Základy stochastiky

Statistické charakteristiky a odhady

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

Statistické charakteristiky

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Pravděpodobnostní charakteristiky	Výběrové charakteristiky
Střední hodnota $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	Výběrový průměr $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Momenty $\mu_k(X) = E(X - E(X))^k$	Výběrové momenty $m_k(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^k$
Rozptyl $var(X) = E(X - E(X))^2$	Výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2$
Kvantily $\tilde{x}_{100\alpha}$	Výběrové kvantily $X_{([np]+1)}$

Statistické charakteristiky

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Bodové odhady

Pravděpodobnostní charakteristiky	Výběrové charakteristiky
Střední hodnota $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	Výběrový průměr $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Momenty $\mu_k(X) = E(X - E(X))^k$	Výběrové momenty $m_k(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^k$
Rozptyl $var(X) = E(X - E(X))^2$	Výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2$
Kvantily $\tilde{x}_{100\alpha}$	Výběrové kvantily $X_{([np]+1)}$

Statistické charakteristiky

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Bodové odhady

Pravděpodobnostní charakteristiky	Výběrové charakteristiky
Střední hodnota $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	Výběrový průměr $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Momenty $\mu_k(X) = E(X - E(X))^k$	Výběrové momenty $m_k(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^k$
Rozptyl $var(X) = E(X - E(X))^2$	Výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2$
Kvantily $\tilde{x}_{100\alpha}$	Výběrové kvantily $X_{([np]+1)}$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\ (\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1 - \alpha$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\quad\bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\quad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\underline{\mu} \leq \mu \leq \overline{\mu})$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}\,) = P(\,-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}\,)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

> Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že
>
> $$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \leq \mu \leq \overline{\mu}\,) = P(-\underline{\mu} \geq -\mu \geq -\overline{\mu}\,) = P(\,\bar{X} - \underline{\mu} \geq \bar{X} - \mu \geq \bar{X} - \overline{\mu}\,)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\,\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\,1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}\,) = P(\,-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}\,) = P(\,\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}\,) = P(\,-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}\,) = P(\,\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,) = 1 - \alpha$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}\,) = P(\,-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}\,) = P(\,\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,) = 1 - \alpha \;\; = P(\,u_{\alpha/2} \le Z \le u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}\,) = P(\,-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}\,) = P(\,\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,) = 1 - \alpha \;= P(\,u_{\alpha/2} \le Z \le u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2}$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\quad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \right) = 1 - \alpha \; = P\left(u_{\alpha/2} \le Z \le u_{1-\alpha/2} \right)$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \right) = 1 - \alpha \;\; = P\left(u_{\alpha/2} \leq Z \leq u_{1-\alpha/2} \right)$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X}-\overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}=u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}=\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X}-\underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}=u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

- Příklad: $\hat{\mu}=\bar{X}_n \qquad \bar{X}_n\sim N(\mu,\,\sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,\,1) \qquad \frac{\bar{X}_n-\mu}{s}\sqrt{n}\sim t(n-1)$$

$$=P\Big(\frac{\bar{X}-\overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\le Z\le\frac{\bar{X}-\underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\Big)=1-\alpha \;=P\big(u_{\alpha/2}\le Z\le u_{1-\alpha/2}\big)$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \le \mu \le \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha}$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1)} \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,) = 1 - \alpha \;\; = P(\,u_{\alpha/2} \le Z \le u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$$

$$\boxed{P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \le \mu \le \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha}$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1)} \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \right) = 1 - \alpha \;= P\left(u_{\alpha/2} \le Z \le u_{1-\alpha/2} \right)$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$P(\,\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\,1) \qquad \boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\,) = 1 - \alpha}$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$P(\,\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \le \mu \le \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1) \qquad \boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1) \le \mu \le \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\,) = 1 - \alpha}$$

Tedy intervalový odhad je ve tvaru: $(\,\bar{X} - SE,\, \bar{X} + SE\,)$

kde SE je tzv. standardní chyba.

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$P(\,\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

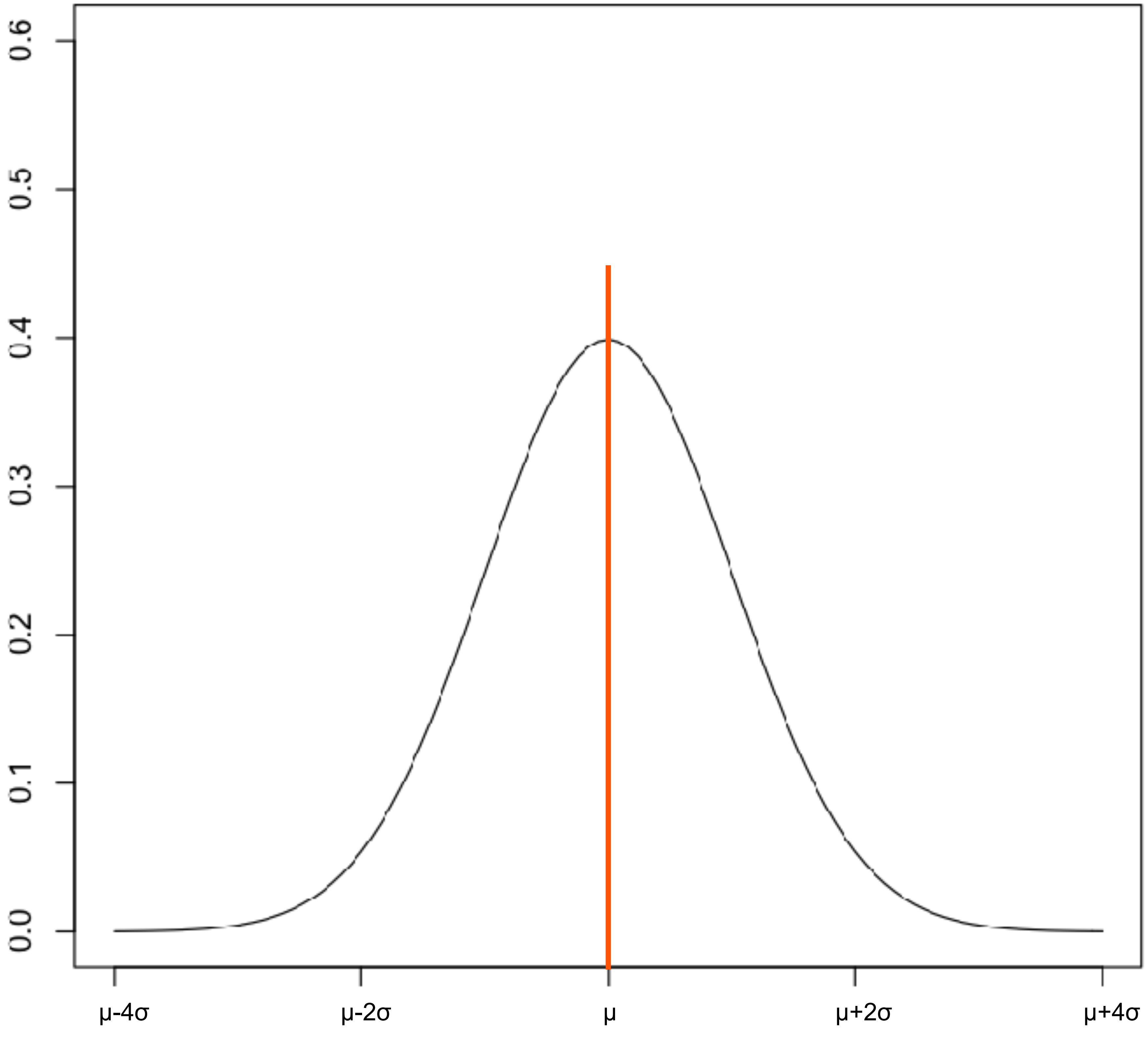
$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1) \qquad \boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\,) = 1 - \alpha}$$

