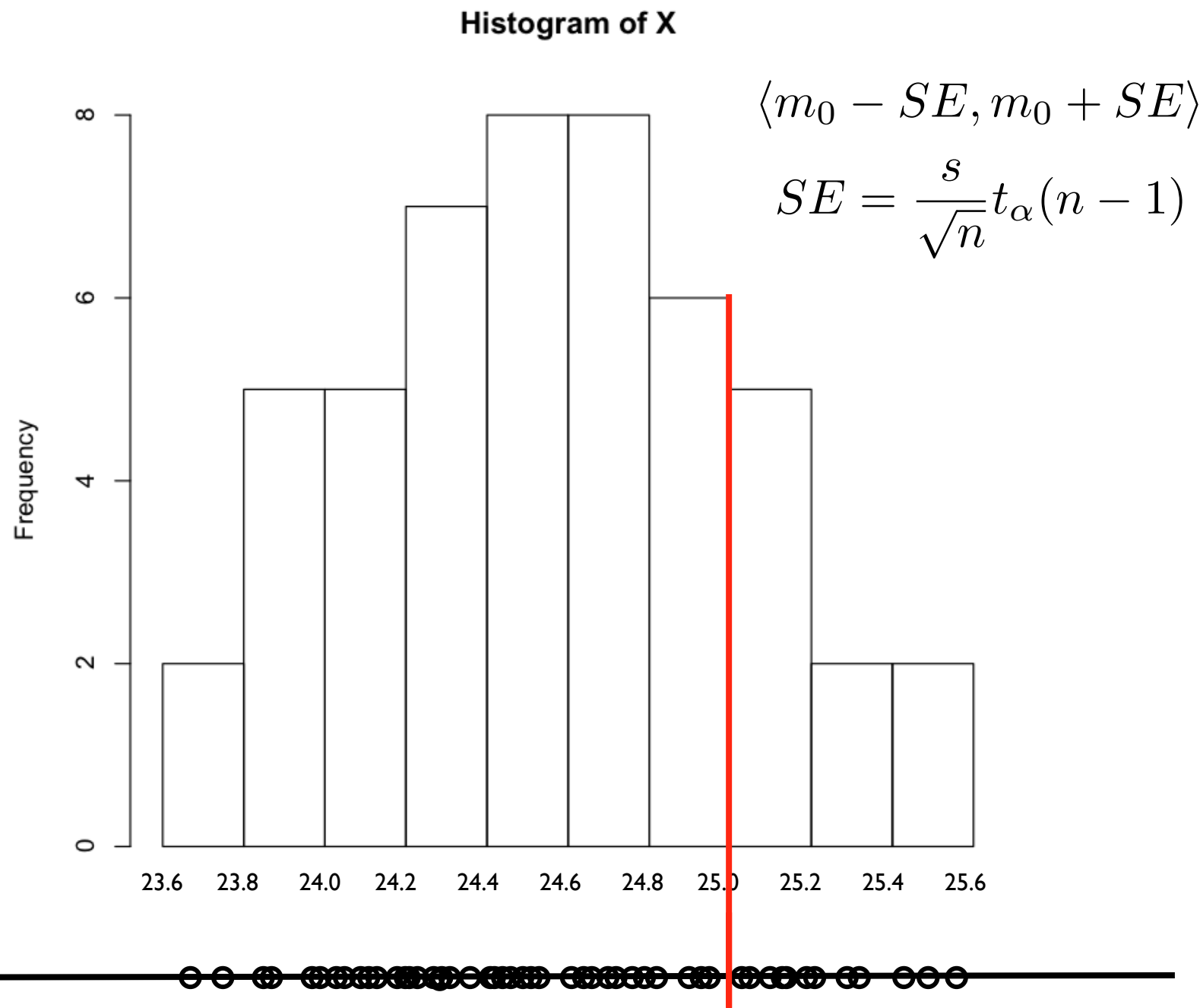
24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



