Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky

8. Úvod do matematické statistiky

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2021/2022

8. Úvod do matematické statistiky

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – náhodný vektor

$$\vec{X} = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- sdružená distribuční funkce

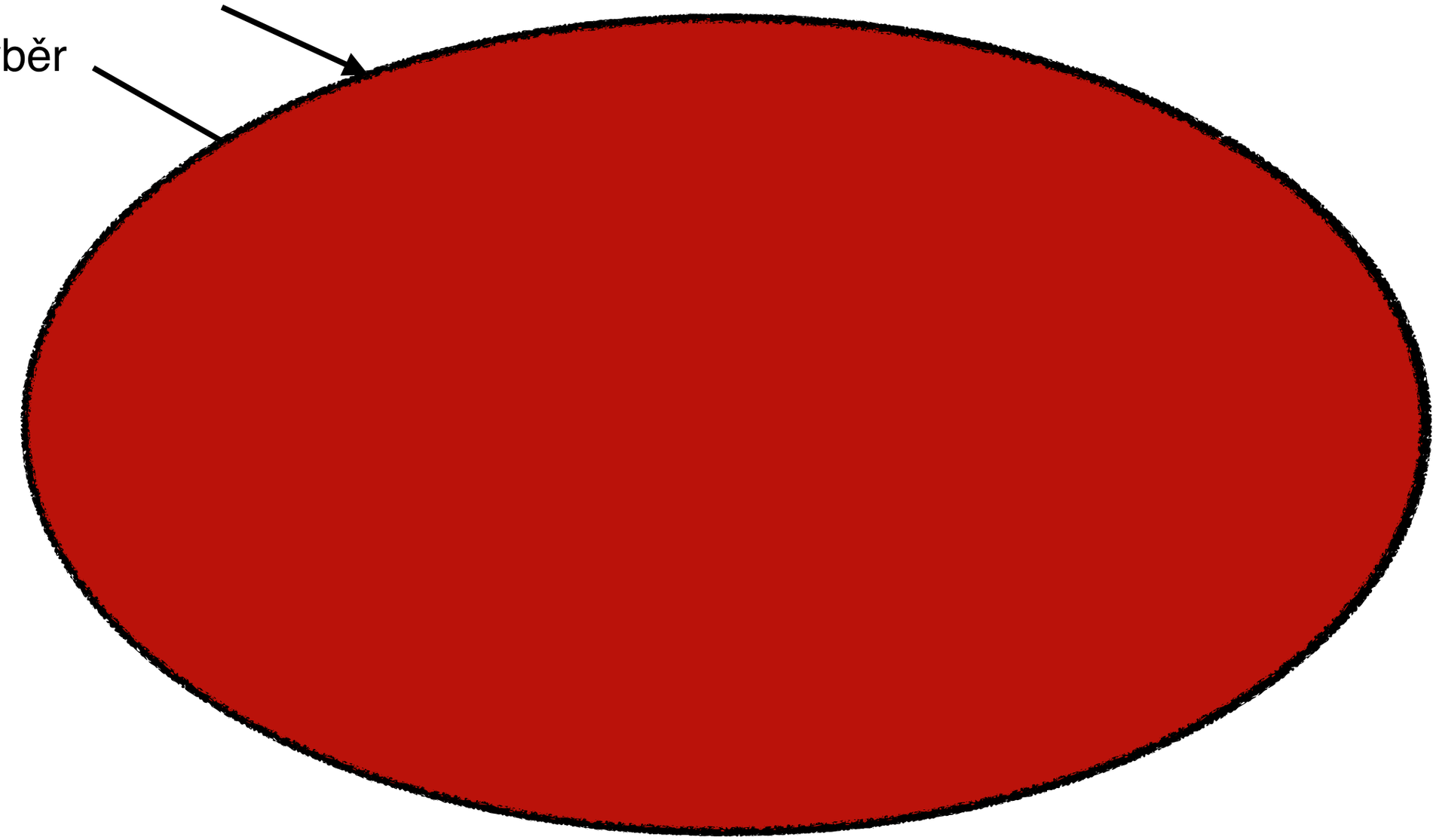
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$$

$$\lim_{x_n \to \infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

$$\lim_{x_n \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Statistická indukce

- Základní soubor - nositel sledovaného znaku (veličiny)
- Výběr



- Pozorování výběru
  (měření sledovaného znaku) => Zjištění vlastností výběru
- Zobecnění na celý základní soubor

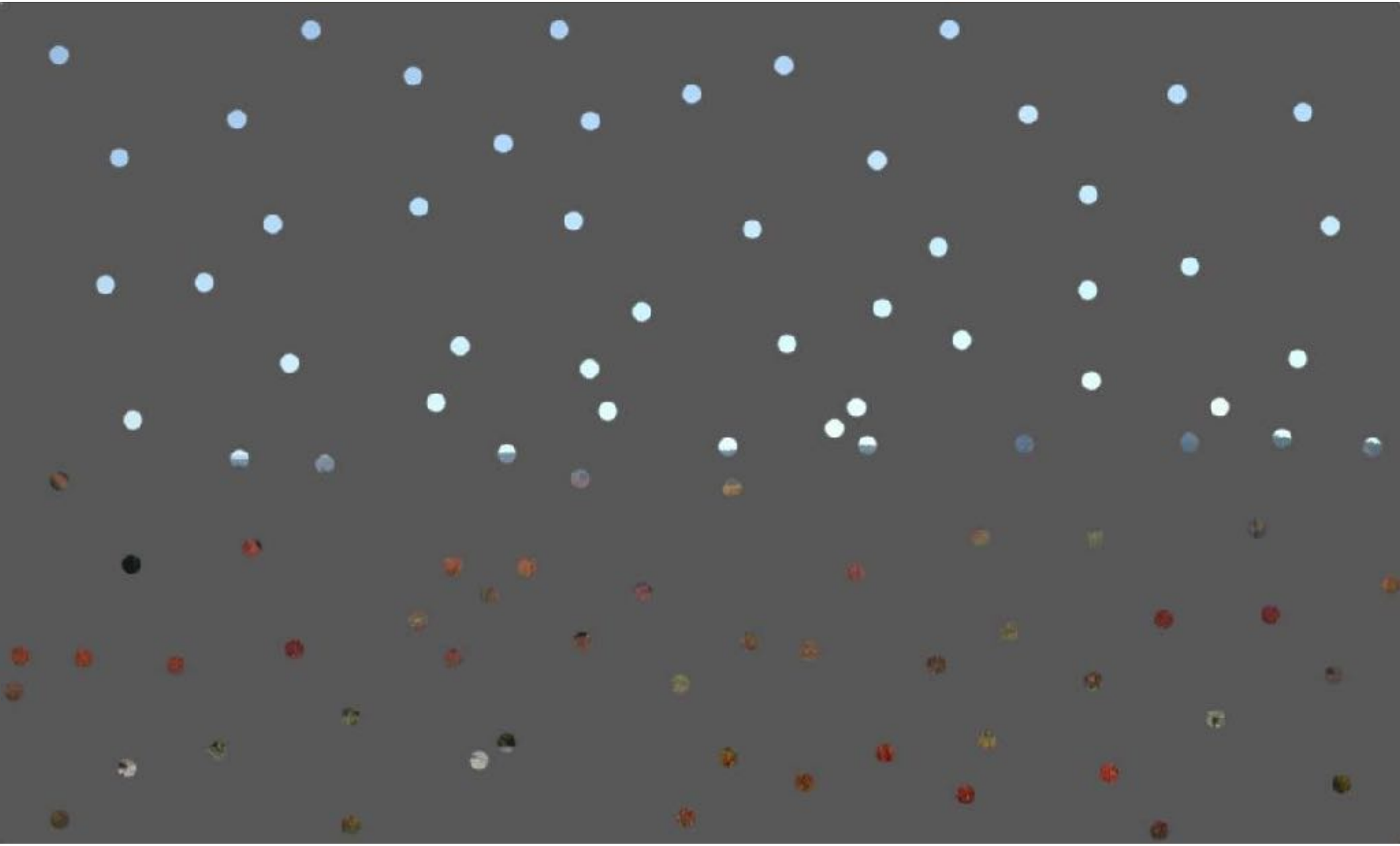
Statistická indukce

- Základní soubor - nositel sledovaného znaku (veličiny)
- Výběr

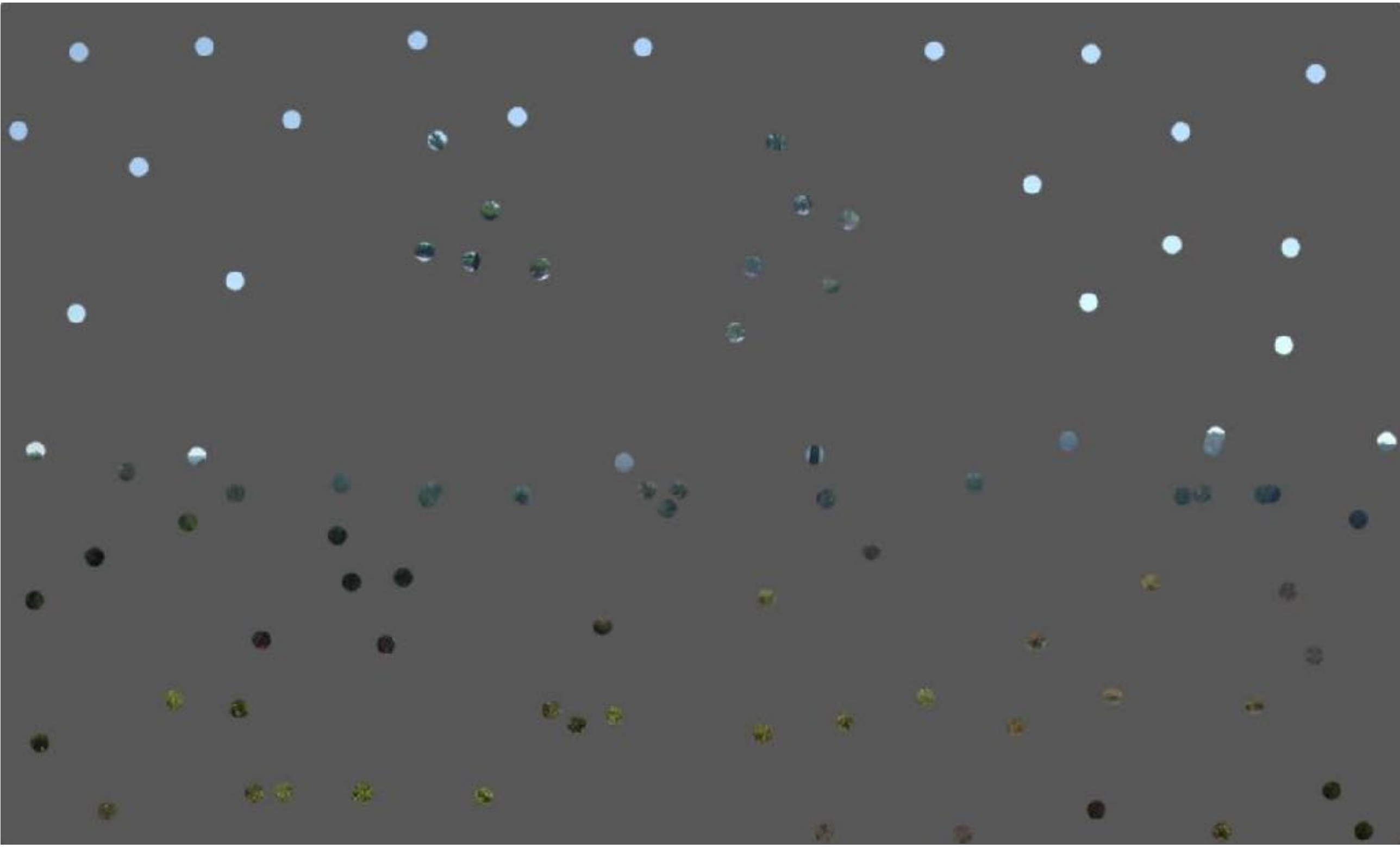
- **Jednoznačné vymezení základního souboru**
- **Statistická povaha sledovaného znaku**
- **Reprezentativnost výběru**

- Pozorování výběru
  (měření sledovaného znaku) => Zjištění vlastností výběru
- Zobecnění na celý základní soubor

Statistická indukce



Statistická indukce



Statistická indukce

Statistická indukce

náhodné veličiny

Tedy vždy musíme vycházet z :

- náhodného výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- a jeho pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

reálná čísla

Pravděpodobnostní charakteristiky	Výběrové charakteristiky
Střední hodnota $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	Výběrový průměr $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Momenty $\mu_k(X) = E(X - E(X))^k$	Výběrové momenty $m_k(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^k$
Rozptyl $var(X) = E(X - E(X))^2$	Výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2$
Kvantily $\tilde{x}_{100\alpha}$	Výběrové kvantily $X_{([np]+1)}$

Statistické charakteristiky

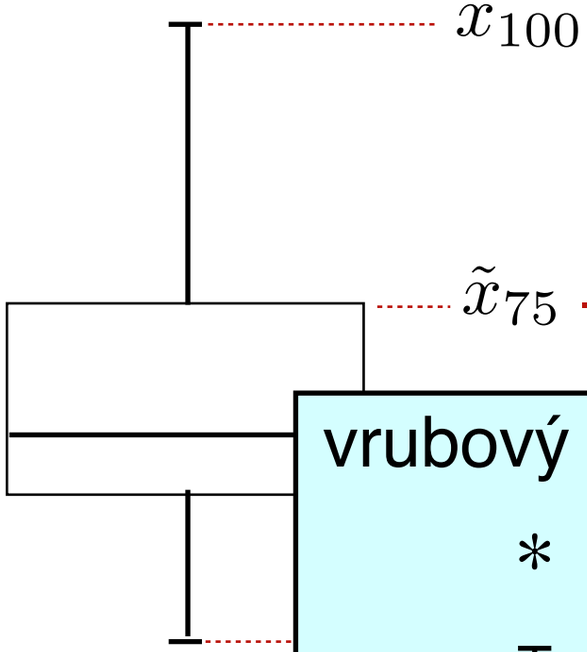
Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- *Uspořádaný výběr*: $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ vznikne z původního výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uspořádáním podle velikosti pozorovaných hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- *Pořadová statistika*: $X_{(k)}$ je náhodná veličina X_m, která je k-tá v pořadí podle velikosti pozorovaných hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Index k nazýváme *pořadím veličiny* X_m a zapisujeme to $R_m = k$.
- Statistika $X_{(1)}$ se nazývá minimum, $X_{(n)}$ je maximum
- medián $\tilde{x}_{50}$: je-li n liché, je roven $X_{([n/2]+1)}$
  pro n sudé je roven $(X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)})/2$
- dolní kvartil $\tilde{x}_{25}$: $X_{([n/4]+1)}$ resp. $(X_{(n/4)} + X_{(n/4+1)})/2$
- horní kvartil $\tilde{x}_{75}$: $X_{([3n/4]+1)}$ resp. $(X_{(3n/4-1)} + X_{(3n/4)})/2$