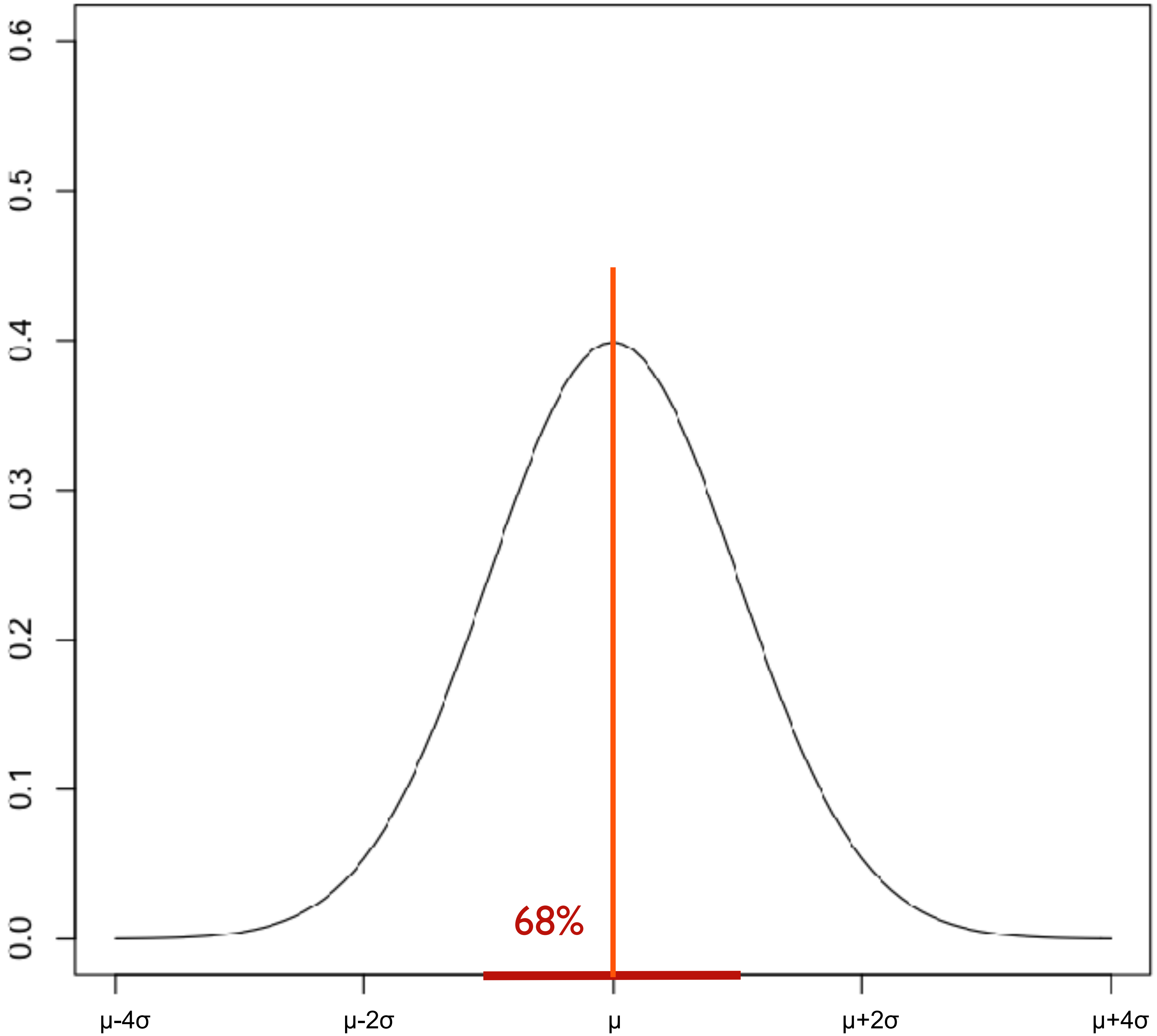
Tedy intervalový odhad je ve tvaru: $(\,\bar{X} - SE,\, \bar{X} + SE\,)$

kde SE je tzv. standardní chyba.