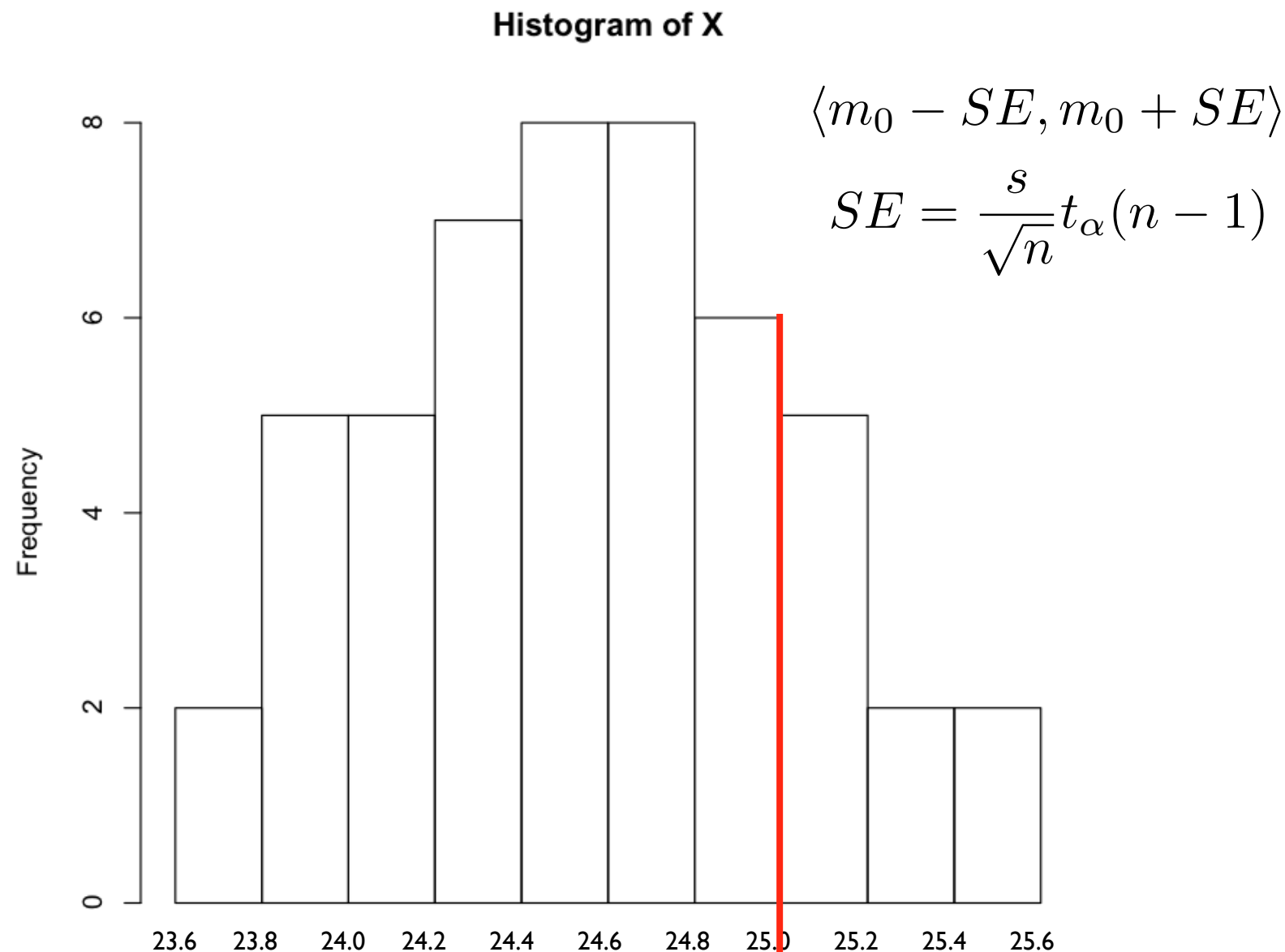
$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

