

Základy stochastiky

Testování hypotéz

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.



Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

- Nulová hypotéza

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

- Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

- Alternativní hypotéza

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

- Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

- Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

- Testová statistika

- má t-rozdělení o (n-1) stupních volnosti

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

- Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

- Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

- Testová statistika

- má t-rozdělení o (n-1) stupních volnosti

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

- hladina významnosti, kritická hodnota

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

- Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

- Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

- Testová statistika

- má t-rozdělení o (n-1) stupních volnosti

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

- hladina významnosti, kritická hodnota

$$|T| \geq t_\alpha(n-1)$$

- rozhodovací pravidlo

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

- Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

- Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

- Testová statistika

- má t-rozdělení o (n-1) stupních volnosti

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

- hladina významnosti, kritická hodnota

$$|T| \geq t_\alpha(n-1)$$

- rozhodovací pravidlo

Nulová hypotéza se nepřijímá, pouze zamítá či nezamítá!

Statisticky nelze nic dokázat, pouze zamítnout!

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

- Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

- Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

- Testová statistika

- má t-rozdělení o (n-1) stupních volnosti

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

- hladina významnosti, kritická hodnota

$$|T| \geq t_\alpha(n-1)$$

- rozhodovací pravidlo

Nulová hypotéza se nepřijímá, pouze zamítá či nezamítá!

Statisticky nelze nic dokázat, pouze zamítnout!

$$\left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1)$$

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

- Nulová hypotéza

$$H_A : \mu \neq m_0$$

- Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

- Testová statistika

- má t-rozdělení o (n-1) stupních volnosti

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

- hladina významnosti, kritická hodnota

$$|T| \geq t_\alpha(n-1)$$

- rozhodovací pravidlo

Nulová hypotéza se nepřijímá, pouze zamítá či nezamítá!

Statisticky nelze nic dokázat, pouze zamítnout!

$$\left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle$$

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

$$H_A : \mu \neq m_0$$

- Nulová hypotéza

- Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

- Testová statistika

- má t-rozdělení o (n-1) stupních volnosti

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

- hladina významnosti, kritická hodnota

$$|T| \geq t_\alpha(n-1)$$

- rozhodovací pravidlo

Nulová hypotéza se nepřijímá, pouze zamítá či nezamítá!

Statisticky nelze nic dokázat, pouze zamítnout!

$$\left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$H_0 : \mu = m_0$$

$$H_A : \mu \neq m_0$$

- Nulová hypotéza

- Alternativní hypotéza

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n}$$

- Testová statistika

- má t-rozdělení o (n-1) stupních volnosti

$$\alpha \Rightarrow t_\alpha(n-1)$$

- hladina významnosti, kritická hodnota

$$|T| \geq t_\alpha(n-1)$$

- rozhodovací pravidlo

Nulová hypotéza se nepřijímá, pouze zamítá či nezamítá!

Statisticky nelze nic dokázat, pouze zamítnout!

$$\left| \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| \geq t_\alpha(n-1) \Leftrightarrow \frac{\bar{X} - m_0}{s} \sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \left\langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

$$\bar{X} \notin \left\langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\rangle$$

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

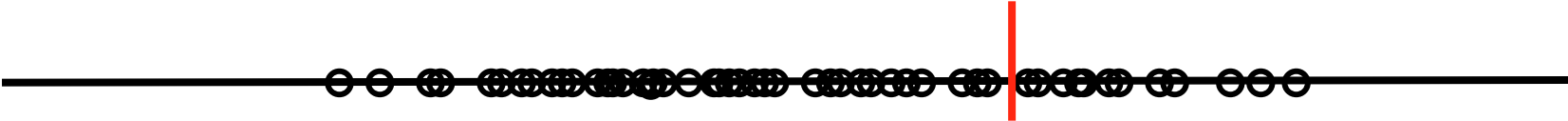
Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

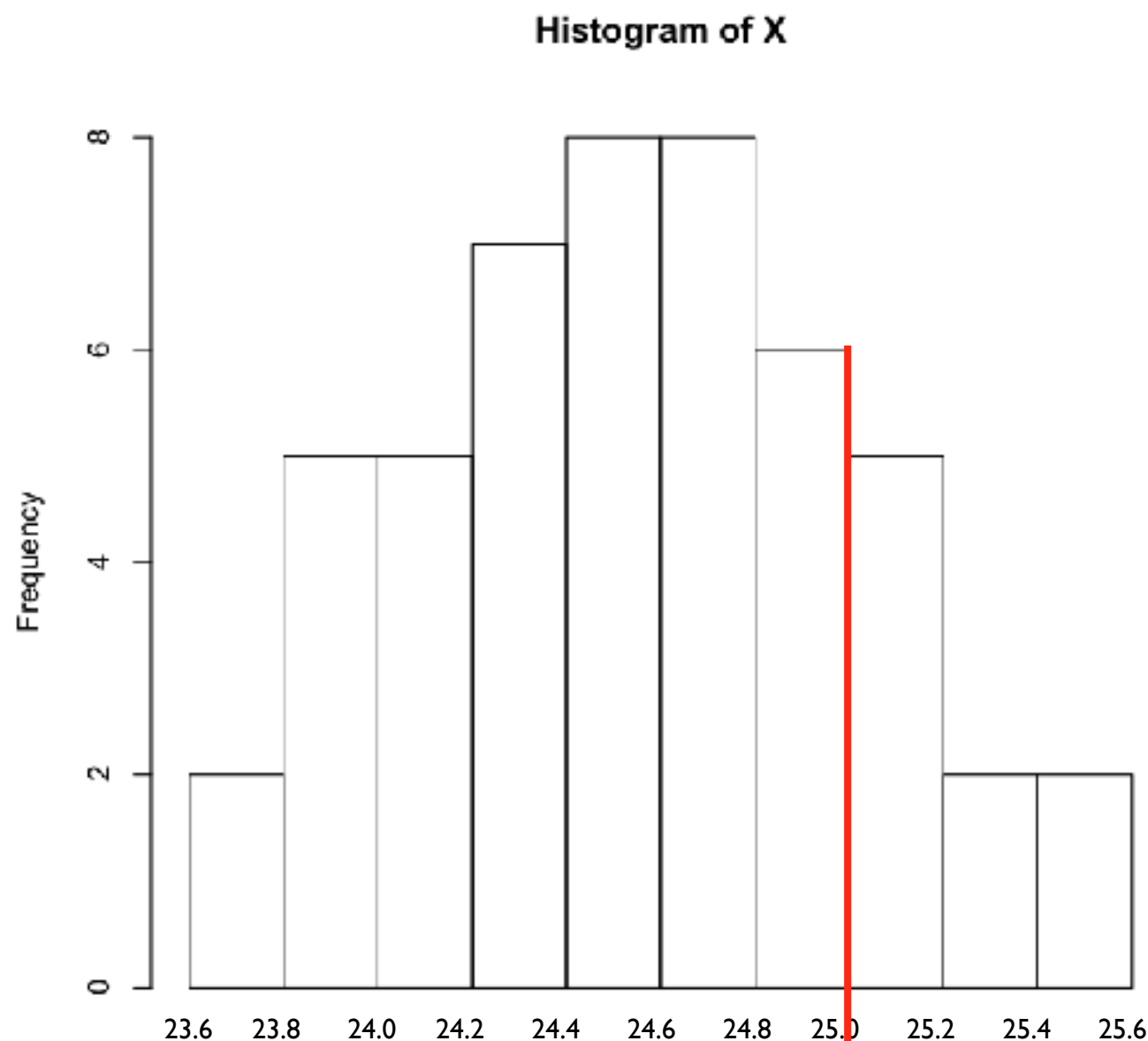
Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906



Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

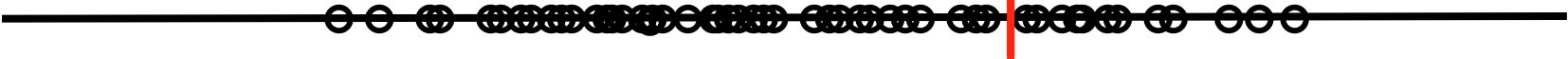
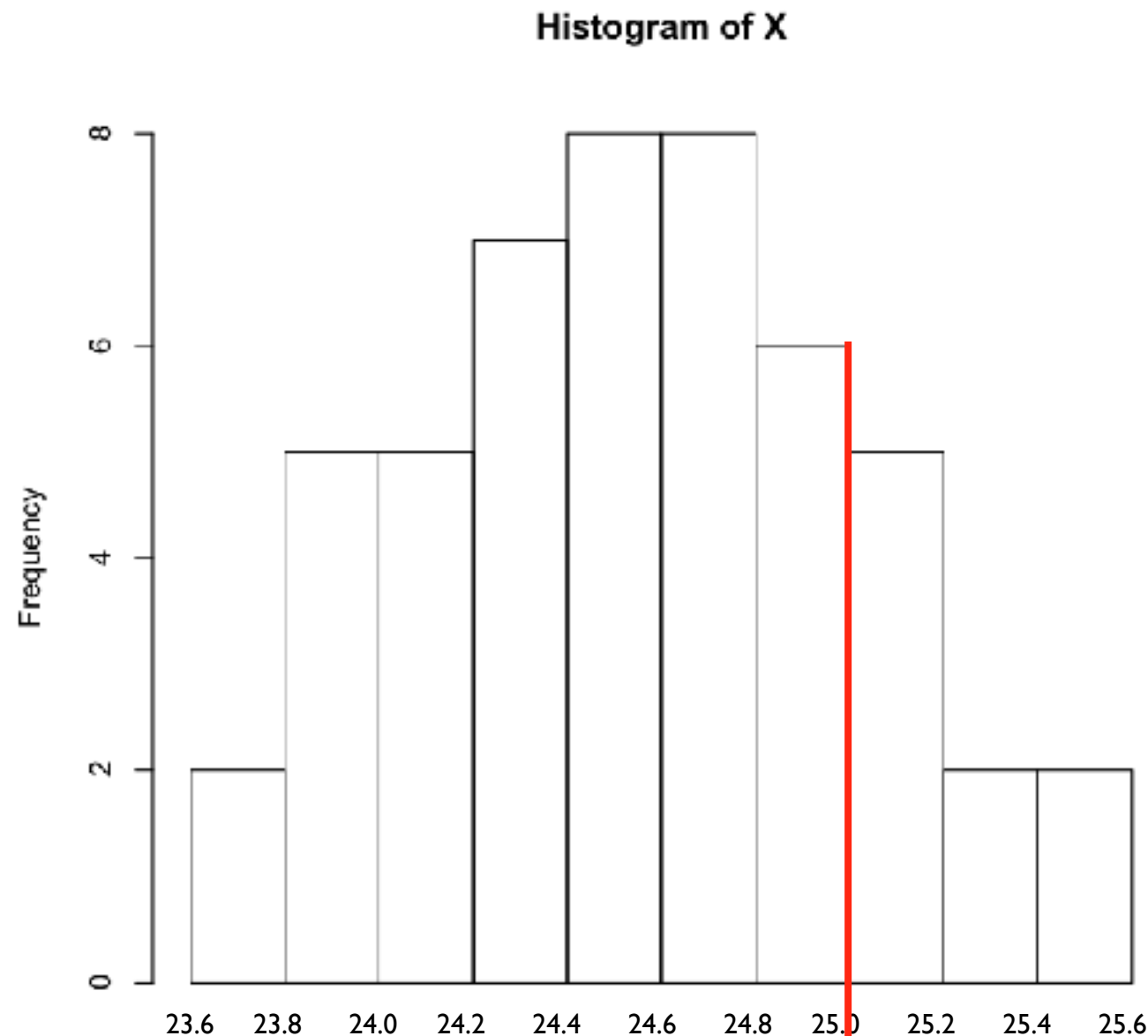
Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?

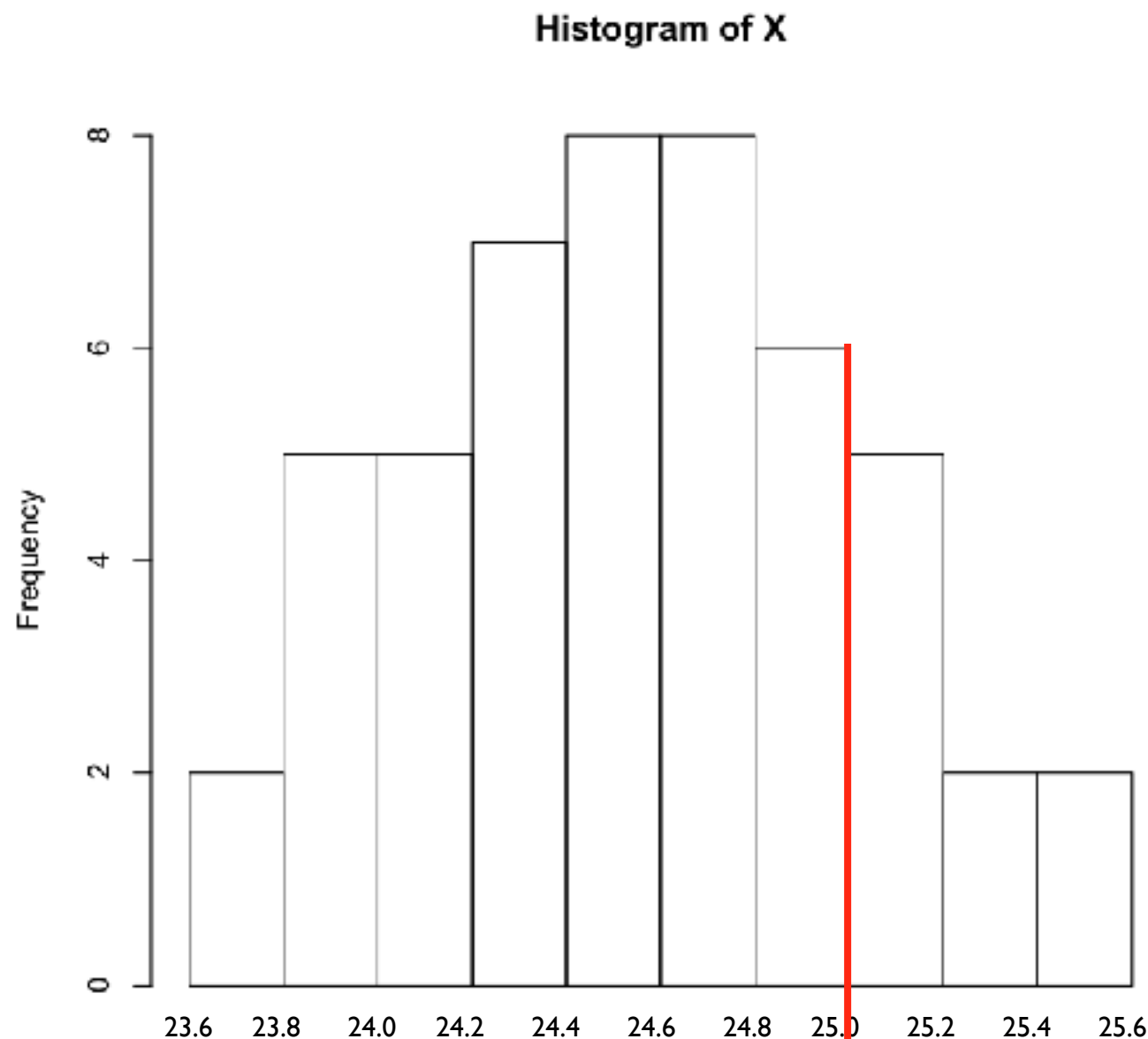


$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



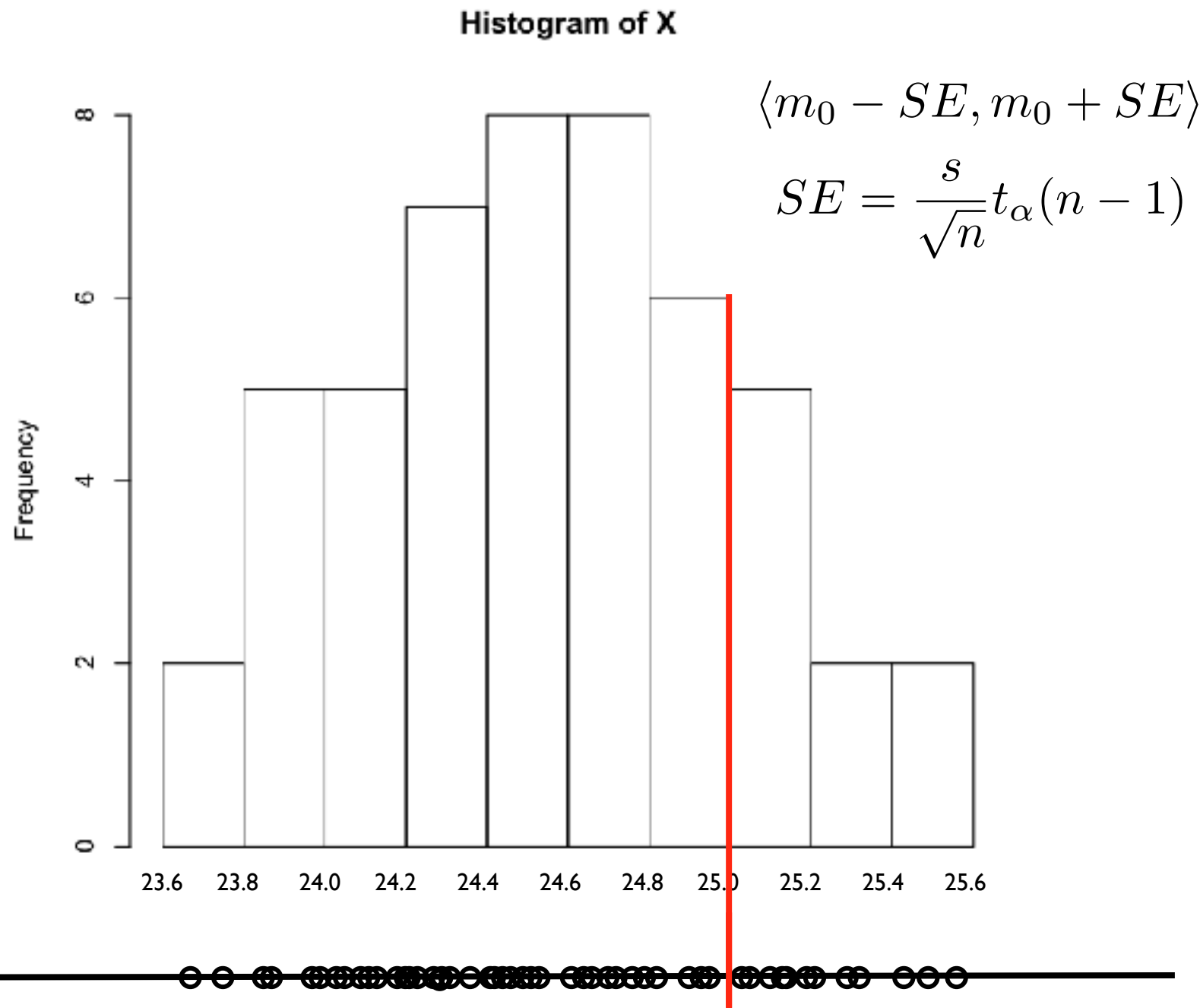
24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



