Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky

6. Náhodné vektory

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2021/2022

6. Náhodné vektory

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- sdružená distribuční funkce

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$$

$$\lim_{x_n \to \infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

$$\lim_{x_n \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- sdružená distribuční funkce
  $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$
- sdružená pravděpodobnostní funkce (pro vektor diskrétních náh. veličin)
  $p_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = P(X_1 = a_{i_1}, X_2 = a_{i_2}, \ldots, X_n = a_{i_n})$

$$\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \qquad \sum_{(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n})\in\mathcal{S}^n} p_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = 1$$

Příklad: $\vec{Z} = (X, Y), \quad X \in \{a_1, a_2, a_3\}, \quad Y \in \{b_1, b_2\}$

$Y \backslash X$	a_1	a_2	a_3
b_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
b_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

$$p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$$

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- sdružená distribuční funkce
  $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$
- sdružená pravděpodobnostní funkce
  $\vec{p} = (p_{1,i_1}, p_{2,i_2}, \ldots, p_{n,i_n}) = P(X_1 = a_{i_1}, X_2 = a_{i_2}, \ldots, X_n = a_{i_n})$
- sdružená hustota
  $$f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = 1$$

$$\Theta \subset \mathbb{R}^n : \qquad P(\vec{X} \in \Theta) = \int_{\Theta} \cdots \int f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \big(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)\big)$$

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \right)}_{= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f^{n-1}(x_1) x_1} \mathrm{d}x_1 \end{aligned}$$

marginální hustota

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \big(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)\big)$$

- kovarianční matice

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = E(\vec{X} - E(\vec{X}))^T E(\vec{X} - E(\vec{X}))$$

$$= E\left(\begin{pmatrix} X_1 - E(X_1) \\ X_2 - E(X_2) \\ \ldots \\ X_n - E(X_n) \end{pmatrix} \cdot (X_1 - E(X_1),\ X_2 - E(X_2),\ \cdots,\ X_n - E(X_n))\right)$$

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \big(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)\big)$$

- kovarianční matice

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = E(\vec{X} - E(\vec{X}))^T E(\vec{X} - E(\vec{X}))$$

$$= E\begin{pmatrix} (X_1 - E(X_1))(X_1 - E(X_1)) & (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) & \cdots & (X_1 - E(X_1))(X_n - E(X_n)) \\ (X_2 - E(X_2))(X_1 - E(X_1)) & (X_2 - E(X_2))(X_2 - E(X_2)) & \cdots & (X_2 - E(X_2))(X_n - E(X_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - E(X_n))(X_1 - E(X_1)) & (X_n - E(X_n))(X_2 - E(X_2)) & \cdots & (X_n - E(X_n))(X_n - E(X_n)) \end{pmatrix}$$

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \big(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)\big)$$

- kovarianční matice

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = E(\vec{X} - E(\vec{X}))^T E(\vec{X} - E(\vec{X}))$$

kovariance $\mathrm{Cov}(X_i X_j)$

$$= \begin{pmatrix} E((X_1 - EX_1)(X_1 - EX_1)) & E((X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)) & \cdots & E((X_1 - EX_1)(X_n - EX_n)) \\ E((X_2 - EX_2)(X_1 - EX_1)) & E((X_2 - EX_2)(X_2 - EX_2)) & \cdots & E((X_2 - EX_2)(X_n - EX_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E((X_n - EX_n)(X_1 - EX_1)) & E((X_n - EX_n)(X_2 - EX_2)) & \cdots & E((X_n - EX_n)(X_n - (X_n)) \end{pmatrix}$$

rozptyly $\mathrm{Var}(X_i)$

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \big(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)\big)$$

- kovarianční matice

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

$Cov(X, Y) = Cov(Y, X) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}(\vec{X})$ je symetrická

Kovariance $Cov(X, Y)$ je míra lineární závislosti mezi X a Y.

Kovariance $Cov(X, Y)$ závisí na měřítku (jednotkách).

