

Pravděpodobnost a matematická statistika

Doc. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

dohnal@nipax.cz



Pravděpodobnost a matematická statistika 2010

1. týden (20.09.-24.09.) Data, typy dat, variabilita, frekvenční analýza (histogramy, četnosti absolutní, relativní, prosté, kumulativní), základní statistické charakteristiky (průměr, výběr.rozptyl, minimum, maximum, medián, kvartily, boxplot), sešikmenná rozdělení (vzájemná poloha mediánu a střední hodnoty), chvosty, kvantily
2. týden (27.09.-01.10.) Princip statistické indukce, výběr, vlastnosti výběru, experiment. Náhodná veličina, rozdělení pravděpodobnosti a jeho souvislost s histogramem. Pravděpodobnost, pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi, podmíněná pravděpodobnost, závislost náhodných veličin.
3. týden (04.10.-08.10.) Využití závislosti při stanovení pravděpodobnosti - věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta
4. týden (11.10.-15.10.) Rozdělení chyb měření - normální rozdělení a počítání s ním. Odhady parametrů normálního rozdělení. Intervaly spolehlivosti pro normální data. Jednovýběrové testy o střední hodnotě
5. týden (18.10.-24.10.) Výběrový poměr jako odhad pravděpodobnosti sledovaného jevu. Alternativní rozdělení, binomické rozdělení. Intervalový odhad výběrového poměru. Výběry s vracením a bez vracení (binomické a hypergeometrické rozdělení)
6. týden (25.10.-29.10.) odpadá
7. týden (01.11.-05.11.) Poruchy v čase (Poissonův proces). Poissonovo rozdělení, exponenciální rozdělení, jeho výhody a nevýhody, modelování doby do poruchy pomocí Weibullova rozdělení, lognormálního rozdělení, případně useknuté normální rozdělení.
8. týden (08.11.-12.11.) Testy dobré shody, Q-Q graf (pouze vysvětlení), testy normality. Některé neparametrické testy
- 9. týden (15.11.-19.11.) Dvě náhodné veličiny - srovnání dvou výběrů (dvouvýběrové testy)**
10. týden (22.11.-26.11.) Dvě náhodné veličiny. Dvourozměrné četnosti jako odhad dvourozměrného rozdělení, frekvenční tabulka. Marginální rozdělení (vše pouze diskrétně s tabulkou)
11. týden (29.11.-03.12.) Závislost náhodných veličin, míry závislosti (kovariance, korelace), test významnosti korelačního koeficientu
12. týden (06.12.-10.12.) Regrese, lineární regresní model (přímková, kvadratická, polynomická regrese), analýza reziduí, pásy spolehlivosti
13. týden (13.12.-17.12.) Více výběrů, jednoduché třídění, ANOVA.
14. týden (20.12.-22.12.) Rezerva, opakování, testy normality (náhrada za 28.10.)

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- oba parametry v obou případech známe
- známe střední hodnoty a neznáme rozptyly
- známe rozptyly a neznáme střední hodnoty
- žádný z parametrů neznáme

Odhady středních hodnot: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$

Odhady rozptylů:

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X - \bar{X})^2, \quad s_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum (Y - \bar{Y})^2$$

Dvě náhodné veličiny

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n \quad Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- test shody rozptylů
- test shody středních hodnot při stejných rozptylech
- test shody středních hodnot při nestejných rozptylech

Dvě závislá měření

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

párová
pozorování

- párový test shody středních hodnot

Dvě náhodné veličiny

1) Srovnání rozptylů dvou nezávislých měření

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska velikosti rozptylu?

Lze považovat rozptyl dvou nezávislých měření za shodný při dané hladině významnosti?

nulová hypotéza : $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

alternativní hypotéza: $H_A : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

testová statistika : $F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$

hladina významnosti: α

F-test

Fisherovo-Snedecorovo
rozdělení $F(n-1, m-1)$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude

$$F_{\alpha/2}(n-1, m-1) < F < F_{\alpha/2}(n-1, m-1)$$

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska jejich střední hodnoty?

Lze považovat střední hodnoty dvou nezávislých měření za shodné při dané hladině významnosti?

Lze od sebe statisticky významně odlišit dvě nezávislá měření podle jejich střední hodnoty?

