Soustavy lineárních algebraických rovnic (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi
(e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Jedná se o soustavy ve tvaru $A \cdot X = B$,

kde A je daná matice typu $m \times n$, $X \in \mathbb{R}^n$ je vektor n neznámých $x_1, ..., x_n$, $B \in \mathbb{R}^m$ je daný vektor pravých stran jednotlivých rovnic.

Matici A nazýváme maticí soustavy, matici $(A|B)$ typu $m \times (n+1)$ nazýváme rozšířenou maticí soustavy. Řešením soustavy je každá uspořádaná n-tice reálných čísel, která vyhovuje dané soustavě.

Následující věta obsahuje v části I nutnou a postačující podmínku pro existenci řešení soustavy. Následně pak v části II upřesňuje počet řešení.

Věta I.3.7. (Frobeniova věta)
I. Soustava lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = B$ (pro n neznámých) má řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti matice rozšířené.
II. Je-li $h(A) = h(A|B) = n$, pak má soustava jediné řešení.
Je-li $h(A) = h(A|B) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

Poznámka 1. V případě nekonečně mnoha řešení lze volit $n - h(A)$ neznámých.

Při řešení soustavy používáme zpravidla **Gaussovu eliminační metodu**. Jedná se o následující algoritmus.

1. krok: Rozšířenou matici $(A|B)$ převedeme pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkovou matici.

2. krok: Podle Frobeniovy věty rozhodneme o existenci řešení. V případě existence určíme počet řešení, tj. jediné, nebo nekonečně mnoho.

3. krok: Má-li soustava řešení, pak upravené matici přiřadíme upravenou soustavu (se stejnou množinou řešení). Tuto soustavu řešíme postupně: začneme od poslední rovnice a postupujeme k rovnicím nad ní.

Příklad 1. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x \;\; - y + 7z &= 5 \\ x - 2y + 5z &= 1 \\ x + y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

1. krok: Sestavíme rozšířenou matici soustavy a upravíme ji na horní trojúhelníkovou:

$$\boldsymbol{(A|B)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim {}^{1}) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim {}^{2}) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim {}^{3})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

[1]) Zaměníme 1. a 2. řádek; dosáhneme toho, že $a_{11} = 1$.

[2]) První řádek opíšeme. Ke 2. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-2) a ke 3. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-1). Tím získáme nulové prvky v prvním sloupci pod hlavní diagonálou.

[3]) Druhý řádek opíšeme. Ke 3. řádku přičteme 2. řádek vynásobený číslem (-1). Tím získáme nulové prvky ve druhém sloupci pod hlavní diagonálou.

2. krok. Výsledná matice je horní trojúhelníková s nenulovými prvky na hlavní diagonále. Podle věty o hodnosti takové matice je $h(A) = 3$, $h(A|B) = 3$, neboť obě matice, tj. A i $(A|B)$ mají tři nenulové řádky. Podle Frobeniovy věty tedy daná soustava má řešení. Řešení je jediné, protože soustava má 3 neznámé.

3. krok.
Výsledné matici přiřadíme soustavu

$$\begin{aligned} x-2y+5z &= 1\\ 3y-3z &= 3\\ 2z &= 0 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice získáme $z = 0$. Po dosazení do 2. rovnice vypočítáme $y = 1$. Po dosazení do 1. rovnice pak určíme $x = 3$. Správnost výsledku můžeme ověřit zkouškou, tj. dosazením nalezeného řešení $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$ do všech rovnic původní soustavy.

Příklad 2. Změňme jeden člen v soustavě z příkladu 1 položením $a_{33} = 2$. Řešme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x\ \ -y+7z &= 5\\ x-2y+5z &= 1\\ x+y+2z &= 4 \end{aligned}$$

1. krok. Postupujeme stejně jako v příkladu 1. Ověřte si sami, že po druhé úpravě dostaneme

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Poslední úprava spočívá ve vynechání 3. řádku, který je shodný s druhým řádkem. Pro další výpočet jsme současně 2. řádek dělili číslem 3.

2. krok. Výsledná matice je horní trojúhelníková s nenulovými prvky na hlavní diagonále. Je tedy $h(A) = 2$, $h(A|B) = 2$, neboť obě matice, tj. A i $(A|B)$ mají dva nenulové řádky. Podle Frobeniovy věty tedy daná soustava má řešení. Řešení je však nekonečně mnoho, protože soustava má 3 neznámé.