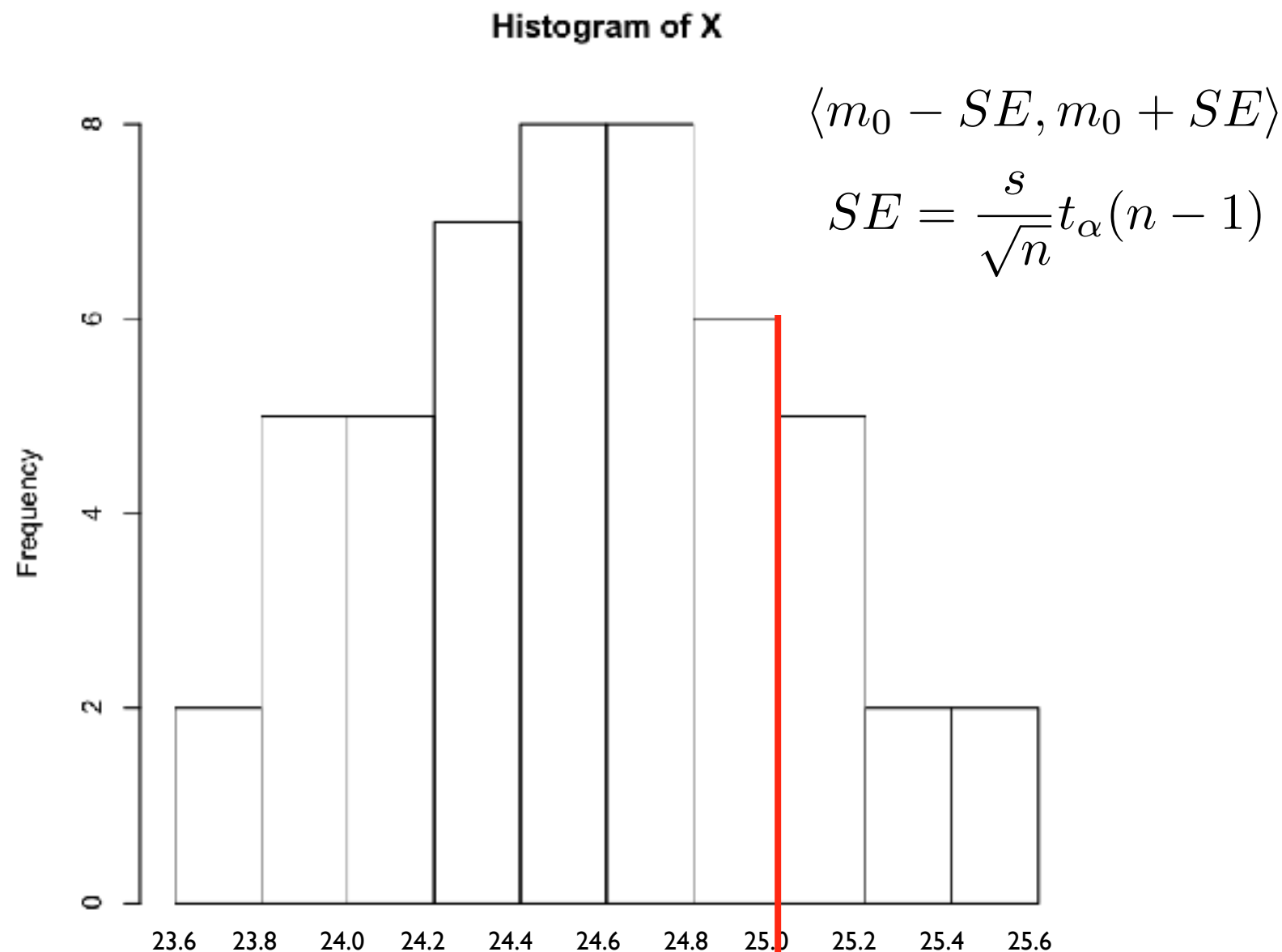
$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

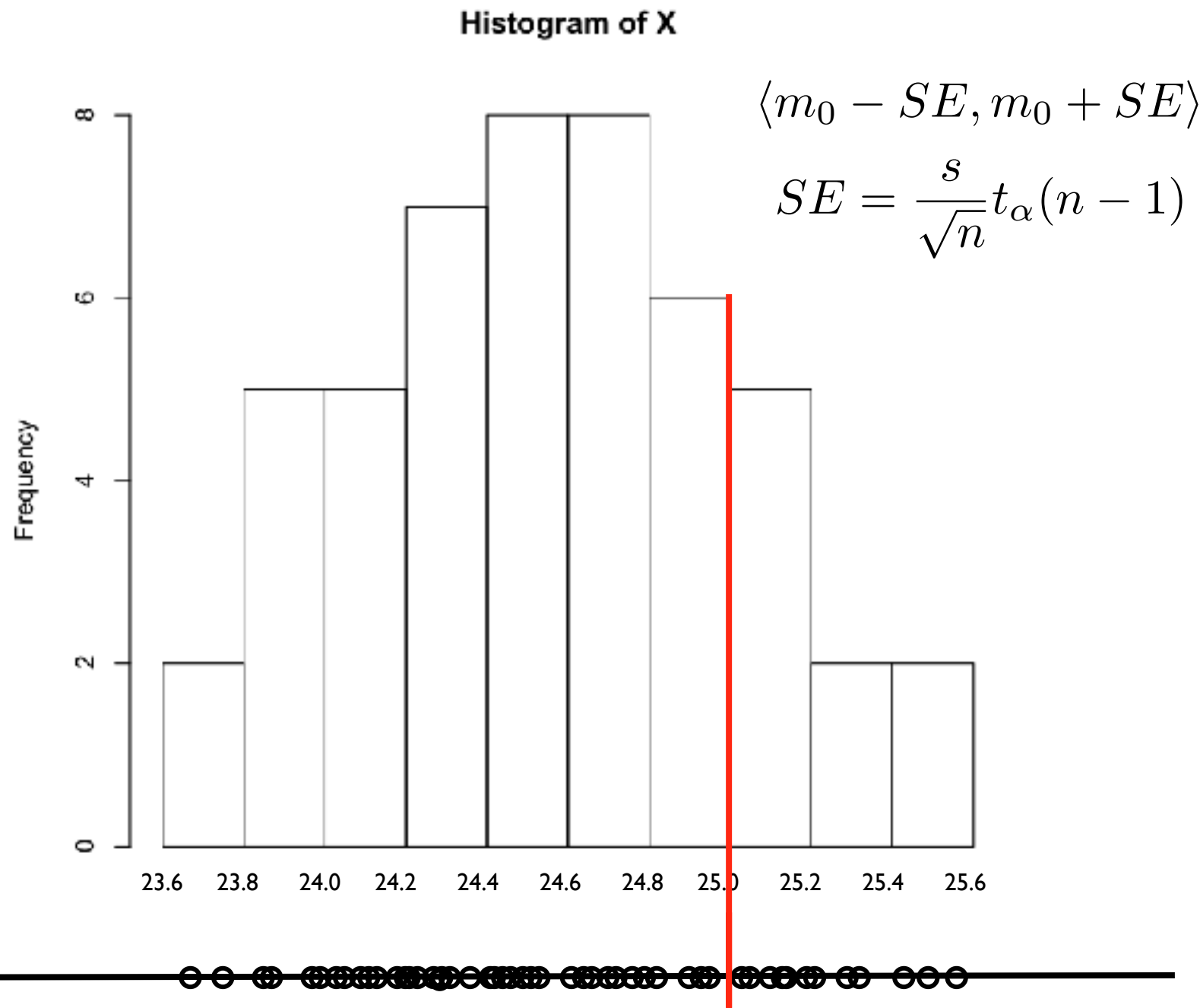
$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$$