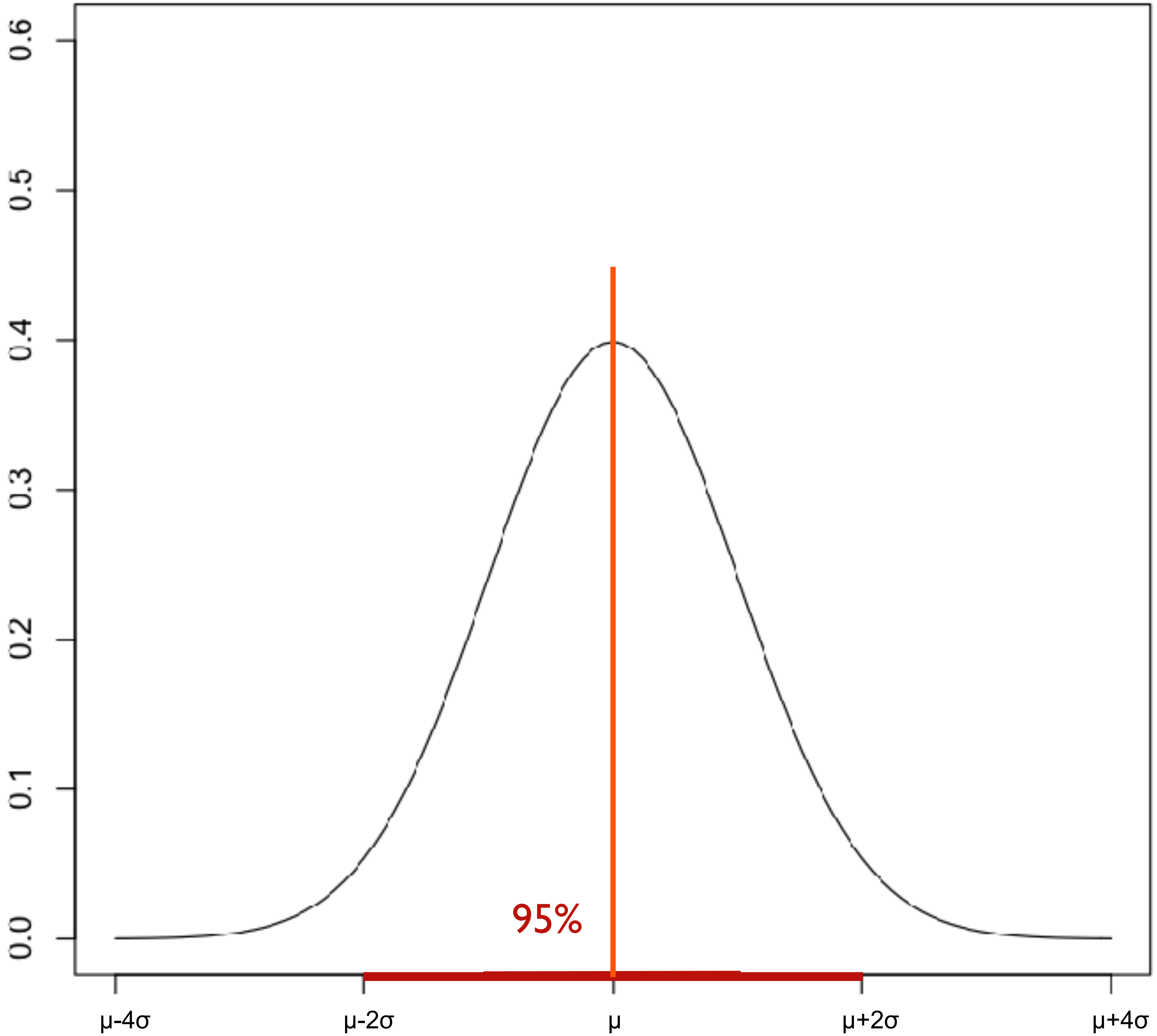
Intervalové odhady



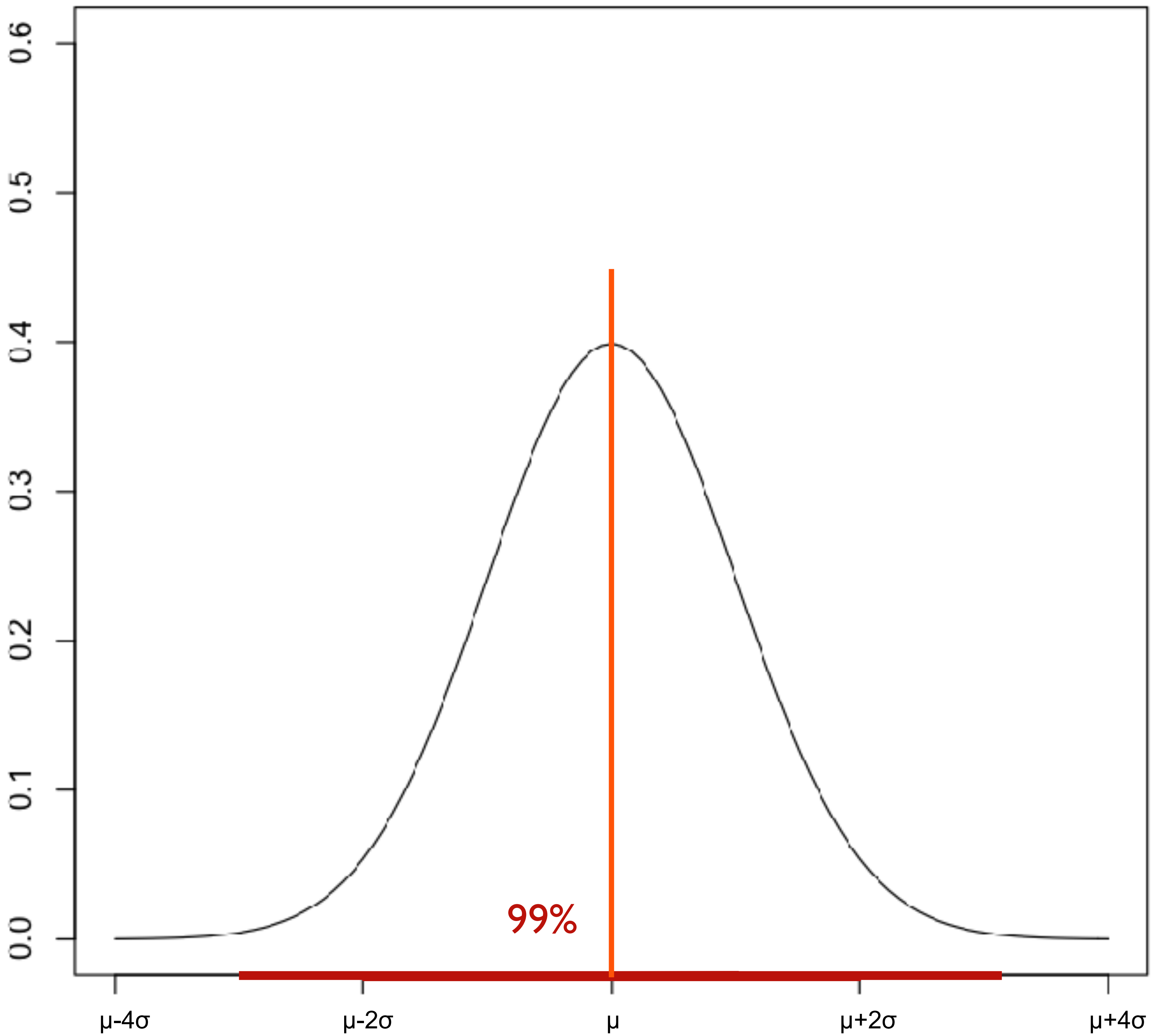
Intervalové odhady



Intervalové odhady



Intervalové odhady

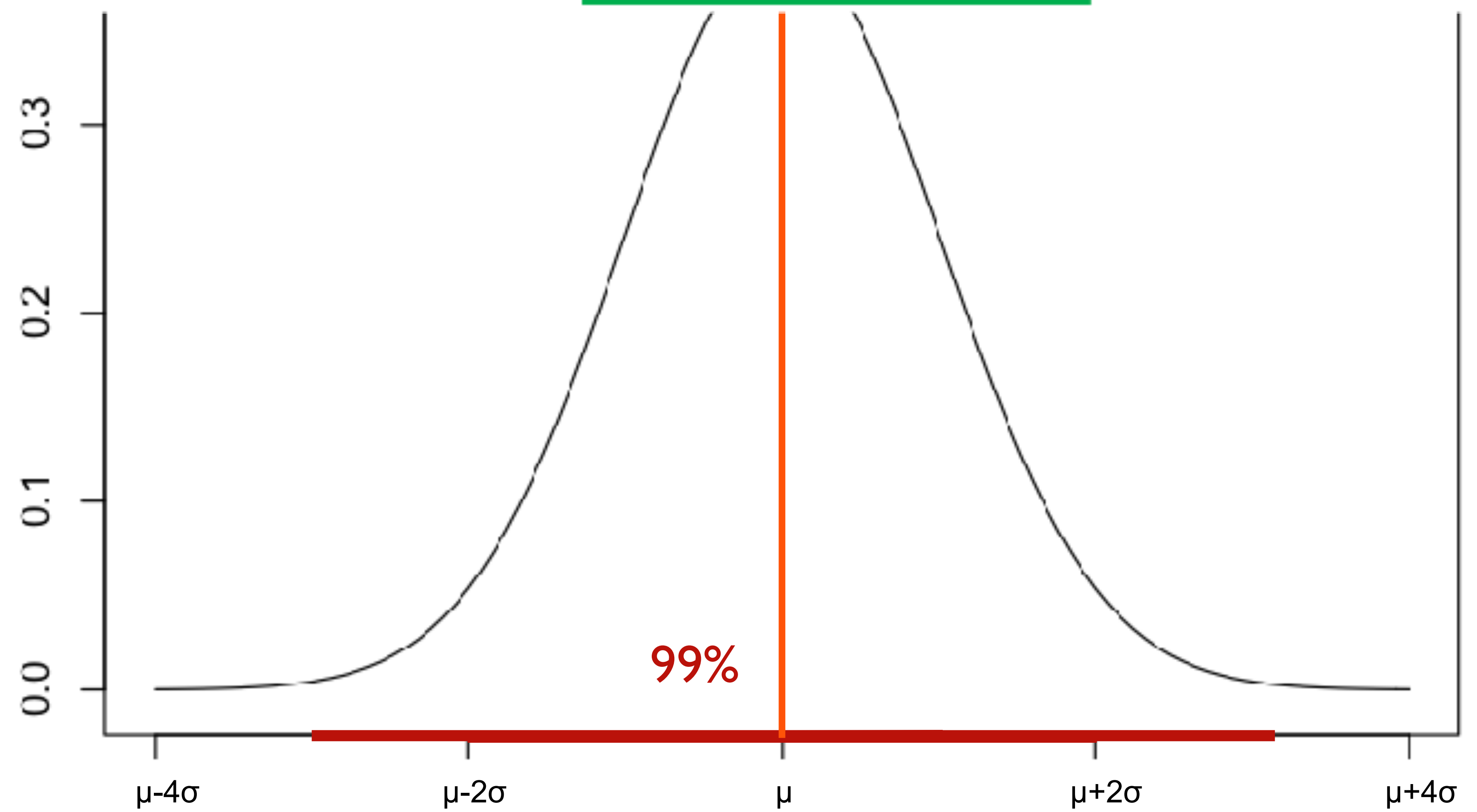


Intervalové odhady

Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. +90,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,65118	14,17739	12,50000	9,519502	13	0,000000

Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,59333	14,23525	12,50000	9,519502	13	0,000000

Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -99,000%	Int. spolehl. +99,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,46676	14,36181	12,50000	9,519502	13	0,000000