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X} - \bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X} - \bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

dvouvýběrový t-test
se stejnými rozptyly

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

dvouvýběrový t-test
s nestejnými rozptyly

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

$$\begin{aligned} \text{pokud } \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2 &\Rightarrow s_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = s_{\bar{X}}^2 + s_{\bar{Y}}^2 = \frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} = \\ &= s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = s^2 \left(\frac{m+n}{n \cdot m} \right) \end{aligned}$$

dále odhadneme s^2 ze všech naměřených hodnot:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n+m-2} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n+m-2} \left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2 \right) \end{aligned}$$

tedy:
$$s_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = \frac{n+m}{nm(n+m-2)} \left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2 \right)$$

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

ta má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n+m-2)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \leq t_\alpha(n+m-2)$ kde $t_\alpha(n+m-2)$ je (oboustranná) α -kritická hodnota t-rozdělení o $(n+m-2)$ stupních volnosti.

Dvě náhodné veličiny

2) Srovnání středních hodnot dvou nezávislých měření - Dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}}$$

a má rozdělení, které je směsí t-rozdělení o $(n-1)$ a $(m-1)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude splněna nerovnost $|T| \leq At_\alpha(n-1) + Bt_\alpha(m-1)$, kde A a B jsou váhy, $A+B=1$.

$$A = \frac{\frac{1}{n}s_X^2}{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}, \quad B = \frac{\frac{1}{m}s_Y^2}{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}$$

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných objektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech
-

$$X : X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

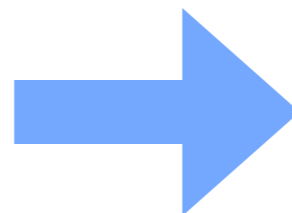
$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$\Rightarrow Z_1 = X_1 - Y_1, Z_2 = X_2 - Y_2, \dots, Z_n = X_n - Y_n,$$

$$Z \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_Z^2)$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X \neq \mu_Y$$



$$H_0 : \mu_Z = 0$$

$$H_A : \mu_Z \neq 0$$

Dvě náhodné veličiny

3) Párový test shody středních hodnot dvou závislých měření

$$H_0 : \mu_Z = a$$

$$H_A : \mu_Z \neq a$$

$$T = \frac{\bar{Z} - a}{s_Z} \sqrt{n}$$

T má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n-1)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \leq t_\alpha(n-1)$ kde $t_\alpha(n-1)$ je (oboustranná) α -kritická hodnota t-rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti.

Dvě náhodné veličiny

Jednostranné testy

“dolní” nebo “horní” jednostranná alternativa :

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X < \mu_Y$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X > \mu_Y$$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude buď

$$T < -t_\alpha(n-1) \quad \text{nebo} \quad T > t_\alpha(n-1)$$

kde $t_\alpha(n-1)$ je (jednostranná) α -kritická hodnota t-rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti.

oboustranná α -kritická hodnota je $(1 - \alpha/2)$ -kvantil $t_{1-\alpha/2}(n-1)$