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

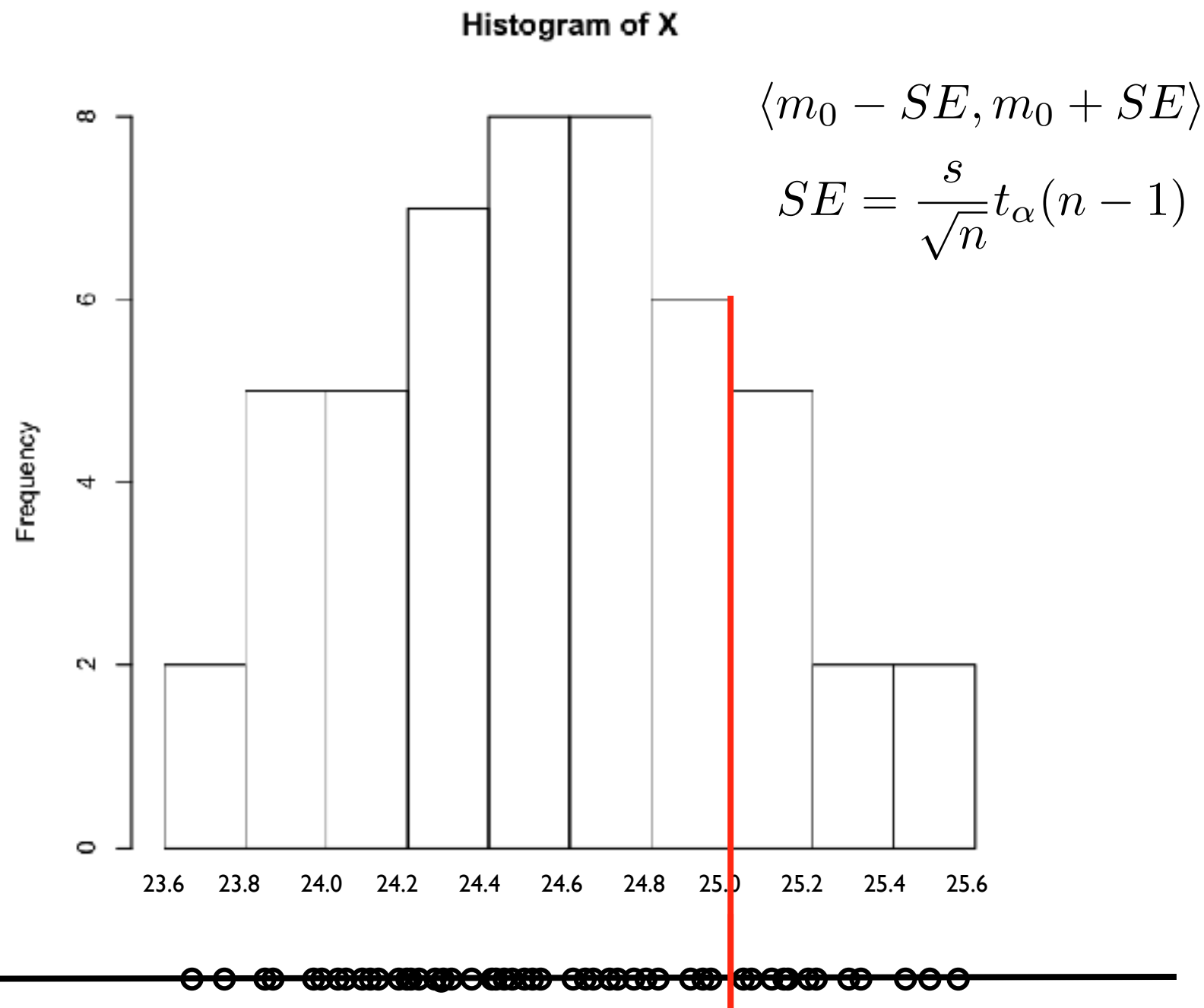
$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01 \quad SE = 0.132 \quad \langle 24.868, 25.132 \rangle$$

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$$

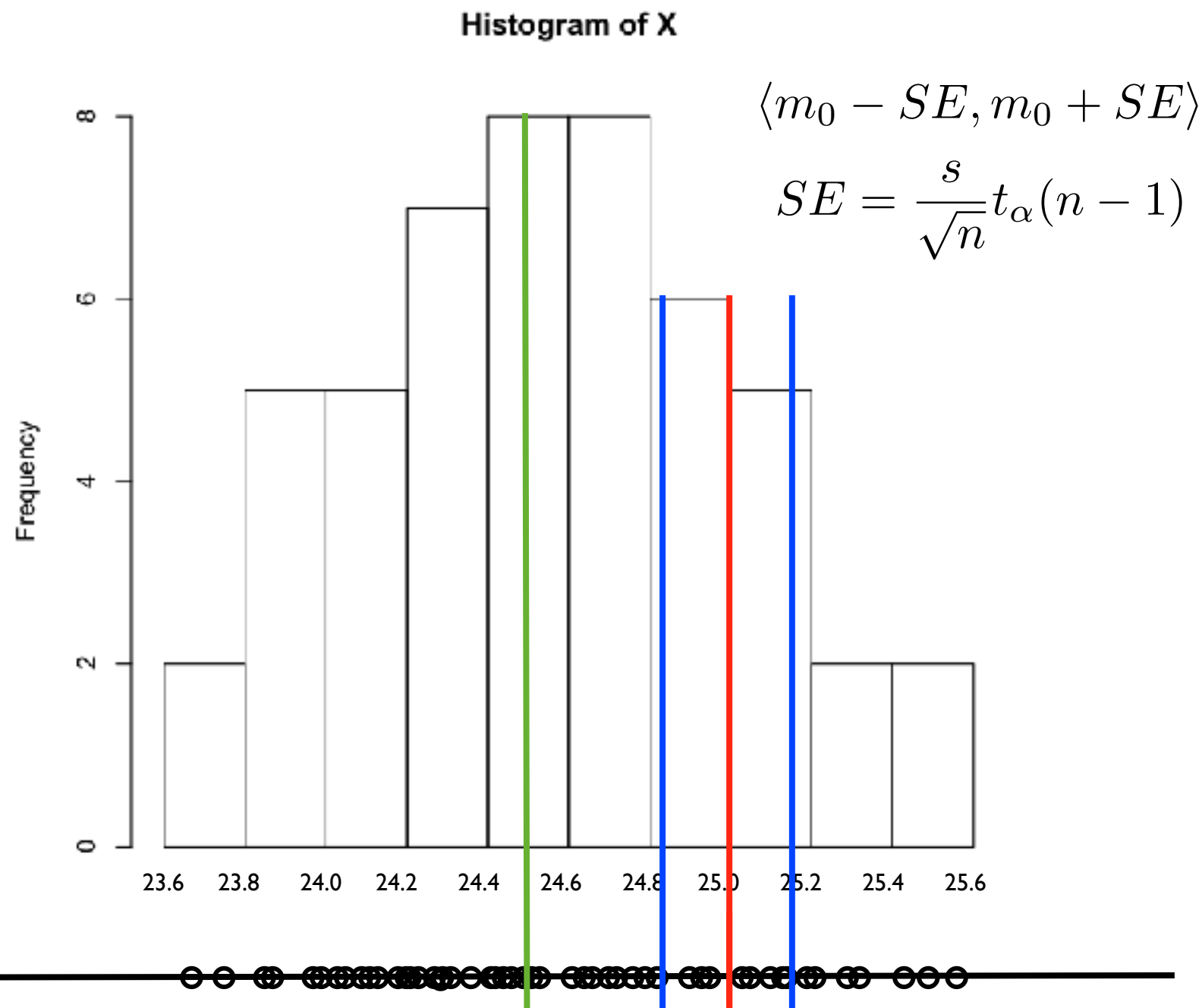
$$SE = 0.132$$

$$\bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$$

24.52586 24.17119
 24.54486 24.44240
 23.93455 24.20389
 24.19974 24.34851
 23.94024 24.21022
 24.87474 25.06155
 25.48924 25.32572
 23.71721 24.61622
 25.06676 24.90055
 24.36213 24.98580
 24.80591 24.20853
 24.72623 24.64437
 24.70405 23.97645
 25.29837 24.46910
 24.99453 25.42994
 24.66147 24.75773
 25.03970 24.44901
 25.13285 24.40205
 24.78721 23.83656
 24.17186 23.65390
 24.48244 24.68550
 24.22988 23.83956
 24.09777 24.52098
 24.89240 24.25332
 24.14259 25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



$$\bar{X} = 24.55, s^2(X) = 0.21, s(X) = 0.46, n = 50$$

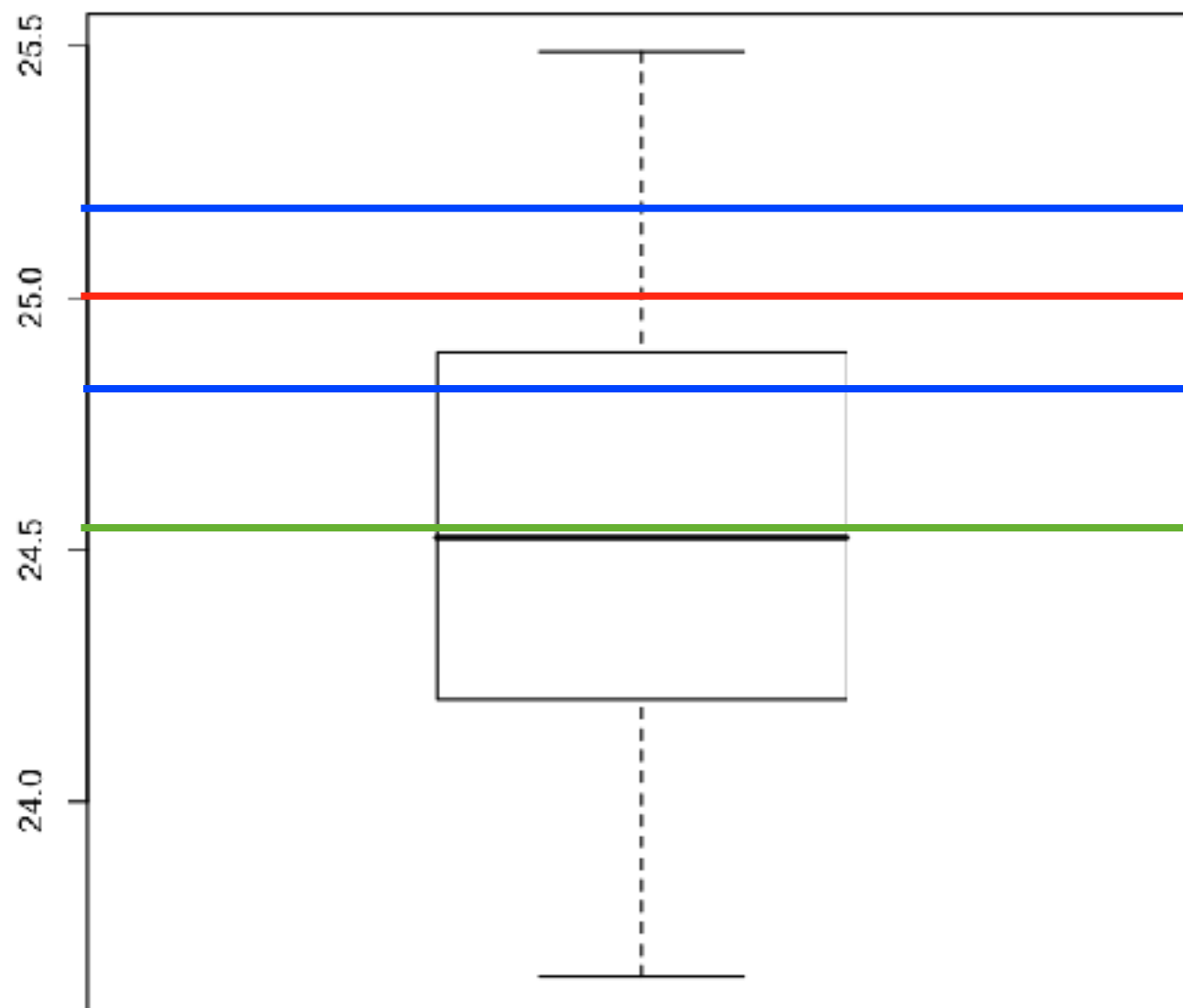
Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01 \quad SE = 0.132 \quad \bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$$

24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0=25,0\text{g}$)?