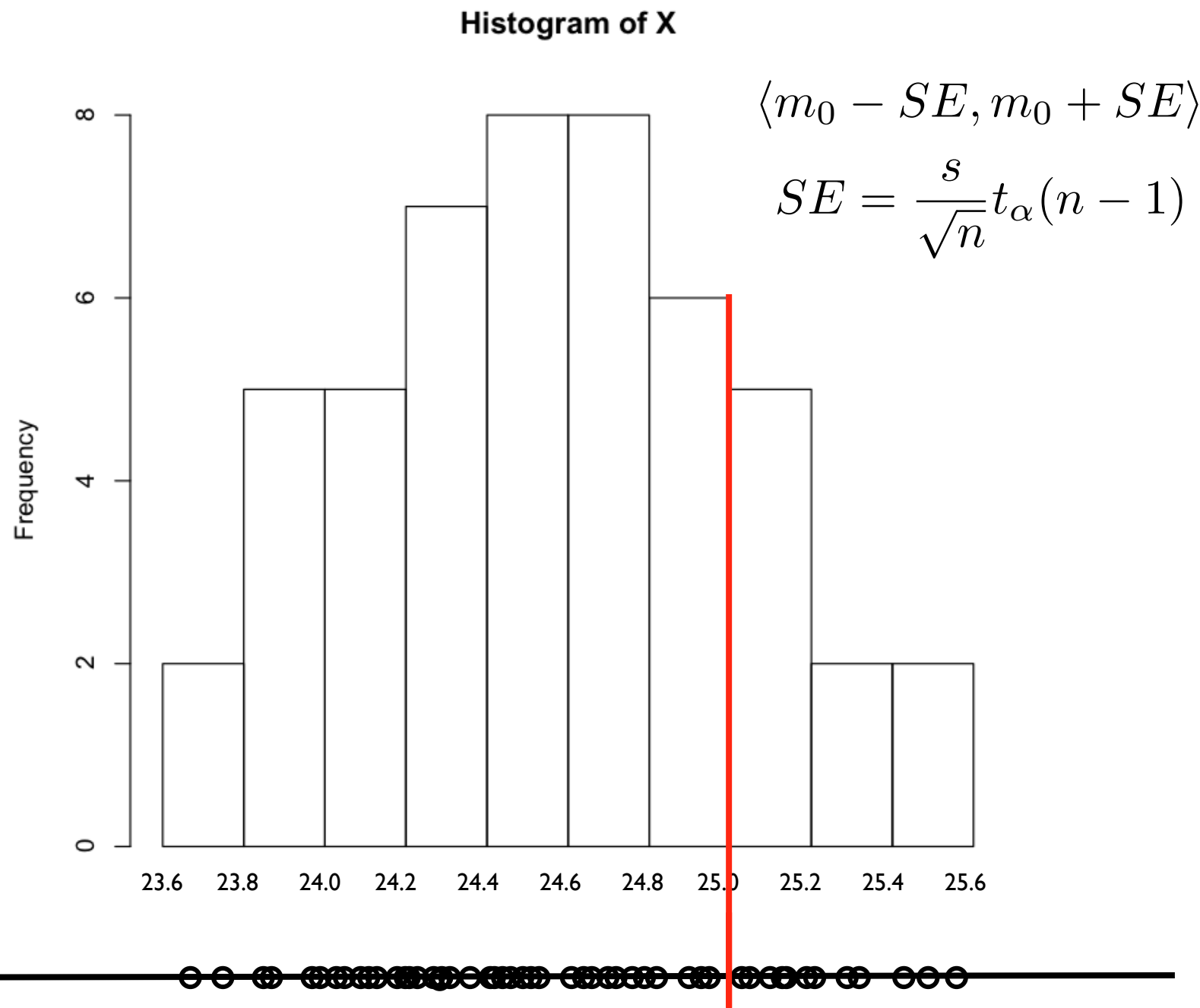
$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$$