jednostranná α -kritická hodnota je $(1 - \alpha)$ -kvantil $t_{1-\alpha}(n-1)$

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm. Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Dodavatel X:

```
> x
 [1] 0.41379418 0.51040227 3.28722973 7.31995568 4.53994434 -1.07426821
 [7] 4.74575978 2.55201407 3.22058685 -1.17401554 -1.24119500 4.18294690
[13] 0.65486399 -0.18908709 -0.73101186 1.27876451 1.26734875 2.78570344
[19] 2.96834139 1.22145702 1.80851440 -0.80356569 2.57347292 3.42552806
[25] 1.66904559 -2.21179295 4.17696270 2.15191523 3.62707736 0.06900211
[31] 0.51371315 0.54983237 4.09554316 1.28465289 4.05350899 5.10504379
[37] 4.25580572 0.79826235 -1.02042629 1.87299786 0.14051938 3.05622839
[43] 4.74780021 4.54794140 -6.54132331 1.94429658 1.95488616 4.73267571
[49] 4.83082378 2.95830720 2.99769818 -1.07337799 0.58403864 2.73050678
[55] 0.28021230 10.49771713 2.36870296 0.60689702 8.42679434 1.29763889
[61] 1.31289734 1.93230073 5.92597773 1.49746935 6.30721756 3.15585521
[67] 5.38824907 3.27322441 3.41248356 -0.40437473 3.19350142 -4.06261001
[73] -1.05763312 -0.39748962 0.86637433 2.02108109 -1.06445976 1.10375263
[79] 4.51823259 -0.75725877 -0.87173075 -2.19932463 7.70167909 1.48655986
[85] 4.90757730 5.51652338 -0.34615559 0.01031344 4.57582354 1.17516968
[91] -0.21932558 -1.27848277 2.97655676 1.44863955 3.67881403 0.30868429
[97] -2.52052309 0.05248743 0.07728483 -1.12975005 3.99585182 0.79045260
[103] 3.73159608 7.36490361 6.40646375 -1.54228149 -0.65100869 4.04305846
[109] 2.47766853 -3.48957597 6.20840771 0.40560482 0.49118447 -1.48277951
[115] -1.23675030 5.16138353 1.15383008 2.75286404 4.70183189 -2.29877355
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm. Lze považovat délky tyčí od různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

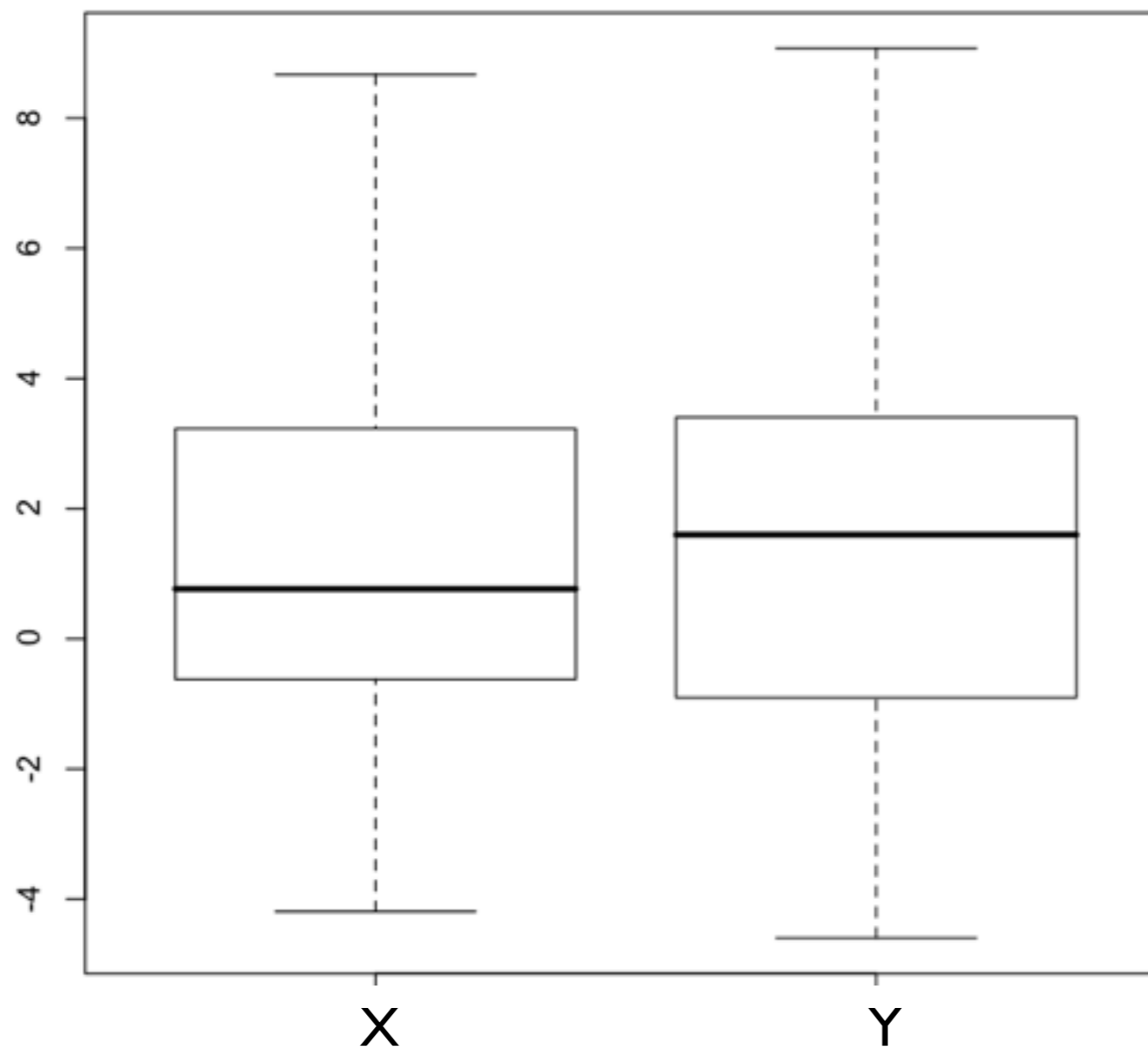
Dodavatel Y:

```
> y
 [1] 6.65956934 2.78876119 0.33397602 -0.03763918 0.74993937 3.81490677
 [7] 1.70428804 -3.31291341 -0.22972370 4.02124752 5.93229834 3.30506070
[13] -3.61277063 0.78809415 0.37976841 1.52357320 1.76230055 1.03078642
[19] -2.74093726 2.77205578 -0.25596771 -0.79295335 -1.99567925 7.14183490
[25] 6.56129569 -2.39785588 -2.30807391 -1.02088455 -2.26040839 -2.76088135
[31] 1.81877126 0.14669279 4.21783231 -2.13184320 3.69196005 -2.69614367
[37] -2.68014820 3.72209577 1.73709472 -0.70580812 0.07337669 2.17063230
[43] 2.72495294 5.04390706 1.32219033 4.72349163 -0.67638087 2.64424944
[49] 2.78769261 -2.10997705 4.26042721 -3.50266144 1.72564280 -2.07028305
[55] -4.59779260 -1.71953774 2.90307934 1.38358058 3.42339203 -1.68000430
[61] 7.55683608 6.32574310 -2.60318964 3.24511198 0.97390332 2.22611398
[67] 0.83831831 0.07828888 2.29402602 2.68356827 0.07483911 3.38214384
[73] -0.59180508 9.07209729 -1.27708114 4.77997853 -0.83918672 6.26383807
[79] 1.50674691 3.25716693 5.70351834 5.80174051 3.61099316 2.19293272
[85] -1.46102337 -0.97135778 1.54849399 4.34257358 -1.64886246 2.44942102
[91] 2.68469434 1.64707956 5.49827517 1.01640668 4.43099277 2.23430799
[97] -1.74337571 6.43458332 2.94137432 -1.01569579
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

1) Vizualizace dat: Box&Whiskers diagram



Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

2) Srovnání rozptylů: F-test

```
> var.test(x,y)

F test to compare two variances

data:  x and y
F = 0.8712, num df = 119, denom df = 99, p-value = 0.4701
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.5943383 1.2684711
sample estimates:
ratio of variances
 0.8711758
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme,
rozptyly se statisticky významně neliší

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byly měřeny odchylky od požadované délky 4m ocelových tyčí od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

3) Srovnání středních hodnot: dvouvýběrový t-test se shodnými rozptyly

```
> t.test(x,y, var.equal=T)
```

```
Two Sample t-test
```

```
data: x and y
```

```
t = 1.0375, df = 218, p-value = 0.3007
```

```
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
-0.3598731  1.1598308
```

```
sample estimates:
```

```
mean of x mean of y
```

```
1.884360  1.484381
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme,
střední hodnoty se statisticky významně neliší