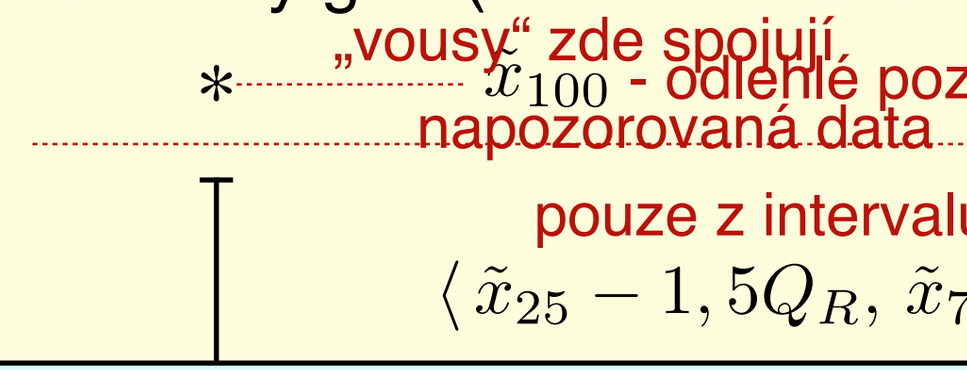
Statistické charakteristiky

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

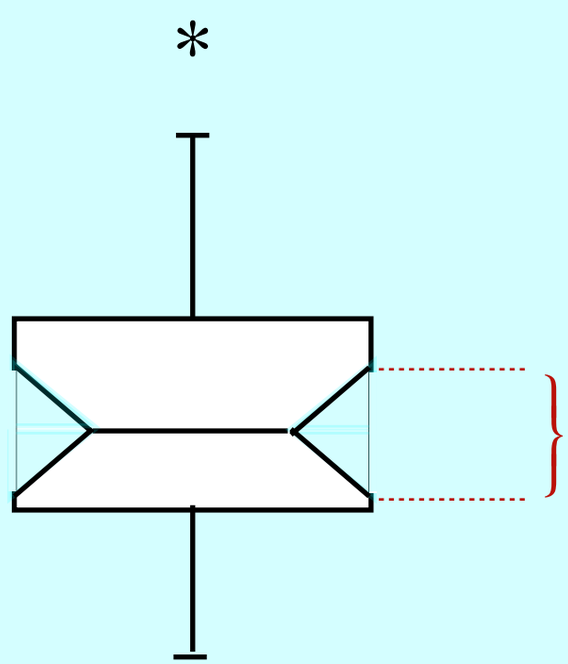
krabicový graf (Box & Whiskers plot)



krabicový graf (Box & Whiskers plot)



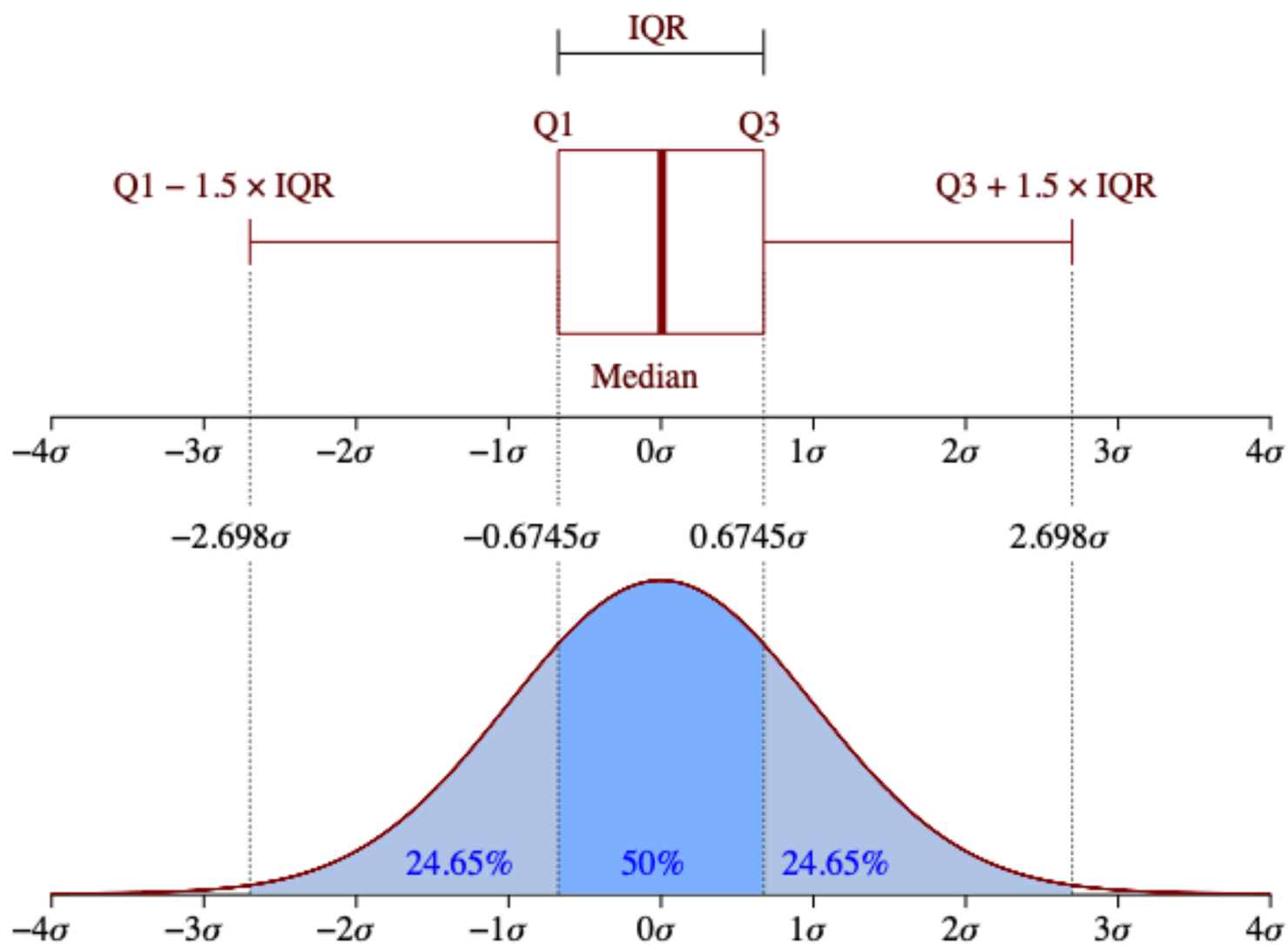
vrubový krabicový graf (notched Box & Whiskers plot)

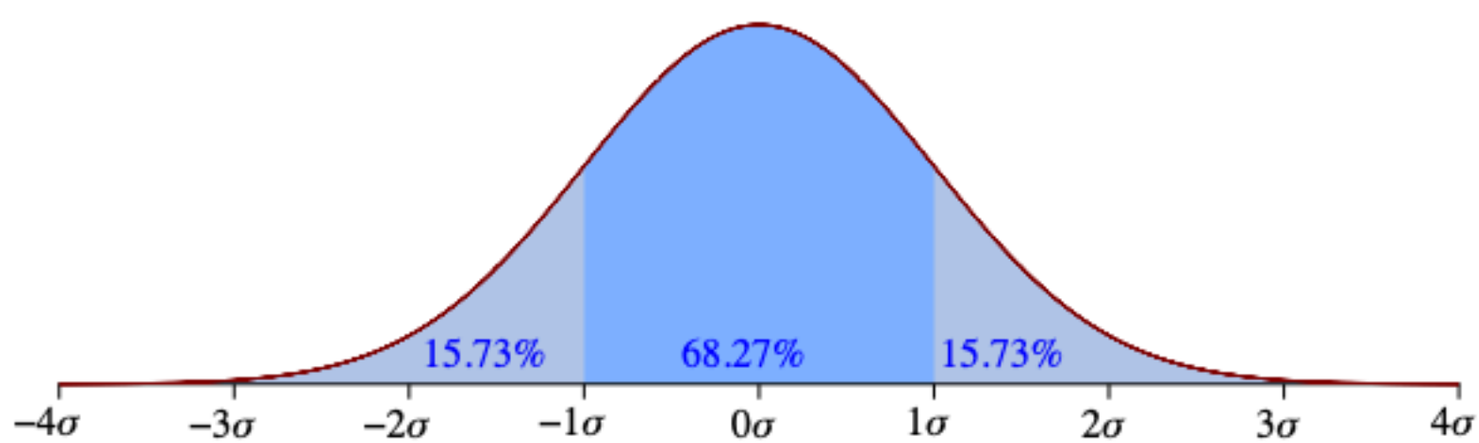


„vrub“ reprezentuje 95% interval spolehlivosti pro medián.

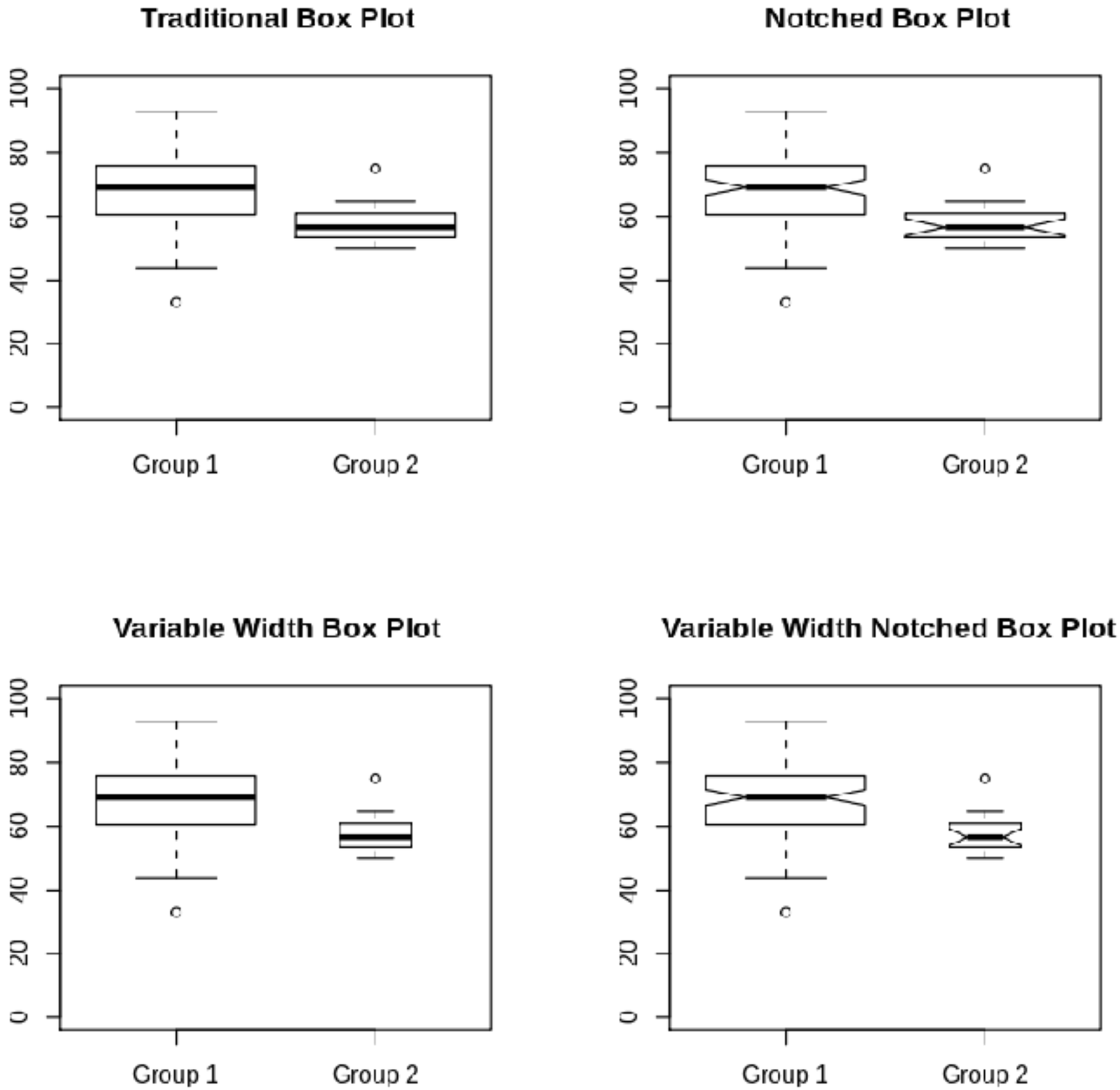
$$\tilde{x}_{50} \pm \frac{1,58Q_R}{\sqrt{n}}$$