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

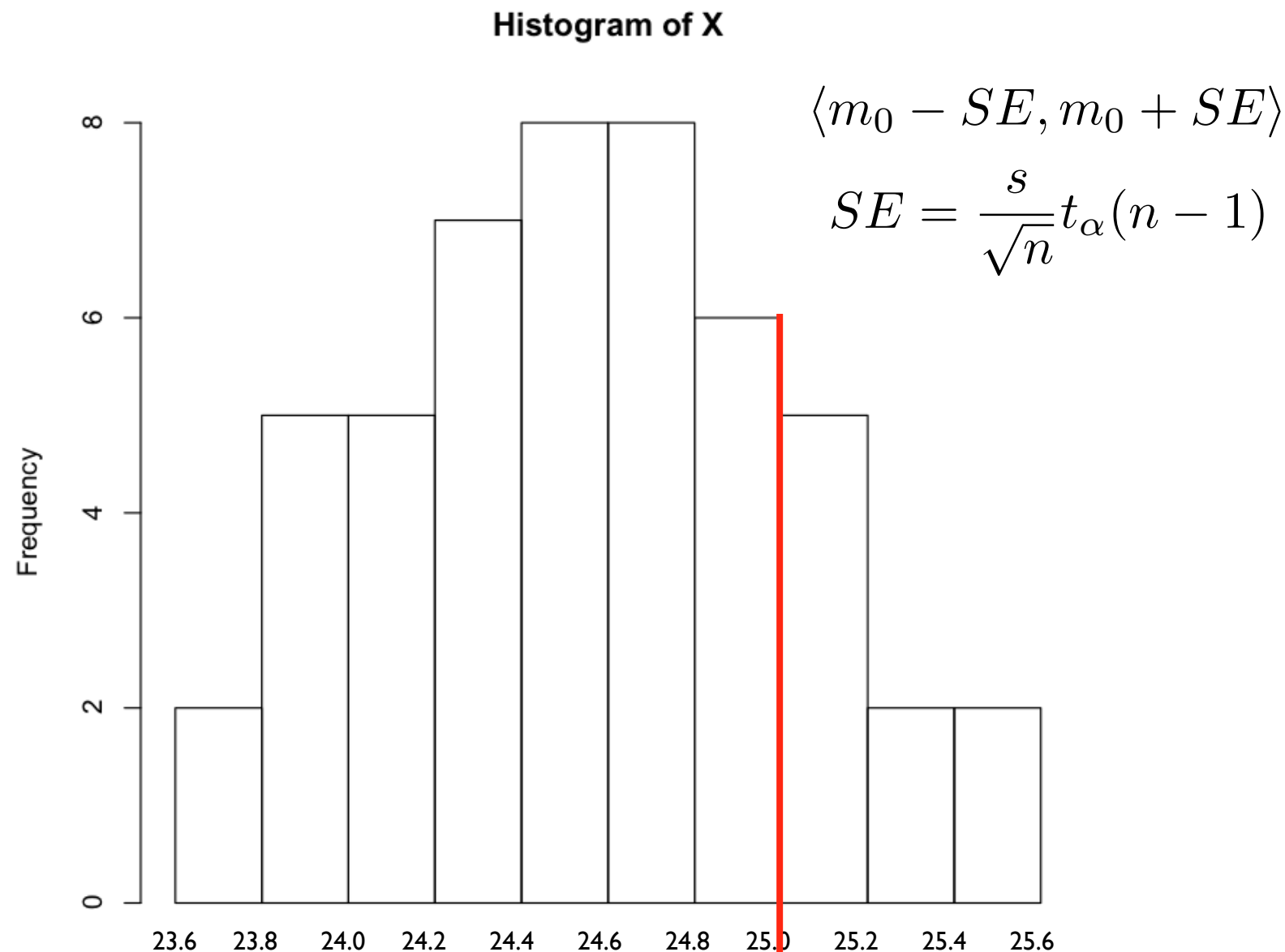
$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01 \quad SE = 0.132 \quad \langle 24.868, 25.132 \rangle$

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



24.52586 24.17119
 24.54486 24.44240
 23.93455 24.20389
 24.19974 24.34851
 23.94024 24.21022
 24.87474 25.06155
 25.48924 25.32572
 23.71721 24.61622
 25.06676 24.90055
 24.36213 24.98580
 24.80591 24.20853
 24.72623 24.64437
 24.70405 23.97645
 25.29837 24.46910
 24.99453 25.42994
 24.66147 24.75773
 25.03970 24.44901
 25.13285 24.40205
 24.78721 23.83656
 24.17186 23.65390
 24.48244 24.68550
 24.22988 23.83956
 24.09777 24.52098
 24.89240 24.25332
 24.14259 25.12906