24.52586	24.17119
24.54486	24.44240
23.93455	24.20389
24.19974	24.34851
23.94024	24.21022
24.87474	25.06155
25.48924	25.32572
23.71721	24.61622
25.06676	24.90055
24.36213	24.98580
24.80591	24.20853
24.72623	24.64437
24.70405	23.97645
25.29837	24.46910
24.99453	25.42994
24.66147	24.75773
25.03970	24.44901
25.13285	24.40205
24.78721	23.83656
24.17186	23.65390
24.48244	24.68550
24.22988	23.83956
24.09777	24.52098
24.89240	24.25332
24.14259	25.12906

$$\bar{X} = 24.55, \quad s^2(X) = 0.21, \quad s(X) = 0.46, \quad n = 50$$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01 \quad SE = 0.132 \quad \bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$$

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- oba parametry v obou případech známe

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- oba parametry v obou případech známe
- známe střední hodnoty a neznáme rozptyly

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- oba parametry v obou případech známe
- známe střední hodnoty a neznáme rozptyly
- známe rozptyly a neznáme střední hodnoty

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- oba parametry v obou případech známe
- známe střední hodnoty a neznáme rozptyly
- známe rozptyly a neznáme střední hodnoty
- žádný z parametrů neznáme

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- oba parametry v obou případech známe
- známe střední hodnoty a neznáme rozptyly
- známe rozptyly a neznáme střední hodnoty
- žádný z parametrů neznáme

Odhady středních hodnot: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$

Odhady rozptylů:

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X - \bar{X})^2, \quad s_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum (Y - \bar{Y})^2$$

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- test shody rozptylů

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- test shody rozptylů
- test shody středních hodnot při stejných rozptylech

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- test shody rozptylů
- test shody středních hodnot při stejných rozptylech
- test shody středních hodnot při nestejných rozptylech

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- test shody rozptylů
- test shody středních hodnot při stejných rozptylech
- test shody středních hodnot při nestejných rozptylech

Dvě závislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- test shody rozptylů
- test shody středních hodnot při stejných rozptylech
- test shody středních hodnot při nestejných rozptylech

Dvě závislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

párová
pozorování

- párový test shody středních hodnot

Dvě náhodné veličiny

1) Srovnání rozptylů dvou nezávislých měření

Dvě náhodné veličiny

1) Srovnání rozptylů dvou nezávislých měření

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska velikosti rozptylu?

Dvě náhodné veličiny

1) Srovnání rozptylů dvou nezávislých měření

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska velikosti rozptylu?

Lze považovat rozptyl dvou nezávislých měření za shodný při dané hladině významnosti?

Dvě náhodné veličiny

1) Srovnání rozptylů dvou nezávislých měření

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska velikosti rozptylu?

Lze považovat rozptyl dvou nezávislých měření za shodný při dané hladině významnosti?

nulová hypotéza : $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

alternativní hypotéza: $H_A : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

testová statistika : $F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$

hladina významnosti: α

Dvě náhodné veličiny

1) Srovnání rozptylů dvou nezávislých měření

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska velikosti rozptylu?

Lze považovat rozptyl dvou nezávislých měření za shodný při dané hladině významnosti?

nulová hypotéza : $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

alternativní hypotéza: $H_A : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

testová statistika : $F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$

hladina významnosti: α

F-test

Fisherovo-Snedecorovo
rozdělení $F(n-1, m-1)$

Dvě náhodné veličiny

1) Srovnání rozptylů dvou nezávislých měření

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska velikosti rozptylu?

Lze považovat rozptyl dvou nezávislých měření za shodný při dané hladině významnosti?

nulová hypotéza : $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

alternativní hypotéza: $H_A : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

testová statistika : $F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$

hladina významnosti: α

F-test

Fisherovo-Snedecorovo
rozdělení $F(n-1, m-1)$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude

$$F_{\alpha/2}(n-1, m-1) < F < F_{\alpha/2}(n-1, m-1)$$

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska jejich střední hodnoty?

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska jejich střední hodnoty?

Lze považovat střední hodnoty dvou nezávislých měření za shodné při dané hladině významnosti?

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska jejich střední hodnoty?

Lze považovat střední hodnoty dvou nezávislých měření za shodné při dané hladině významnosti?

Lze od sebe statisticky významně odlišit dvě nezávislá měření podle jejich střední hodnoty?

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska jejich střední hodnoty?

Lze považovat střední hodnoty dvou nezávislých měření za shodné při dané hladině významnosti?

Lze od sebe statisticky významně odlišit dvě nezávislá měření podle jejich střední hodnoty?

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X} - \bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X} - \bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

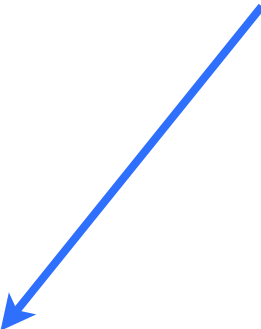
nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X} - \bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

dvouvýběrový t-test
se stejnými rozptyly

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X} - \bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

dvouvýběrový t-test
se stejnými rozptyly

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

dvouvýběrový t-test
s nestejnými rozptyly

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

$$\begin{aligned} \text{pokud } \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2 &\Rightarrow s_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = s_{\bar{X}}^2 + s_{\bar{Y}}^2 = \frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} = \\ &= s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = s^2 \left(\frac{m+n}{n \cdot m} \right) \end{aligned}$$

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2 \Rightarrow s_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = s_{\bar{X}}^2 + s_{\bar{Y}}^2 = \frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} =$
 $= s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = s^2 \left(\frac{m+n}{n \cdot m} \right)$

dále odhadneme s^2 ze všech naměřených hodnot:

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2 \right) =$$
$$\frac{1}{n+m-2} \left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2 \right)$$

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2 \Rightarrow s_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = s_{\bar{X}}^2 + s_{\bar{Y}}^2 = \frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} =$
 $= s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = s^2 \left(\frac{m+n}{n \cdot m} \right)$

dále odhadneme s^2 ze všech naměřených hodnot:

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2 \right) =$$
$$\frac{1}{n+m-2} \left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2 \right)$$

tedy: $s_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = \frac{n+m}{nm(n+m-2)} \left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2 \right)$

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

ta má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n+m-2)$ stupních volnosti.

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

ta má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n+m-2)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \leq t_\alpha(n+m-2)$ kde $t_\alpha(n+m-2)$ je (oboustranná) α -kritická hodnota t-rozdělení o $(n+m-2)$ stupních volnosti.

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}}$$

a má rozdělení, které je směsí t-rozdělení o $(n-1)$ a $(m-1)$ stupních volnosti.

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}}$$

a má rozdělení, které je směsí t-rozdělení o $(n-1)$ a $(m-1)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude splněna nerovnost $|T| \leq At_\alpha(n-1) + Bt_\alpha(m-1)$, kde A a B jsou váhy, $A+B=1$.

$$A = \frac{\frac{1}{n}s_X^2}{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}, \quad B = \frac{\frac{1}{m}s_Y^2}{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}$$

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných objektů za různých podmínek

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných objektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných objektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech
-

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných objektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech
-

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných objektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech
-

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$\Rightarrow Z_1 = X_1 - Y_1, Z_2 = X_2 - Y_2, \dots, Z_n = X_n - Y_n,$$

$$Z \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_Z^2)$$

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných objektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech
-

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$\Rightarrow Z_1 = X_1 - Y_1, Z_2 = X_2 - Y_2, \dots, Z_n = X_n - Y_n,$$

$$Z \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_Z^2)$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X \neq \mu_Y$$

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných objektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech
-

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

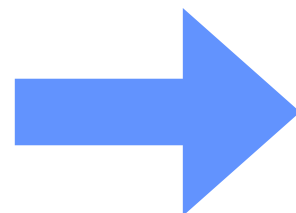
$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$\Rightarrow Z_1 = X_1 - Y_1, Z_2 = X_2 - Y_2, \dots, Z_n = X_n - Y_n,$$

$$Z \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_Z^2)$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X \neq \mu_Y$$



$$H_0 : \mu_Z = 0$$

$$H_A : \mu_Z \neq 0$$

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

$$H_0 : \mu_Z = a$$

$$H_A : \mu_Z \neq a$$

$$T = \frac{\bar{Z} - a}{s_Z} \sqrt{n}$$

T má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n-1)$ stupních volnosti.