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \big(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)\big)$$

- kovarianční matice

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

- korelační koeficient

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

- nezávisí na měřítku: $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
- je mírou lineární závislosti

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \big(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)\big)$$

- kovarianční matice

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

- korelační matice

$$\mathbf{R}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1, X_2) & \cdots & \rho(X_1, X_n) \\ \rho(X_2, X_1) & 1 & \cdots & \rho(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_n, X_1) & \rho(X_n, X_2) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Diskrétní náhodný vektor $Z=(X,Y)$

$X \in \{a_1, a_2, a_3\}, \quad Y \in \{b_1, b_2\}$

$p_{ij} = P(X = a_i \wedge Y = b_j)$

$Y \backslash X$	a_1	a_2	a_3
b_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
b_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Diskrétní náhodný vektor $Z=(X,Y)$

$$X \in \{a_1, a_2, a_3\}, \quad Y \in \{b_1, b_2\}$$

$Y \backslash X$	a_1	a_2	a_3	Y
b_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$p^Y{}_1$
b_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$p^Y{}_2$
X	$p^X{}_1$	$p^X{}_2$	$p^X{}_3$	1

$$p_{ij} = P(X = a_i \wedge Y = b_j)$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

$$P(X = a_i) = \sum_{b_j} p_{ij} = p_i^X$$

$$P(Y = b_j) = \sum_{a_i} p_{ij} = p_j^Y$$

$$P(X = a_i | Y = b_j) = \frac{p_{ij}}{p_j^Y} = \frac{p_{ij}}{\sum_{a_i} p_{ij}}$$

Příklad:

Jsou tři výrobci dodávané součástky a ta může být ve kvalitativní třídě I, II nebo III. Pravděpodobnostní rozdělení těchto znaků je dáno tabulkou:

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraná součástka třídy III je od výrobce A?

	A	B	C	
I	0,22	0,18	0,10	0,5
II	0,12	0,08	0,07	0,27
III	0,08	0,12	0,03	0,23
	0,42	0,38	0,20	1,00

$$X \in \{1, 2, 3\}, \quad Y \in \{1, 2, 3\} \qquad P(X = 1 | Y = 3) = ?$$

$$P(X = 1 | Y = 3) = \frac{0,08}{0,23} = 0,3478$$

Spojitý náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Dvourozměrné rozdělení pravděpodobnosti:
sdružená distribuční funkce $F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x,\ Y \leq y)$

$$F(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y|X \leq x) = F(x)F(y|x)$$

Pokud jsou X a Y stochasticky nezávislé, potom je

$$F(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F(x)F(y)$$

Platí to i opačně: pokud je $F(x,y) = F(x)F(y)$, potom jsou X a Y stochasticky nezávislé.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$ … a naopak … $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

Speciálně $P\big((X,Y) \in W\big) = \iint_W f(x,y)\,dx\,dy$ pro libovolnou oblast $W \subset \mathbb{R}^2$

Spojitý náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Jaké je rozdělení pravděpodobnosti složky X?

$$P(X \leq x) = P(X \leq x \wedge Y \leq \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \right) dx = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

Hustotu $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ nazveme marginální hustotou složky X vektoru $Z=(X,Y)$. Podobně $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ je marginální hustotou složky Y.

Složky X a Y náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ jsou stochasticky nezávislé právě když platí jedna z rovností

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Střední hodnota náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ je rovna vektoru středních hodnot jeho složek: $\mathrm{E}(Z)=(\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y)$.

$$
\begin{aligned}
EX &= \iint_{R^2} x f(x,y)dxdy = \int_R x \int_R f(x,y)dydx = \int_R x f^X(x)dx, \\
EY &= \iint_{R^2} y f(x,y)dxdy = \int_R y \int_R f(x,y)dxdy = \int_R y f^Y(y)dy.
\end{aligned}
$$

V diskrétním případě:

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_i^X, \\
EY &= \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_j y_j p_j^Y.
\end{aligned}
$$

Kovariance $cov(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}X).(Y-\mathrm{E}Y)] = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X.\mathrm{E}Y$$

kde $EXY = \iint_{R^2} xyf(x,y)dxdy.$ nebo $EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij},$

Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Korelační koeficient $\varrho(X,Y)$ náhodných veličin X,Y je roven

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

Je-li $\rho(X,Y) = 0$ t, říkáme, že X a Y jsou nekorelované.