Statistické charakteristiky





Statistické charakteristiky



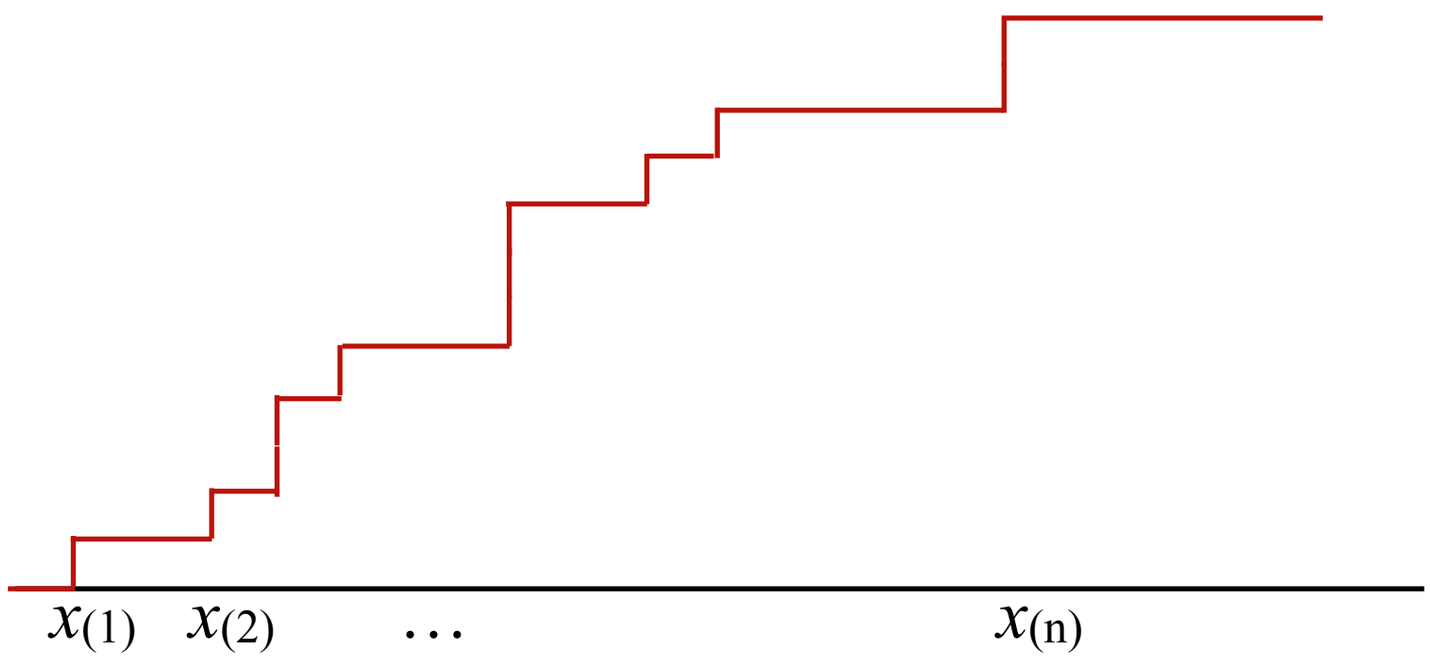
Statistické charakteristiky

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Empirická distribuční funkce:

vycházíme z uspořádaného výběru: $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$. Potom $F_n(x_{(i)}) = \dfrac{i}{n}$

a tedy $F_n(x) = \dfrac{\max\{k : X_{(k)} \leq x\}}{n}, \quad x \in \mathbf{R}$



Statistické charakteristiky

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- *Výběrová střední hodnota (výběrový průměr)*: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- *Výběrové momenty*: $m_k(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^k$
- *Výběrový rozptyl*: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$ *a výběrová směrodatná odchylka* s

Za předpokladu, že náhodný výběr je nezávislý a je z normálního rozdělení, t.j. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou i.i.d. a $X_k \sim N(\mu,\sigma^2)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, lze určit rozdělení pravděpodobnosti některých charakteristik:

- Pokud je μ a σ^2 známé, má výběrový průměr $\bar{X}_n$ rozdělení $N(\mu,\sigma^2/n)$
- Pokud μ a σ^2 neznáme, má veličina $T=(X - \bar{X})/s$ tzv. Studentovo neboli t-rozdělení $t(n\text{-}1)$
- Veličina $S^2 = (n\text{-}1).s^2/\sigma^2$ má $\chi^2(n\text{-}1)$ rozdělení (o n-1 stupních volnosti)

Statistické charakteristiky

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Další důležité výběrové charakteristiky:

- *Výběrová šikmost (skewness)*: $Skew(X) = \dfrac{m_3(X)}{m_2^{3/2}(X)}$
- Výběrová špičatost (kurtosis): $Kurt(X) = \dfrac{m_4(X)}{m_2^2(X)} - 3$

pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je $E(Skew(X)) = 0$ $\quad var(Skew(X)) = \dfrac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$

$$E(Kurt(X)) = -\frac{6}{n+1} \qquad var(Kurt(X)) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

Máme-li dostatečný počet pozorování (řádově stovky), mají statistiky

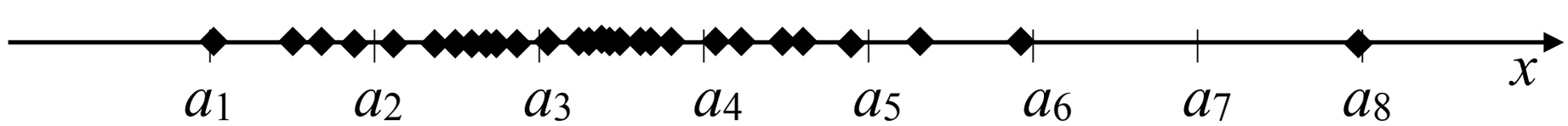
$$T_3 = \frac{S_{kew}^{norm}}{\sqrt{Var(S_{kew}^{norm})}} \qquad T_4 = \frac{K_{urt}^{norm} - E(K_{urt}^{norm})}{\sqrt{Var(K_{urt}^{norm})}}$$

přibližně standardní normální rozdělení pravděpodobnosti.

Frekvenční analýza - analýza četností

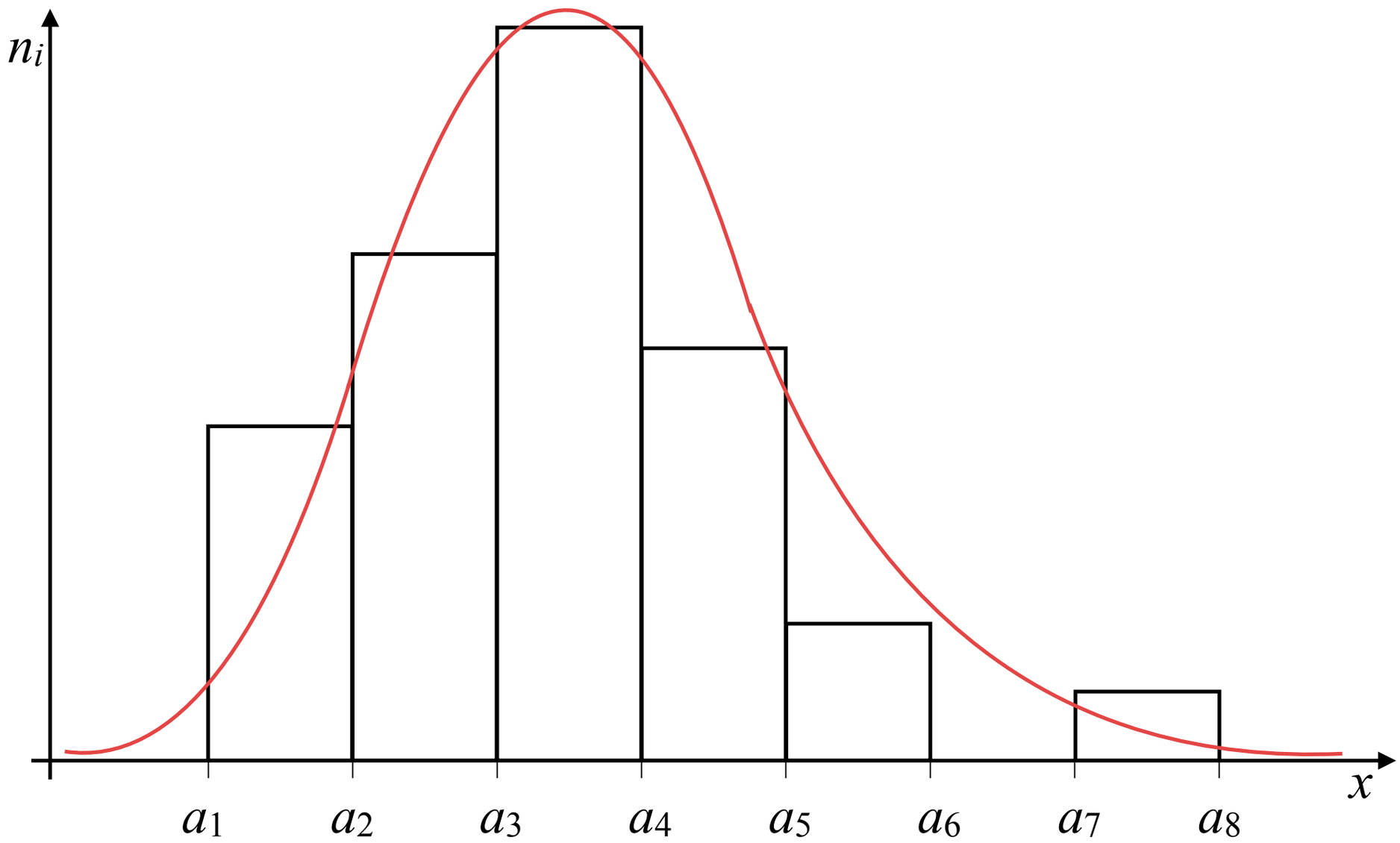
Máme pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ náhodného ýběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

pořadí třídy	třídní intervaly	(prosté) absolutní četnosti	(prosté) relativní četnosti	kumulativní četnosti	kumulativní relativní četnosti
1	$a_2 - a_1$	n_1	$f_1=n_1/n$	$c_1=n_1$	$d_1=c_1/n$
2	$a_3 - a_2$	n_2	$f_2=n_2/n$	$c_2=n_1+n_2$	$d_2=c_2/n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$c_j = \sum_{i=1}^{j} n_i$	$\vdots$
k	$a_k - a_{k-1}$	n_k	$f_k=n_k/n$	$c_k=n$	$d_k=c_k/n=1$



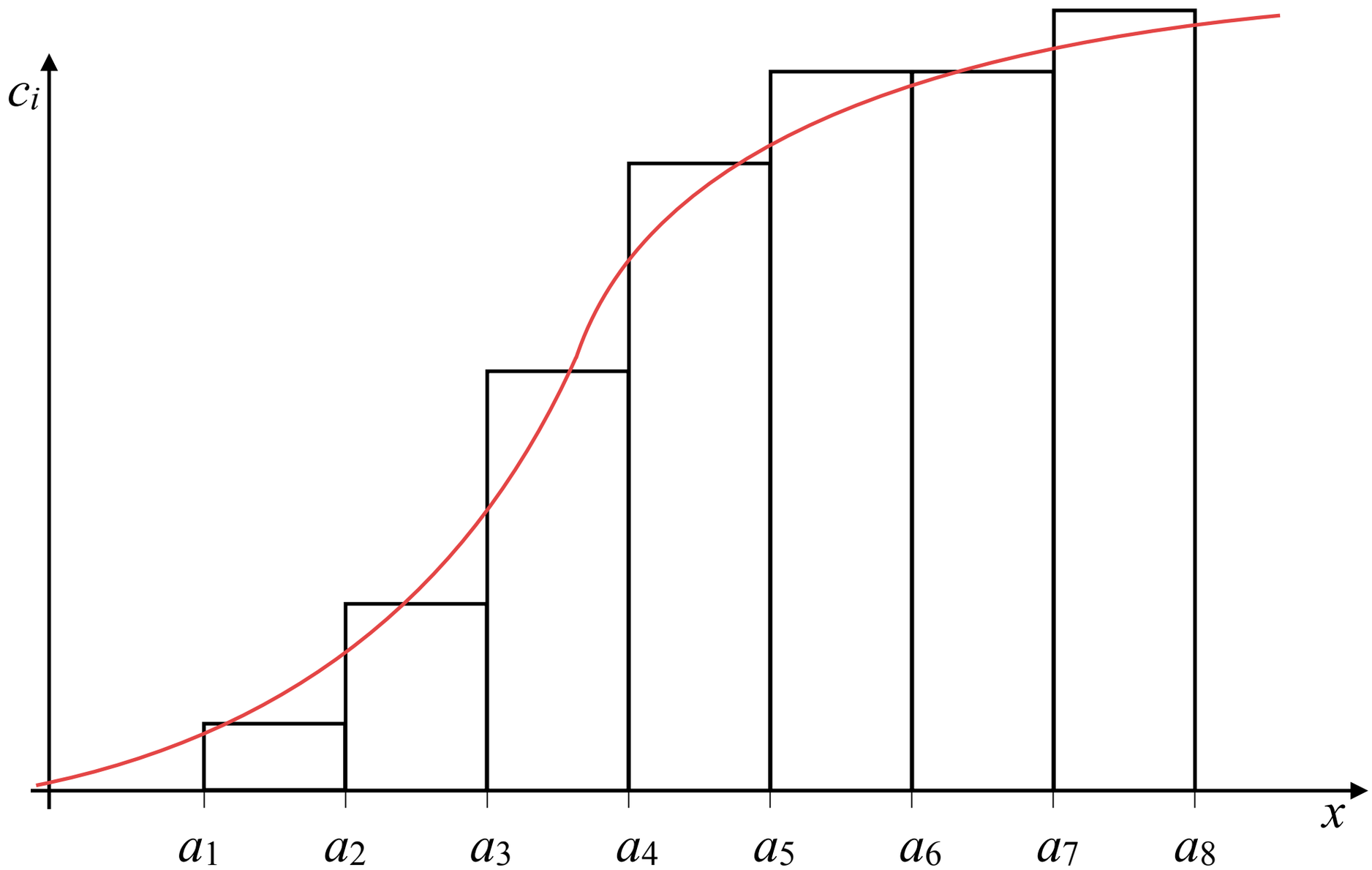
Frekvenční analýza - histogram četností

Máme pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ náhodného ýběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

