III.6. Aplikace trojných integrálů

***Příklad* 364**. Užitím vzorce pro výpočet objemu tělesa pomocí trojného integrálu (tj. $V = \iiint_T 1\,dx\,dy\,dz$) ukažte, že objem tělesa $T = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : [x,y] \in B \subset \mathbb{E}_3,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$ “pod “ grafem funkce $z = f(x,y)$, která je spojitá na B, B je měřitelná množina v $\mathbb{E}_2$, lze spočítat pomocí dvojného integrálu $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$.

Řešení : Těleso T je elementárním oborem integrace vzhledem k rovině (x,y) a proto lze přímo aplikovat Fubiniovu větu pro trojný integrál.

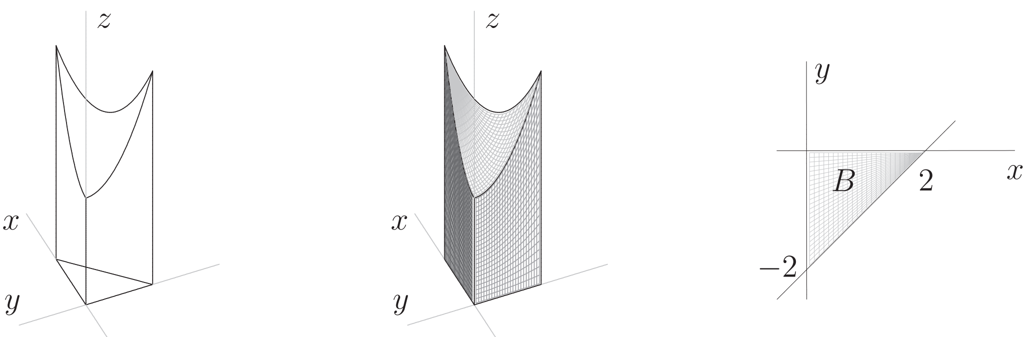
$$\iiint_T 1\,dx\,dy\,dz \overset{Fubini}{=} \iint_B \left(\int_0^{f(x,y)} dz\right) dx\,dy = \iint_B \big[z\big]_0^{f(x,y)} dx\,dy = \iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

POZNÁMKA : Vzhledem k linearitě integrálu lze tento postup zobecnit pro tělesa, která jsou (ve směru osy z) omezena shora i zdola ve smyslu $f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)$. I zde lze přímo aplikovat Fubiniovu větu, z níž dostáváme $V = \iint_B \big(f_2(x,y) - f_1(x,y)\big)\,dx\,dy$.

• Vypočítejte objem tělesa W omezeného plochami :

***Příklad* 365**. $z = x^2 + y^2 + 4,\ x - y = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Řešení : W je část trojbokého hranolu se základnou v rovině $z = 0$. Hranol je ”shora” omezený rotačním paraboloidem s vrcholem $[0,0,4]$.



$$V = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz = \left|\begin{array}{rc} W: & 0 \le z \le x^2+y^2+4 \\ & x-2 \le y \le 0 \\ & 0 \le x \le 2 \end{array}\right| = \left(\iint_B z(x,y)\,dx\,dy\right) =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{x-2}^0 \left(\int_0^{x^2+y^2+4} 1\,dz\right) dy\right) dx = \int_0^2 \left(\int_{x-2}^0 (x^2+y^2+4)\,dy\right) dx =$$

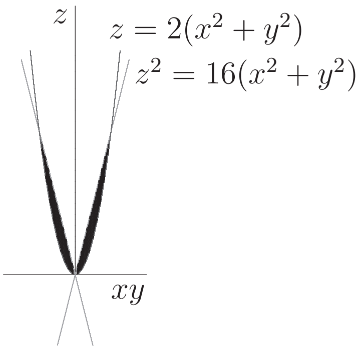
$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{x-2}^0 dx = -\int_0^2 \left(x^2(x-2) + \frac{(x-2)^3}{3} + 4(x-2)\right) dx =$$

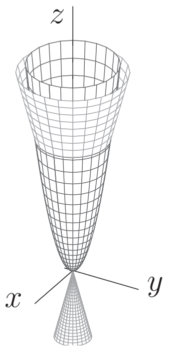
$$= -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{12} + 2x^2 - 8x\right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

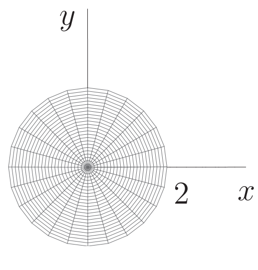
■

***Příklad* 366**. $z = 2(x^2 + y^2),\ z^2 = 16(x^2 + y^2)$

Řešení : $W : z = 2(x^2 + y^2)$ - rovnice paraboloidu
$z^2 = 16(x^2 + y^2)$ - rovnice kuželové plochy







$$V = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz = \big(\text{použijeme cylindrické souřadnice}\big)$$

$$= \left| \begin{array}{llll} x = r\cos\varphi & \mid\quad 2(x^2+y^2) \le z \le 4\sqrt{x^2+y^2} & \Longrightarrow & 2r^2 \le w \le 4r \\ y = r\sin\varphi & \quad 2r^2 \le 4r & & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = w & \quad r \le 2 & \Longrightarrow & 0 \le r \le 2 \\ J = r & & & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^2 \Big(\int_{2r^2}^{4r} r\,dw \Big) dr \Big) d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^2 r \Big[w \Big]_{2r^2}^{4r} r \Big) d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \cdot \int_0^2 r(4r - 2r^2)\,dr =$$

$$= 2\pi \cdot \Big[\frac{4}{3} r^3 - \frac{2r^4}{4} \Big]_0^2 = \frac{16}{3}\pi$$

■

***Příklad* 367**. $z = 1 - x^2 - 4y^2,\ z = 0$

Řešení : Plocha $z = 1 - x^2 - 4y^2$ je eliptickým paraboloidem s vrcholem v bodě $[0, 0, 1]$.