Kovarianční matice náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ má tvar

$$D(X,Y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

Korelační matice náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ má tvar

$$R(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(Y,X) & 1 \end{pmatrix}$$

Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, potom je $\mathrm{E}(X,Y) = \mathrm{E}(X).\mathrm{E}(Y)$ a tedy $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, potom je

$$EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_i^X p_j^Y = \sum_i x_i p_i^X \sum_j y_j p_j^Y = EX.EY,$$

případně (ve spojitém případě)

$$EXY = \iint_{R^2} xy f^X(x) f^Y(y) dx dy = \int_R x f^X(x) dx \int_R y f^Y(y) dy = EX.EY.$$

a tedy $\quad cov(X,Y) = EXY - EXEY = EXEY - EXEY = 0.$

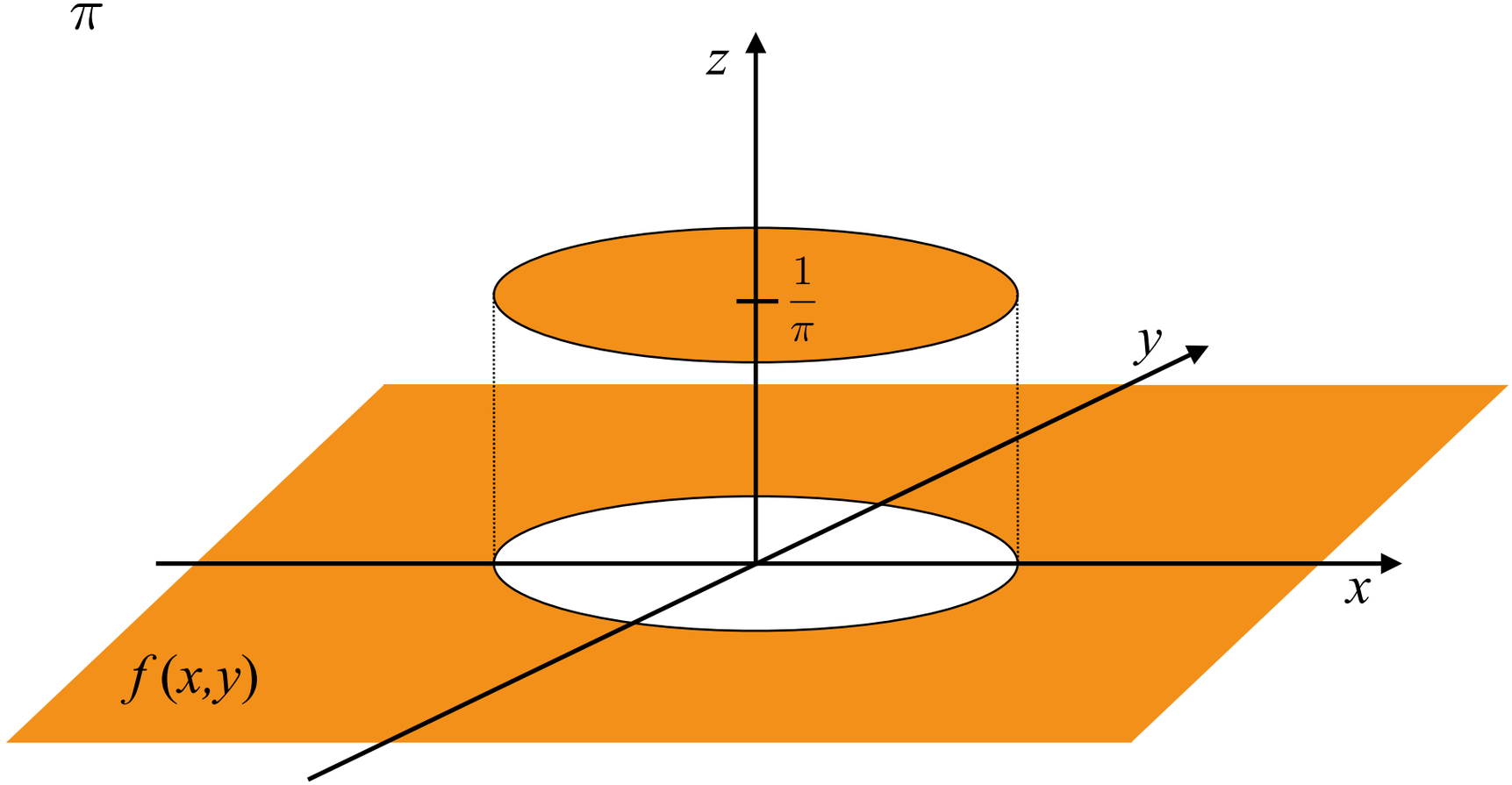
Opačné tvrzení neplatí!

Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 1: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x,y) = \begin{cases} const, & (x,y) \in K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

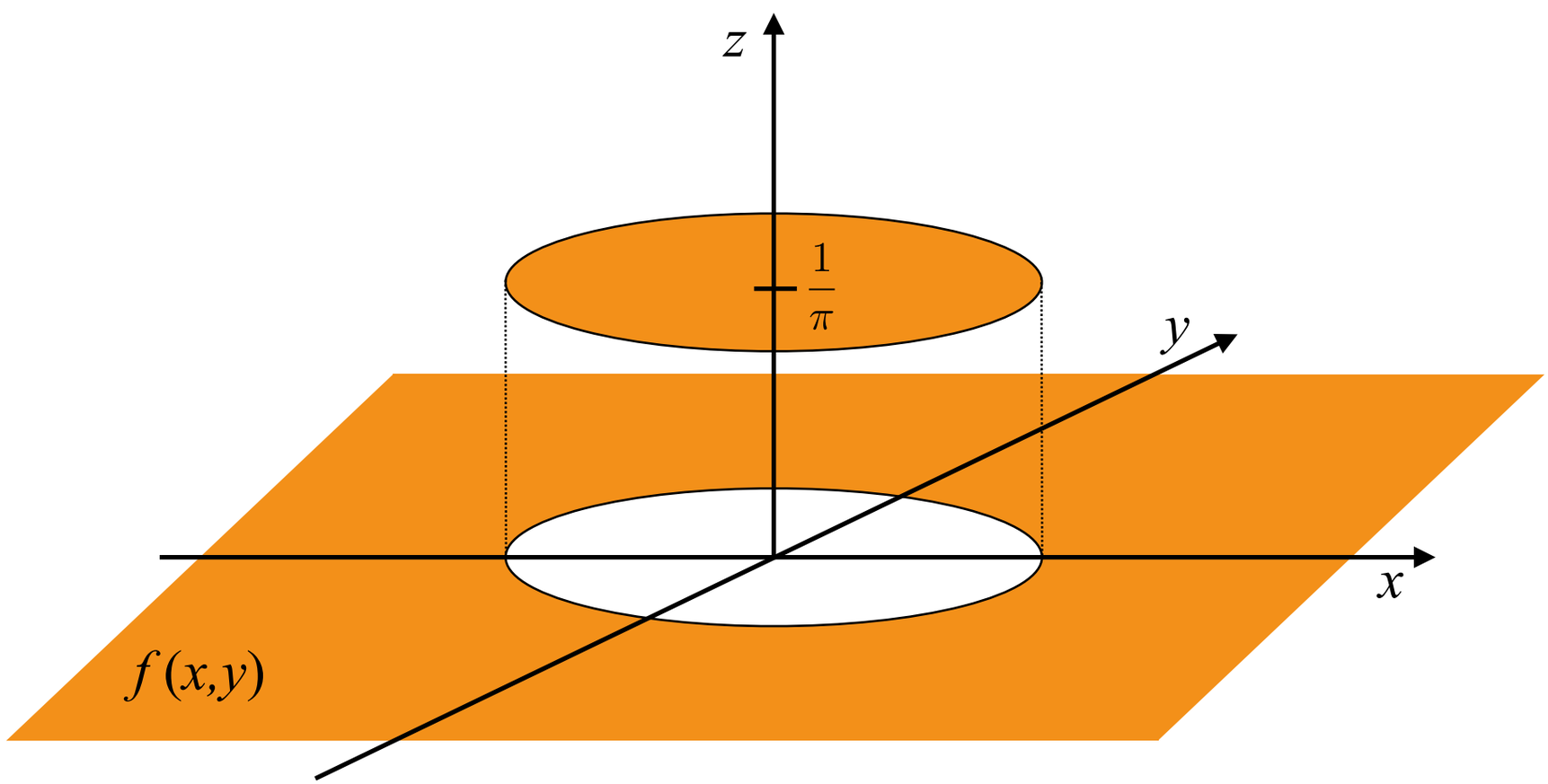
$$const = \frac{1}{\pi}$$



Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 1: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x,y) \in K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$



Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 1: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x,y) \in K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

=> složky X a Y jsou stochasticky závislé

$$\text{cov}(X,Y) = ? = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y) dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} x dx dy = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$EXY = \frac{1}{\pi} \iint_K xy \, dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} x \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X,Y) = 0$$

=> složky X a Y jsou nekorelované

Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 1: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x,y) \in K = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$EZ = (EX, EY) = (0,0) \qquad \operatorname{cov}(X,Y) = 0 \qquad \operatorname{var}(X), \ \operatorname{var}(Y)?$$

$$\operatorname{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 = \frac{1}{\pi} \iint_K x^2 \, dxdy \qquad \left| \begin{array}{c} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi, \\ J = r \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2\phi \, d\phi dr = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} cos^2\phi \, d\phi \right) = \frac{1}{4}$$

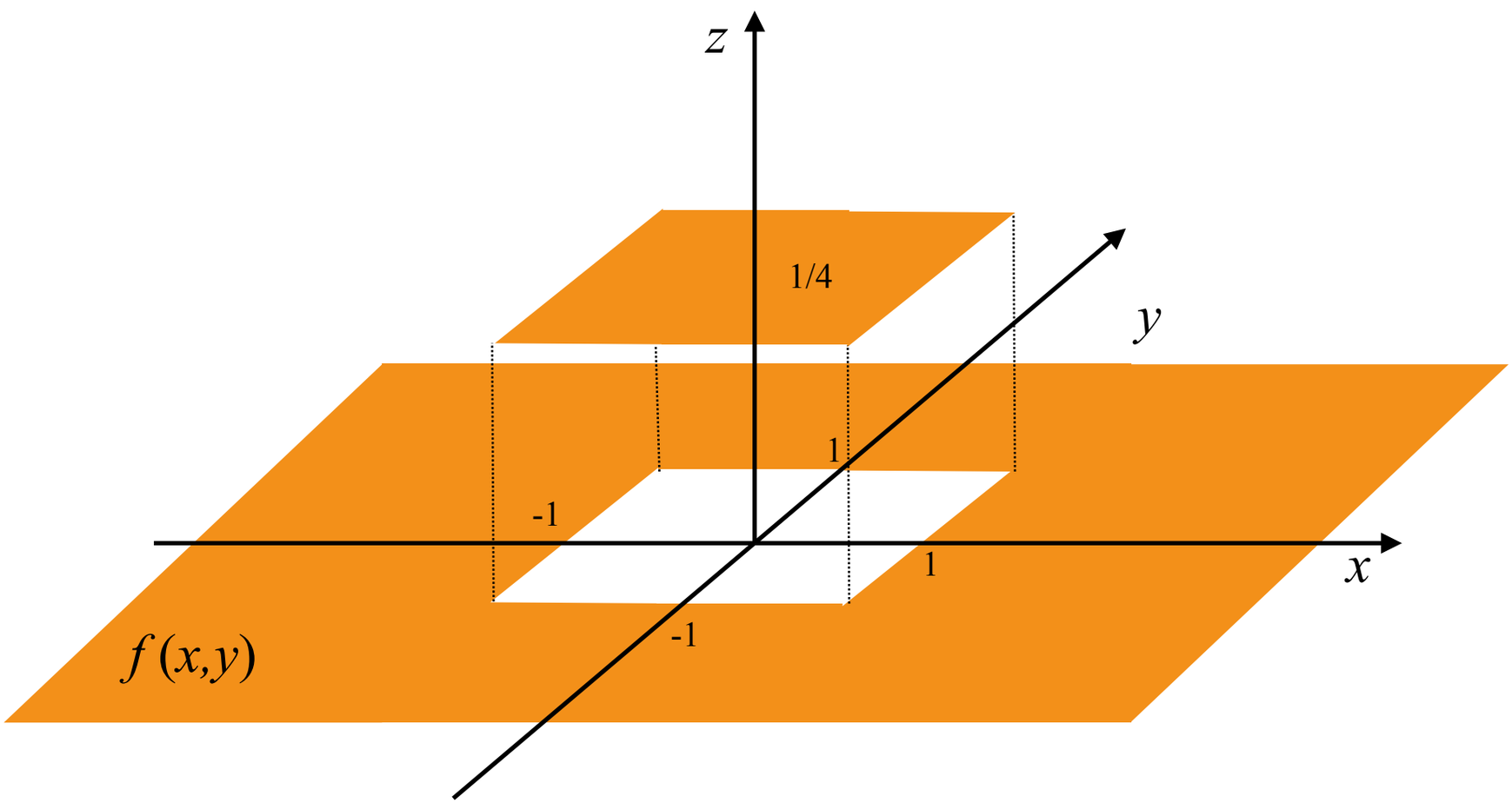
$$\operatorname{var}(Y) = \frac{1}{4}$$

$$D(X,Y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Úloha 1: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení nad čtvercem M. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

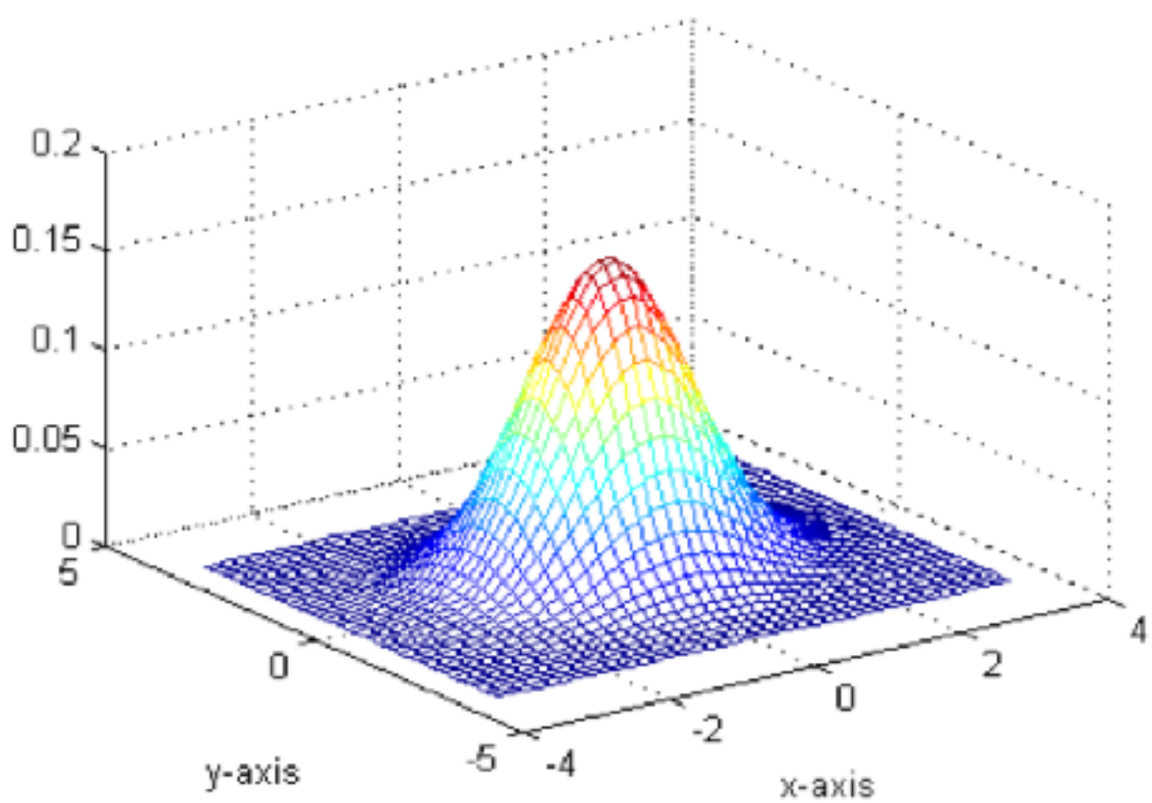
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x,y) \in M = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