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

$$H_0 : \mu_Z = a$$

$$H_A : \mu_Z \neq a$$

$$T = \frac{\bar{Z} - a}{s_Z} \sqrt{n}$$

T má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n-1)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \leq t_\alpha(n-1)$ kde $t_\alpha(n-1)$ je (oboustranná) α -kritická hodnota t-rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti.

Dvě náhodné veličiny

Jednostranné testy

Dvě náhodné veličiny

Jednostranné testy

“dolní” nebo “horní” jednostranná alternativa :

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X < \mu_Y$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X > \mu_Y$$

Dvě náhodné veličiny

Jednostranné testy

“dolní” nebo “horní” jednostranná alternativa :

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X < \mu_Y$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X > \mu_Y$$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude buď

$$T < -t_\alpha(n-1) \quad \text{nebo} \quad T > t_\alpha(n-1)$$

kde $t_\alpha(n-1)$ je (jednostranná) α -kritická hodnota t-rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti.

Dvě náhodné veličiny

Jednostranné testy

“dolní” nebo “horní” jednostranná alternativa :

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X < \mu_Y$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X > \mu_Y$$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude buď

$$T < -t_\alpha(n-1) \quad \text{nebo} \quad T > t_\alpha(n-1)$$

kde $t_\alpha(n-1)$ je (jednostranná) α -kritická hodnota t-rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti.

oboustranná α -kritická hodnota je $(1 - \alpha/2)$ -kvantil $t_{1-\alpha/2}(n-1)$

jednostranná α -kritická hodnota je $(1 - \alpha)$ -kvantil $t_{1-\alpha}(n-1)$

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm. Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm. Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Dodavatel X:

```
> x
[1] 0.41379418 0.51040227 3.28722973 7.31995568 4.53994434 -1.07426821
[7] 4.74575978 2.55201407 3.22058685 -1.17401554 -1.24119500 4.18294690
[13] 0.65486399 -0.18908709 -0.73101186 1.27876451 1.26734875 2.78570344
[19] 2.96834139 1.22145702 1.80851440 -0.80356569 2.57347292 3.42552806
[25] 1.66904559 -2.21179295 4.17696270 2.15191523 3.62707736 0.06900211
[31] 0.51371315 0.54983237 4.09554316 1.28465289 4.05350899 5.10504379
[37] 4.25580572 0.79826235 -1.02042629 1.87299786 0.14051938 3.05622839
[43] 4.74780021 4.54794140 -6.54132331 1.94429658 1.95488616 4.73267571
[49] 4.83082378 2.95830720 2.99769818 -1.07337799 0.58403864 2.73050678
[55] 0.28021230 10.49771713 2.36870296 0.60689702 8.42679434 1.29763889
[61] 1.31289734 1.93230073 5.92597773 1.49746935 6.30721756 3.15585521
[67] 5.38824907 3.27322441 3.41248356 -0.40437473 3.19350142 -4.06261001
[73] -1.05763312 -0.39748962 0.86637433 2.02108109 -1.06445976 1.10375263
[79] 4.51823259 -0.75725877 -0.87173075 -2.19932463 7.70167909 1.48655986
[85] 4.90757730 5.51652338 -0.34615559 0.01031344 4.57582354 1.17516968
[91] -0.21932558 -1.27848277 2.97655676 1.44863955 3.67881403 0.30868429
[97] -2.52052309 0.05248743 0.07728483 -1.12975005 3.99585182 0.79045260
[103] 3.73159608 7.36490361 6.40646375 -1.54228149 -0.65100869 4.04305846
[109] 2.47766853 -3.48957597 6.20840771 0.40560482 0.49118447 -1.48277951
[115] -1.23675030 5.16138353 1.15383008 2.75286404 4.70183189 -2.29877355
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm. Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

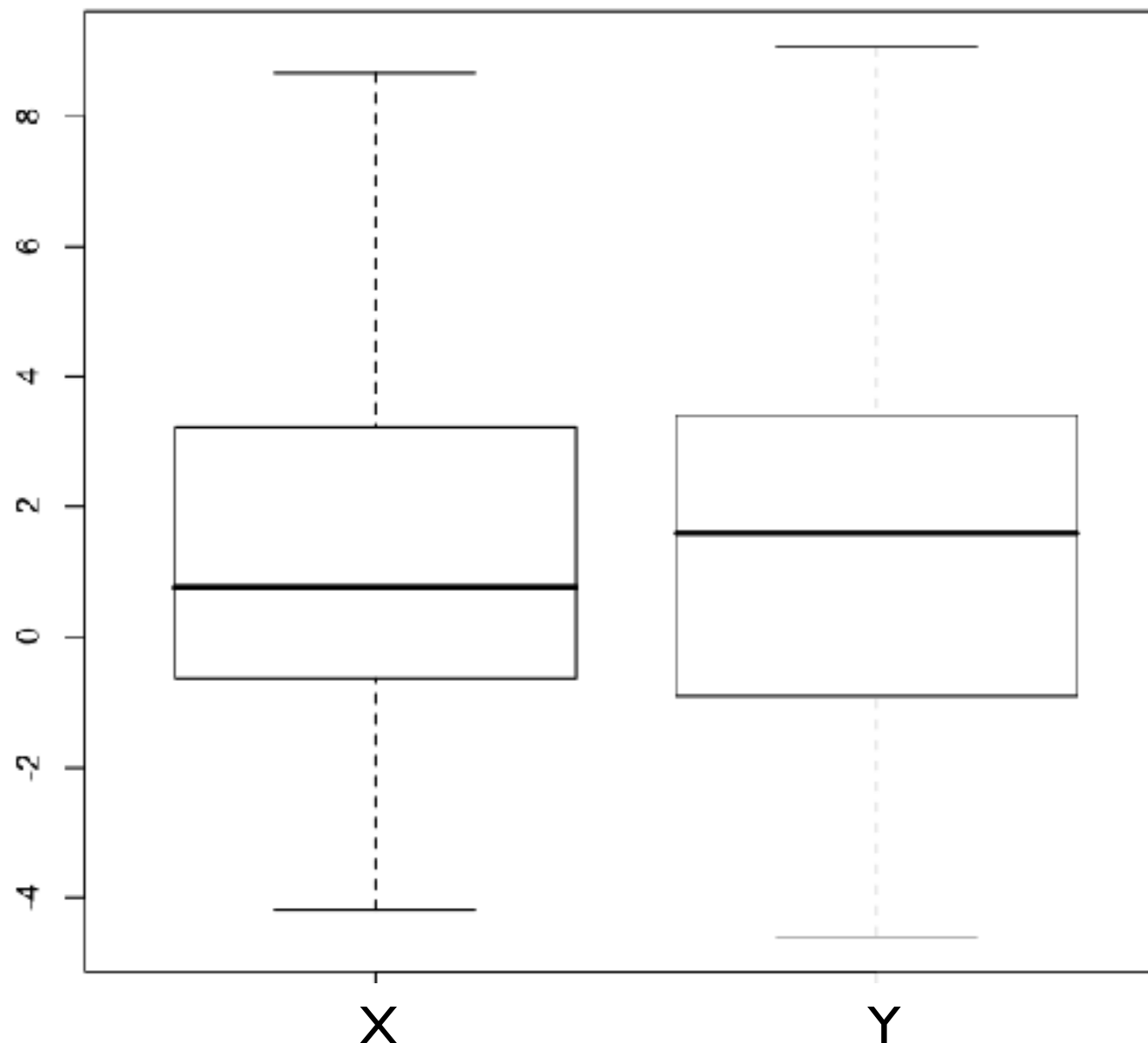
Dodavatel Y:

```
> y
[1] 6.65956934 2.78876119 0.33397602 -0.03763918 0.74993937 3.81490677
[7] 1.70428804 -3.31291341 -0.22972370 4.02124752 5.93229834 3.30506070
[13] -3.61277063 0.78809415 0.37976841 1.52357320 1.76230055 1.03078642
[19] -2.74093726 2.77205578 -0.25596771 -0.79295335 -1.99567925 7.14183490
[25] 6.56129569 -2.39785588 -2.30807391 -1.02088455 -2.26040839 -2.76088135
[31] 1.81877126 0.14669279 4.21783231 -2.13184320 3.69196005 -2.69614367
[37] -2.68014820 3.72209577 1.73709472 -0.70580812 0.07337669 2.17063230
[43] 2.72495294 5.04390706 1.32219033 4.72349163 -0.67638087 2.64424944
[49] 2.78769261 -2.10997705 4.26042721 -3.50266144 1.72564280 -2.07028305
[55] -4.59779260 -1.71953774 2.90307934 1.38358058 3.42339203 -1.68000430
[61] 7.55683608 6.32574310 -2.60318964 3.24511198 0.97390332 2.22611398
[67] 0.83831831 0.07828888 2.29402602 2.68356827 0.07483911 3.38214384
[73] -0.59180508 9.07209729 -1.27708114 4.77997853 -0.83918672 6.26383807
[79] 1.50674691 3.25716693 5.70351834 5.80174051 3.61099316 2.19293272
[85] -1.46102337 -0.97135778 1.54849399 4.34257358 -1.64886246 2.44942102
[91] 2.68469434 1.64707956 5.49827517 1.01640668 4.43099277 2.23430799
[97] -1.74337571 6.43458332 2.94137432 -1.01569579
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

I) Vizualizace dat: Box&Whiskers diagram



Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

2) Srovnání rozptylů: F-test

```
> var.test(x,y)
```

```
F test to compare two variances
```

```
data: x and y
```

```
F = 0.8712, num df = 119, denom df = 99, p-value = 0.4701
```

```
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
0.5943383 1.2684711
```

```
sample estimates:
```

```
ratio of variances
```

```
0.8711758
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

2) Srovnání rozptylů: F-test