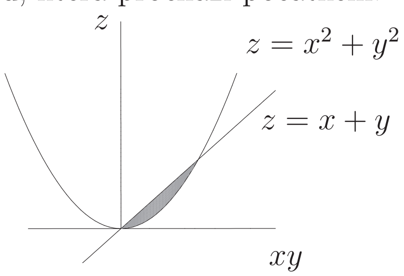
$$V = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+4y^2\le 1} \Big(\int_0^{1-x^2-4y^2} 1\,dz \Big) dx\,dy = \iint\limits_{x^2+4y^2\le 1} \Big(1 - x^2 - 4y^2 \Big) dx\,dy =$$

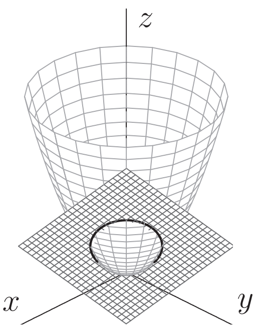
$$= \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le 1 \\ y = \dfrac{r}{2}\sin\varphi & \mid\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = \dfrac{r}{2} & \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 (1 - r^2) \cdot \frac{r}{2}\,dr \Big) d\varphi = \frac{2\pi}{2} \Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

■

***Příklad* 368**. $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$

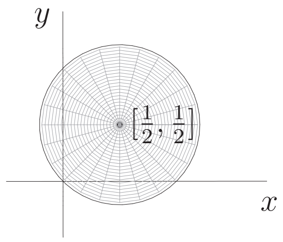
Řešení : Plocha je ohraničena rotačním paraboloidem s vrcholem v počátku souřadnic a rovinou, která prochází počátkem.





$$V = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz = \left| \begin{array}{c} x^2 + y^2 \le z \le x + y \\ \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \le x + y\} \end{array} \right| = \iint\limits_{x^2+y^2\le x+y} \Big(\int_{x^2+y^2}^{x+y} 1\,dz \Big) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le x+y} \left(x+y-x^2-y^2\right) dx\,dy = \left| \begin{array}{c} x+y-x^2-y^2 = \frac{1}{2} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \\ x^2+y^2 \le x+y \Longrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2} \end{array} \right| =$$



$$= \left| \begin{array}{lcl} x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi & & 0 \le r \le \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{1/2}} \left(\frac{1}{2} - r^2\right) r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1/2}} = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 369**. Určete hmotnost koule, jestliže hustota $\varrho(x,y,z)$ je rovna čtverci vzdálenosti od středu koule.

Řešení : Zvolíme počátek soustavy souřadnic ve středu koule. Pak koule je popsána nerovnicí $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ a hustota $\varrho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

$$m = \iiint_W \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

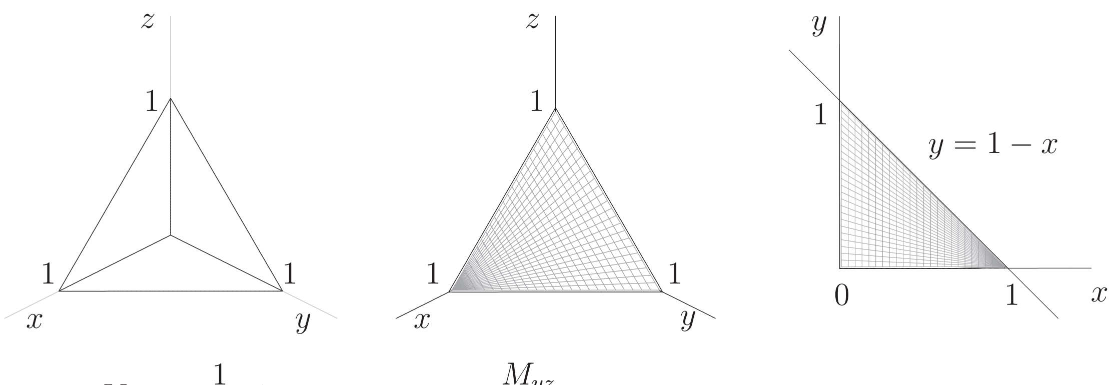
$$= \left| \begin{array}{lcc} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & & -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & & \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^2 \cdot r^2 \cos\vartheta\,dr \right) d\vartheta \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^4 \cos\vartheta\,dr \right) d\vartheta \right) d\varphi = 2\pi \Big[\sin\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{4\pi a^5}{5} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 370**. Určete hmotnost a x-ovou souřadnici těžiště tělesa omezeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$, je-li hustota $\varrho(x,y,z)=1$.

Řešení : Hmotnost tělesa při $\varrho = 1$ se číselně rovná objemu.

Těleso je čtyřstěn a jeho objem je roven $\frac{1}{6}$ objemu krychle o hraně 1.



$$m = V\cdot\varrho = \frac{1}{6}\cdot 1 \qquad\qquad x_T = \frac{M_{yz}}{m},$$

$$M_{yz} = \iiint_W x\cdot\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

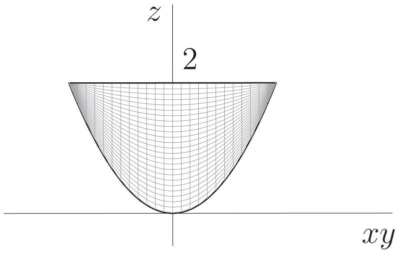
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} x\,dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x\Big[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\Big((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{24}, \qquad \boxed{x_T = \frac{1}{4}} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 371**. Určete těžiště tělesa omezeného plochami $z = x^2 + y^2$, $z = 2$, je-li hustota $\varrho(x, y, z) = k$.