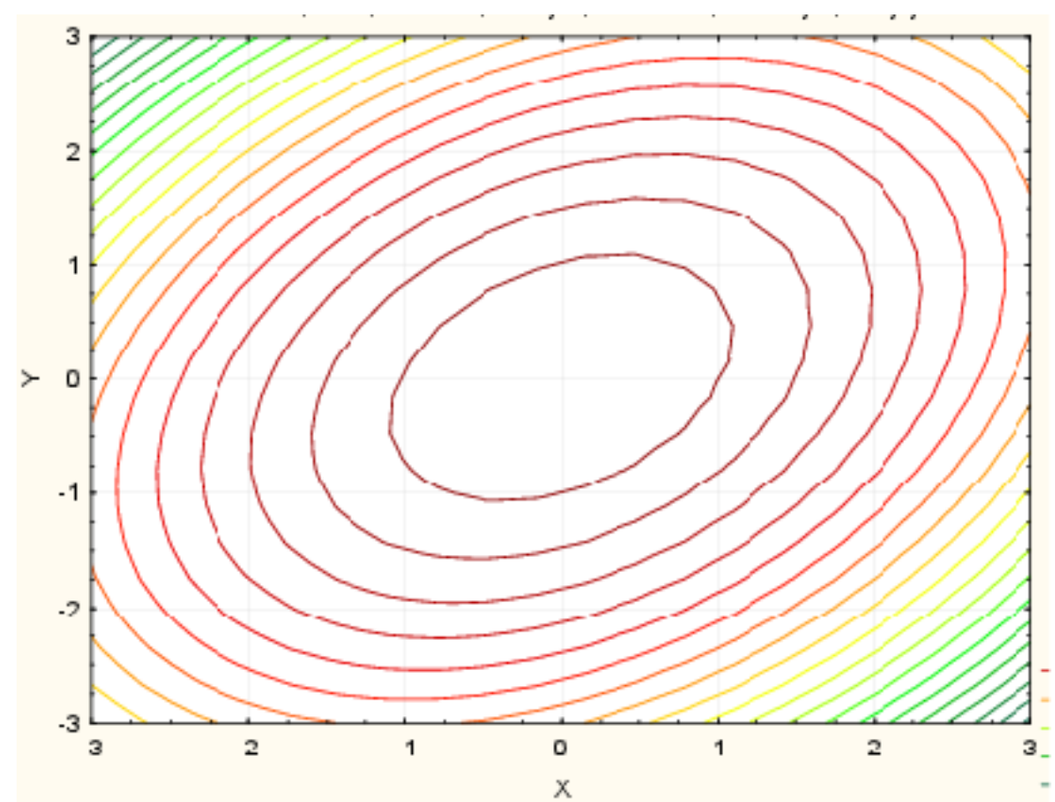


Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 2: Náhodný vektor (X,Y) má dvourozměrné normální rozdělení se střední hodnotou (μ_1,μ_2) a kovarianční maticí $D = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ je-li jeho dvourozměrná hustota rovna

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$





Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 3: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X,Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Protože jsou složky nezávislé, pro $x, y \in \mathbf{R}^2$ máme

$$f(x,y) = f^X(x) f^Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

a tedy $E(Z) = \iint \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Substitucí $x = r\cos\beta,\ y = r\sin\beta$ s Jakobiánem r dostáváme

$$EZ = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}r$$

Dále pro $t = \frac{r^2}{2\sigma^2}$ máme $EZ = \sigma \int_0^{\infty} (2t)^{\frac{1}{2}} e^{-t} \mathrm{d}t$.

Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 3: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X,Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$EZ = \sigma \int_0^\infty (2t)^{\frac{1}{2}} e^{-t} \mathrm{d}t$$

[https://cs.wikipedia.org/wiki/Gama_funkce]

Zde použijeme tzv. Gamma funkci: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ a dostáváme

$$EZ = \sigma\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = 1,253\sigma$$

Podobným způsobem můžeme spočítat libovolný moment veličiny Z:

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\int_R^2 (x^2+y^2)^{\frac{i}{2}} e^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy.$$ Stejnými substitucemi se dostaneme

k výrazu $$EZ^i = \sigma^i \int_0^\infty (2t)^{\frac{i}{2}} e^{-t} dt = \left(\sigma\sqrt{2}\right)^i \Gamma(\frac{i}{2}+1).$$

Pomocí druhého obecného momentu $EZ^2 = 2\sigma^2\Gamma(2)$ dostaneme

$$VarZ = EZ^2 - (EZ)^2 = 0,429\sigma^2$$

Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Řešení: Počítáme i-tý obecný moment Z: je $Z^i = (X^2+Y^2)^{\frac{i}{2}}$, tedy

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\int_R^2 (x^2+y^2)^{\frac{i}{2}} e^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy.$$

Substitucí $x = rcos\beta, y = rsin\beta$, jejíž Jakobián je r, dostáváme

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\infty} r^{i+1} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$$

a s použitím další substituce $t = \frac{r^2}{2\sigma^2}$

$$EZ^i = \sigma^i \int_0^{\infty} (2t)^{\frac{i}{2}} e^{-t} dt = \left(\sigma\sqrt{2}\right)^i \Gamma(\frac{i}{2}+1).$$

Odsud specielně plyne $EZ = \sigma\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = 1,253\sigma$. Pomocí druhého obecného momentu $EZ^2 = 2\sigma^2\Gamma(2)$ je rozptyl $VarZ = EZ^2 - (EZ)^2 = 0,429\sigma^2$.

Rozdělení transformace náhodného vektoru

Funkce náhodné veličiny

Předpokládejme, že funkce $y=h(x)$ je definovaná na množině hodnot veličiny X. Potom distribuční funkce $G(y)$ transformované náhodné veličiny $Y=h(X)$ je:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = \int_{h(x) \leq y} f(x) \mathrm{d}x$$

Hustotu veličiny $Y=h(X)$ potom dostaneme derivací distribuční funkce $G(y)$.

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right) \left| \frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf kapitola 13 Funkce náhodných veličin (str. 109-117).

Rozdělení transformace náhodného vektoru

$\vec{X} \sim f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\qquad h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\qquad$ regulární zobrazení (J $\neq$ 0)

$\vec{Y} = h(\vec{X})$ $\qquad g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = ?$

$$y_i = h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \Rightarrow \quad x_i = h_i^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$$\Theta \subset \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; H = h(\Theta) \subset \mathbb{R}^n$$

$$P(\vec{Y} \in \Theta) = \int \cdots \int_{\Theta} g(y_1, \ldots, y_n) \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$$

$$= \int \cdots \int_{\Theta} f\left(h_1^{-1}(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n^{-1}(y_1, \ldots, y_n)\right) \cdot |J| \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$$

… a tedy je $\quad g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f\left(h_1^{-1}(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n^{-1}(y_1, \ldots, y_n)\right) \cdot |J|$

Rozdělení transformace náhodného vektoru

Příklad:

Uvažujme případ $n = 2$ a

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_2$$

Inverzní funkce jsou $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_2$ a jakobián

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tudíž

$$g(y_1, y_2) = f(y_1 - y_2, y_2).$$

Marginální hustota veličiny $Y_1 = X_1 + X_2$ je

$$g_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 - y_2,\, y_2)\, \mathrm{d}y_2.$$

Rozdělení transformace náhodného vektoru

Příklad: $X_1 \sim Exp(\lambda), \quad X_2 \sim Exp(\lambda),$ nezávislé náhodné veličiny

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\vec{Y} = (Y_1, Y_2), \quad Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_2 \qquad \Rightarrow \quad X_1 = Y_1 - Y_2, \quad X_2 = Y_2$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Tudíž

$$g(y_1, y_2) = f(y_1 - y_2, y_2) = \lambda^2 e^{y_1}$$

$$g_1(y_1) = \int_0^\infty f(y_1 - y_2, y_2) \mathrm{d}y_2 = \int_0^{y_1} \lambda^2 e^{y_1} \mathrm{d}y_2 = \lambda^2 y_1 e^{y_1}$$

Srovnejte s odvozením Erlangova rozdělení pro n=2.