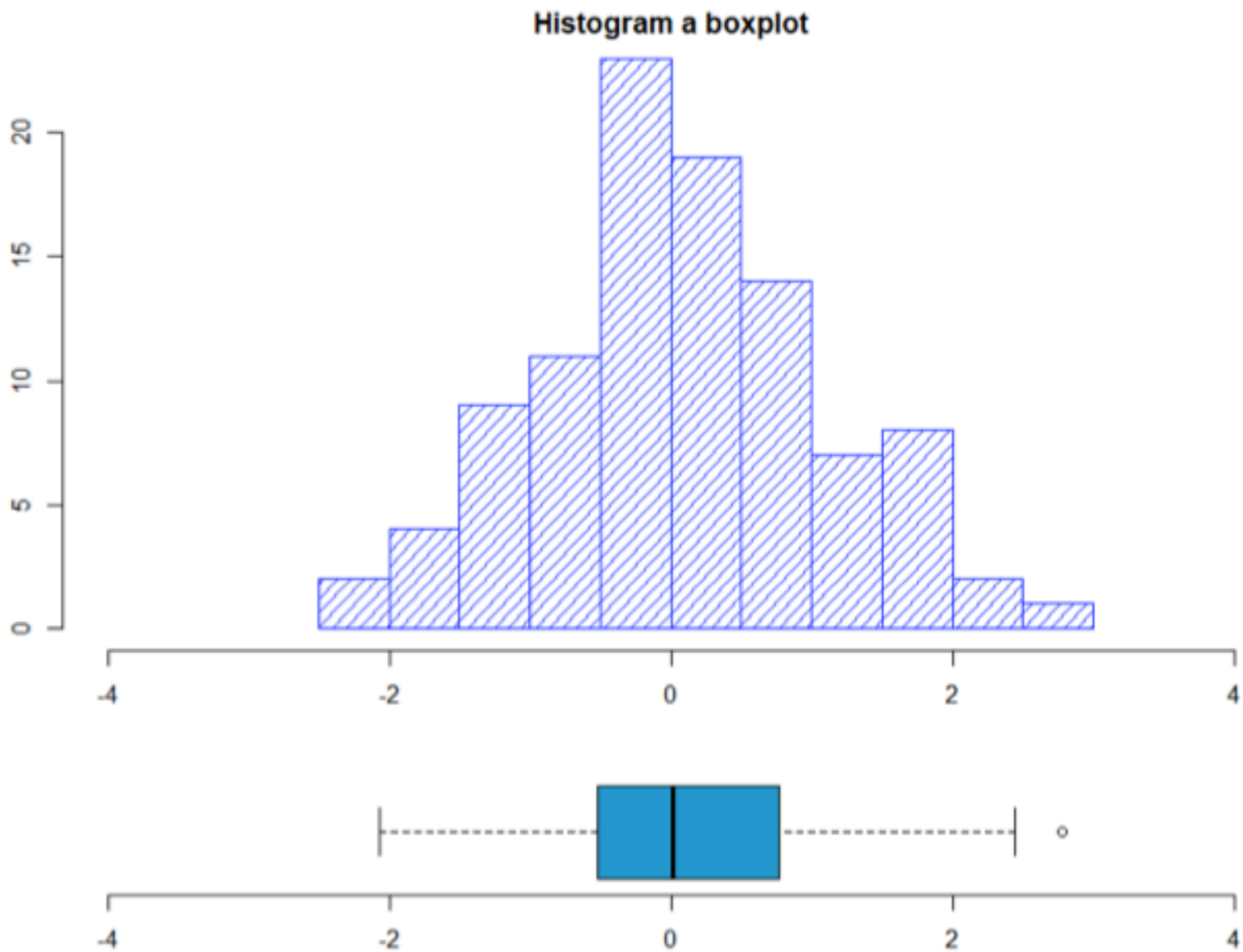


Frekvenční analýza - histogram četností

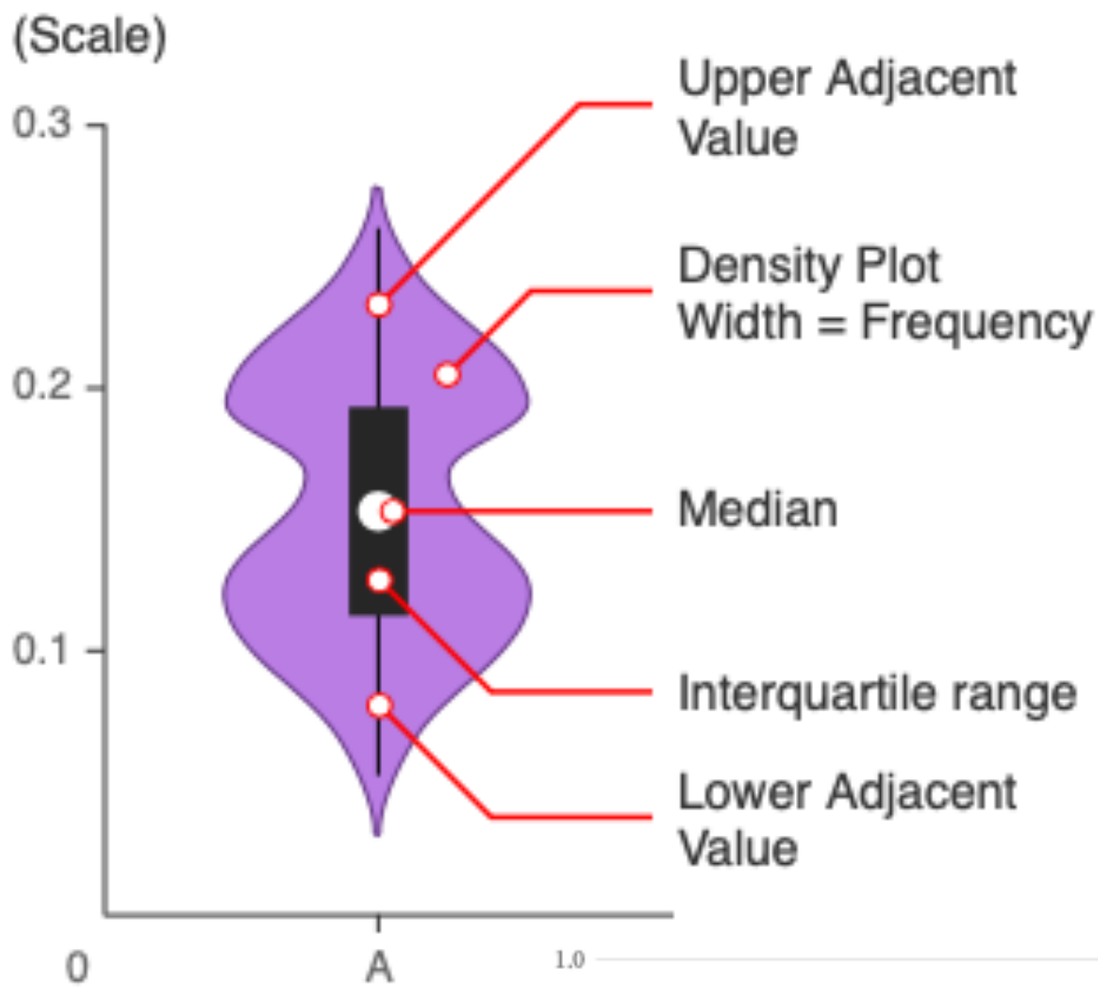
Máme pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ náhodného ýběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

