

II.4. Totální diferenciál a tečná rovina

Značení pro funkci $z = f(x, y)$:

(totální) diferenciál funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$:

$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Označme $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$. Pak

$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy$$

Příklad 91. Je dána funkce $f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

- Určete a načrtněte oblasti, ve kterých je funkce diferencovatelná.
- Napište diferenciál funkce v bodě $A = [x_0, y_0]$.

Řešení : Postačující podmínkou pro diferencovatelnost je spojitost parciálních derivací

$$\Rightarrow \text{spojitost funkcí } \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

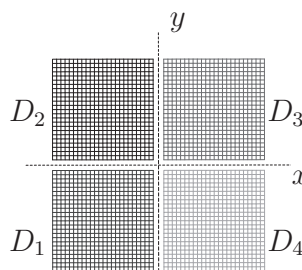
Dostaneme tyto množiny :

$$D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, y < 0\},$$

$$D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, y > 0\},$$

$$D_3 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, y > 0\}.$$

$$D_4 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, y < 0\},$$



$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) dy \quad \text{tj.} \quad df(A) = \left(-\frac{y_0}{x_0^2} - \frac{1}{y_0}\right) dx + \left(\frac{1}{x_0} + \frac{x_0}{y_0^2}\right) dy$$

Příklad 92. Určete totální diferenciál a přibližný přírůstek funkce $z = \frac{y}{x}$ v bodě $A = [2, 1]$ pro $\Delta x = 0.1$ a $\Delta y = 0.2$. Porovnejte je.

Řešení : Totální diferenciál v bodě A je $dz(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A) dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A) dy$.

$$\text{Přitom } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(A) = -\frac{1}{4} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \frac{1}{2}$$

$$dz(A) = -\frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} dy.$$

Položíme-li $dx = \Delta x = 0.1$ a $dy = \Delta y = 0.2$, pak obdržíme hledaný diferenciál funkce f v bodě A při daných přírůstcích $\Delta x, \Delta y$:

$$dz(A) = -\frac{1}{4} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 0.075,$$

$$\text{přičemž přibližný přírůstek } \Delta z = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = \\ = z(2.1, 1.2) - z(2, 1) = 0.071.$$

Příklad 93. Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližně přírůstek funkce

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{při změně } x \text{ od } x_0 = 1 \text{ do } x_1 = 1.2 \text{ a } y \text{ od } y_0 = -3 \\ \text{do } y_1 = -3.1.$$

Řešení : Přírůstek přibližně nahradíme diferenciálem tj.

$$\Delta z \doteq dz(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot dy, \text{ kde } A = [1, -3], dx = 0.2, dy = -0.1.$$

Spočítáme

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \right) \Bigg|_A = \frac{3}{10}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \right) \Bigg|_A = \frac{1}{10}.$$

$$\text{Potom } dz(A) = \frac{3}{10} \cdot 0.2 + \frac{1}{10} \cdot (-0.1) = 0.06 - 0.01 = 0.05. \quad \blacksquare$$

Příklad 94. Vypočítejte přibližně hodnotu výrazu $\ln(\sqrt{9.03} - \sqrt{0.99} - 1)$ pomocí totálního diferenciálu vhodně zvolené funkce.

Řešení : Položme $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1)$, $x_0 = 9$, $y_0 = 1$, pak $dx = 0.03$, $dy = -0.01$.

Použijeme vztah

$$\Delta z = z(x + x_0, y + y_0) - z(x_0, y_0) \doteq \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy,$$

ze kterého dostaneme

$$z(x + x_0, y + y_0) \doteq z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy.$$

Připravme si :

$$z(x_0, y_0) = \ln(\sqrt{9} - \sqrt{1} - 1) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Bigg|_{[9,1]} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right) \Bigg|_{[9,1]} = -\frac{1}{2}. \text{ Nyní dosadíme a vypočteme hledanou}$$

$$\text{hodnotu } \ln(\sqrt{9.03} - \sqrt{0.99} - 1) \doteq \frac{1}{6} \cdot 0.03 - \frac{1}{2} \cdot (-0.01) = 0.01. \quad \blacksquare$$

Příklad 95. Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $0,98^{3,04}$ pomocí totálního diferenciálu vhodně zvolené funkce.