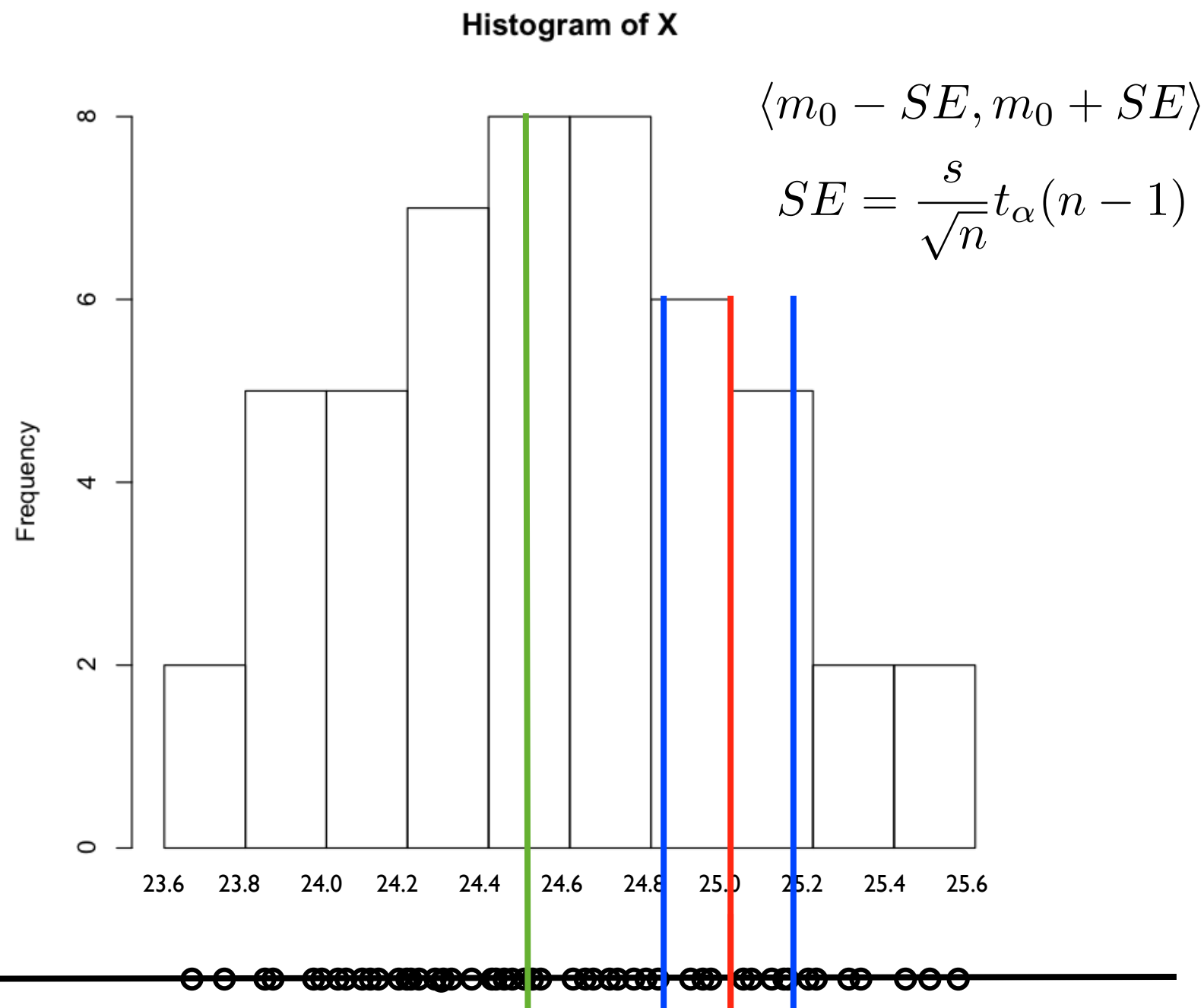
$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01 \quad SE = 0.132 \quad \bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$$

