Determinanty, regulární matice, inverzní matice

Definice Determinant čtvercové matice $n \times n$ je číslo značené $\det A$, definované takto:

1. Je-li $A = (a)$ čtvercová matice 1×1, pak $\det A = a$.
2. Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice $n \times n$, pak vybereme libovolný i-tý řádek matice A a číslo $\det A$ vypočteme takto:

$$\det \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_{i1}} \cdot \boldsymbol{A_{i1}} + \boldsymbol{a_{i2}} \cdot \boldsymbol{A_{i2}} + \ldots + \boldsymbol{a_{in}} \cdot \boldsymbol{A_{in}},$$

kde A_{ij}je tzv. doplněk prvku $\boldsymbol{a_{ij}}$ v matici A.

Jeho hodnota je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A^*_{ij}$,
kde A^*_{ij} je determinant matice, která vznikne z původní matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Poznámka. Mluvíme o rozvoji determinantu podle (libovolného) i-tého řádku. Stejný výsledek dostaneme rozvojem podle libovolného sloupce.

I.27 Vlastnosti det$A$

1. Při výměně dvou řádků je det nové matice roven (-det$A$)

2. Při násobení řádku číslem α je det nové matice roven $\alpha \cdot \mathrm{det} A$.

3. det$A$ se nezmění, když k některému řádku přičteme násobek jiného řádku.

4. $\mathrm{det}A = 0$, jestliže A obsahuje nulový řádek nebo některý řádek je násobkem jiného

Další vlastnosti det$A$

det A =det A^T, det $(\alpha A) = \alpha^n \cdot \mathrm{det} A$,

det $(A \cdot B)$ =det $A\cdot$ det B, kde A, B jsou téhož typu.

Determinant 3×3, výpočet

1. VŽDY lze Sarussovo pravidlo

2. VŽDY lze rozvoj dle řádku nebo sloupce

NĚKDY nejprve vytvoříme nuly na vhodných místech

Výpočet determinantu pro $n > 3$

Nelze pravidlo Sarussova typu

Lze podle definice, tj. rozvojem

ČASTO nejprve vytvoříme nuly na vhodných místech

Definice Čtvercovou matici $n \times n$, která má hodnost n nazýváme regulární maticí.

Poznámka:

Co to znamená pro skupinu řádkových (sloupcových) vektorů v $\mathbb{R}^n$?

Definice Matici A^{-1} typu $n \times n$ nazýváme inverzní maticí k matici A (téhož typu), jestliže $A \cdot A^{-1} = E$.

Poznámka: Matice inverzní nemusí existovat !

Věta I.31.

Čtvercová matice A je regulární
právě tehdy, když det $A \neq 0$,
právě tehdy, když k matici A existuje inverzní matice A^{-1}.

Věta I.32, I.33

Jsou-li $A,\ B$ regulární matice, pak A^{-1} a $A \cdot B$ jsou též regulární a platí:

a) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, b) $(A^{-1})^{-1} = A$

c) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, d) det $A^{-1} = 1/\det A$

Výpočet inverzní matice, dvě možnosti

I. Gaussův algoritmus

1. krok: Sestavíme matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})$.

2. Pomocí ekvivalentních úprav ji upravíme na matici ve tvaru $(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{B})$.

3. Pak platí, že $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

II. Výpočet pomocí determinantů podle vztahu

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\det \boldsymbol{A}} \left(\boldsymbol{A}_{ij}\right)^{\boldsymbol{T}},$$

$(A_{ij})^T$ je transponovaná matice k matici, jejíž prvek

A_{ij} je doplňek prvku a_{ij} z matice A, $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

Příklad

Rovnice s maticemi

Příklad.

Z dané maticové rovnice vyjádřete matici X.

a) $X \cdot A = C$, b) $A \cdot X + B = C$, c) $A \cdot X \cdot B = C$.