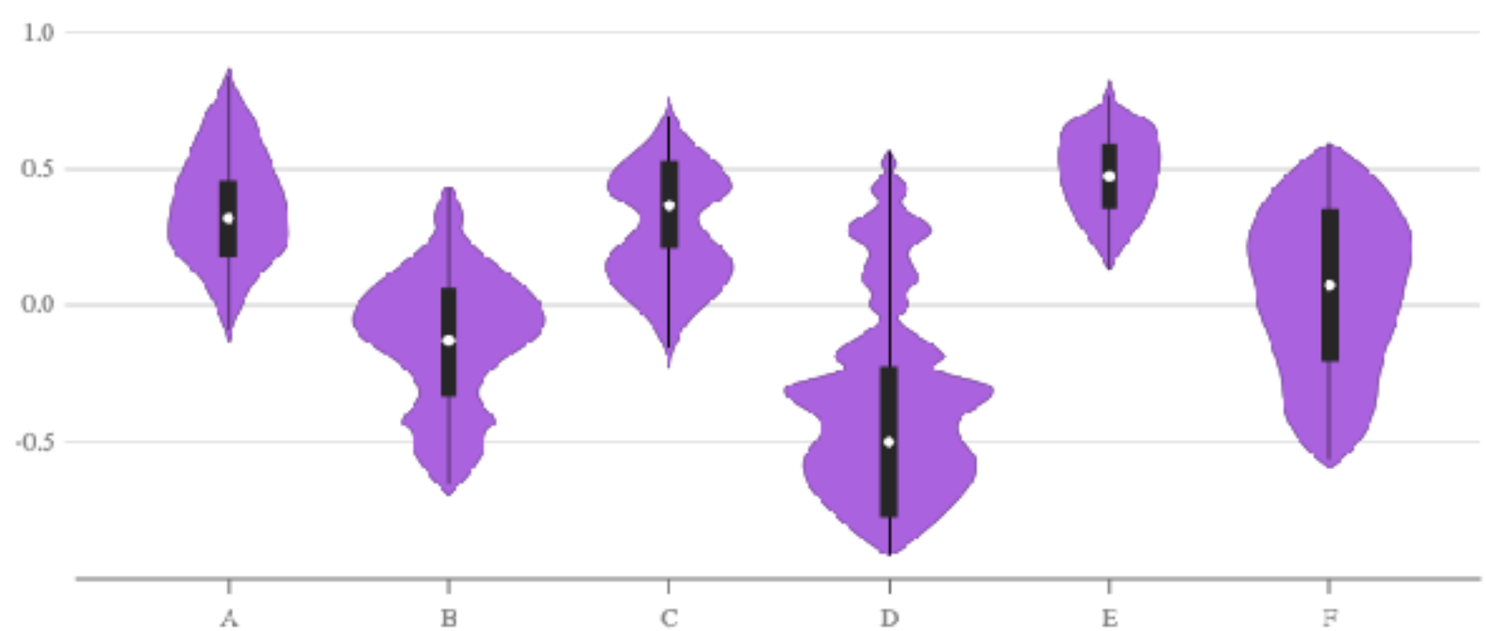


Frekvenční analýza - histogram četností

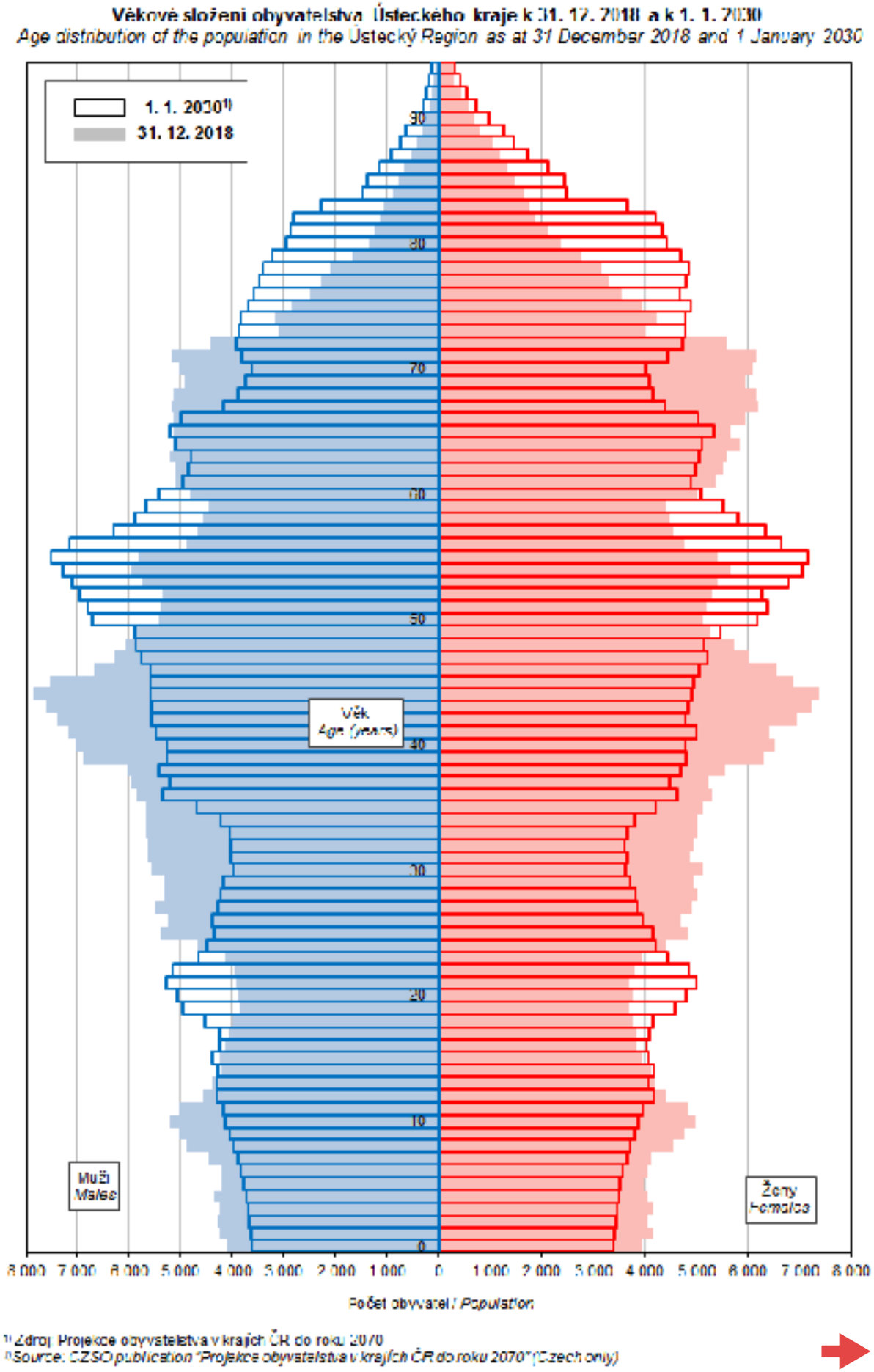


Frekvenční analýza - huoslový graf

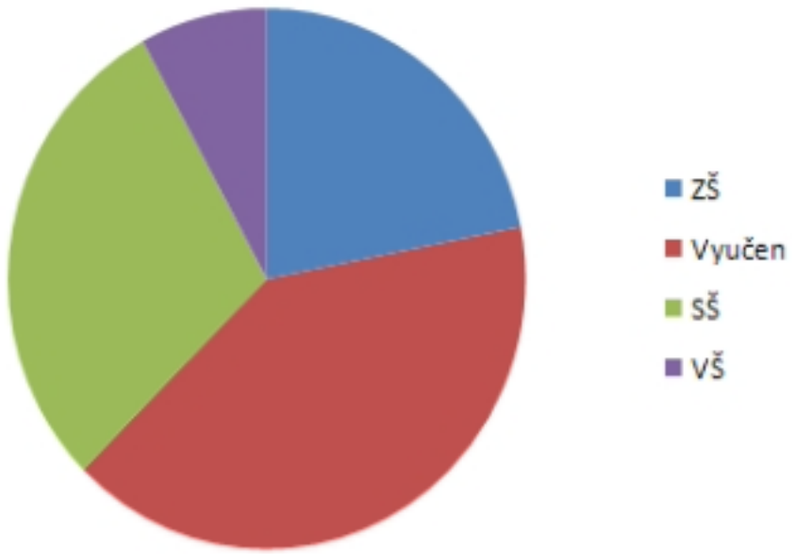


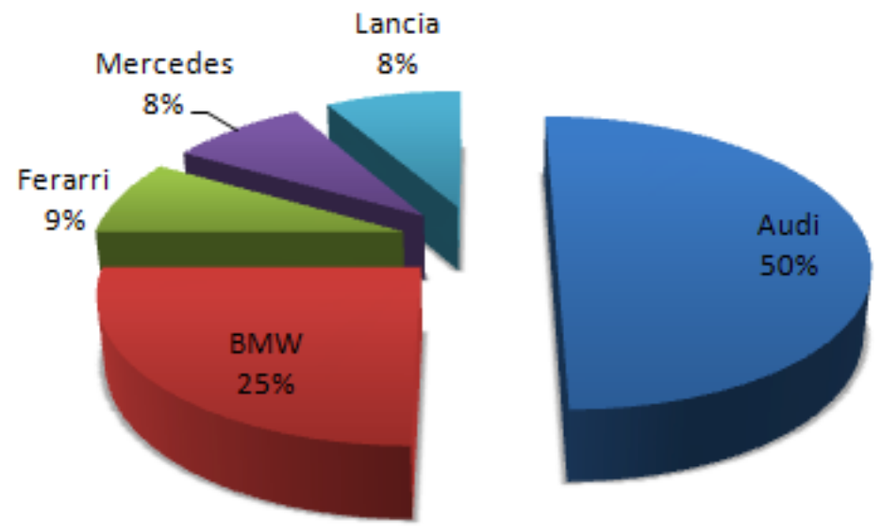


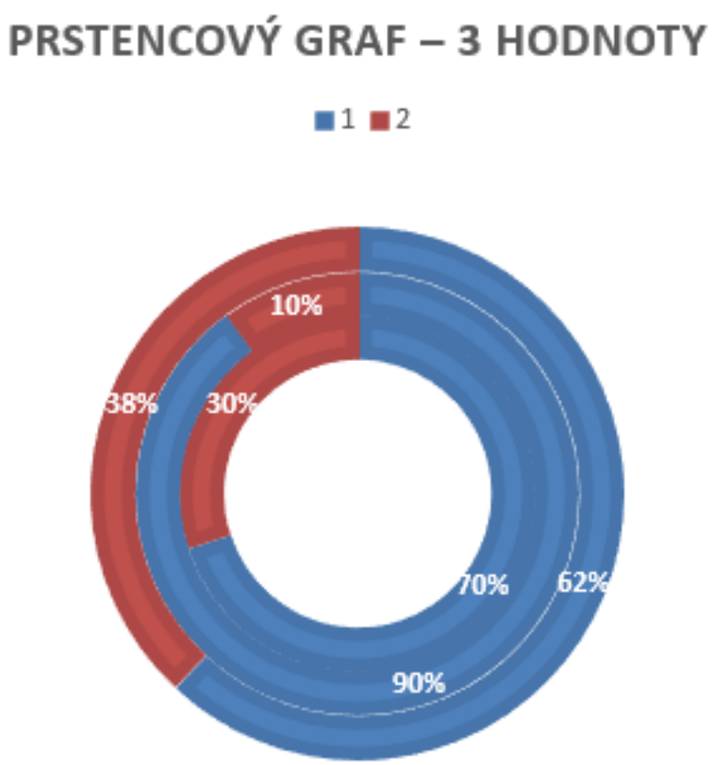
Frekvenční analýza - dvourozměrný histogram

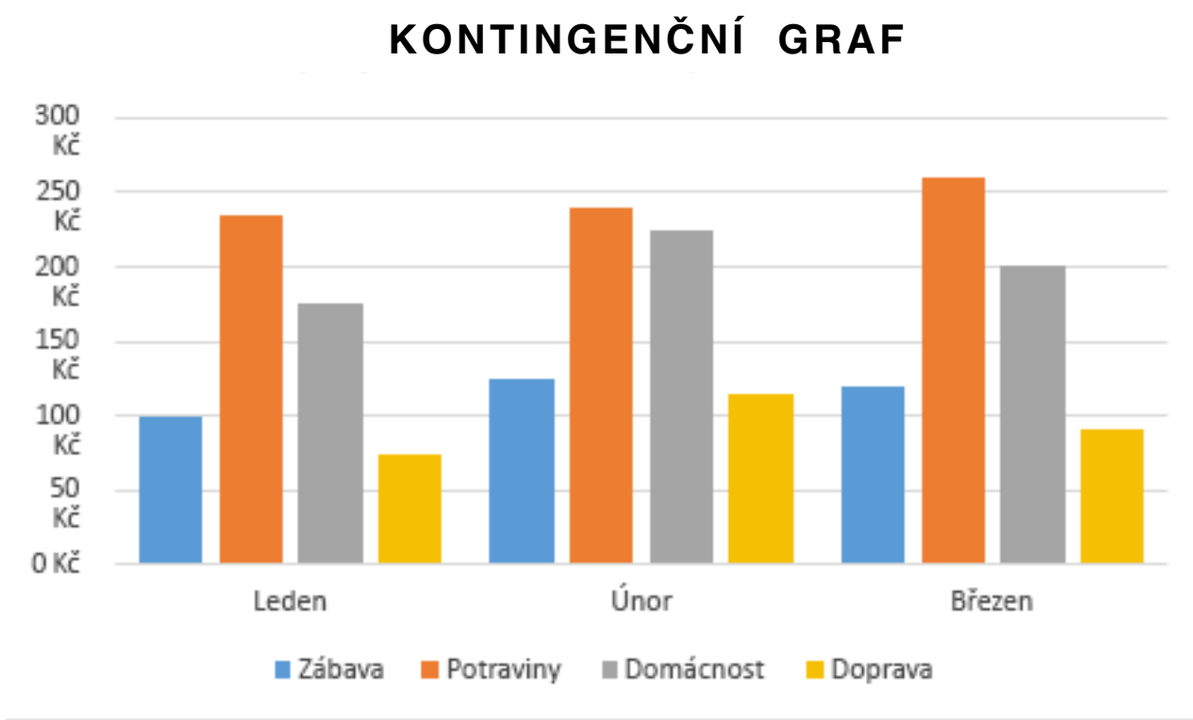


Frekvenční analýza - kruhový graf

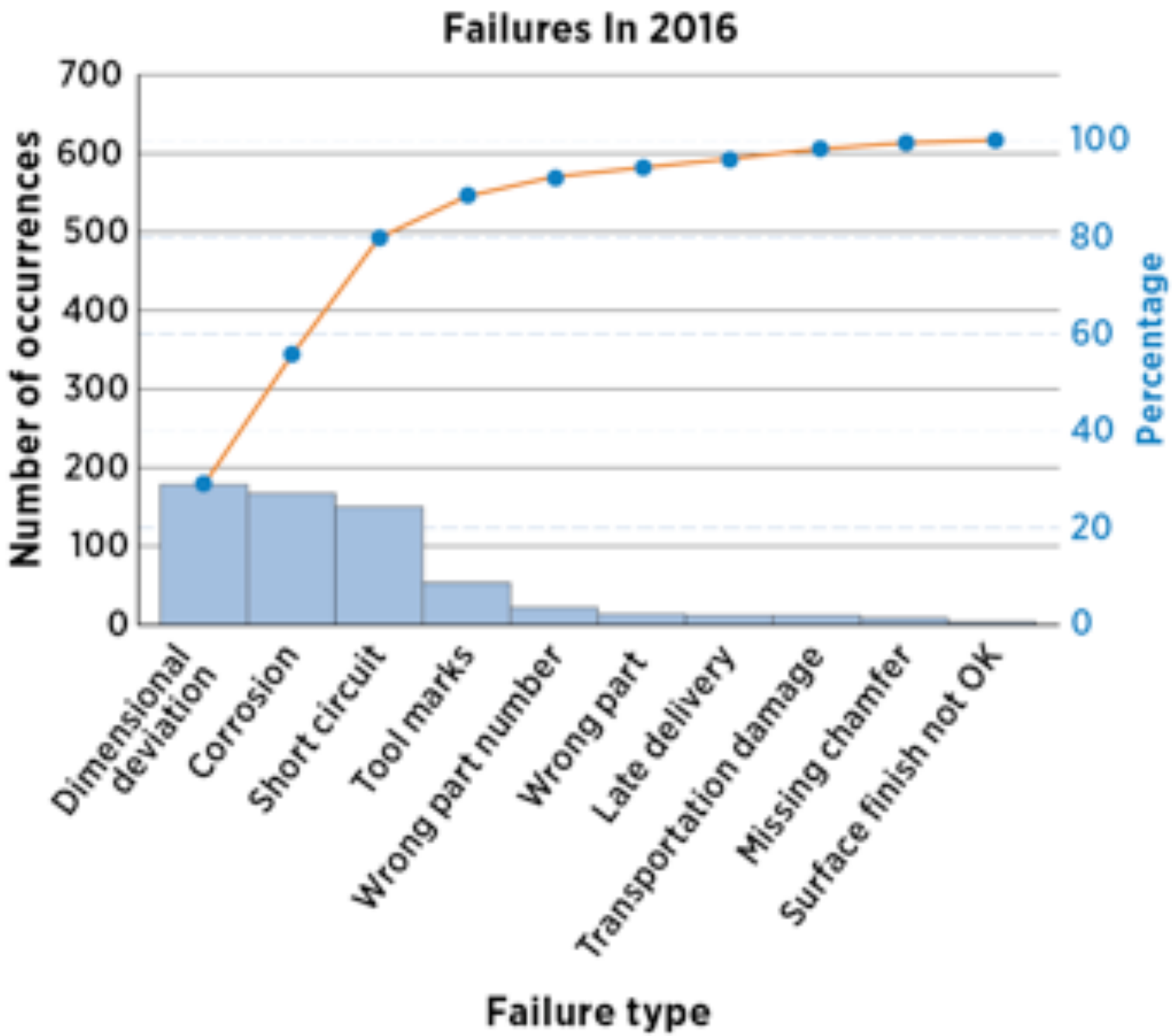








Frekvenční analýza - Paretův graf



Základní pojmy popisné statistiky

<u>Co je třeba znát a porozumět tomu:</u>

- **Základní soubor (populace, universum)**: množina objektů, na nichž provádíme statistické zkoumání; musí být přesně specifikována
- **Výběr (ze základního souboru)**: n-tice náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ odpovídající nezávislým pozorováním vybraných objektů základního souboru na nichž pozorujeme nějakou veličinu X reprezentující určitou měřitelnou (a přesně danou) vlastnost všech objektů základního souboru.
- **Rozsah výběru** je počet objektů n zahrnutých do výběru.
- **Reprezentativnost výběru** je vlastnost výběru, zaručující rovnoměrné zastoupení charakteristických vlastností objektů základního souboru.
- **Náhodný výběr** vznikne tehdy, když každý objekt základního souboru má stejnou pravděpodobnost být zahrnut do výběru.
- **Realizace výběru**: je množina naměřených (napozorovaných) číselných hodnot x_1, $x_2, \ldots, x_n$ veličin z výběru.

Základní pojmy popisné statistiky

<u>Co je třeba znát a porozumět tomu:</u>

- **Uspořádaný výběr**: $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ vznikne z původního výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ upořádáním podle velikosti pozorovaných hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- **Pořadová statistika**: $X_{(k)}$ je náhodná veličina X_m, která je k-tá v pořadí podle velikosti pozorovaných hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- **Pořadí** m-tého pozorování veličiny X_m ve výběru: pokud $X_m = X_{(k)} \;\; => \;\; R_m = k$.
- $X_{(1)}$ se nazývá **(výběrové) minimum**, $X_{(n)}$ je **(výběrové) maximum**
- **medián** je prostřední hodnota ve výběru: je-li n liché, je roven $X_{([n/2]+1)}$ pro n sudé je roven $(X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)})/2$
- **dolní kvartil**: $X_{([n/4]+1)}$ resp. $(X_{(n/4)} + X_{(n/4+1)})/2$
- **horní kvartil**: $X_{([3n/4]+1)}$ resp. $(X_{(3n/4-1)} + X_{(3n/4)})/2$
- **Výběrový modus** je nejčastější hodnota, která se vyskytuje v realizaci výběru. Tato hodnota nemusí existovat.

Základní pojmy popisné statistiky

<u>Co je třeba znát a porozumět tomu:</u>

- **Výběrový průměr** nahrazuje neznámou střední hodnotu veličiny X:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- **Výběrový rozptyl** je charakteristika odpovídající rozptylu náhodné veličiny X

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- **Výběrová směrodatná odchylka** s je druhou odmocninou z výběrového roptylu

- **Výběrový index šikmosti** je výběrovou variantou indexu šikmosti a je mírou symetrie pozorované veličiny X

$$Skew(X) = \frac{m_3(X)}{m_2^{3/2}(X)}$$

- **Výběrový index špičatosti** je výběrovou variantou indexu špičatosti a je mírou soustředění hodnot pozorované veličiny X kolem průměru.