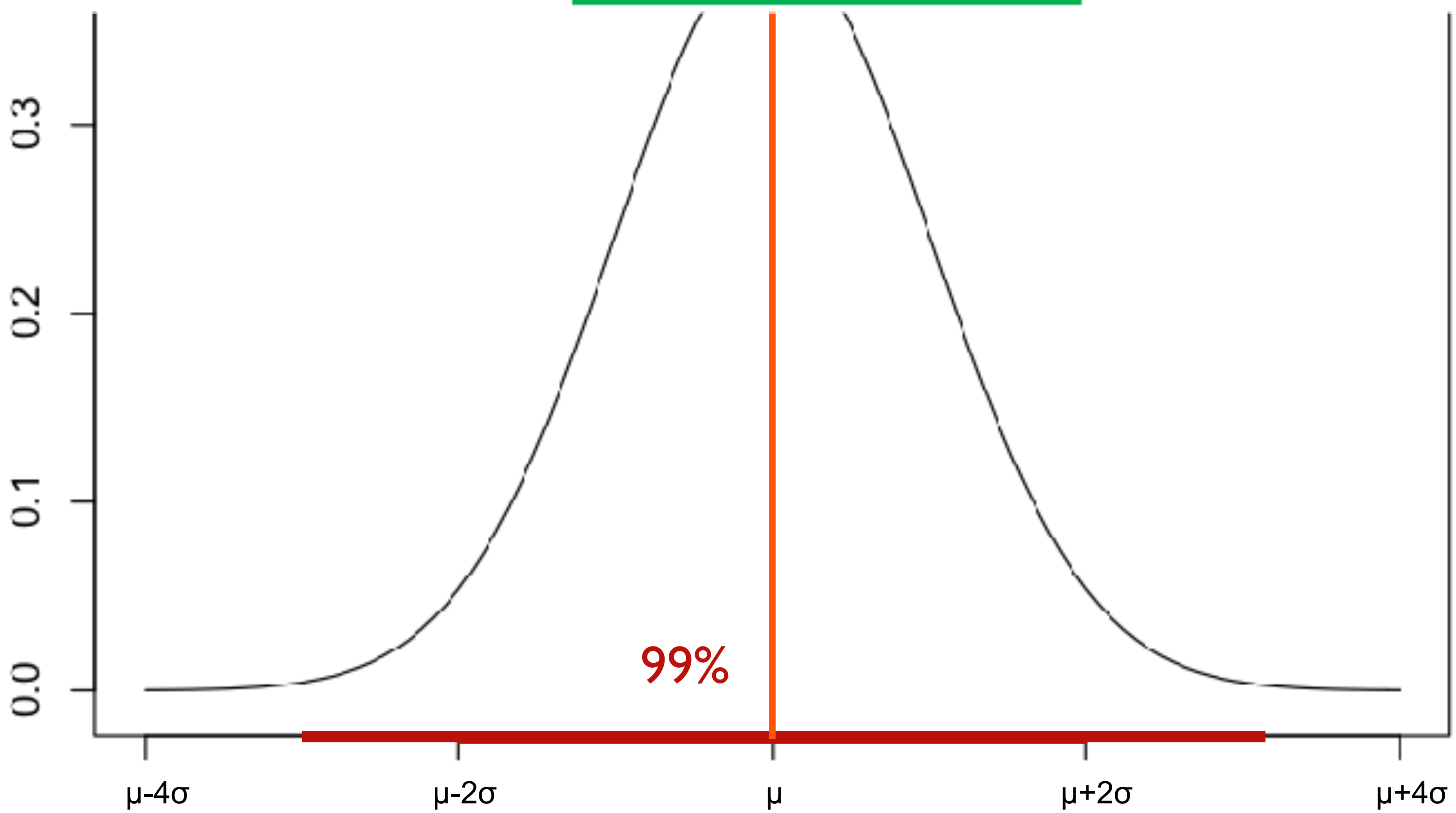


Intervalové odhady

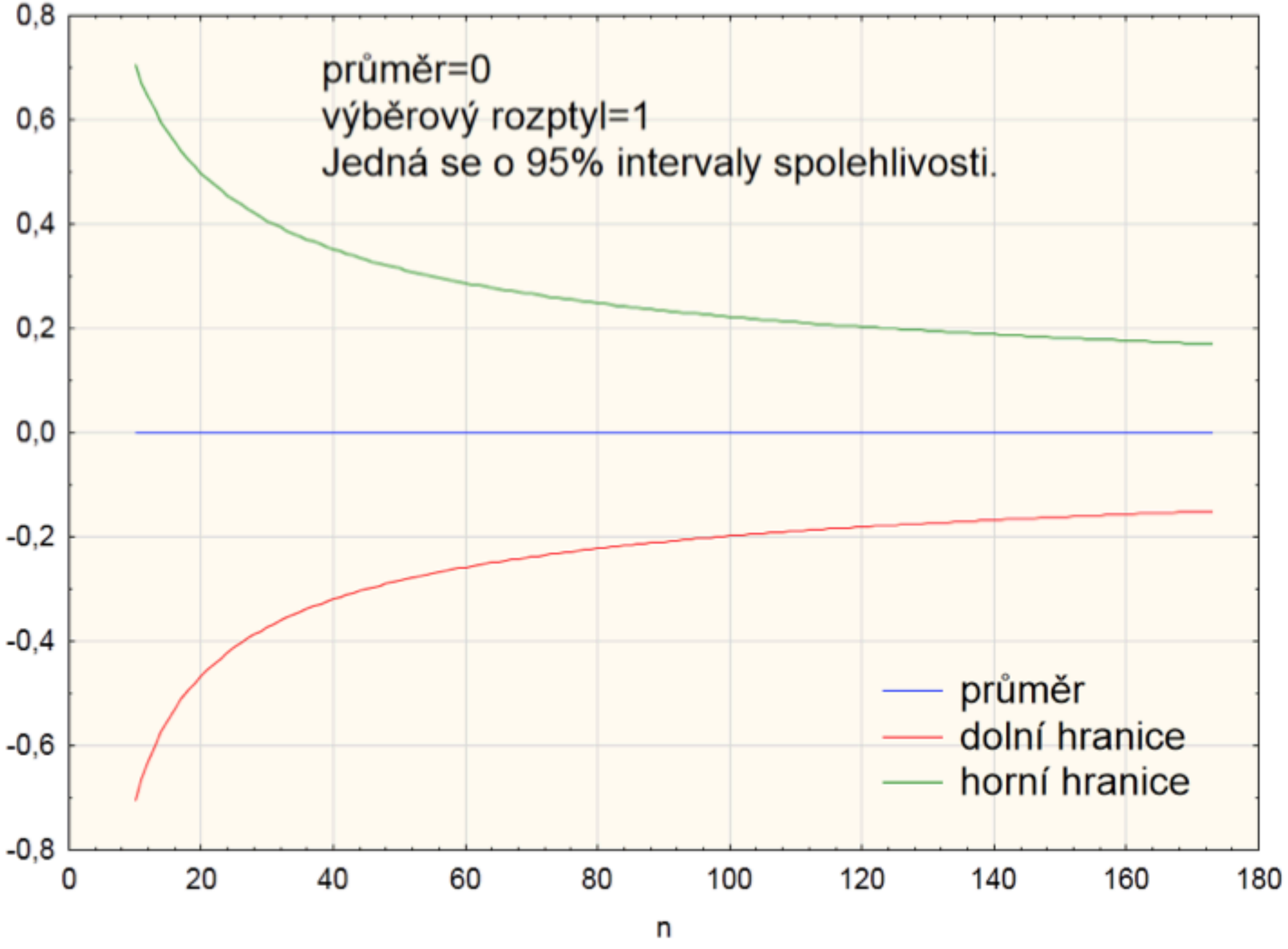
Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. +90,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,65118	14,17739	12,50000	9,519502	13	0,000000

Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,59333	14,23525	12,50000	9,519502	13	0,000000

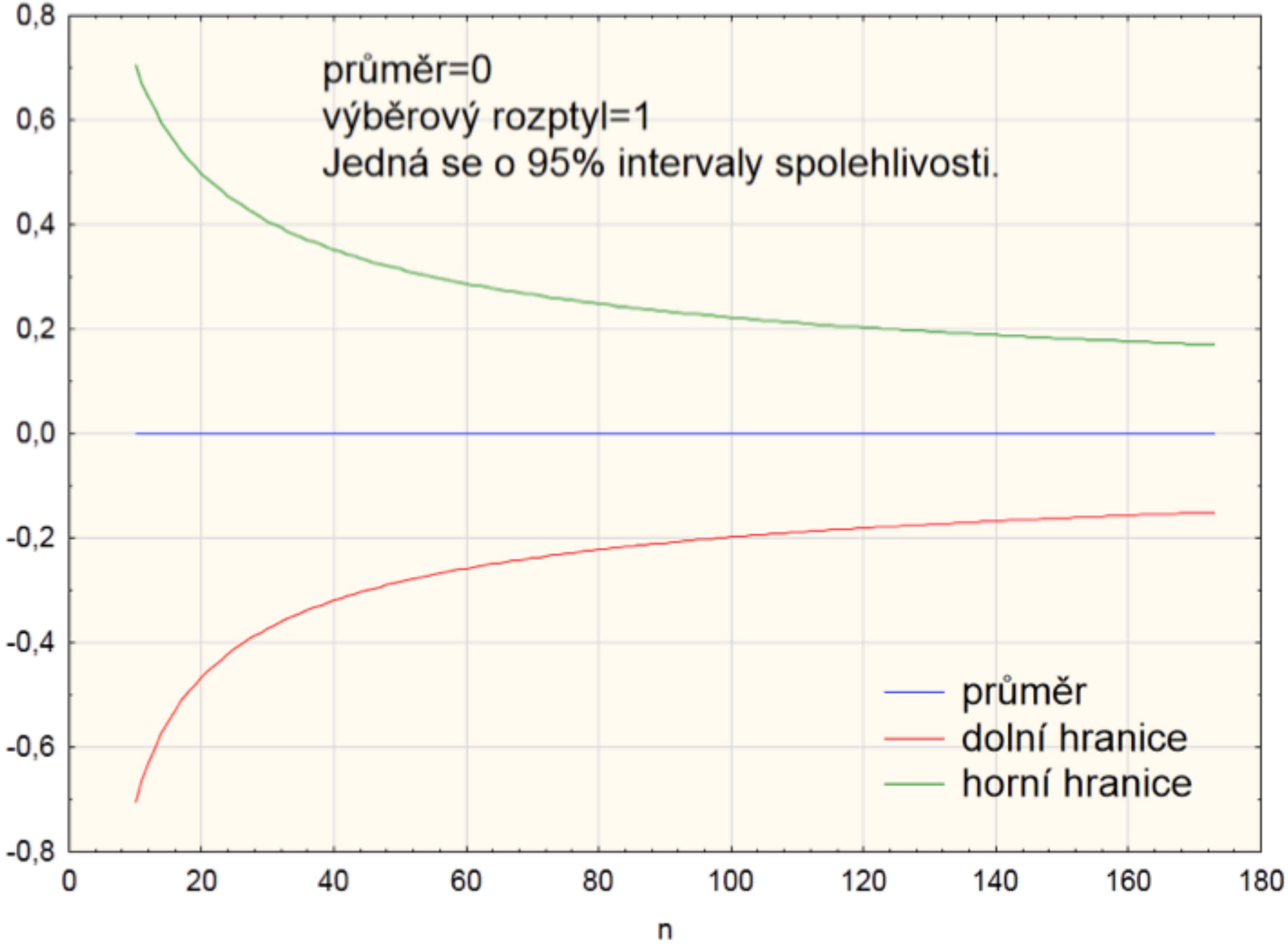
Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -99,000%	Int. spolehl. +99,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,46676	14,36181	12,50000	9,519502	13	0,000000