Řešení : Těleso je rotační poraboloid, tedy je symetrické vzhledem k ose z, proto jeho těžiště je na z-ové ose, tj. $x_T = y_T = 0$.



Těžiště $T = [0, 0, z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $\quad m =$

$$= \iiint_W k\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 2} \Big(\int_{x^2+y^2}^{2} k\,dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= k \iint_{x^2+y^2\le 2} (2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \left| \begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le \sqrt{2} \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & & \end{array} \right| =$$

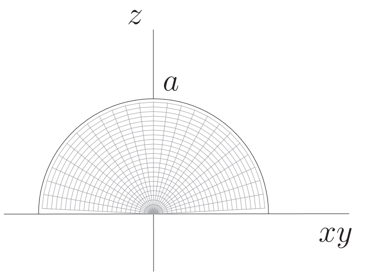
$$= k \cdot \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r\,dr\Big)\,d\varphi = k \cdot 2\pi \cdot \Big[r^2 - \frac{r^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{2}} = 2k\pi.$$

$$M_{xy} = \iiint_W z\varrho\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 2} \Big(\int_{x^2+y^2}^{2} zk\,dz\Big)\,dx\,dy = \cdots = \frac{8}{3}k\pi, \qquad \boxed{T = \Big[0, 0, \frac{4}{3}\Big]}$$

$\blacksquare$

***Příklad* 372**. Určete těžiště tělesa $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 + z^2 \le a^2,\ z \ge 0\}, \quad \varrho = 1.$

Řešení : Těleso je homogenní polokoule se středem v počátku [0,0,0], poloměrem a a je nad půdorysnou. Těžišě leží na ose z.



$T = [0, 0, z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $\quad V = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi a^3$,

$m = V \cdot \varrho = \dfrac{2}{3}\pi a^3 \cdot 1, \quad M_{xy} = \displaystyle\iiint_W z\,dx\,dy\,dz =$

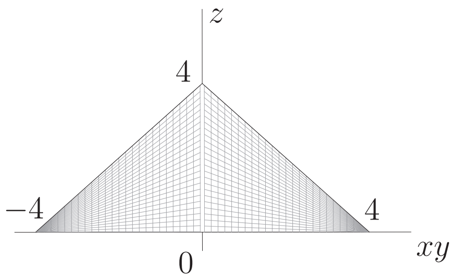
$$= \left| \begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & & \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^a r\sin\vartheta \cdot r^2\cos\vartheta\,dr\Big)\,d\varphi\Big)\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^a \cdot \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \cdot \Big[\frac{\sin^2\vartheta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4\pi}{2}, \qquad \boxed{T = \Big[0, 0, \frac{3}{8}\,a\Big]}$$

$\blacksquare$

***Příklad* 373**. Určete těžiště kužele se základnou $x^2 + y^2 \le 16$ a vrcholem v bodě $[0, 0, 4]$, je-li hustota $\varrho(x, y, z) = k$.

Řešení : Uvažovaný kužel je rotační, osa z je jeho osou rotace. Meridiánem tohoto rotačního kužele je část přímky $x + z = 4 \Longrightarrow z = 4 - x$. Potom rovnice kuželové plochy je $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$



$$T = [0, 0, z_T], \text{ kde } z_T = \frac{M_{xy}}{m},$$

$$m = V \cdot \varrho = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4 \cdot k = \frac{64}{3}\,k\pi.$$

$$M_{xy} = \iiint_W z \cdot \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W z \cdot k\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{xy} = k \cdot \iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \Big(\int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\Big)\,dx\,dy = k \iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \Big[\frac{z^2}{2}\Big]_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy =$$

$$= \frac{k}{2} \iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \Big(4 - \sqrt{x^2+y^2}\Big)^2 dx\,dy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & \mid\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi & \ \ \ 0 \le r \le 4 \\ J = r & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^4 (4-r)^2 r\,dr\,d\varphi = \frac{k}{2}\cdot 2\pi \cdot \int_0^4 (16r - 8r^2 + r^3)\,dr = k\pi\Big[8r^2 - \frac{8}{3}r^3 + \frac{r^4}{4}\Big]_0^4 =$$

$$= \frac{64}{3}\,k\pi, \qquad \boxed{T = [0,0,1]} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 374**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k bodu $[0, 0, 0]$ tělesa W

$$W = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ \ \frac{x^2+y^2}{2} \le z \le \sqrt{3 - x^2 - y^2}\Big\}, \quad \varrho(x,y,z) = k.$$

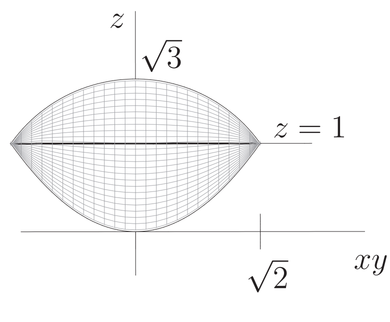
Řešení : $\dfrac{x^2+y^2}{2} = z \quad \Rightarrow \quad 2z = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow$ rovnice paraboloidu

$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \Rightarrow$ rovnice kulové plochy

Plochy mají společnou osu rotace. Body průniku leží v rovině kolmé na osu z .
Rovnici roviny dostaneme vyřešením soustavy:

$2z = x^2 + y^2 \qquad \Rightarrow \quad z \ge 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 2z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z+3)(z-1) = 0$



Průnikem je kružnice $x^2 + y^2 = 2$ v rovině $z = 1$.