- $$Kurt(X) = \frac{m_4(X)}{m_2^2(X)} - 3$$

Základní pojmy popisné statistiky

<u>Co je třeba znát a porozumět tomu:</u>

- **Třídní intervaly** rozdělují maximální rozsah pozorovaných hodnot náhodné veličiny (od minima do maxima) na k stejných dílů.
- **(prostá absolutní) četnost i-té třídy** je počet pozorování náhodné veličiny X v i-té třídě, $i = 1, \ldots, k$.
- **(prostá) relativní četnost i-té třídy** je poměr počtu pozorování náhodné veličiny X v i-té třídě ku rozsahu výběru n, $i = 1, \ldots, k$.
- **kumulativní (absolutní) četnost i-té třídy** je počet pozorování náhodné veličiny X od minima až do i-té třídy včetně, $i = 1, \ldots, k$.
- **kumulativní relativní četnost i-té třídy** je součet relativních četností pozorování náhodné veličiny X až do i-té třídy včetně, $i = 1, \ldots, k$.
- **Histogram četností** je grafické zobrazení četností ve formě sloupkového grafu. Relativní četnosti lze zobrazovat i ve formě kruhového (koláčového) grafu. Existuje celá řada variant.

Základní pojmy popisné statistiky

<u>Co je třeba znát a porozumět tomu:</u>

- **Krabicový diagram** je grafické zobrazení rozdělení pozorovaných hodnot pomocí pěti (Tukey's) charakteristik: minima, dolního kvartilu, mediánu, horního kvartilu a maxima.

- **Empirická distribuční funkce** je grafické zobrazení realizace výběru formou grafu po částech konstantní funkce. Vychází z uspořádaného výběru: $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(\mathrm{n})}$. Potom

$$F_n(x_{(i)}) = \frac{i}{n} \quad \text{a tedy} \quad F_n(x) = \frac{\max\{k : X_{(k)} \leq x\}}{n}, \quad x \in \mathbf{R}$$

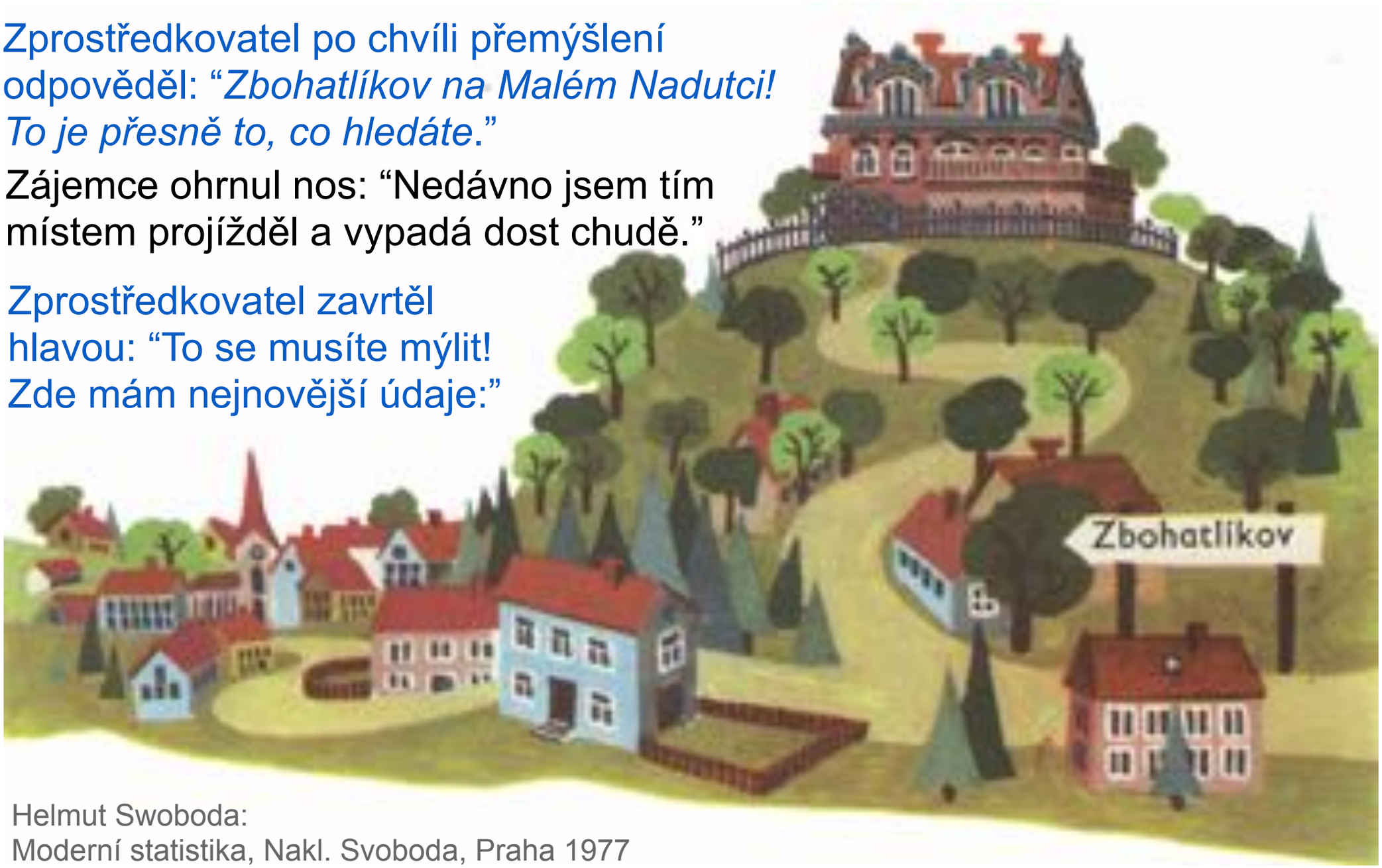
Pohádka o Zbohatlíkově

V jedné malé rozvinuté zemi, na kraji Evropské unie, přišel mladý podnikatel do realitní kanceláře a řekl: “*Chtěl bych pozemek na venkově, s lesem, loukami, ne příliš daleko od města, v pěkné krajině, za kterou by se člověk nemusel stydět. Samozřejmě že cenově výhodný*. ”

Zprostředkovatel po chvíli přemýšlení odpověděl: “*Zbohatlíkov na Malém Nadutci! To je přesně to, co hledáte*.”

Zájemce ohrnul nos: “Nedávno jsem tím místem projížděl a vypadá dost chudě.”

Zprostředkovatel zavrtěl hlavou: “To se musíte mýlit! Zde mám nejnovější údaje:”



Helmut Swoboda:
Moderní statistika, Nakl. Svoboda, Praha 1977

Pohádka o Zbohatlíkově

- Zprostředkovatel tvrdí:

  ***Průměrný roční příjem ve Zbohatlíkově činí* 82.320 *tolarů*.**

- Kupec zašel za známým ředitelem banky:

  roční příjem více než poloviny obyvatel je **29.000** *tolarů a více*.

- To je podivné! Co řekne okresní úřad?:

  Dosti chudé místo, prostřední (typický) příjem je kolem **29.000** *tolarů.*

- Vrátil se k řediteli banky pro nové informace:

  Nejsilněji zastoupená příjmová kategorie je od **10.000** *do* **20.000** *tolarů*

  Nejčetnější příjem je poměrně přesně **18.000** *tolarů.*

- Rozhněvaný kupec jede za učitelem Počtářem, kam ho poslali. Ten tvrdí, že situace je neutěšená:

  Více než polovina rodin má příjem menší než **30.000** *tolarů.*

  68% rodin nedosáhne ani na polovinu průměrného příjmu.

  Příjem na hlavu není u většiny lidí ani **7.500** *tolarů ročně.*

  80% obyvatel má ročně méně než **21.000** *tolarů na hlavu.*

Kdo z nich lže?

Pohádka o Zbohatlíkově

Údaje o ročním příjmu 25 rodin ze Zbohatlíkova, n je počet členů domácnosti:

roční příjem	n	roční příjem	n	roční příjem	n	roční příjem	n
1,200.000	3	60.000	1	45.000	2	29.000	3
150.000	5	51.000	3	42.000	2	26.000	4
86.000	4	49.000	4	38.000	4	24.000	4
37.000	3	20.000	7	14.000	1	18.000	4
35.000	5	18.000	3	13.000	4	16.000	3
32.000	3	18.000	8	11.000	1	16.000	2
						10.000	2

Zkusíme "stem&leaf" diagram:

```
0 | 00000000000000000001112
1 | 2
```

Nic moc!

Pohádka o Zbohatlíkově

Údaje o ročním příjmu 25 rodin ze Zbohatlíkova, n je počet členů domácnosti:

roční příjem	n	roční příjem	n	roční příjem	n	roční příjem	n
1,200.000	3	45.000	2	29.000	3	18.000	4
150.000	5	42.000	2	26.000	4	16.000	3
86.000	4	38.000	4	24.000	4	16.000	2
60.000	1	37.000	3	20.000	7	14.000	1
51.000	3	35.000	5	18.000	3	13.000	4
49.000	4	32.000	3	18.000	8	11.000	1
						10.000	2

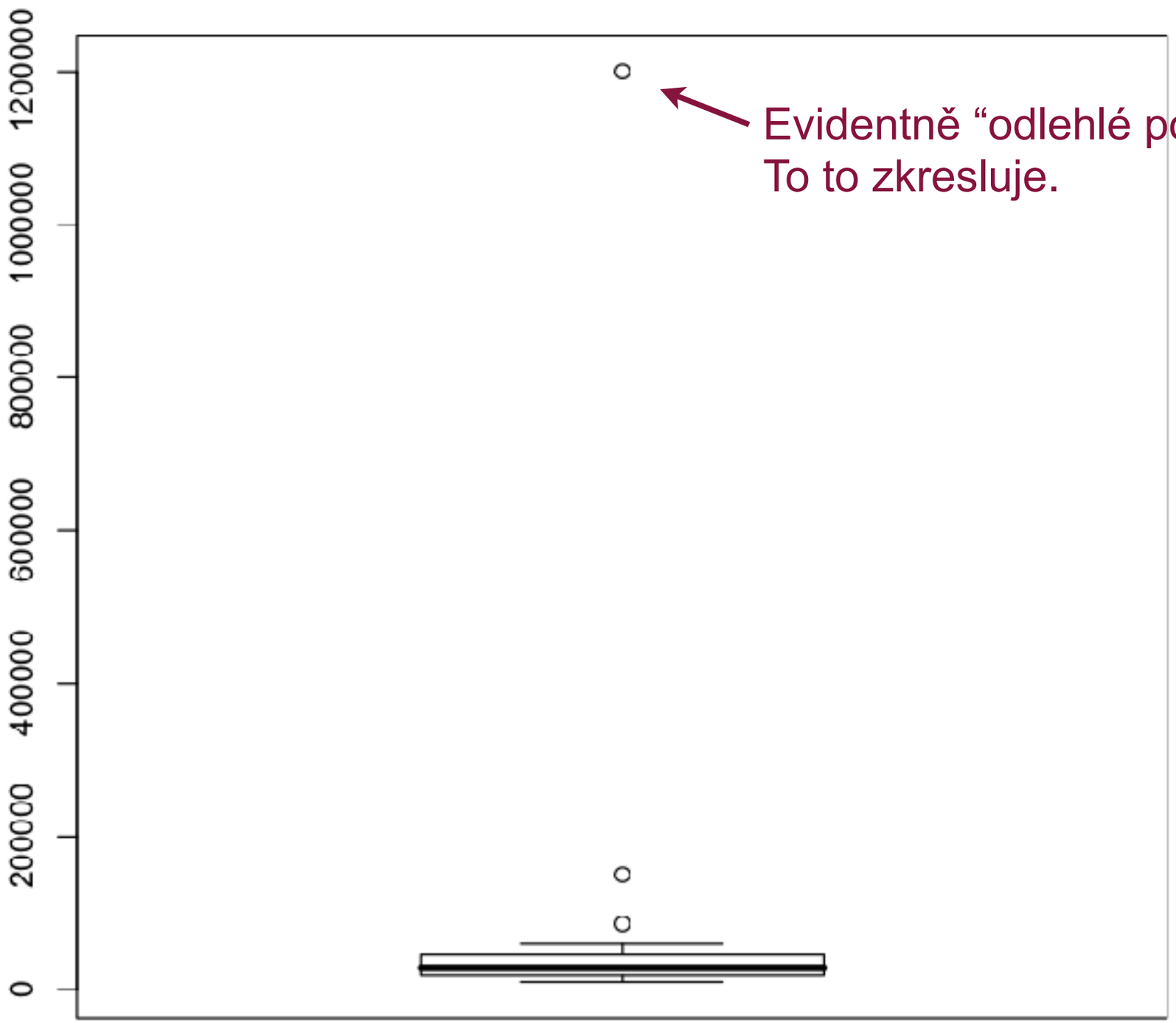
Zkusíme “stem&leaf” diagram:

0 | 0000000000000000000001112
1 | 2

Nic moc!

Pohádka o Zbohatlíkově

... a co "Box&Whiskers" diagram?