```
> var.test(x,y)

F test to compare two variances

data:  x and y
F = 0.8712, num df = 119, denom df = 99, p-value = 0.4701
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.5943383 1.2684711
sample estimates:
ratio of variances
 0.8711758
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme,
rozptyly se statisticky významně neliší

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

3) Srovnání středních hodnot: dvouvýběrový t-test se shodnými rozptyly

```
> t.test(x,y, var.equal=T)
```

```
Two Sample t-test
```

```
data: x and y
```

```
t = 1.0375, df = 218, p-value = 0.3007
```

```
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
-0.3598731  1.1598308
```

```
sample estimates:
```

```
mean of x mean of y
```

```
1.884360  1.484381
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

3) Srovnání středních hodnot: dvouvýběrový t-test se shodnými rozptyly

```
> t.test(x,y, var.equal=T)
```

```
Two Sample t-test
```

```
data: x and y
```

```
t = 1.0375, df = 218, p-value = 0.3007
```

```
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
-0.3598731  1.1598308
```

```
sample estimates:
```

```
mean of x mean of y
```

```
1.884360  1.484381
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme,
střední hodnoty se statisticky významně neliší

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

I) Data:

```
> pred_cvicenim
[1] 12.666378  7.322789 15.021706 13.616913 10.970712  5.464451
[7]  9.999636 15.693764 13.771444 17.065310  6.940708 15.860749
[13] 18.019348  6.326531 20.647763 23.005369 14.619170 20.787108
[19] 14.238225  9.674337 14.763170  9.613791  9.727326  9.146292
[25] 21.246960 16.200128 15.466065 13.691879  9.032113 10.558392
[31] 18.258896 14.992416 14.722569 10.579842 10.758363  8.894299
[37] 13.502299 12.994734 14.775563  9.818535 18.208089  8.438143
[43]  8.282819 11.090392 15.174881  7.704479  8.917742 10.275903
[49] 11.488700 16.572150 18.892428 13.544225  9.309845 13.713258
[55] 12.904993  8.951567  9.041688 10.222305 14.136072  9.222289
[61] 15.208694 14.627659 15.287092 11.389052  7.716052 14.307632
[67] 14.647653 18.705963 13.665201  8.025347 13.157791 14.336731
[73]  9.548584 12.522605 11.876452 12.241549 12.944160 17.637175
[79]  9.854223 17.877400 15.892081  9.893356  7.791175 11.901961
[85] 15.605362 13.464186 12.451922 16.090626  8.907932 16.333859
[91] 13.554146 19.586575 11.765020  9.981692  5.325750 20.168371
[97] 12.485393 14.349888 14.198229  7.315012 16.787920 10.998550
[103] 10.377856 13.531181 12.258939 11.346062 12.998020  8.498104
[109] 14.195263 15.372914 11.698431 12.929311 11.232474 21.551867
[115] 10.436798 14.430260 18.836296 14.838428 14.450987 10.879682
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

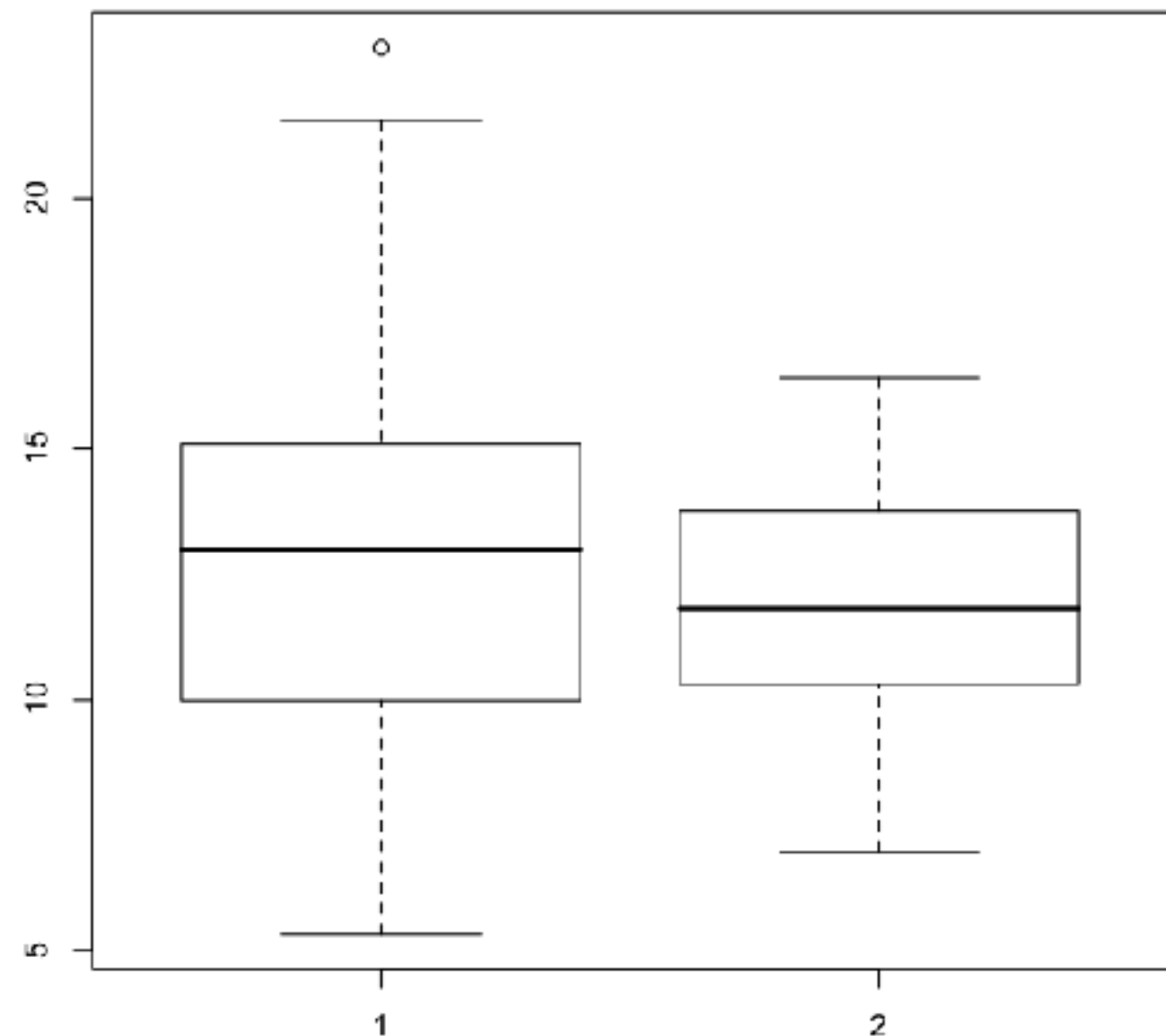
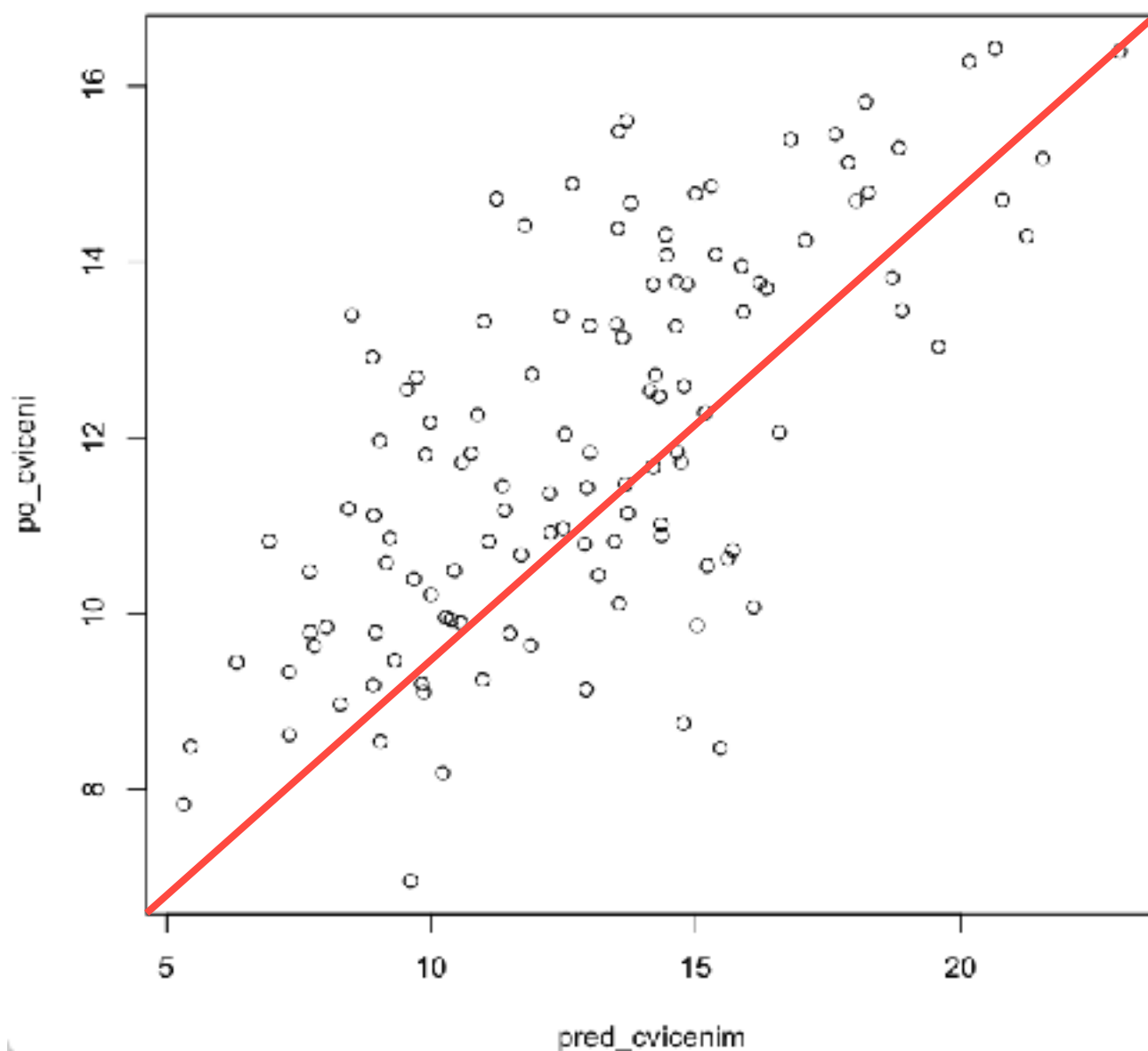
I) Data:

```
> po_cviceni
[1] 14.889379  8.627612  9.867455 13.141168  9.249122  8.490774
[7] 10.217290 10.724403 14.669450 14.243944 10.826905 13.951521
[13] 14.693401  9.449562 16.425888 16.392689 13.265474 14.704994
[19] 12.718107 10.395385  8.756276  6.961521 12.688497 10.578342
[25] 14.294064 13.763032  8.472324 15.605253 11.968936  9.897284
[31] 14.788205 14.773378 11.723336 11.719464 11.824407 12.914485
[37] 13.291805 13.272867 12.586791  9.202608 15.817188 11.197137
[43]  8.974410 10.823942 12.289400 10.483861 11.119684  9.956822
[49]  9.778551 12.062084 13.449972 15.481139  9.470557 11.143402
[55] 10.793291  9.786869  8.547580  8.188947 12.532635 10.862473
[61] 10.547040 13.774638 14.861969 11.180668  9.790466 12.469556
[67] 11.837173 13.820717 11.476120  9.850563 10.440890 11.015557
[73] 12.547672 12.041457  9.639740 11.368657 11.431948 15.449064
[79]  9.110052 15.125478 13.433802 11.807514  9.632299 12.725762
[85] 10.628523 10.824474 13.389953 10.077884  9.185360 13.697777
[91] 10.116078 13.036067 14.412094 12.175099  7.835201 16.277825
[97] 10.967441 10.892966 11.668289  9.340267 15.392018 13.323701
[103]  9.928631 14.378075 10.924935 11.448320 11.836161 13.397990
[109] 13.744963 14.083459 10.668370  9.139692 14.716621 15.173684
[115] 10.493444 14.308470 15.295041 13.748886 14.074436 12.261138
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

2) Grafické zobrazení



Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

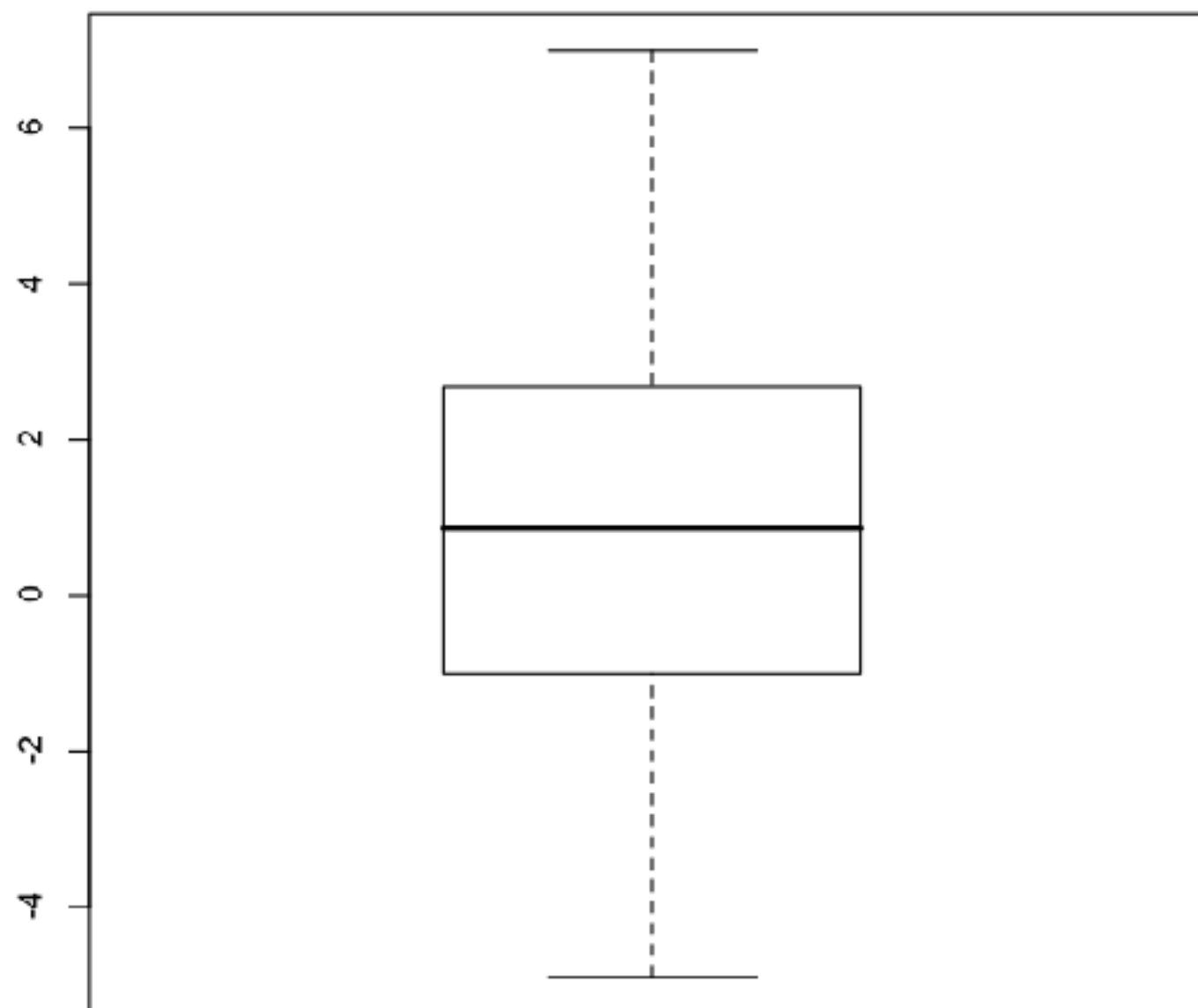
3) Rozdíl:

```
> rozdíl = pred_cvicenim - po_cviceni
> rozdíl
 [1] -2.22300091 -1.30482283  5.15425042  0.47574455  1.72159009 -3.02632291
 [7] -0.21765415  4.96936015 -0.89800534  2.82136665 -3.88619753  1.90922796
[13]  3.32594695 -3.12303070  4.22187531  6.61268030  1.35369637  6.08211421
[19]  1.52011877 -0.72104757  6.00689379  2.65226941 -2.96117094 -1.43204984
[25]  6.95289576  2.43709534  6.99374083 -1.91337370 -2.93682345  0.66110855
[31]  3.47069129  0.21903888  2.99923383 -1.13962267 -1.06604474 -4.02018585
[37]  0.21049440 -0.27813376  2.18877231  0.61592708  2.39090099 -2.75899399
[43] -0.69159043  0.26644963  2.88548193 -2.77938240 -2.20194265  0.31908043
[49]  1.71014906  4.51006508  5.44245554 -1.93691321 -0.16071226  2.56985696
[55]  2.11170209 -0.83530141  0.49410786  2.03335782  1.60343767 -1.64018405
[61]  4.66165463  0.85302053  0.42512280  0.20838398 -2.07441380  1.83807585
[67]  2.81048012  4.88524631  2.18908100 -1.82521582  2.71690126  3.32117337
[73] -2.99908758  0.48114855  2.23671217  0.87289130  1.51221215  2.18811115
[79]  0.74417071  2.75192209  2.45827873 -1.91415812 -1.84112463 -0.82380048
[85]  4.97683829  2.63971186 -0.93803104  6.01274276 -0.27742844  2.63608163
[91]  3.43806805  6.55050838 -2.64707408 -2.19340734 -2.50945055  3.89054571
[97]  1.51795203  3.45692228  2.52993961 -2.02525470  1.39590255 -2.32515191
[103]  0.44922574 -0.84689404  1.33400372 -0.10225811  1.16185938 -4.89988604
[109]  0.45029949  1.28945495  1.03006049  3.78961854 -3.48414755  6.37818258
[115] -0.05664624  0.12179055  3.54125530  1.08954167  0.37655117 -1.38145602
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

3) Rozdíl:



Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

4) Párový t-test:

```
> t.test(rozdil, mu=0)
```

```
One Sample t-test
```

```
data: rozdil
```

```
t = 4.0391, df = 119, p-value = 9.54e-05
```

```
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
0.5089508 1.4878397
```

```
sample estimates:
```

```
mean of x
```

```
0.9983952
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

4) Párový t-test:

```
> t.test(rozdil, mu=0)

One Sample t-test

data:  rozdil
t = 4.0391, df = 119, p-value = 9.54e-05
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.5089508 1.4878397
sample estimates:
mean of x
0.9983952
```

=> nulovou hypotézu zamítáme,
cvičení mělo vliv a rychlost reakce se statisticky významně zvýšila