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$$

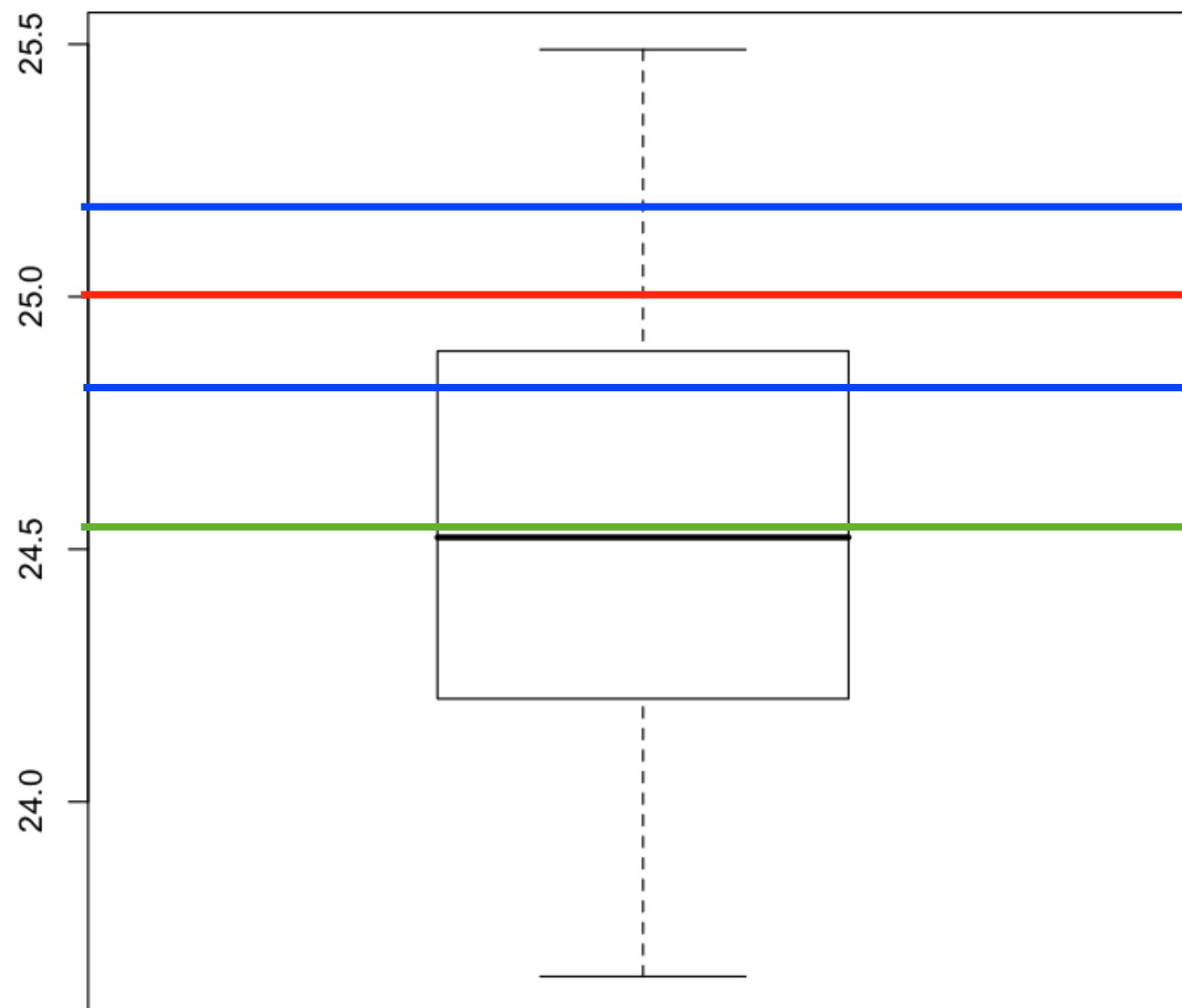
$$SE = 0.132$$

$$\bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$$

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



$$\bar{X} = 24.55, \quad s^2(X) = 0.21, \quad s(X) = 0.46, \quad n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01 \quad SE = 0.132$$

$$\bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$$

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1) \right\rangle$$

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1) \right\rangle$$

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1) \right\rangle$$

$$\frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_{\alpha}(n-1), t_{\alpha}(n-1) \rangle$$