Řešení : $z(x, y) = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, tj. $A = [1, 3]$, $dx = -0.02$, $dy = 0.04$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \text{takže}$$

$$\begin{aligned} z(0.98, 3.04) &\doteq z(A) + dz(A) = z(A) + \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot dy = \\ &= 1 + 3 \cdot (-0.02) + 0 = 0.94. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 96. Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $z = 2x^2 - 4y^2$ v bodě $T = [2, 1, ?]$. Vypočítejte přibližně hodnotu funkce v bodě $[2.2, 1.3]$.

Řešení : Tečná rovina τ má rovnici

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0),$$

kde $A = [x_0, y_0] = [2, 1]$, a $z_0 = z(x_0, y_0)$. V daném případě $z_0 = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 4 \implies$

$$T = [2, 1, 4], \quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = (4x) \Big|_A = 8, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = (-8y) \Big|_A = -8 \implies$$

$$\tau : z - 4 = 8(x - 2) - 8(y - 1) \implies 8x - 8y - z - 4 = 0.$$

Normála n je přímka procházející bodem T , jejímž směrovým vektorem je normálový

vektor roviny τ . Tedy $n : [x, y, z] = [2, 1, 4] + t(8, -8, -1), t \in \mathbb{R}$.

Funkční hodnotu v bodě $[2.2, 1.3]$ vypočteme dosazením souřadnic bodu do rovnice tečné roviny $z = 4 + 8(x - 2) - 8(y - 1) \Rightarrow z(2.2, 1.3) = 4 + 8(2.2 - 2) - 8(1.3 - 1) = 4 + 1.6 - 2.4 = 3.2$ ■

Příklad 97. Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = x^2 + xy - y^2 + x + 3$ rovnoběžné s danou rovinou $\rho : 5x - 3y - z = 0$.

Řešení: Musíme najít bod A , v němž $\frac{\partial z}{\partial x} = 5, \frac{\partial z}{\partial y} = -3$. Z toho dostaneme soustavu

$$\text{rovnice } \begin{cases} 2x + y + 1 = 5, \\ x - 2y = -3. \end{cases} \text{ Odtud } x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = z(x_0, y_0) = 3, \text{ takže}$$

$$T = [1, 2, 3]. \text{ Rovnice tečné roviny } \tau : 5x - 3y - z + d = 0, \quad T \in \tau \\ \Rightarrow \tau : 5x - 3y - z + 4 = 0. \quad \blacksquare$$

• Vypočítejte přibližně hodnoty daných výrazů pomocí totálního diferenciálu :

$$98. \sqrt[3]{7.95} \cdot \sqrt{8.96} \quad [5.9742] \quad 99. \frac{\sqrt[4]{0.97}}{1.02^3 \cdot \sqrt[3]{0.99}} \quad [0.936]$$

$$100. \sqrt{4.04} \cdot \ln 1.02 \cdot \arctg 0.9 \quad [0.0314]$$

• Najděte rovnici tečné roviny τ a rovnici normály n plochy $z = f(x, y)$ v bodě T :

$$101. z = 4\sqrt{x^2 + y^2}, \quad T = [3, 4, ?] \quad [12x + 16y - 5z = 0; [x, y, z] = [3, 4, 20] + t(12, 16, -5), t \in \mathbb{R}]$$

$$102. z = xy, \quad T = [0, 0, ?] \quad [z = 0; [x, y, z] = t(0, 0, 1), t \in \mathbb{R}]$$

$$103. z = x^2 \cdot \cos \frac{1}{y}, \quad T = [1, \frac{2}{\pi}, ?] \quad [z = \frac{\pi^2}{4} \left(y - \frac{2}{\pi}\right); [x, y, z] = [1, \frac{2}{\pi}, 0] + t \left(0, \frac{\pi^2}{4}, -1\right), t \in \mathbb{R}]$$

$$104. z = \frac{1}{x} \arcsin y, \quad T = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, ?\right] \quad \left[\begin{array}{l} \pi x - 2\sqrt{2}y + z - \pi + 2 = 0; \\ [x, y, z] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + t(\pi, -2\sqrt{2}, 1), t \in \mathbb{R} \end{array} \right]$$

• Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = z(x, y)$ rovnoběžné s rovinou ρ :

$$105. z = 2x^2 - y^2, \quad \rho : 8x - 6y - z - 15 = 0 \quad [\tau : 8x - 6y - z + 1 = 0]$$

$$106. z = \ln(x^2 + 2y^2), \quad \rho : 2x - z + 5 = 0 \quad [\tau : 2x - z - 2 = 0]$$

$$107. z = x^2 - y^2 + 6xy + 2x, \quad \rho : 4x + 6y - z = 0 \quad [\tau : 4x + 6y - z - 1 = 0]$$

II.5. Derivace a diferenciály vyšších řádů

Příklad 108. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$$f(x, y) = xy^3 - y \cdot e^{x+y^2}.$$

Řešení: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y^3 - y \cdot e^{x+y^2}, \quad f_y = 3xy^2 - e^{x+y^2} - y \cdot e^{x+y^2} \cdot 2y = 3xy^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2),$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} = -y \cdot e^{x+y^2},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y} = 6xy - 2ye^{x+y^2}(1+2y^2) - e^{x+y^2}4y = 6xy - e^{x+y^2}(6y+4y^3),$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y} = 3y^2 - e^{x+y^2} - ye^{x+y^2} \cdot 2y = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2),$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2).$$

Vidíme, že pro danou funkci f platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ve všech bodech $[x, y] \in \mathbb{E}_2$. ■

Příklad 109. Ukažte, že funkce $u = u(x, t) = \arctg(2x - t)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0 \quad \text{v } \mathbb{E}_2.$$

Řešení :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{1+(2x-t)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2 \cdot 2(2x-t) \cdot 2}{(1+(2x-t)^2)^2} = \frac{-8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial t} = \frac{-2}{(1+(2x-t)^2)^2} \cdot 2(2x-t) \cdot (-1) = \frac{4(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2}.$$

Po dosazení je zřejmé, že rovnice platí ve všech bodech $[x, t] \in \mathbb{E}_2$. ■

Příklad 110.* Je dána funkce $f(x, y)$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Dokažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Řešení : Snadno se přesvědčíme, že funkce f je v bodě $[0, 0]$ spojitá :

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = 0 = f(0, 0). \quad \text{Derivace } f_x(0, y), f_y(x, 0), f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0)$$

vypočítáme pomocí příslušných definic :

$$f_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hy \frac{h^2 - 2y^2}{h^2 + y^2} - 0}{h} = -2y,$$

$$f_y(x, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, k) - f(x, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{xk \frac{x^2 - 2k^2}{x^2 + k^2} - 0}{k} = x,$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-2k}{k} = -2,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0). \quad \blacksquare$$

Jsou dána skalární pole $\varphi(x, y, z)$ a vektorové pole $\vec{f} = (U, V, W)$, která mají spojitě parciální derivace 2. řádu v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$.

Označme:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

$$\text{div } \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \text{rot } \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

Příklad 111. Je dáno skalární pole $\varphi(x, y, z) = xy^2 + z^3 - xyz + 3$. Vypočítejte grad φ , rot grad φ .