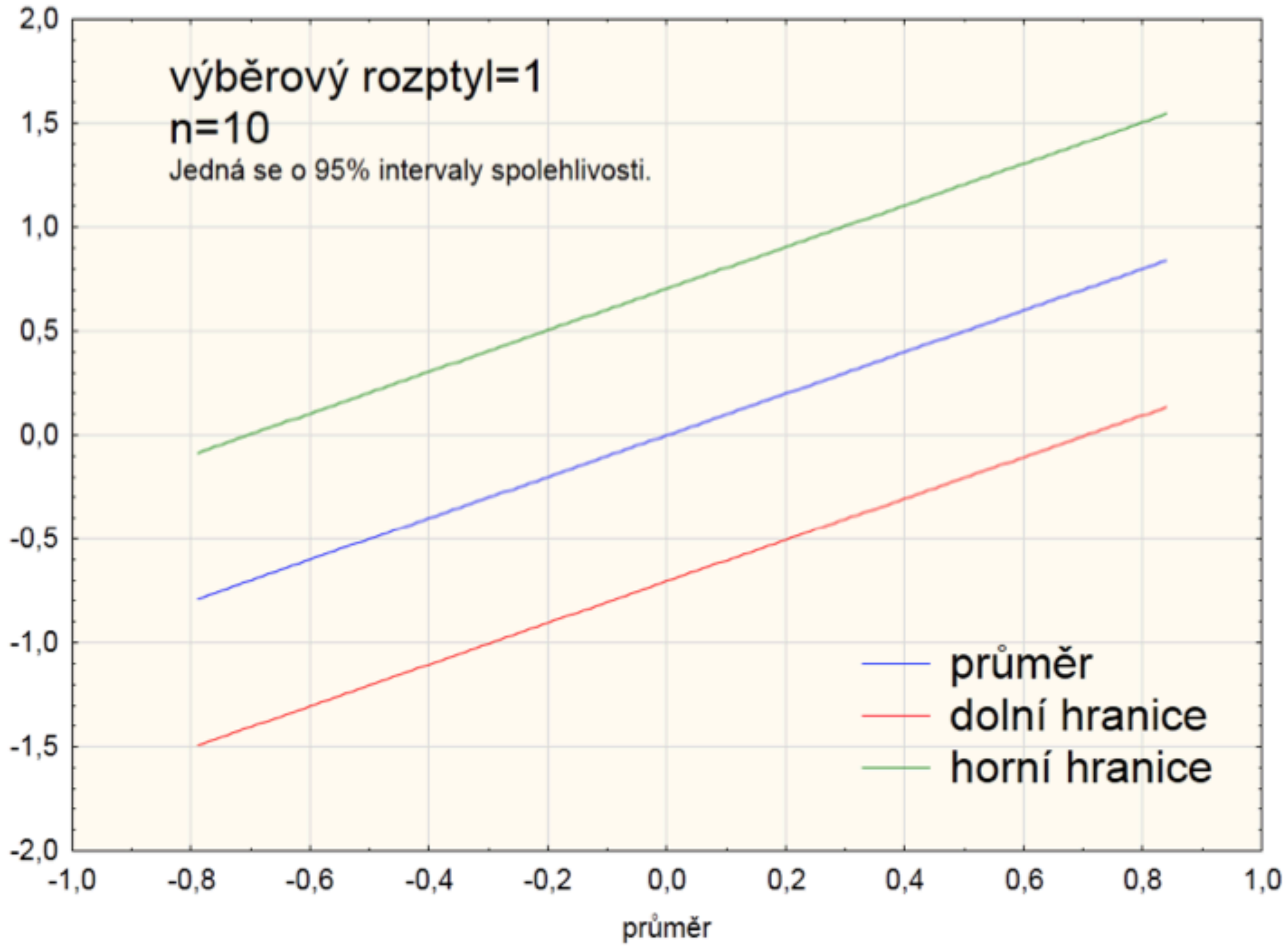
Intervalové odhady



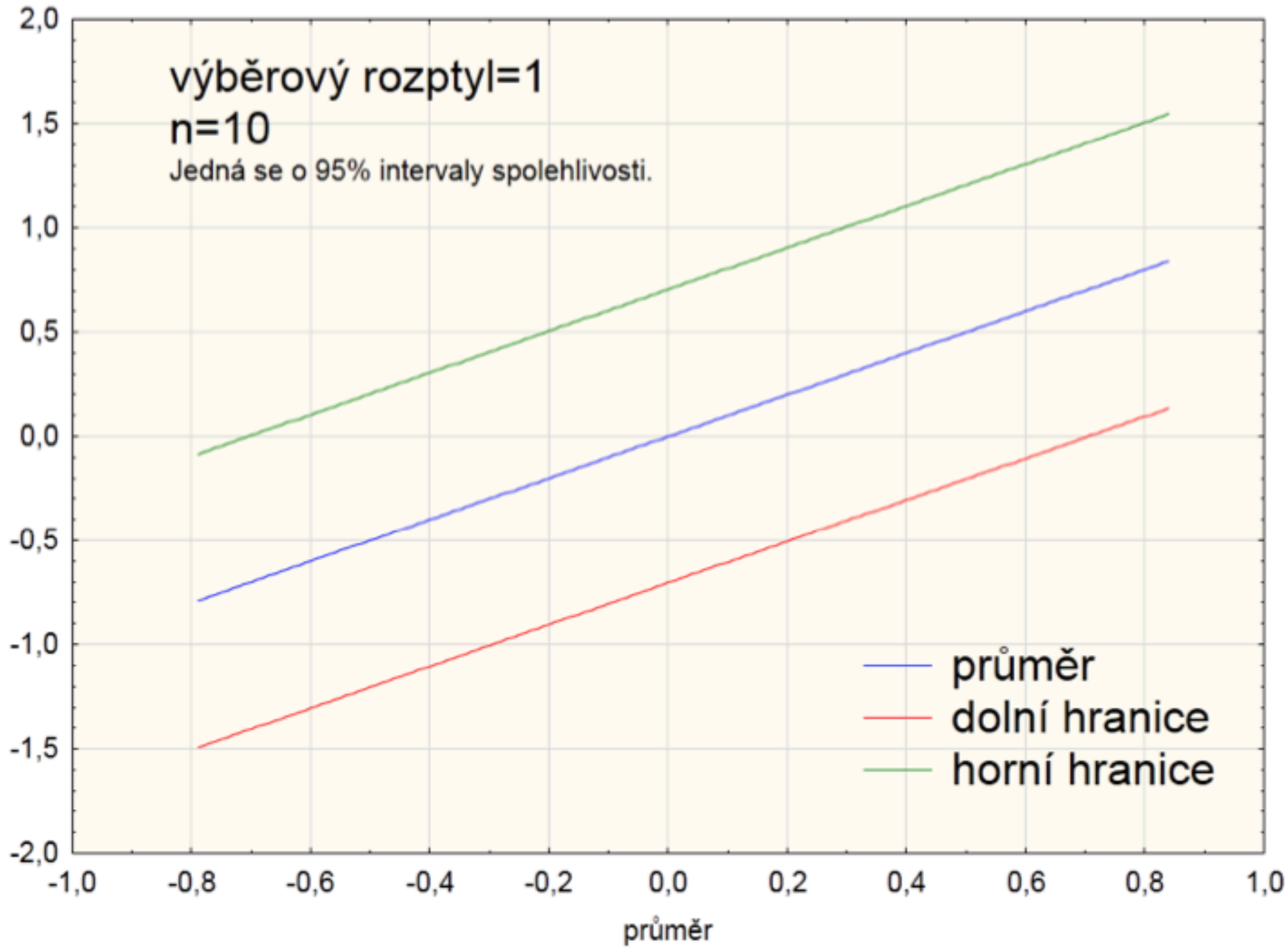
Intervalové odhady



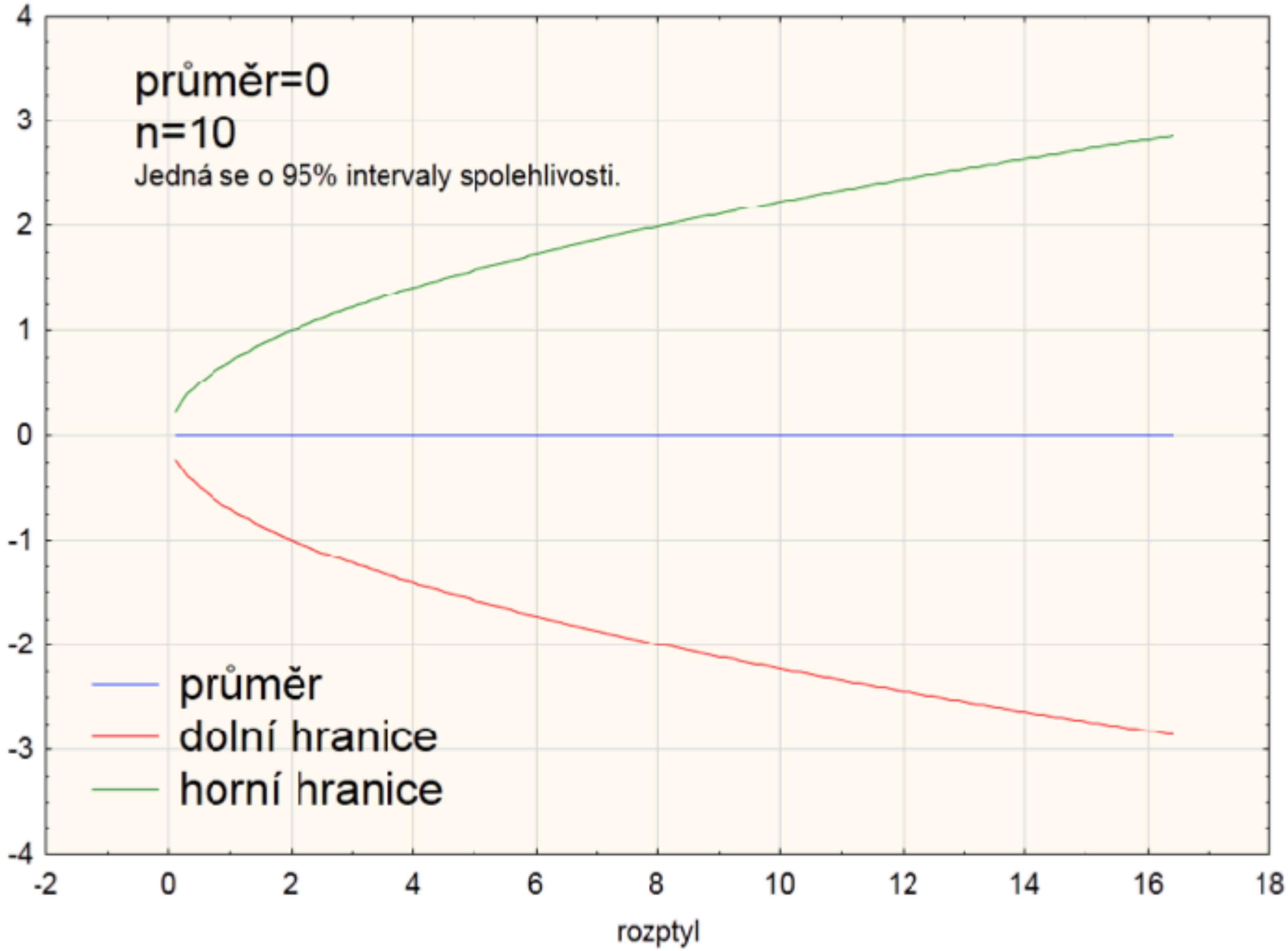
Intervalové odhady



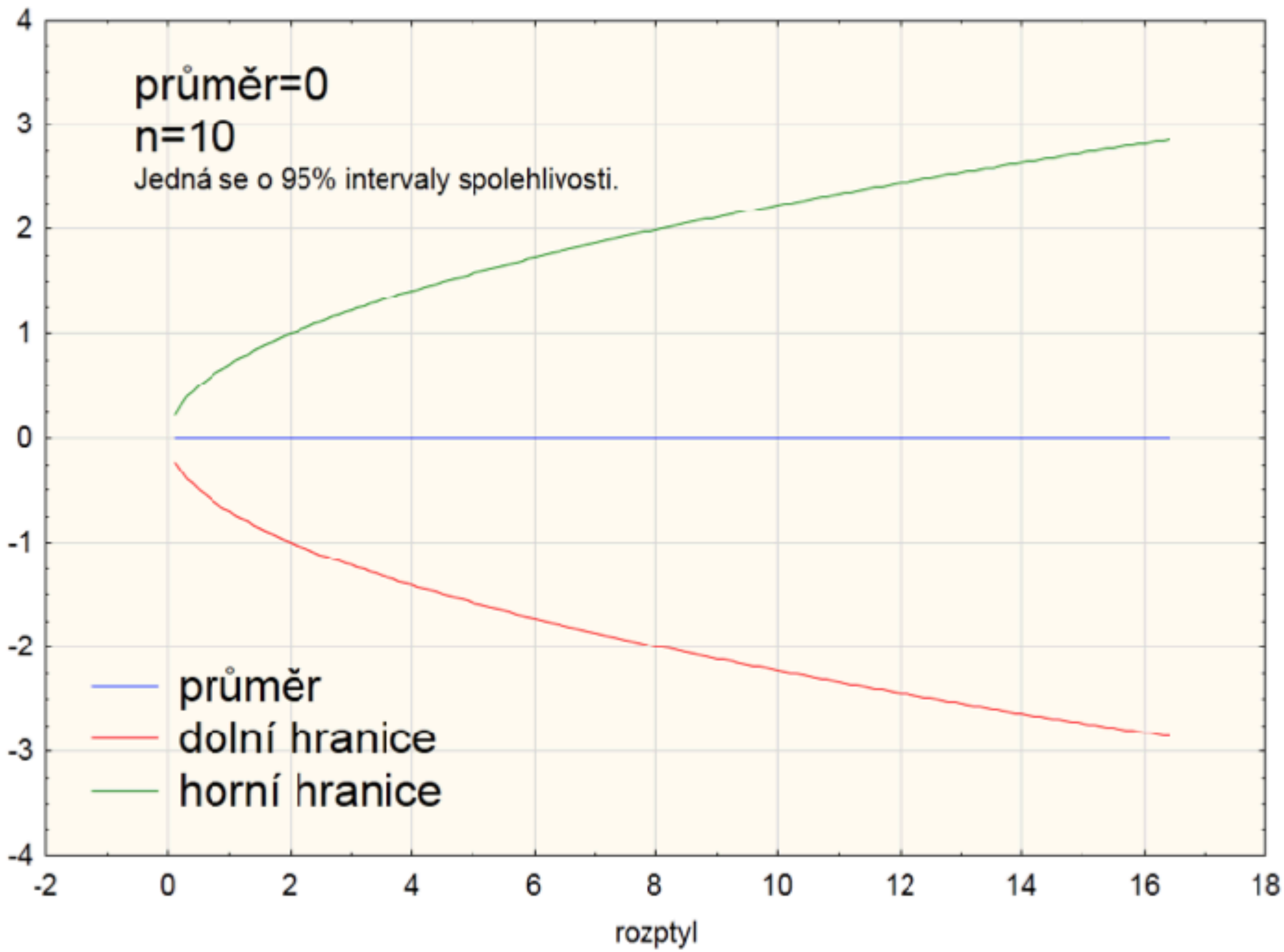
Intervalové odhady



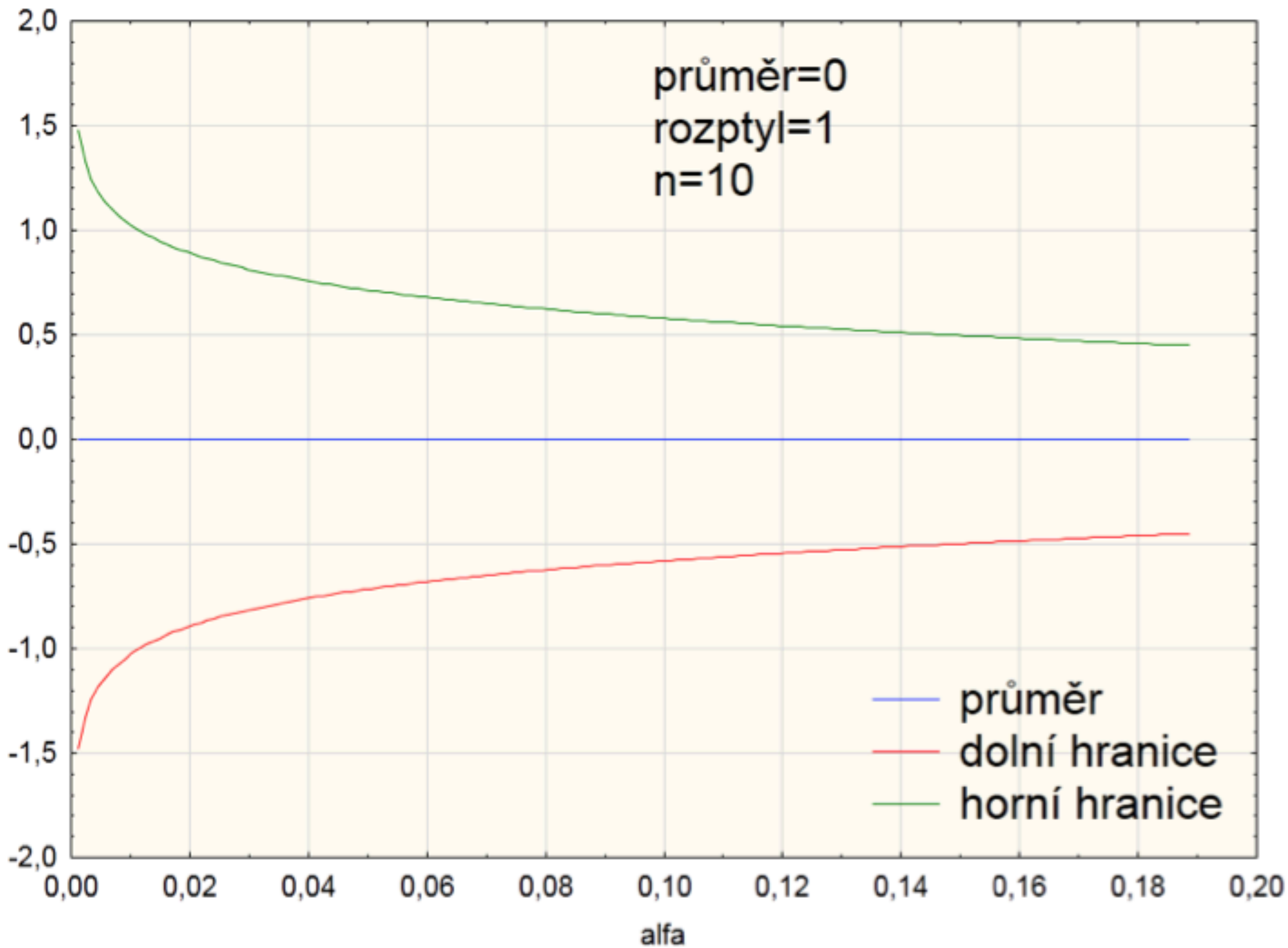
Intervalové odhady



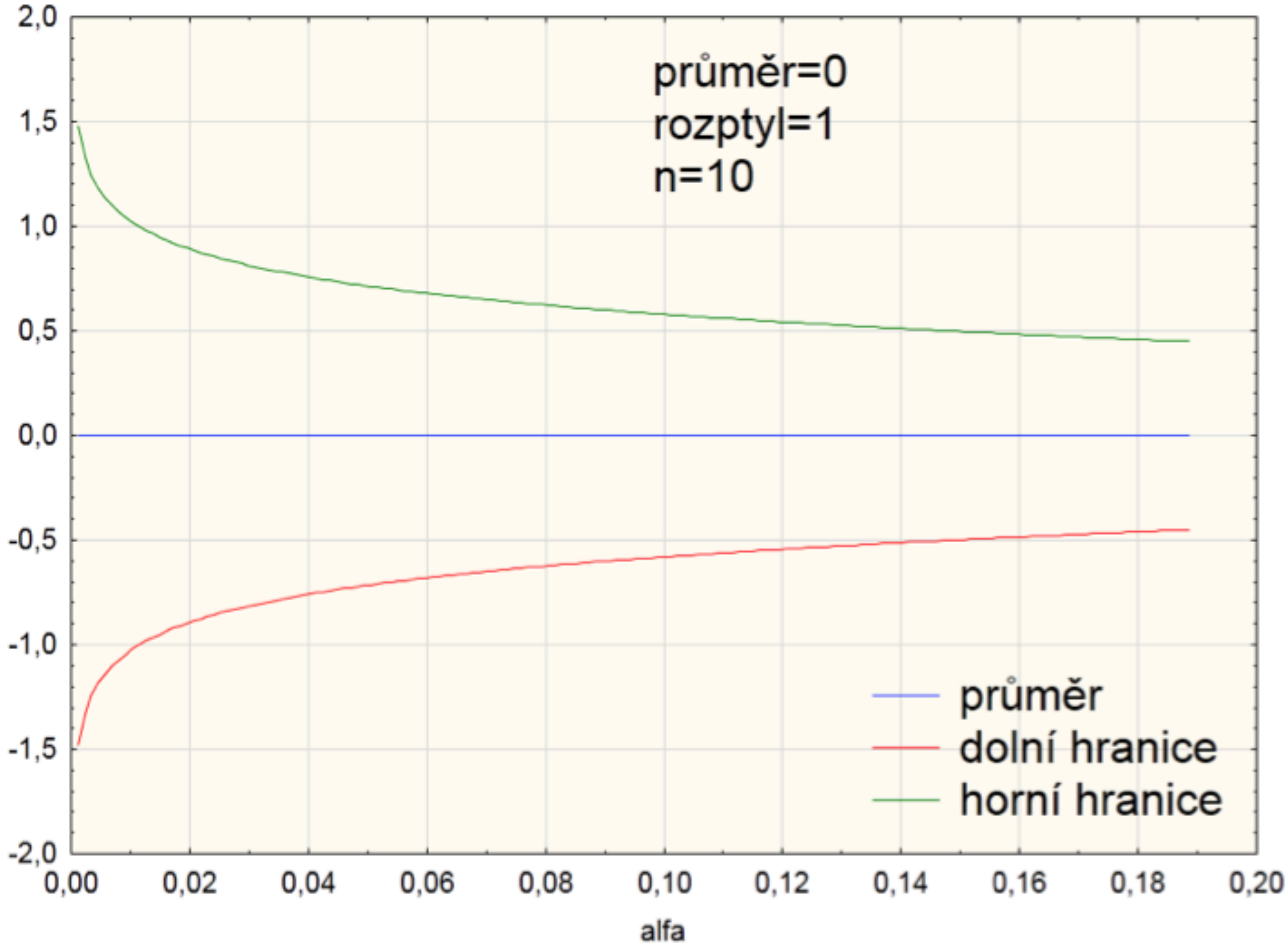
Intervalové odhady



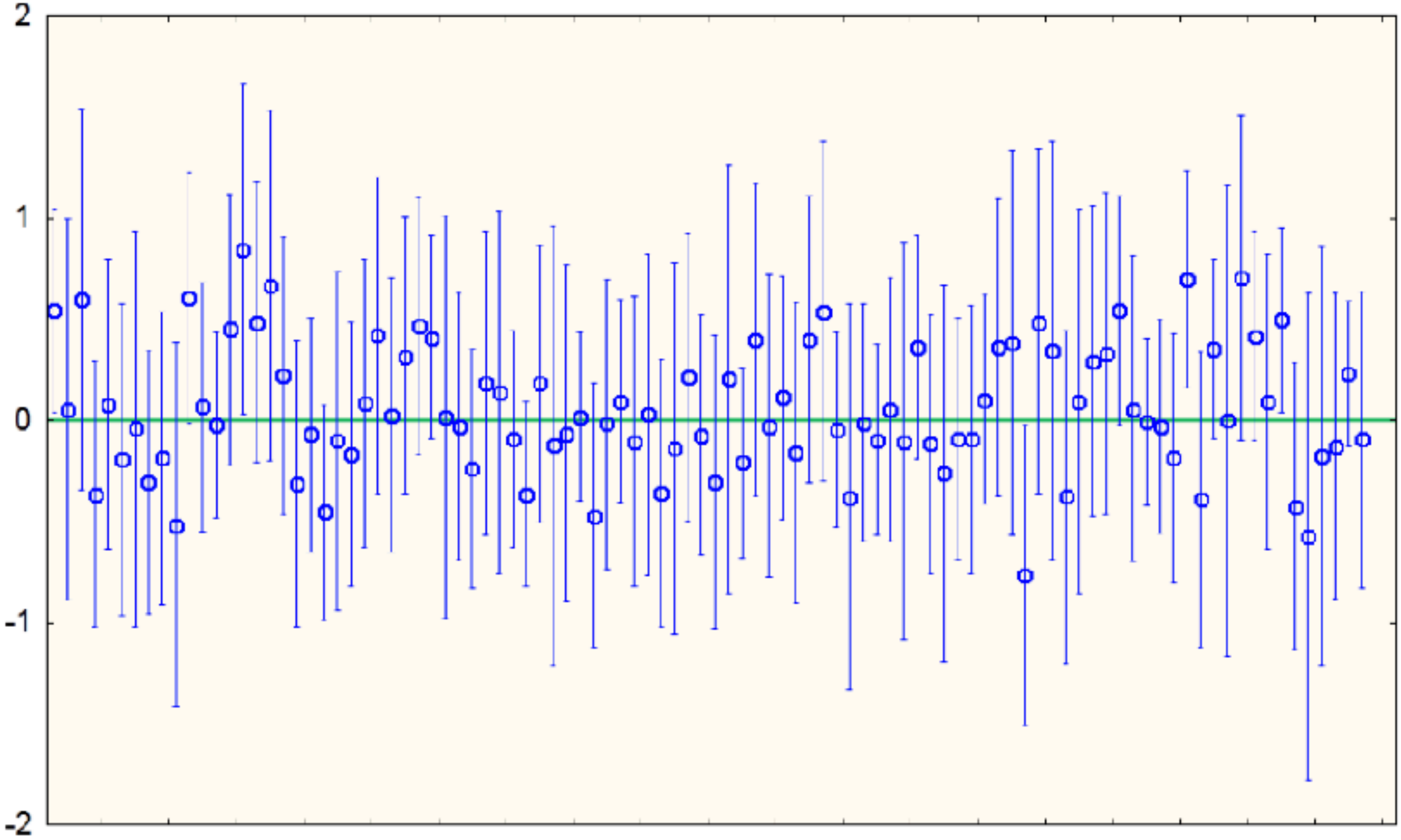
Intervalové odhady



Intervalové odhady

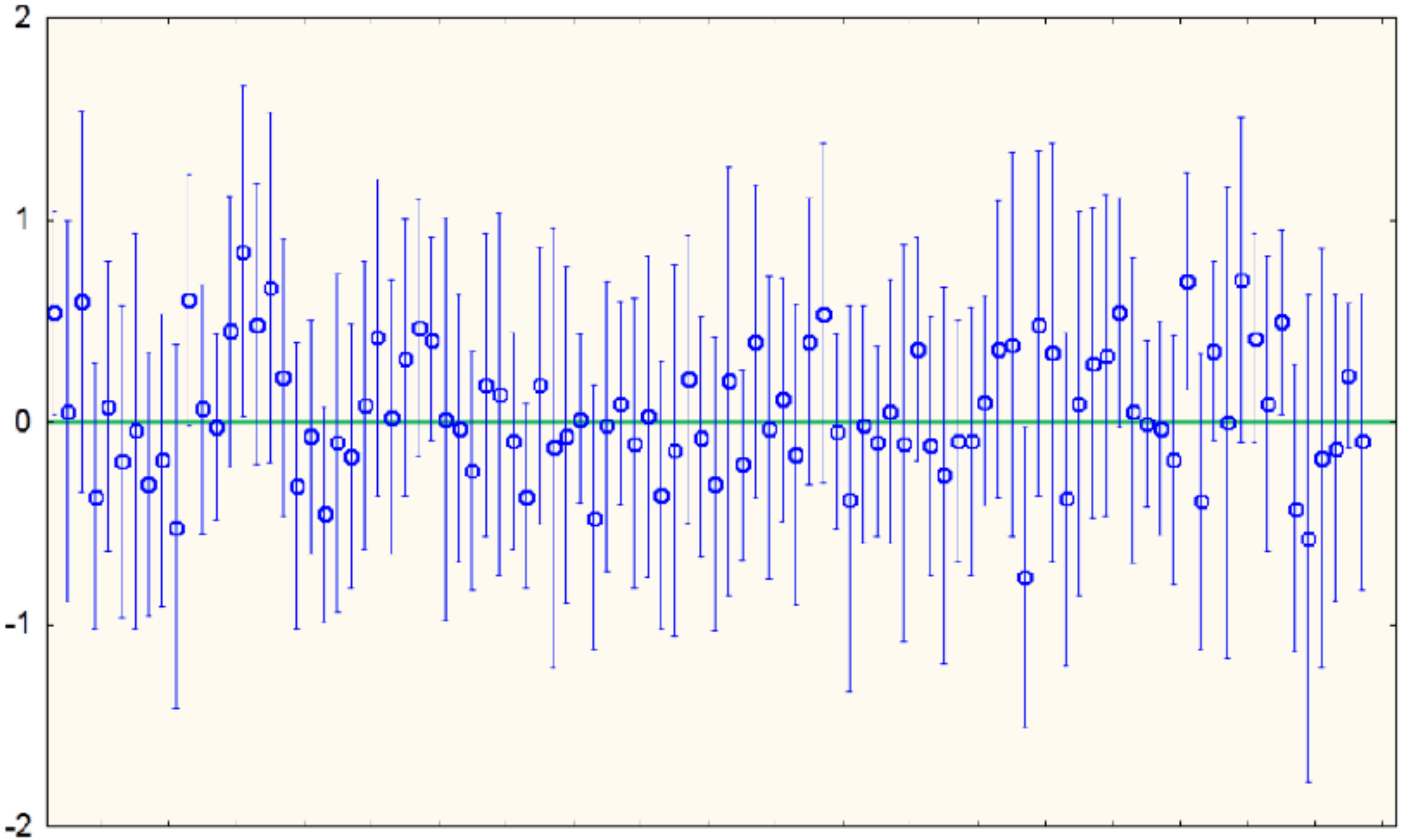


Intervalové odhady



Simulační příklad: N=100, $\mu=0$, $\alpha=0{,}05$, (5 intervalů mimo)

Intervalové odhady



Simulační příklad: N=100, μ=0, α=0,05, (5 intervalů mimo)

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

$$SE = \sqrt{\frac{0,309}{14}} t_{0,95}(13) = 0,15.2,16 = 0,32$$

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

$$SE = \sqrt{\frac{0,309}{14}} t_{0,95}(13) = 0,15.2,16 = 0,32$$

Tedy intervalový odhad je (13,59; 14,23).

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

$$SE = \sqrt{\frac{0,309}{14}}t_{0,95}(13) = 0,15.2,16 = 0,32$$