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1)$$

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1)$$

$$H_0 : \mu = m_0$$

Nulová hypotéza

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1)$$

$$H_0 : \mu = m_0$$

Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

Alternativní hypotéza

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1)$$

$$H_0 : \mu = m_0$$

Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

Testová statistika

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1)$$

$$H_0 : \mu = m_0$$

Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

Testová statistika

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

hladina významnosti, kritická hodnota

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1)$$

$$H_0 : \mu = m_0$$

Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

Testová statistika

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

hladina významnosti, kritická hodnota

$$|T| \geq t_\alpha(n-1)$$

rozhodovací pravidlo

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1)$$

$$H_0 : \mu = m_0$$

Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

Testová statistika

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

hladina významnosti, kritická hodnota

$$|T| \geq t_\alpha(n-1)$$

rozhodovací pravidlo

Nulová hypotéza se nepřijímá, pouze zamítá či nezamítá!

Statisticky nelze nic dokázat, pouze zamítnout!

Test hypotézy o rozptylu

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

Nulová hypotéza

$$H_A : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Alternativní hypotéza

$$T = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Testová statistika

$$T \geq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$$

rozhodovací pravidlo

Test hypotézy o rozptylu

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

Nulová hypotéza

$$H_A : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Alternativní hypotéza

$$T = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Testová statistika

$$T \geq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$$

rozhodovací pravidlo

Test hypotézy o rozptylu

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

Nulová hypotéza

$$H_A : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Alternativní hypotéza

$$T = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Testová statistika

$$T \geq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$$

rozhodovací pravidlo

Test hypotézy o rozptylu

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

Nulová hypotéza

$$H_A : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Alternativní hypotéza

$$T = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Testová statistika

$$T \geq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$$

rozhodovací pravidlo

Nulová hypotéza se nepřijímá, pouze zamítá či nezamítá!

Statisticky nelze nic dokázat, pouze zamítnout!

Zákony velkých čísel

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje k číslu θ v pravděpodobnosti: $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| > \epsilon) = 0$

Zákony velkých čísel

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje k číslu θ v pravděpodobnosti: $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| > \epsilon) = 0$

Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje **slabý zákon velkých čísel** právě když platí

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

Zákony velkých čísel

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje k číslu θ v pravděpodobnosti: $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| > \epsilon) = 0$

Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje **slabý zákon velkých čísel** právě když platí

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

Věta: $Y_n \sim Bi(n, p) \Rightarrow Z_n = \frac{1}{n} Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$

Zákony velkých čísel

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje k číslu θ v pravděpodobnosti: $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| > \epsilon) = 0$

Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje **slabý zákon velkých čísel** právě když platí

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

Věta: $Y_n \sim Bi(n, p) \Rightarrow Z_n = \frac{1}{n} Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$

Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 : $E(\bar{X}_n) = \mu, \quad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu$$

Zákony velkých čísel

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje skoro jistě k náhodné veličině X : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} X \Leftrightarrow P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1$

Zákony velkých čísel

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje skoro jistě k náhodné veličině X : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} X \Leftrightarrow P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1$

Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje **silný zákon velkých čísel** právě když platí

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0$$

Zákony velkých čísel

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje skoro jistě k náhodné veličině X : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} X \Leftrightarrow P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1$

Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje **silný zákon velkých čísel** právě když platí

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0$$

Věta (Kolmogorovova): Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 splňuje silný zákon velkých čísel a platí $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \mu$

Centrální limitní věty

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje v distribuci k náhodné veličině X : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ ve všech bodech spojitosti distribuční funkce F .

Centrální limitní věty

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje v distribuci k náhodné veličině X : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ ve všech bodech spojitosti distribuční funkce F .

Věta (Moivre-Laplace): $Y_n \sim Bi(n, p) \Rightarrow \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} U,$
kde $U \sim N(0, 1)$.

Centrální limitní věty

Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ konverguje v distribuci k náhodné veličině X : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ ve všech bodech spojitosti distribuční funkce F .

Věta (Moivre-Laplace): $Y_n \sim Bi(n, p) \Rightarrow \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} U,$
kde $U \sim N(0, 1)$.

Věta (Lindeberg-Lévy): Pro posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejně rozdělených a nezávislých náhodných veličin se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 platí

$$U_{\bar{X}_n} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} U,$$

kde $U \sim N(0, 1)$.