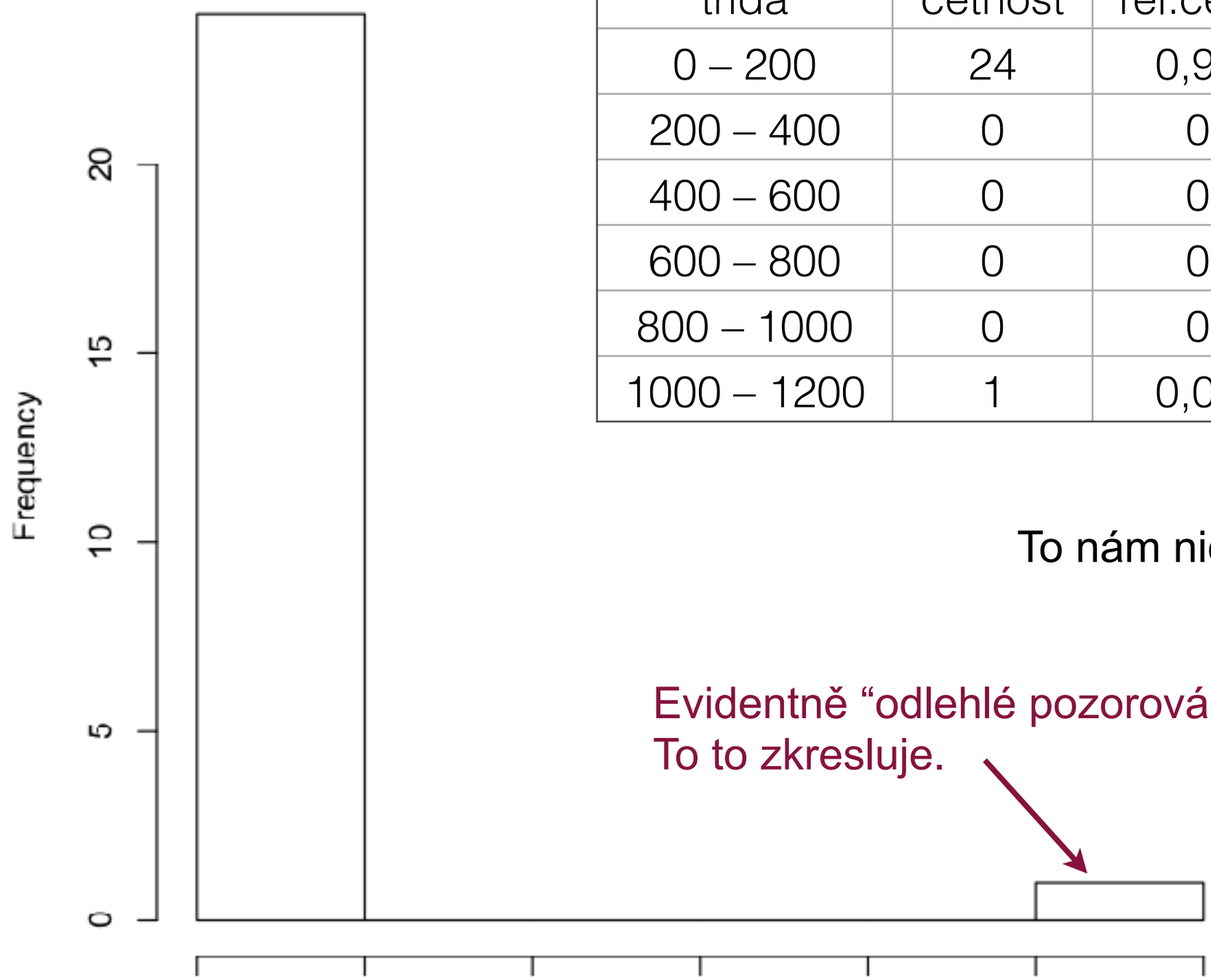


Evidentně "odlehlé pozorování.
To to zkresluje.

Nicméně, medián
je opravdu 29.000

Pohádka o Zbohatlíkově

stejně dopadne i histogram:



třída	četnost	rel.četn.
0 – 200	24	0,96
200 – 400	0	0
400 – 600	0	0
600 – 800	0	0
800 – 1000	0	0
1000 – 1200	1	0,04

To nám nic neukáže.

Evidentně “odlehlé pozorování.
To to zkresluje.

Pohádka o Zbohatlíkově

Údaje o ročním příjmu 25 rodin ze Zbohatlíkova, n je počet členů domácnosti:

roční příjem	n	roční příjem	n	roční příjem	n		
1,200.000	3	60.000	1	45.000	2	29.000	3
150.000	5	51.000	3	42.000	2	26.000	4
86.000	4	49.000	4	38.000	4	24.000	4
37.000	3	20.000	7	14.000	1	18.000	4
35.000	5	18.000	3	13.000	4	16.000	3
32.000	3	18.000	8	11.000	1	16.000	2
						10.000	2

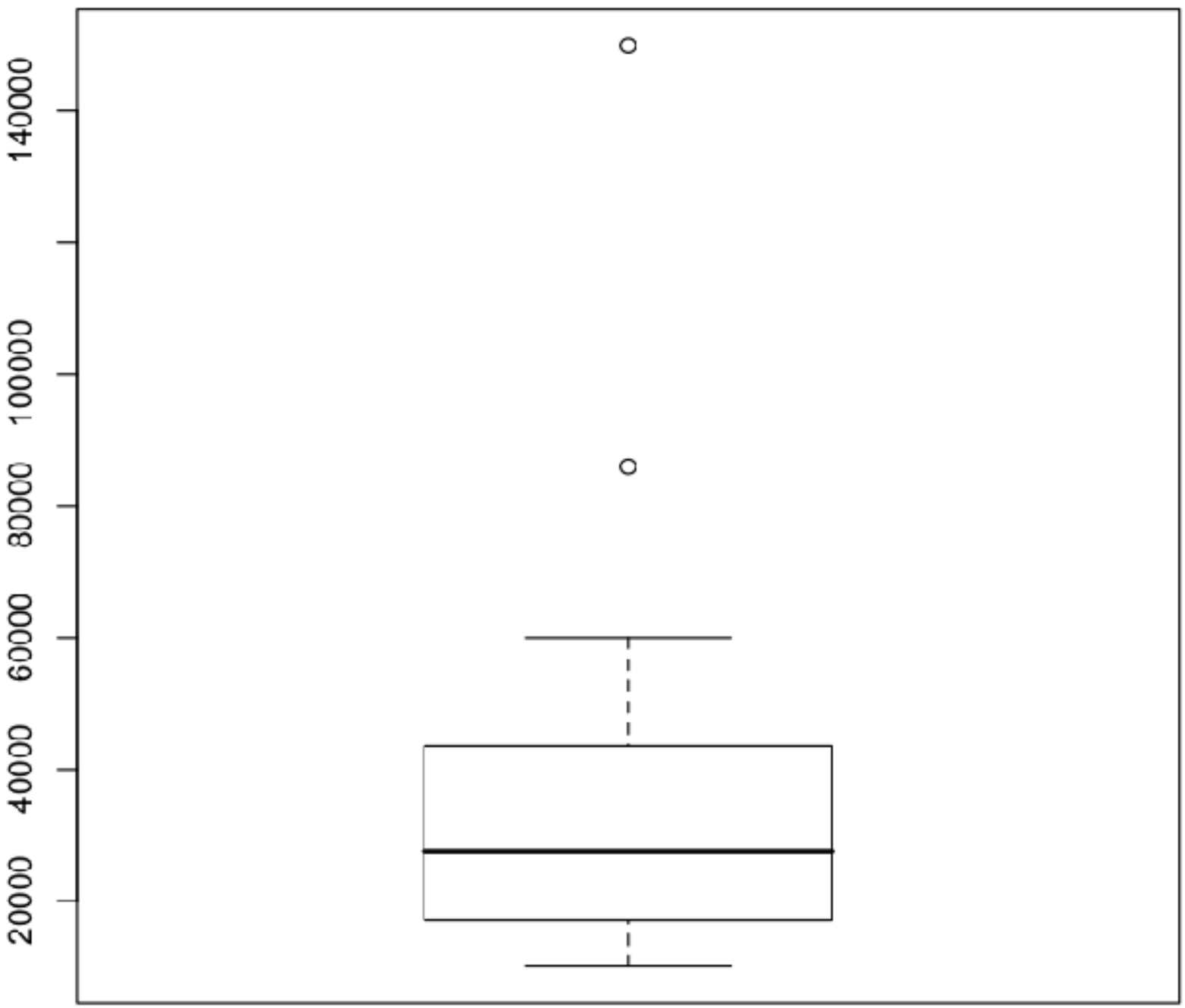
Odstraníme na chvíli extrémní (odlehlou) hodnotu :

```
0 | 111122222223334444
0 | 55569
1 |
1 | 5
```

To už je trochu lepší!

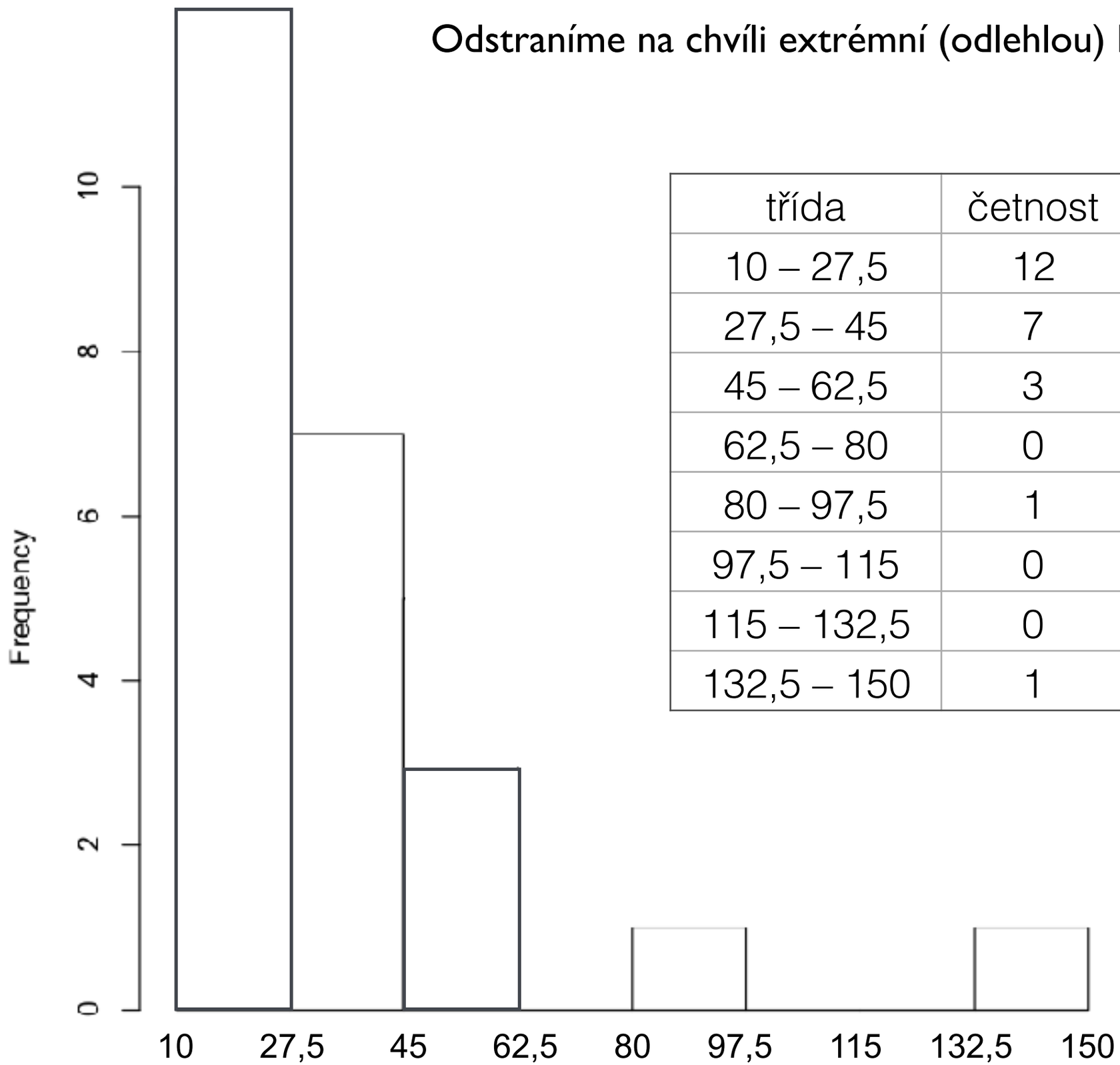
Pohádka o Zbohatlíkově

Odstraníme na chvíli extrémní (odlehlou) hodnotu :



X_{med} = 29.000

Pohádka o Zbohatlíkově



Odstraníme na chvíli extrémní (odlehlou) hodnotu :

třída	četnost	rel.četn.
10 – 27,5	12	0,96
27,5 – 45	7	0
45 – 62,5	3	0
62,5 – 80	0	0
80 – 97,5	1	0
97,5 – 115	0	0,04
115 – 132,5	0	
132,5 – 150	1	

Pohádka o Zbohatlíkově

Údaje o ročním příjmu 25 rodin ze Zbohatlíkova, n je počet členů domácnosti:

roční příjem	n	roční příjem	n	roční příjem	n		
1,200.000	3	60.000	1	45.000	2	29.000	3
150.000	5	51.000	3	42.000	2	26.000	4
86.000	4	49.000	4	38.000	4	24.000	4
37.000	3	20.000	7	14.000	1	18.000	4
35.000	5	18.000	3	13.000	4	16.000	3
32.000	3	18.000	8	11.000	1	16.000	2
						10.000	2