$$J_0 = \iiint_W (x^2+y^2+z^2)\cdot\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & \quad \frac{r^2}{2} \le w \le \sqrt{3-r^2} \Longrightarrow \frac{r^2}{2} \le \sqrt{3-r^2} \Longrightarrow r^4 \le 4\,(3-r^2) \Longrightarrow \\ y = r\sin\varphi \quad \mid & r^4 + 4\,r^2 - 12 \le 0 \Longrightarrow (r^2-2)(r^2+6) \le 0 \Longrightarrow r^2 \le 2 \Longrightarrow \\ z = w & \quad 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array} \right| =$$

$$= k\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2}}\Big(\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} (r^2+w^2)r\,dw\Big)dr\Big)d\varphi = 2k\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \Big[r^3 w + r\frac{w^3}{3}\Big]_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} dr =$$

$$= 2k\pi\int_0^{\sqrt{2}}\Big(r^3\sqrt{3-r^2} + \frac{r}{3}(3-r^2)\sqrt{3-r^2} - \frac{r^5}{2} - \frac{r^7}{24}\Big)\,dr = 2k\pi\Big[-\frac{r^6}{12} - \frac{r^8}{24\cdot 8}\Big]_0^{\sqrt{2}} +$$

$$+ 2k\pi \int_0^{\sqrt{2}} \Big(r\sqrt{3-r^2} + \frac{2}{3}r^3\sqrt{3-r^2}\Big)\,dr = 2k\pi\Big(-\frac{8}{12} - \frac{16}{24\cdot 8}\Big) -$$

$$-k\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{3-r^2}\Big(1+\frac{2}{3}r^2\Big)(-2r)\,dr = \left| \begin{array}{ll} 3-r^2=t & \mid\ r_1=0 \Rightarrow t_1=3 \\ -2r\,dr = dt & \ \ r_2=\sqrt{2} \Rightarrow t_2=1 \end{array} \right| =$$

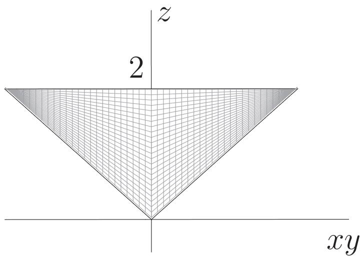
$$= -\frac{3}{2}k\pi - k\pi \int_3^1 \sqrt{t}\Big(1+\frac{2}{3}(3-t)\Big)\,dt = -\frac{3}{2}k\pi + k\pi \int_1^3 \Big(3\sqrt{t} - \frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big)\,dt =$$

$$= -\frac{3}{2}k\pi + k\pi\Big[\frac{2\cdot 3t^{3/2}}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2t^{5/2}}{5}\Big]_1^3 = -\frac{3}{2}k\pi + k\pi\Big(2\cdot 3\sqrt{3} - \frac{4}{15}\cdot 9\sqrt{3} - 2 + \frac{4}{15}\Big) =$$

$$= k\pi\Big(\frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{97}{30}\Big) \doteq 3{,}002\,k\pi \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 375**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenního tělesa W,
$W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$.

Řešení : Homogenní kužel má konstantní hustotu, označíme ji $\varrho(x,y,z) = k$



$$J_z = \iiint_W (x^2+y^2)\cdot\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

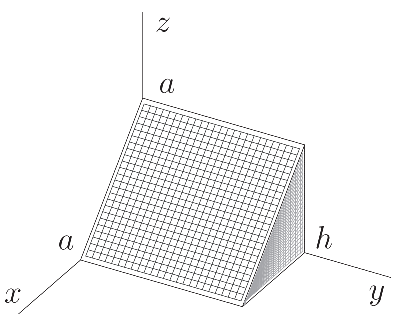
$$= k \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \Big((x^2+y^2)\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= k \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2)\Big(2-\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,dx\,dy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & \mid\ 0 \le r \le 2 \\ y = r\sin\varphi & \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array} \right| =$$

$$= k\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 r^2(2-r)r\,dr\Big)\,d\varphi = 2k\pi\Big[2\cdot\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\Big]_0^2 = 2k\pi\Big(8-\frac{32}{5}\Big) = \frac{16}{5}k\pi \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 376**. Určete statický moment M_{yz} (vzhledem k rovině (yz)) tělesa omezeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=a,\ y=h,\ (a>0, h>0)$, je-li hustota $\varrho(x,y,z)$ konstantní.

Řešení : Těleso je trojboký hranol s podstavou v rovině (x,z).



$$M_{yz} = \iiint_W x\cdot\varrho\,dx\,dy\,dz =$$

$$= k\cdot\iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} W: & 0 \le z \le a-x \\ & 0 \le x \le a \\ & 0 \le y \le h \end{array} \right| =$$

$$= k\int_0^a\Big(\int_0^h\Big(\int_0^{a-x} x\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = k\int_0^a\Big(\int_0^h x(a-x)\,dy\Big)\,dx = k\cdot h\Big[a\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^a =$$

$$= \frac{1}{6}k\,h\,a^3 \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 377**. Určete moment setrvačnosti J_{xy} (vzhledem k rovině (xy)) tělesa W,
$W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2-2x+y^2 \le 0,\ -1 \le z \le 1\},\ \varrho = k$.