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

I) Data:

```
> pred_cvicenim
 [1] 12.666378  7.322789 15.021706 13.616913 10.970712  5.464451
 [7]  9.999636 15.693764 13.771444 17.065310  6.940708 15.860749
[13] 18.019348  6.326531 20.647763 23.005369 14.619170 20.787108
[19] 14.238225  9.674337 14.763170  9.613791  9.727326  9.146292
[25] 21.246960 16.200128 15.466065 13.691879  9.032113 10.558392
[31] 18.258896 14.992416 14.722569 10.579842 10.758363  8.894299
[37] 13.502299 12.994734 14.775563  9.818535 18.208089  8.438143
[43]  8.282819 11.090392 15.174881  7.704479  8.917742 10.275903
[49] 11.488700 16.572150 18.892428 13.544225  9.309845 13.713258
[55] 12.904993  8.951567  9.041688 10.222305 14.136072  9.222289
[61] 15.208694 14.627659 15.287092 11.389052  7.716052 14.307632
[67] 14.647653 18.705963 13.665201  8.025347 13.157791 14.336731
[73]  9.548584 12.522605 11.876452 12.241549 12.944160 17.637175
[79]  9.854223 17.877400 15.892081  9.893356  7.791175 11.901961
[85] 15.605362 13.464186 12.451922 16.090626  8.907932 16.333859
[91] 13.554146 19.586575 11.765020  9.981692  5.325750 20.168371
[97] 12.485393 14.349888 14.198229  7.315012 16.787920 10.998550
[103] 10.377856 13.531181 12.258939 11.346062 12.998020  8.498104
[109] 14.195263 15.372914 11.698431 12.929311 11.232474 21.551867
[115] 10.436798 14.430260 18.836296 14.838428 14.450987 10.879682
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

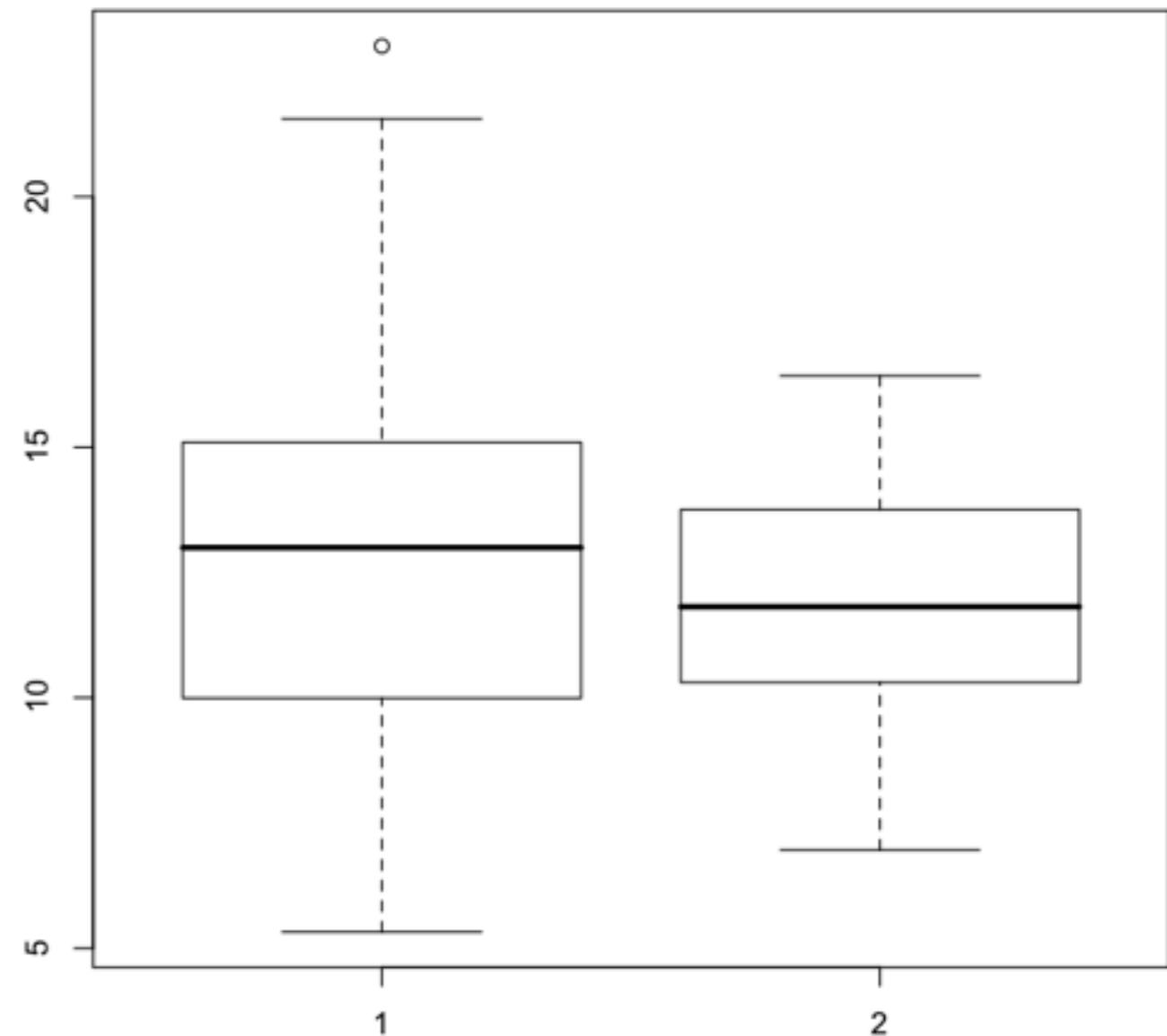
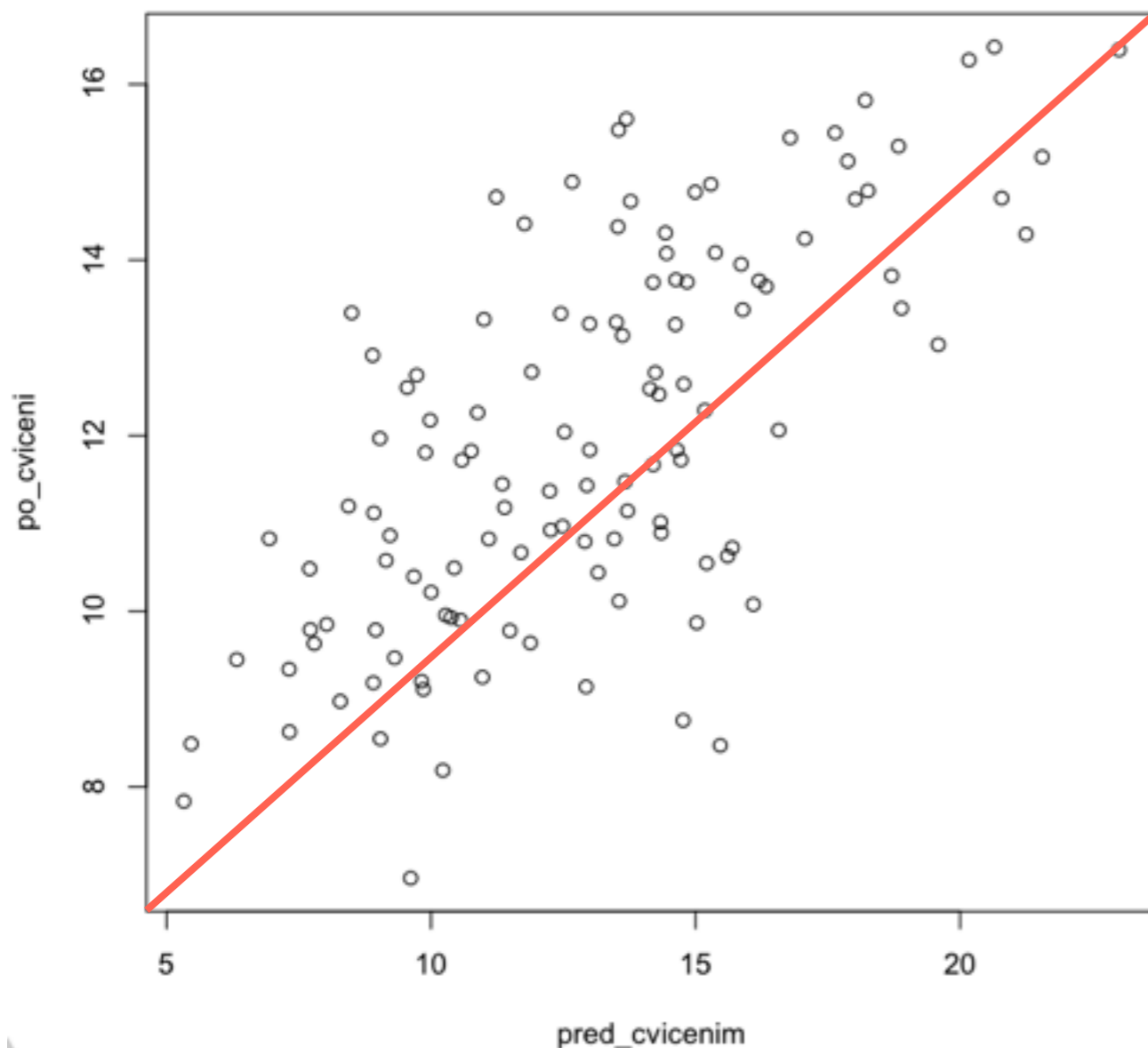
I) Data:

```
> po_cviceni
 [1] 14.889379  8.627612  9.867455 13.141168  9.249122  8.490774
 [7] 10.217290 10.724403 14.669450 14.243944 10.826905 13.951521
[13] 14.693401  9.449562 16.425888 16.392689 13.265474 14.704994
[19] 12.718107 10.395385  8.756276  6.961521 12.688497 10.578342
[25] 14.294064 13.763032  8.472324 15.605253 11.968936  9.897284
[31] 14.788205 14.773378 11.723336 11.719464 11.824407 12.914485
[37] 13.291805 13.272867 12.586791  9.202608 15.817188 11.197137
[43]  8.974410 10.823942 12.289400 10.483861 11.119684  9.956822
[49]  9.778551 12.062084 13.449972 15.481139  9.470557 11.143402
[55] 10.793291  9.786869  8.547580  8.188947 12.532635 10.862473
[61] 10.547040 13.774638 14.861969 11.180668  9.790466 12.469556
[67] 11.837173 13.820717 11.476120  9.850563 10.440890 11.015557
[73] 12.547672 12.041457  9.639740 11.368657 11.431948 15.449064
[79]  9.110052 15.125478 13.433802 11.807514  9.632299 12.725762
[85] 10.628523 10.824474 13.389953 10.077884  9.185360 13.697777
[91] 10.116078 13.036067 14.412094 12.175099  7.835201 16.277825
[97] 10.967441 10.892966 11.668289  9.340267 15.392018 13.323701
[103]  9.928631 14.378075 10.924935 11.448320 11.836161 13.397990
[109] 13.744963 14.083459 10.668370  9.139692 14.716621 15.173684
[115] 10.493444 14.308470 15.295041 13.748886 14.074436 12.261138
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