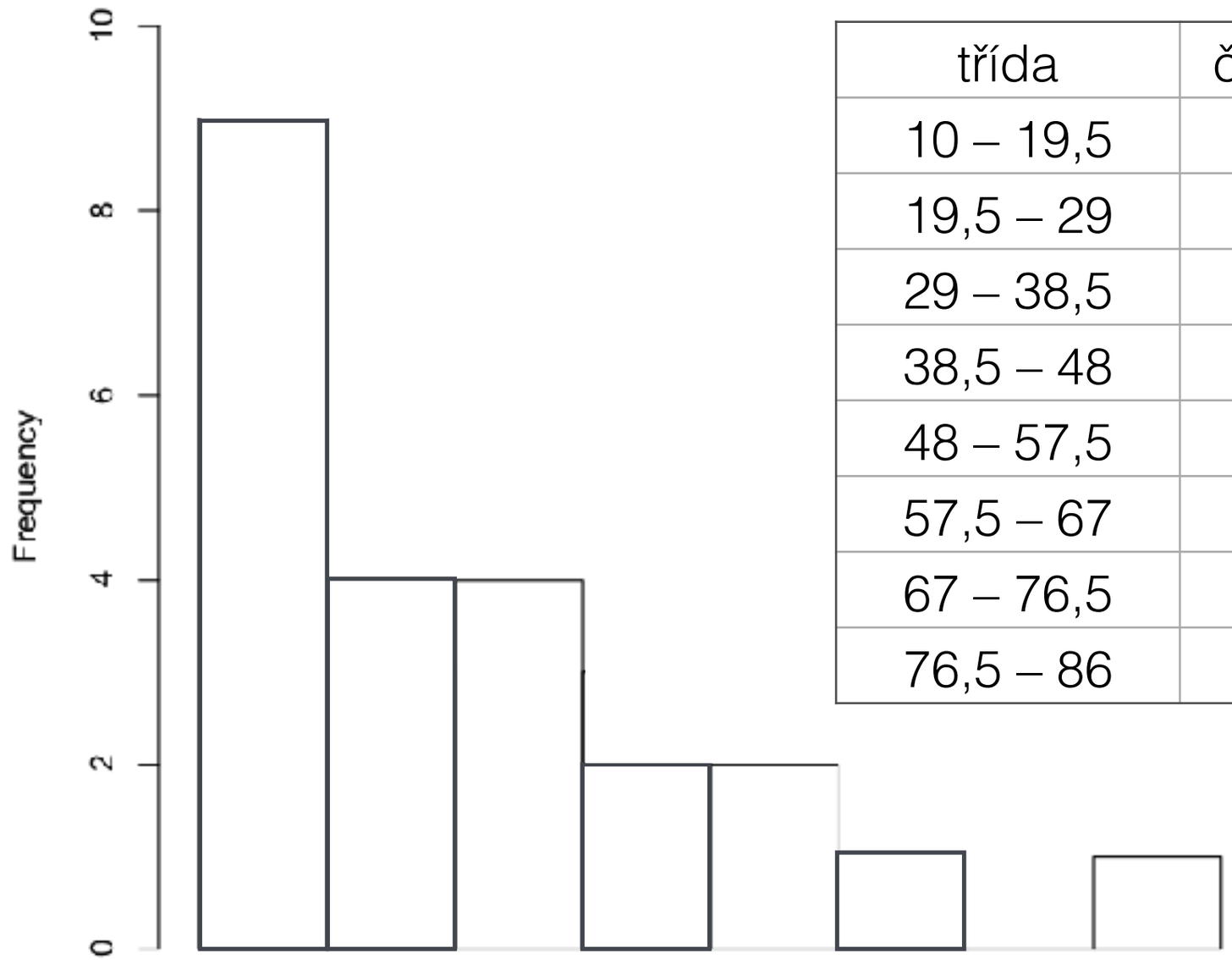
Odstraníme na chvíli dvě extrémní (odlehlé) hodnoty :

```
0 | 013466888
2 | 04692578
4 | 2591
6 | 0
8 | 6
```

Nejčetnější hodnota
je 18.000 tolarů

Pohádka o Zbohatlíkově

Odstraníme na chvíli dvě extrémní (odlehlé) hodnoty:



třída	četnost	rel.četn.
10 – 19,5	9	0,39
19,5 – 29	4	0,175
29 – 38,5	4	0,175
38,5 – 48	2	0,087
48 – 57,5	2	0,087
57,5 – 67	1	0,043
67 – 76,5	0	0
76,5 – 86	1	0,043

Nejsilněji zastoupená třída je od 10.000 do 20.000 tolarů

Pohádka o Zbohatlíkově

Příjmy na hlavu (83):

400.000,	400.000,	400.000,	30.000,	30.000,	30.000,	30.000,	30.000,	21.500,	1.500,
21.500,	21.500,	12.333,	12.333,	12.333,	7.000,	7.000,	7.000,	7.000,	7.000,
10.666,	10.666,	10.666,	9.666,	9.666,	9.666,	6.500,	6.500,	6.500,	6.500,
6.000,	6.000,	6.000,	6.000,	60.000,	17.000,	12.250,	12.250,	12.250,	12.250,
2.857,	2.857,	2.857,	2.857,	2.857,	2.857,	2.857,	6.000,	6.000,	6.000,
2.250,	2.250,	2.250,	2.250,	2.250,	2.250,	2.250,	2.250,	4.500,	4.500,
4.500,	4.500,	5.333,	5.333,	5.333,	8.000,	8.000,	22.500,	22.500,	21.000,
21.000,	9.500,	9.500,	9.500,	9.500,	14.000,	3.250,	3.250,	3.250,	3.250,
11.000,	5.000,	5.000							

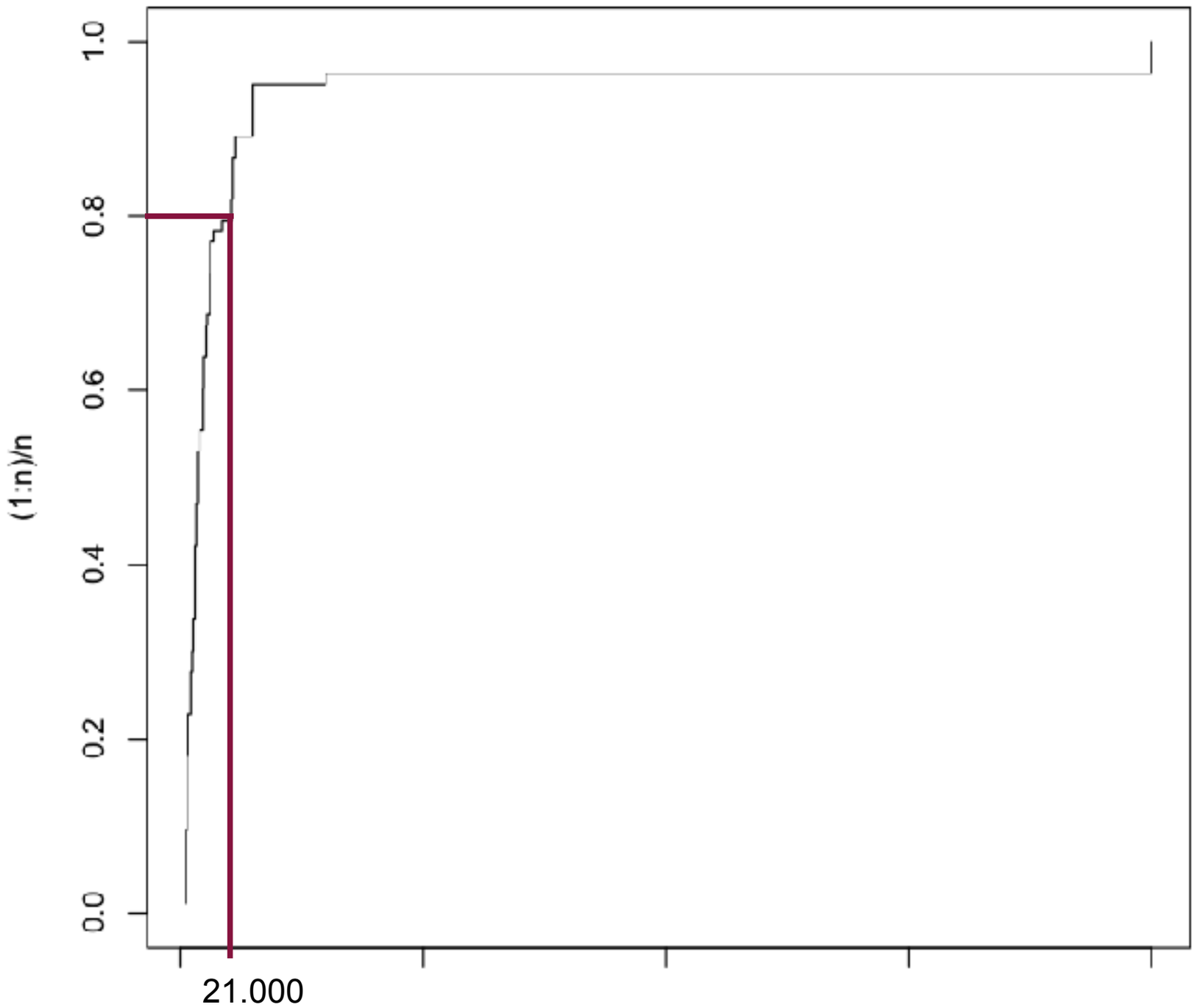
Uspořádané příjmy na hlavu: 80% je 66,4 lidí

2.250	2.250	2.250	2.250	2.250	2.250	2.250	2.250	2.857	2.857
2.857	2.857	2.857	2.857	2.857	3.250	3.250	3.250	3.250	4.500
4.500	4.500	4.500	5.000	5.000	5.333	5.333	5.333	6.000	6.000
6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.500	6.500	6.500	6.500	7.000
7.000	7.000	7.000	7.000	8.000	8.000	9.500	9.500	9.500	9.500
9.666	9.666	9.666	10.666	10.666	10.666	11.000	12.250	12.250	12.250
12.250	12.333	12.333	12.333	14.000	17.000	21.000	21.000	21.500	21.500
21.500	21.500	22.500	22.500	30.000	30.000	30.000	30.000	30.000	60.000
400.000	400.000	400.000							

80% lidí má menší roční příjem než 20.000 tolarů

Pohádka o Zbohatlíkově

Empirická distribuční funkce:



Pohádka o Zbohatlíkově

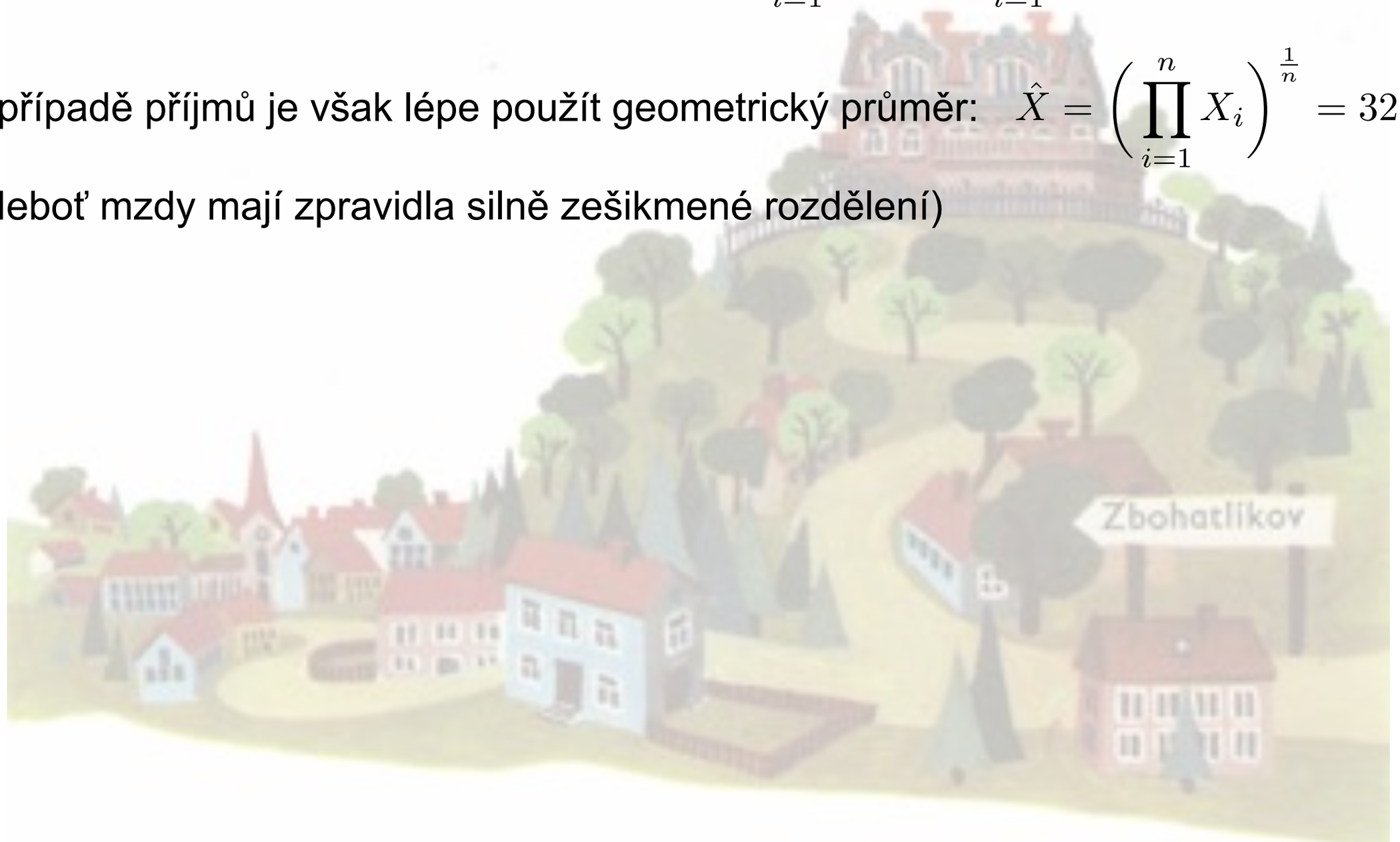
Lhal tedy zprostředkovatel?

Nelhal, neboť:

✓ Výběrový průměr je opravdu $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i = \mathbf{82.320}$

V případě příjmů je však lépe použít geometrický průměr: $\hat{X} = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}} = 32.730$

(Neboť mzdy mají zpravidla silně zešikmené rozdělení)



Pohádka o Zbohatlíkově

Lhal tedy zprostředkovatel?

Nelhal, neboť:

✓ Výběrový průměr je opravdu $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i = \mathbf{82.320}$

Lhal tedy učitel?

Nelhal, neboť:

✓ Medián je $\tilde{x}_{50} = \mathbf{29.000}$

✓ 52 % rodin roční příjem menší než **30.000**

✓ Nejsilněji zastoupená příjmová kategorie je od **10.000 do 20.000**

✓ Modus příjmů rodin je **18.000** (3x)

✓ 68 % percentil je **40.000**, což je méně než polovina výběrového průměru.

✓ 53 % lidí má příjem na hlavu menší než **7.500**

✓ 80 % kvantil příjmu na hlavu je **21.000**

… a písnička na závěr …