Řešení : Těleso W je rotační válec s osou rovnoběžnou s osou z.

$$J_{xy} = \iiint_W z^2 \cdot \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} \Big(\int_{-1}^{1} kz^2\,dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= k \iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} \Big[\frac{z^3}{3}\Big]_{-1}^{1}\,dx\,dy = \frac{2}{3}k \iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} 1\,dx\,dy = \frac{2}{3}k\cdot\pi\cdot 1 = \frac{2}{3}k\,\pi$$

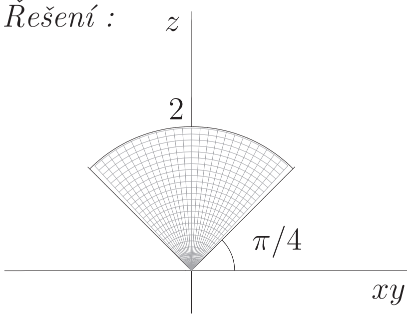
■

***Příklad* 378**. Vypočítejte integrál a stanovte jeho možný fyzikální význam:

$$I = \iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

$$W = \{[x,y,z]\in \mathbb{E}_3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2},\ y\ge 0\}.$$

Řešení :



W :
$z^2 = x^2+y^2$ (rotační kuželová plocha)
$z^2 = 4-x^2-y^2 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2 = 4$ (kulová plocha)

$$\left|\begin{array}{l|c} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 0\le r\le 2 \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & 0\le\varphi\le\pi \\ z = r\sin\vartheta & (y\ge 0) \\ J = r^2\cos\vartheta & \frac{\pi}{4}\le\vartheta\le\frac{\pi}{2} \end{array}\right|$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\pi}\Big(\int_0^2 r\cdot r^2\cos\vartheta\,dr\Big)\,d\varphi\Big)\,d\vartheta = \int_0^2 r^3\,dr\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,d\vartheta\cdot\int_0^{\pi} 1\,d\varphi =$$

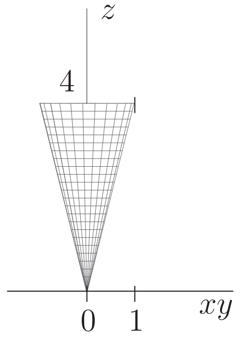
$$= \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^2\cdot\Big[\sin\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\pi = 4\pi\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$

Význam : 1) I je celková hmota tělesa při hustotě $\varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
2) I je statický moment tělesa vzhledem k bodu $[0,0,0]$ při hustotě $\varrho(x,y,z) = 1$.

■

***Příklad* 379**. Vypočítejte hmotnost kužele s vrcholem v počátku, s poloměrem podstavy $a = 1$ a výškou $h = 4$. Hustota se lineárně mění v závislosti na vzdálenosti bodu tělesa od podstavy. Ve vrcholu je $\varrho(x,y,z) = 1$ a $\varrho(x,y,z) = 5$ v každém bodě podstavy.

Řešení :



Zvolíme soustavu souřadnic s počátkem ve vrcholu kužele, osa z bude osou rotace, meridiánem bude část přímky $z = 4x$, $y = 0$, $0\le x\le 1$.

Kuželová plocha bude mít rovnici $z = 4\sqrt{x^2+y^2}$.

Uvažované těleso W zapíšeme pomocí nerovnic.

$$W : \quad 4\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4$$
$$x^2+y^2 \le 1$$

Pro hustotu platí : $\varrho(z) = k_1(4-z) + k_2$: $\quad \varrho(0) = 1 \Longrightarrow \quad 1 = 4k_1 + k_2$

$\varrho(4) = 5 \Longrightarrow \quad 5 = k_2 \Longrightarrow k_1 = -1$

$$\Longrightarrow \quad \varrho(x,y,z) = -(4-z) + 5 = z + 1$$

$$m = \iiint_W \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W (z+1)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \Big(\int_{4\sqrt{x^2+y^2}}^{4} (z+1)\,dz \Big)\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \Big[\frac{z^2}{2} + z\Big]_{4\sqrt{x^2+y^2}}^{4}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \Big(12 - 8(x^2+y^2) - 4\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,dx\,dy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & \mid\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array} \right| =$$

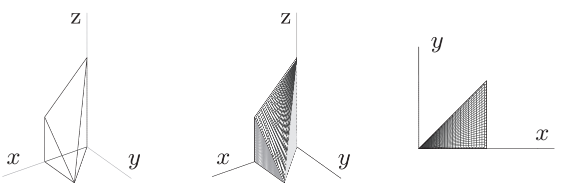
$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} (12 - 8r^2 - 4r)\cdot r\,d\varphi \Big)\,dr = 2\pi \cdot \Big[6r^2 - 2r^4 - \frac{4}{3}r^3\Big]_0^1 = 2\pi\Big(4 - \frac{4}{3}\Big) =$$

$$= \frac{16}{3}\pi$$

■

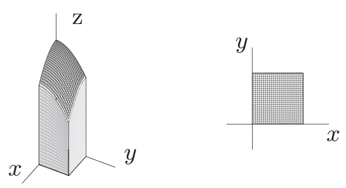
- Je dána množina D v $\mathbb{E}_3$ a funkce $z = f(x,y,z)$.
  - a) Načrtněte množinu D a její průmět D_{xy} do roviny $z = 0$.
  - b) Ověřte předpoklady pro použití Fubiniovy věty a vypočítejte trojný integrál $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.
  - c) Uveďte příklady možného fyzikálního významu daného integrálu. Uveďte, zda se jedná o hmotnost (při jaké hustotě), statický moment či moment setrvačnosti (při jaké hustotě a vzhledem k jakému bodu, přímce nebo rovině).

380. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le 2 - x - y\},\ f(x,y,z) = x^2$



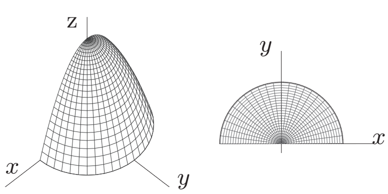
$\left[\begin{array}{l} b)\ \frac{1}{5} \\ c)\ m,\ \varrho = x^2 \\ \quad J_{yz},\ \varrho = 1 \end{array}\right]$

381. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\},\ f(x,y,z) = xy$



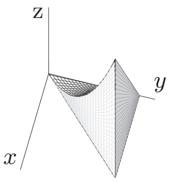
$\left[\begin{array}{l} b)\ \frac{3}{4} \\ c)\ m,\ \varrho = xy \\ \quad M_{yz},\ \varrho = y \\ \quad M_{xz},\ \varrho = x \end{array}\right]$