2) Grafické zobrazení



Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

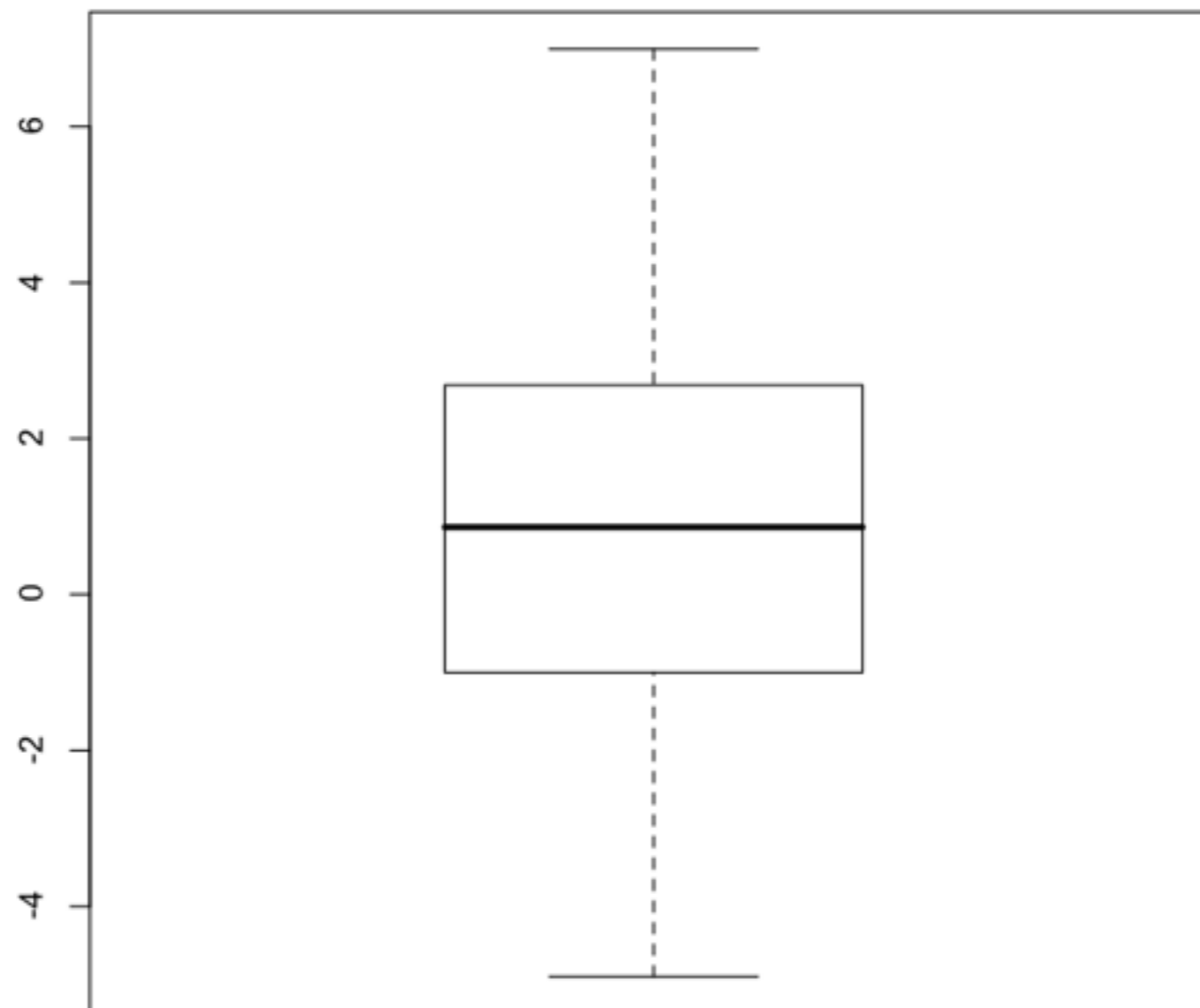
3) Rozdíl:

```
> rozdil = pred_cvicenim - po_cviceni
> rozdil
 [1] -2.22300091 -1.30482283  5.15425042  0.47574455  1.72159009 -3.02632291
 [7] -0.21765415  4.96936015 -0.89800534  2.82136665 -3.88619753  1.90922796
[13]  3.32594695 -3.12303070  4.22187531  6.61268030  1.35369637  6.08211421
[19]  1.52011877 -0.72104757  6.00689379  2.65226941 -2.96117094 -1.43204984
[25]  6.95289576  2.43709534  6.99374083 -1.91337370 -2.93682345  0.66110855
[31]  3.47069129  0.21903888  2.99923383 -1.13962267 -1.06604474 -4.02018585
[37]  0.21049440 -0.27813376  2.18877231  0.61592708  2.39090099 -2.75899399
[43] -0.69159043  0.26644963  2.88548193 -2.77938240 -2.20194265  0.31908043
[49]  1.71014906  4.51006508  5.44245554 -1.93691321 -0.16071226  2.56985696
[55]  2.11170209 -0.83530141  0.49410786  2.03335782  1.60343767 -1.64018405
[61]  4.66165463  0.85302053  0.42512280  0.20838398 -2.07441380  1.83807585
[67]  2.81048012  4.88524631  2.18908100 -1.82521582  2.71690126  3.32117337
[73] -2.99908758  0.48114855  2.23671217  0.87289130  1.51221215  2.18811115
[79]  0.74417071  2.75192209  2.45827873 -1.91415812 -1.84112463 -0.82380048
[85]  4.97683829  2.63971186 -0.93803104  6.01274276 -0.27742844  2.63608163
[91]  3.43806805  6.55050838 -2.64707408 -2.19340734 -2.50945055  3.89054571
[97]  1.51795203  3.45692228  2.52993961 -2.02525470  1.39590255 -2.32515191
[103] 0.44922574 -0.84689404  1.33400372 -0.10225811  1.16185938 -4.89988604
[109] 0.45029949  1.28945495  1.03006049  3.78961854 -3.48414755  6.37818258
[115] -0.05664624  0.12179055  3.54125530  1.08954167  0.37655117 -1.38145602
```

Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

3) Rozdíl:



Dvě náhodné veličiny

Příklad: Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

4) Párový t-test:

```
> t.test(rozdil, mu=0)

One Sample t-test

data:  rozdil
t = 4.0391, df = 119, p-value = 9.54e-05
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.5089508 1.4878397
sample estimates:
mean of x
0.9983952
```

=> nulovou hypotézu zamítáme,
cvičení mělo vliv a rychlost reakce se statisticky významně zvýšila