3. krok.
Výsledné matici přiřadíme soustavu
$$\begin{aligned} x-2y+5z &= 1\\ y-z &= 1 \end{aligned}$$

V poslední rovnici můžeme volit jednu neznámou, tedy např. $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Po dosazení do 2. rovnice vypočítáme $y = 1 + t$. Po dosazení do 1. rovnice pak určíme $x = 3 - 3t$. Správnost výsledku můžeme ověřit zkouškou, tj. dosazením nalezeného řešení $x = 3 - 3t$, $y = 1 + t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ do všech rovnic původní soustavy.

Poznámka 2. Nalezené řešení můžeme zapsat v maticovém tvaru takto:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} -3\\ 1\\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Množinu řešení dané soustavy lze tedy geometricky interpretovat jako přímku v $\mathbb{E}_3$, která prochází bodem $A = [3, 1, 0]$ se směrovým vektorem $\mathbf{u} = (-3, 1, 1)$.

Příklad 3. Změňme jeden člen v soustavě z příkladu 2 položením $b_3 = 5$. V původní soustavě z příkladu 1 jsme změnili dva členy.
Řešme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x\ \ -y+7z &= 5\\ x-2y+5z &= 1\\ x+y+2z &= 5 \end{aligned}$$

Postupujeme stejně jako v příkladech 1 a 2. Ověřte si sami, že po druhé úpravě dostaneme

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Je tedy $h(A) = 2$, ale $h(A|B) = 3$. Podle Frobeniovy věty daná soustava nemá řešení.

Úloha s vektory vedoucí k soustavě lineárních algebraických rovnic

Příklad 4. Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (2,1,1)$, $\mathbf{v} = (-1,-2,1)$, $\mathbf{w} = (7,5,4)$. Pokud lze, vyjádřete vektor $\mathbf{a} = (5,1,4)$ ve tvaru lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Řešení: Hledáme čísla x, y, z tak, aby $x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} + z\,\mathbf{w} = \mathbf{a}$. Pro přehlednější zápis soustavy rovnic dosadíme dané vektory ve sloupcovém tvaru:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Po provedení operací na levé straně, tj. násobením vektorů čísly x, y, z a potom sečtením tří vektorů vyjádříme levou stranu ve tvaru jednoho vektoru.

$$\begin{pmatrix} 2x - y + 7z \\ x - 2y + 5z \\ x + y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Rovnost dvou vektorů znamená rovnost odpovídajícíh souřadnic. Získáme tedy soustavu rovnic, která je v tomto případě právě soustava z příkladu 1. Jejím řešením jsou hledané koeficienty $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$. Závěr: Vyjádření existuje (a to jediným způsobem) ve tvaru $\mathbf{a} = 3\,\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Poznámka 3. Tento výsledek má následující geometrickou interpretaci. Znázorněme vektor z prostoru $\mathbb{R}^3$ orientovanou úsečkou s počátečním bodem v počátku kartézské soustavy souřadné. Protože koeficient $z = 0$, leží vektor $\mathbf{a}$ v rovině (procházející počátkem), která je určena vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Poznámka 4. Existence a jednoznačnost hledané lineární kombinace vyplývá z toho, že zadané vektory tvoří bázi v prostoru $\mathbb{R}^3$. To jsme jako vedlejší výsledek (tedy "zadarmo") ověřili při řešení příkladu 1. Matice sestavená po sloupcích z daných tří vektorů je totiž právě matice A soustavy z příkladu 1, kde jsme spočítali její hodnost $h(A) = 3$. Máme proto tři lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru dimenze 3. Dané vektory tedy tvoří bázi tohoto prostoru. Z vlastností báze pak vyplývá, že libovolný vektor tohoto prostoru lze vyjádřit ve tvaru jednoznačně určené lineární kombinace bázických vektorů.

Poznámka 5. Ověření, že dané tři vektory tvoří bázi v prostoru $\mathbb{R}^3$, lze provést pomocí determinantu matice, která je sestavena po sloupcích (nebo po řádcích) z daných vektorů. Bázi tvoří dané tři vektory právě tehdy, když takto sestavený determinant je nenulový. Připomeňte si souvislosti pojmů lineární nezávislost skupiny vektorů, báze vektorového prostoru, hodnost matice, regulární matice, determinant regulární matice.

Podobně jako v příkladu 4 lze formulovat další dvě úlohy s mírně změněnými vektory vedoucí k soustavám z příkladů 2 a 3. Nejprve změníme třetí souřadnici vektoru $\mathbf{w}$.

Příklad 5. Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (2,1,1)$, $\mathbf{v} = (-1,-2,1)$, $\mathbf{w} = (7,5,2)$. Pokud lze, vyjádřete vektor $\mathbf{a} = (5,1,4)$ ve tvaru lineární kombinace těchto tří vektorů.