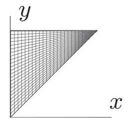
382. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 :\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2,\ y \ge 0\},\ f(x,y,z) = x^2y$



$\left[\begin{array}{l} b)\ \frac{512}{105} \\ c)\ m,\ \varrho = x^2y \\ \quad M_{xz},\ \varrho = x^2 \\ \quad J_{yz},\ \varrho = y \end{array}\right]$

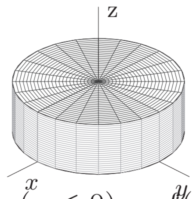
383. $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : \ 0 \le x \le 3, \ x \le y \le 3, \ 0 \le z \le xy\}, \ f(x, y, z) = (x^2 + y^2)\, z$

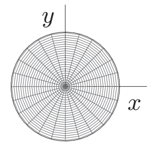




$$\left[\begin{array}{l} b)\ \dfrac{3^7}{10} \\ c)\ m,\ \varrho = (x^2+y^2)z \\ \quad M_{xy},\ \varrho = x^2+y^2 \\ \quad J_z,\ \varrho = z \end{array}\right]$$

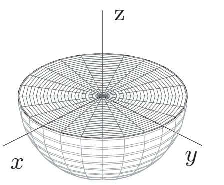
384. $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : \ x^2 + y^2 = 9, \ z = 0, \ z = 2\}, \ f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2},$

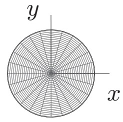




$$\left[\begin{array}{l} b)\ 36\pi \\ c)\ m,\ \varrho = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right]$$

385. $D : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ z = 0, \ (z \le 0), \quad f(x, y, z) = z, \ R$ je kladná konstatnta

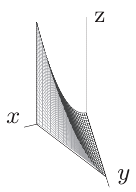


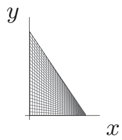


$$\left[\begin{array}{l} b)\ \dfrac{1}{4}\pi R^4 \\ c)\ M_{xy},\ \varrho = 1, \\ \quad \text{nevyjadřuje hmotnost} \\ \quad \text{protože}\ \varrho = z \le 0 \end{array}\right]$$

- Je dáno těleso $D \subset \mathbb{E}_3$ omezené plochami :
  a) Načrtněte těleso D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$.
  b) Množinu D vyjádřete ve tvaru elementárního oboru integrace v souřadnicích, ve kterých budete objem počítat.
  c) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

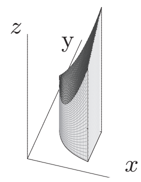
386. $D : 3x + 2y = 12, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ z = x^2$

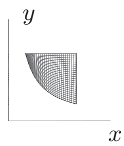




$$\left[\begin{array}{l} b)\ 0 \le x \le 4 \\ \quad 0 \le y \le 6 - \dfrac{3}{2}x \\ \quad 0 \le z \le x^2 \\ c)\ 32 \end{array}\right]$$

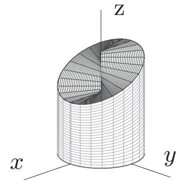
387. $D : x = 2, \ y = 2, \ xy = 1, \ z = 0, \ z = x^2 + y$

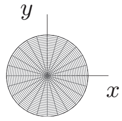




$$\left[\begin{array}{l} b)\ \dfrac{1}{2} \le x \le 2 \\ \quad \dfrac{1}{x} \le y \le 2 \\ \quad 0 \le z \le x^2 + y \\ c)\ \dfrac{45}{8} \end{array}\right]$$

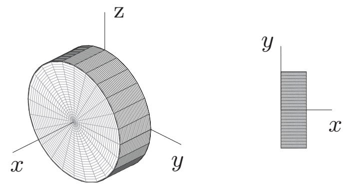
388. D: $x^2 + y^2 = 4, \ z = 0, \ z = 4 - x$





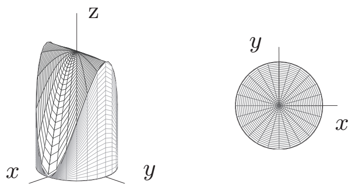
$$\left[\begin{array}{ll} b) & 0 \le r \le 2 \\ & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ & 0 \le w \le 4 - r\cos\varphi \\ c)\ 16\pi & \end{array}\right]$$

389. $D:\ y^2+z^2=9,\ x=0,\ x=2$



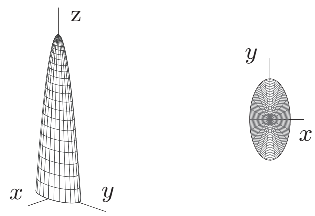
$$\left[\begin{array}{l} b)\ \ 0\le w\le 2 \\ \quad\ \ 0\le r\le 3 \\ \quad\ \ 0\le\varphi\le 2\pi \\ c)\ 18\pi \end{array}\right]$$

390. $D:\ z=0,\ z=a^2-x^2,\ x^2+y^2=a^2$



$$\left[\begin{array}{ll} b) & 0\le r\le a \\ & 0\le\varphi\le 2\pi \\ & 0\le w\le a^2-r^2\cos^2\varphi \\ c)\ \dfrac{3}{4}\pi a^4 & \end{array}\right]$$

391. $D:\ z=0,\ z=36-4x^2-y^2$



$$\left[\begin{array}{ll} b) & 0\le r\le 1 \\ & 0\le\varphi\le 2\pi \\ & 0\le w\le 36-36r^2 \\ c)\ 324\pi & \end{array}\right]$$

• Vypočítejte objem V tělesa $W\subset\mathbb{E}_3$:

392. $W:\ z=0,\ y+z=1,\ y=\ln x,\ y=\ln^2 x$ $[3e-8]$

393. $W:\ z=x^2+y^2,\ z=18-x^2-y^2$ $[81\pi]$

394. $W:\ 2z\ge x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2=3$ $\left[2\pi\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi\right]$