Tedy intervalový odhad je $(13{,}59;\ 14{,}23)$.

Protože $12{,}5 \notin (13{,}59;\ 14{,}23)$, můžeme tvrdit, že naměřená spotřeba se od deklarované *statisticky významně liší*.

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

$$SE = \sqrt{\frac{0,309}{14}} t_{0,95}(13) = 0,15.2,16 = 0,32$$

Tedy intervalový odhad je (13,59; 14,23).

Protože $12,5 \notin (13,59;\ 14,23)$, můžeme tvrdit, že naměřená spotřeba se od deklarované *statisticky významně liší*.

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 2: odhad rozptylu s^2

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 2: odhad rozptylu s^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 2: odhad rozptylu s^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 2: odhad rozptylu s^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - provedeme posloupnost n nezávislých alternativních pokusů

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - provedeme posloupnost n nezávislých alternativních pokusů
  - spočteme relativní četnost p případů, v nichž nastal sledovaný jev

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n.$

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální

- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p

  - provedeme posloupnost n nezávislých alternativních pokusů
  - spočteme relativní četnost p případů, v nichž nastal sledovaný jev

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} \le p \le \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P(\,(\,\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p

  - provedeme posloupnost n nezávislých alternativních pokusů
  - spočteme relativní četnost p případů, v nichž nastal sledovaný jev

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} \le p \le \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - při šetření jsme zjistili, že ze 100 dotázaných respondentů 43 se chystá volit stranu mírného pokroku v mezích zákona
  - má tato strana šanci vyhrát ve volbách?

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$$

$$\bar{X} = 0,43$$
$$u_{0,975} = 1,96$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

> Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že
>
> $$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - při šetření jsme zjistili, že ze 100 dotázaných respondentů 43 se chystá volit stranu mírného pokroku v mezích zákona
  - má tato strana šanci vyhrát ve volbách?

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$$

$\bar{X} = 0,43$

$u_{0,975} = 1,96$

Tedy intervalový odhad je (0,33; 0,53) => SMPvMZ má statisticky významnou šanci získat nadpoloviční většinu.

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

> Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že
>
> $$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální

- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - při šetření jsme zjistili, že ze 100 dotázaných respondentů 43 se chystá volit stranu mírného pokroku v mezích zákona
  - má tato strana šanci vyhrát ve volbách?

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$$

$$\bar{X} = 0,43$$
$$u_{0,975} = 1,96$$

Tedy intervalový odhad je (0,33; 0,53) => SMPvMZ má statisticky významnou šanci získat nadpoloviční většinu.