Postupujeme jako v příkladu 4 a získáme tak soustavu z příkladu 2. **Závěr.** Hledané vyjádření existuje, je jich však nekonečně mnoho: $x = 3 - 3t$, $y = 1 + t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ Volbou např. $t = 1$ získáme jednu z těchto možností, a to $\mathbf{a} = 2\,\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Při volbě $t = -2$ obdržíme jiné vyjádření, a to $\mathbf{a} = 9\,\mathbf{u} - \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$. Geometrická interpretace: Zadané vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ netvoří bázi v $\mathbb{R}^3$, generují (vytvářejí) v něm podprostor dimenze 2. Plyne to z toho, že matice z nich sestavená má hodnost 2. Při znázornění vektoru orientovanou úsečkou s počátečním bodem v počátku leží dané tři vektory v jedné rovině. Vektor $\mathbf{a}$ leží v tomto případě v téže rovině.

Odlišná situace nastane při další změně, nyní ve třetí souřadnici vektoru $\mathbf{a}$. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ zůstanou z příkladu 6.

Příklad 6. Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (2,1,1)$, $\mathbf{v} = (-1,-2,1)$, $\mathbf{w} = (7,5,2)$. Pokud lze, vyjádřete vektor $\mathbf{a} = (5,1,5)$ ve tvaru lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Řešení této úlohy vede k soustavě z příkladu 3. Na základě výsledku tohoto příkladu můžeme formulovat **závěr**: Hledané vyjádření neexistuje. Geometricky je to situace, kdy dané tři vektory netvoří bázi ve $\mathbb{R}^3$, neboť leží v téže rovině. Vektor $\mathbf{a}$ leží mimo tuto rovinu.

Poznámka 6. Skutečnost, že vektory **u**, **v**, **w** netvoří bázi v prostoru R^3, lze ověřit též pomocí determinantu matice sestavené po sloupcích (nebo po řádcích) z daných vektorů. Bázi netvoří dané tři vektory právě tehdy, když tento determinant je nulový. Ze znalosti samotného determinantu však nelze určit dimenzi podprostoru, který je těmito lineárně závislými vektory generován.

Řešení soustavy lineárních algebraických rovnic pomocí Cramerova pravidla

Jedná se o řešení soustavy n lineárních rovnic pro n neznámých pomocí determinantů. Matice soustavy A je tedy čtvercová. Je-li její hodnost $h(A) = n$, pak podle Frobeniovy věty má soustava jediné řešení. Jedná se tedy o regulární matici, tj. matici s nenulovým determinantem. Za tohoto předpokladu lze neznámé $x_1, ..., x_n$ vypočítat pomocí vzorců

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

kde $\Delta = \det A$ a Δ_i je determinant matice, která vznikne z matice A, v níž i-tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran B.

Příklad 7.
Dána soustava rovnic s parametrem $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x - z &= 4 \\ 3x + py + z &= p \\ 3x + 2py + pz &= p + 3 \end{aligned}$$

a) Určete, pro které hodnoty parametru p lze tuto soustavu řešit Cramerovým pravidlem.
b)] Určete neznámou y v závislosti na parametru p. Určete neznámou y, jestliže $p = 3$.

Řešení: a) Matice soustavy je čtvercová. K výpočtu determinantu lze užít Sarussovo pravidlo nebo rozvoj, např. podle 1. řádku.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & p & 1 \\ 3 & 2p & p \end{vmatrix} = p^2 - 5p.$$

Cramerovo pravidlo lze užít, pokud je $p^2 - 5p \neq 0$. To nastane právě tehdy, když $p \neq 0$ a $p \neq 5$.

b) $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & p & 1 \\ 3 & p+3 & p \end{vmatrix} = p^2 - 13p.$

Určíme neznámou y podle Cramerova pravidla

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{p^2 - 13p}{p^2 - 5p} = \frac{p - 13}{p - 5}, \; p \neq 0, \, p \neq 5$$

Pro $p = 3$ je tedy $y = 5$.

Poznámka 7. Pro kontrolu lze neznámou y vypočítat ze soustavy s dosazenou hodnotou $p = 3$. Potom je $\Delta = -6$ a skutečně lze použít Cramerovo pravidlo. Determinant $\Delta_y = -30$, takže neznámá $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 5$.

Další úlohy k samostatnému procvičení lze nalézt v doporučené literatuře.

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2010 (též 2008,2013).
[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.