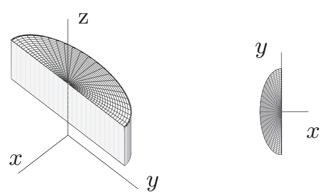
395. $W:x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2\le b^2,\ 0\le b\le a$ $\left[\frac{4}{3}\pi\left(a^3-\sqrt{(a^2-b^2)^3}\ \right)\right]$

396. $W:(x+y)^2+2z=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ $\left[\frac{1}{6}(3\sqrt{3}-1)\right]$

397. $W:1+x^2+y^2=z^2,\ z=5-x^2-y^2,\ z\ge 0$ $\left[\frac{35}{6}\pi\right]$

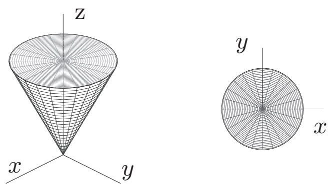
• Je dáno těleso $D\subset\mathbb{E}_3$ omezené plochami :
 a) Načrtněte těleso D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z=0$.
 b) Při vhodné substituci vyjádřete D jako elementární obor v transformovaných souřadnicích.
 c) Vypočítejte hmotnost tělesa, je-li dána hustota $\varrho(x,y,z)$.

398. $D:\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1,\ x=0,\ z=1,\ z=4,\ (x\le 0),\quad \varrho(x,y,z)=z$



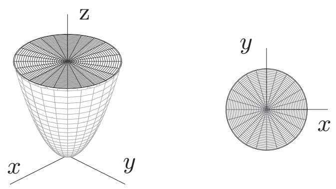
$$\left[\begin{array}{l} b)\ \ 0\le r\le 1 \\ \quad\ \ \frac{1}{2}\pi\le\varphi\le\frac{3}{2}\pi \\ \quad\ \ 1\le w\le 4 \\ c)\ 30\pi \end{array}\right]$$

399. $D: z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=4, \quad \varrho(x,y,z)=z$



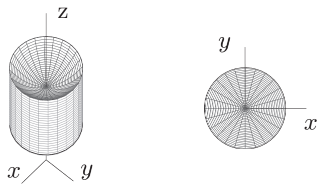
$\left[\begin{array}{l} b)\ \ 0 \le r \le 2 \\ \quad\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \quad\ \ r \le w \le 4 \\ c)\ 64\pi \end{array}\right]$

400. $D: z=x^2+y^2,\ z=4, \quad \varrho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$



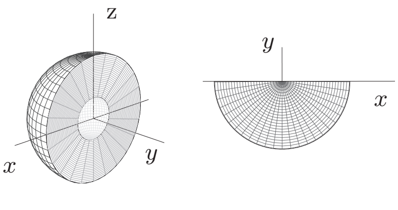
$\left[\begin{array}{l} b)\ \ 0 \le r \le 2 \\ \quad\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \quad\ \ r^2 \le w \le 4 \\ b)\ \dfrac{128}{15}\pi \end{array}\right]$

401. $D: z=x^2+y^2+4,\ z=3-x^2-y^2,\ x^2+y^2=1, \quad \varrho(x,y,z)=k$



$\left[\begin{array}{l} b)\ \ r \in \langle 0,1\rangle \\ \quad\ \ \varphi \in \langle 0,2\pi\rangle \\ \quad\ \ w \in \langle 3-r^2, 4+r^2\rangle \\ c)\ 2k\pi \end{array}\right]$

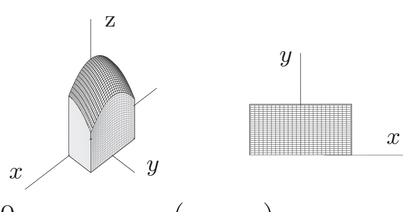
402. $D=\{[x,y,z]\in \mathbb{E}_3\,;\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ y\le 0\}, \quad \varrho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$



$\left[\begin{array}{l} b)\ r \in \langle 0,3\rangle \\ \quad\ \ \varphi \in \langle \pi,2\pi\rangle \\ \quad\ \ \psi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \\ c)\ 40\pi \end{array}\right]$

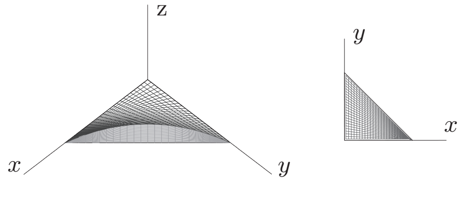
• Je dáno těleso $D \subset \mathbb{E}_3$.
  a) Načrtněte těleso D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z=0$.
  b) Vypočítejte objem tělesa D.
  c) Vypočítejte hmotnost tělesa D, je-li dána hustota $\varrho(x,y,z)$.

403. $D=\{[x,y,z]\in \mathbb{E}_3\,;\ -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le\ z\le 4-x^2-y^2\}, \varrho(x,y,z)=x^2+y.$



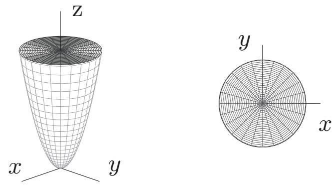
$\left[\begin{array}{l} b)\ V=\dfrac{20}{3}\pi \\ c)\ m=\dfrac{439}{90}\pi \end{array}\right]$

404. $D:\ x=0,\ y=0,\ x+y=1,\ z=0,\ z=xy,\ \varrho(x,y,z)=x$



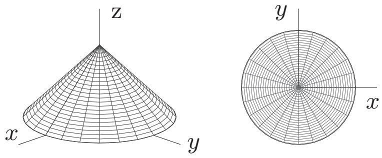
$\left[\begin{array}{l} b)\ V=\dfrac{1}{24} \\ c)\ m=\dfrac{1}{60} \end{array}\right]$

405. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x^2+y^2 \le z \le 9\}, \quad \varrho(x,y,z) = x^2+y^2.$



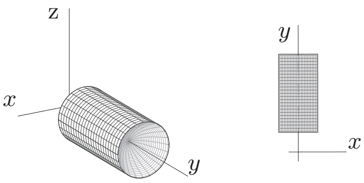
$$\left[\begin{array}{l} b)\ V = \dfrac{81}{2}\pi \\ c)\ m = \dfrac{243}{2}\pi \end{array}\right]$$

406. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ 0 \le z \le 4 - \sqrt{x^2+y^2}\}, \quad \varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2},$



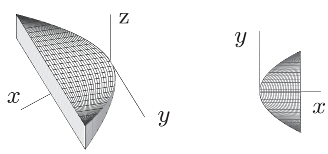
$$\left[\begin{array}{l} b)\ V = \dfrac{16}{3}\pi \\ c)\ m = \dfrac{128}{3}\pi \end{array}\right]$$

407. $D:\ x^2+z^2 = 1,\ y = 1,\ y = x^2+z^2+4, \quad \varrho(x,y,z) = y$



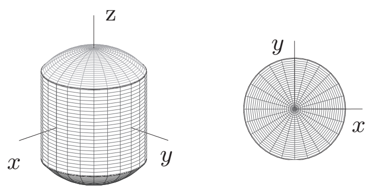
$$\left[\begin{array}{l} b)\ V = \dfrac{7}{2}\pi \\ c)\ m = \dfrac{29}{3}\pi \end{array}\right]$$

408. $D:\ x = y^2,\ x = 1,\ z = 0,\ z = x, \quad \varrho(x,y,z) = z$



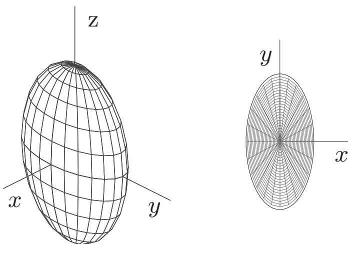
$$\left[\begin{array}{l} b)\ V = \dfrac{4}{5} \\ c)\ m = \dfrac{2}{7} \end{array}\right]$$

409. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x^2+y^2+z^2 \le 16,\ \ x^2+y^2 \le 9\}, \quad \varrho(x,y,z) = k$



$$\left[\begin{array}{l} b)\ V = \dfrac{4}{3}\pi(64 - 7\sqrt{7}) \\ c)\ m = \dfrac{4}{3}k\pi(64 - 7\sqrt{7}) \end{array}\right]$$

410. $D:\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad \varrho(x,y,z) = 3$



$$\left[\begin{array}{l} b)\ V = \dfrac{4}{3}\pi abc \\ c)\ m = 4\pi abc \end{array}\right]$$

• Určete hmotnost m tělesa $W \subset \mathbb{E}_3$:

411. $W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,; 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c\}, \quad \varrho(x,y,z) = x+y+z.$

$$\left[\frac{abc}{2}(a+b+c)\right]$$

412. $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4-x-2y\}, \quad \varrho(x, y, z) = x^2$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

413. $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \geq 0\}, \quad \varrho(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $[8\pi]$

414. W je koule o poloměru a, jestliže hustota je rovna čtverci vzdálenosti od průměru.
(Zvolte kouli se středem v počátku souřadnic a průměr ležící na ose z.) $\left[\frac{8}{15}\pi a^5\right]$

415. W je omezené plochami o rovnicích: $z = 0,\ 2x + y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0,$
je-li $\varrho(x, y, z) = 4x$. $\left[\frac{32}{2}\right]$

416. W je omezené plochami o rovnicích : $z = x^2 + y^2 + 4,\ z = 3 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1,$
je-li $\varrho(x, y, z) = 2z(x^2 + y^2)$. $\left[\frac{49}{6}\pi\right]$

• Určete těžiště T tělesa $\subset \mathbb{E}_3$ omezeného plochami :

417. $W : z = 0,\ z = x^2 + y^2,\ x + y = 5,\ x = 0,\ y = 0, \varrho(x, y, z) = k$
$\left[T = \left[2, 2, \frac{35}{6}\right]\right]$

418. $W : 2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ z \geq 0,\ \varrho(x, y, z) = k$
$\left[T = \left[0, 0, \frac{5}{6\sqrt{3} - 5}\right]\right]$

419. $W : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (v prvním oktantu), $\varrho(x, y, z) = k$
$\left[T = \left[\frac{3a}{8}, \frac{3b}{8}, \frac{3c}{8}\right]\right]$

• Určete moment setrvačnosti tělesa $W \subset \mathbb{E}_3$:

420. $W : x^2 + y^2 = 2z,\ x + y = z$ vzhledem k osám souřadnic, je-li $\varrho(x, y, z) = 1$.
$\left[J_z = \frac{7}{2}\pi, J_x = J_y = \frac{4}{3}\pi,\right]$

421. $W : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ (z \geq 0)$ vzhledem k ose z, je-li $\varrho(x, y, z) = 1$.
$\left[J_z = \frac{4}{15}\pi(4\sqrt{2} - 5)\right]$

422. rotačního válce s poloměrem podstavy a a výškou b vzhledem k přímce p, která se dotýká pláště válce a je rovnoběžná s osou rotace.
(Zvolte válec $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq b$, přímka p pak bude osa z.) $\left[\frac{3}{2}\pi a^4 b\right]$

423. $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ \sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z \leq 3\}$, vzhledem k ose z, je-li hustota $\varrho(x, y, z) = k$
$\left[J_z = \frac{27}{10}\pi\varrho\right]$