

## Determinanty, regulární matice, inverzní matice

**Definice** Determinant čtvercové matice  $n \times n$  je číslo značené  $\det A$ , definované takto:

1. Je-li  $A = (a)$  čtvercová matice  $1 \times 1$ , pak  $\det A = a$ .
2. Je-li  $A = (a_{ij})$  čtvercová matice  $n \times n$ , pak vybereme libovolný  $i$ -tý řádek matice  $A$  a číslo  $\det A$  vypočteme takto:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in},$$

kde  $A_{ij}$  je tzv. **doplňěk prvku  $a_{ij}$**  v matici  $A$ .

Jeho hodnota je  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}^*$ ,

kde  $A_{ij}^*$  je determinant matice, která vznikne z původní matice  $A$  vynecháním  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce.

**Poznámka.** Mluvíme o rozvoji determinantu podle (libovolného)  $i$ -tého řádku. Stejný výsledek dostaneme rozvojem podle libovolného sloupce.

## I.27 Vlastnosti $\det A$

1. Při výměně dvou řádků je  $\det$  nové matice roven  $(-\det A)$
2. Při násobení řádku číslem  $\alpha$  je  $\det$  nové matice roven  $\alpha \cdot \det A$ .
3.  $\det A$  se nezmění, když k některému řádku přičteme násobek jiného řádku.
4.  $\det A = 0$ , jestliže  $A$  obsahuje nulový řádek nebo některý řádek je násobkem jiného

## Další vlastnosti $\det A$

$$\det A = \det A^T, \quad \det (\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A,$$

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B, \quad \text{kde } A, B \text{ jsou téhož typu.}$$

## Determinant $3 \times 3$ , výpočet

1. **VŽDY** lze Sarussovo pravidlo
  2. **VŽDY** lze rozvoj dle řádku nebo sloupce
- NĚKDY** nejprve vytvoříme nuly na vhodných místech

## Výpočet determinantu pro $n > 3$

**Nelze** pravidlo Sarussova typu

Lze podle definice, tj. rozvojem

**ČASTO** nejprve vytvoříme nuly na vhodných místech

**Definice** Čtvercovou matici  $n \times n$ , která má hodnost  $n$  nazýváme regulární maticí.

**Poznámka:**

Co to znamená pro skupinu řádkových (sloupcových) vektorů v  $\mathbb{R}^n$  ?

**Definice** Matici  $A^{-1}$  typu  $n \times n$  nazýváme inverzní maticí k matici  $A$  (téhož typu), jestliže  $A \cdot A^{-1} = E$ .

**Poznámka:** Matice inverzní nemusí existovat !

### Věta I.31.

Čtvercová matice  $A$  je regulární

právě tehdy, když  $\det A \neq 0$ ,

právě tehdy, když k matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ .

### Věta I.32, I.33

Jsou-li  $A$ ,  $B$  regulární matice, pak  $A^{-1}$  a  $A \cdot B$  jsou též regulární a platí:

a)  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ,      b)  $(A^{-1})^{-1} = A$

c)  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ ,      d)  $\det A^{-1} = 1/\det A$

## Výpočet inverzní matice, dvě možnosti

### I. Gaussův algoritmus

1. krok: Sestavíme matici  $(A|E)$ .
2. Pomocí ekvivalentních úprav ji upravíme na matici ve tvaru  $(E|B)$ .
3. Pak platí, že  $A^{-1} = B$ .

### II. Výpočet pomocí determinantů podle vztahu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T,$$

$(A_{ij})^T$  je transponovaná matice k matici, jejíž prvek

$A_{ij}$  je doplněk prvku  $a_{ij}$  z matice  $A$ ,  $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ .

Příklad

## Rovnice s maticemi

Příklad.

Z dané maticové rovnice vyjádřete matici  $X$ .

$$\text{a) } X \cdot A = C, \quad \text{a) } A \cdot X + B = C, \quad \text{a) } A \cdot X \cdot B = C.$$