Řešení : Funkce $\varphi(x, y, z) = xy^2 + z^3 - xyz + 3$ je diferencovatelná v oblasti \mathbb{E}_3 . Pak

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = (y^2 - yz, 2xy - xz, 3z^2 - xy)$$

$$\text{rot grad } \varphi =$$

$$= \left(\frac{\partial(3z^2 - xy)}{\partial y} - \frac{\partial(2xy - xz)}{\partial z}, \frac{\partial(y^2 - yz)}{\partial z} - \frac{\partial(3z^2 - xy)}{\partial x}, \frac{\partial(2xy - xz)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2 - yz)}{\partial y} \right) =$$

$$= (-x - (-x), -y + y, 2y - z - (2y - z)) = \vec{0}$$

POZNÁMKA: Parciální derivace 2. řádu funkce φ jsou spojitě v \mathbb{E}_3 . ■

Příklad 112. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (U, V, W) = (xy, x^2 - z^2, \frac{y}{x+z})$. Vypočítejte div \vec{f} , rot \vec{f} , div rot \vec{f} .

Řešení : Vektorové pole $\vec{f} = (U, V, W) = (xy, x^2 - z^2, \frac{y}{x+z})$ je definováno v množině $D(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x + z \neq 0\}$.

Parciální derivace:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{y}{(x+z)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{x+z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{y}{(x+z)^2}$$

$$\text{div } \vec{f} = y + 0 - \frac{y}{(x+z)^2}, \quad \text{rot } \vec{f} = \left(\frac{1}{x+z} + 2z; \frac{y}{(x+z)^2} - 0; 2x - x \right),$$

$$\text{div rot } \vec{f} = \text{div} \left(\frac{1}{x+z} + 2z; \frac{y}{(x+z)^2}; x \right) = -\frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + 0 = 0$$

POZNÁMKA: Souřadnicové funkce U, V, W mají spojitě parciální derivace 2. řádu v D . ■

113.* Nechť v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ má skalární pole $\varphi(x, y, z)$ spojitě parciální derivace 2. řádu. Dokažte, že rot grad $\varphi = \vec{0}$ v D .

114.* Nechť v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ má vektorové pole $\vec{f}(U, V, W)$ spojitě parciální derivace 2. řádu. Dokažte, že div rot $\vec{f} = 0$ v D .

• Najděte diferenciály uvedeného řádu :

Příklad 115.* $z = \sin(2x + y)$, $d^2z = ?$

Řešení : Diferenciál n -tého řádu $d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^n f$, potom

$$\begin{aligned} d^2z &= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 = \\ &= -4 \sin(2x + y) (dx)^2 - 4 \sin(2x + y) dx dy - \sin(2x + y) (dy)^2 = \\ &= -\sin(2x + y) (2dx + dy)^2. \end{aligned}$$

■

Příklad 116.* $z = x^3 - y^3 - xy + y^2$, $d^3z = ?$

Řešení : $d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} (dx)^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} (dy)^3$

$$\begin{aligned} z_x &= 3x^2 - y, & z_y &= -3y^2 - x + 2y, \\ z_{xx} &= 6x, & z_{yy} &= -6y + 2, & z_{xy} &= -1, \\ z_{xxx} &= 6, & z_{yyy} &= -6, & z_{xxy} &= z_{xyy} = 0, \\ d^3z &= 6(dx)^3 - 6(dy)^3. \end{aligned}$$

■

Příklad 117.* $u = e^{2x-3y}$, $d^2u(A) = ?$, $d^3u(A) = ?$, $d^n u(A) = ?$, $A = [0, 0]$

Řešení : $d^2u(A) = \left(e^{2x-3y} (2dx - 3dy)^2 \right) \Big|_A = (2dx - 3dy)^2$,
 $d^3u(A) = \left(e^{2x-3y} (2dx - 3dy)^3 \right) \Big|_A = (2dx - 3dy)^3$,
 $d^n u(A) = \left(e^{2x-3y} (2dx - 3dy)^n \right) \Big|_A = (2dx - 3dy)^n$.

■

Diferenciály lze použít v důležité **Taylorově větě** : *Nechť $f(x, y)$ je funkce $(n + 1)$ -krát diferencovatelná v každém vnitřním bodě obdélníka M se středem v bodě $A = [x_0, y_0]$.*

Potom ke každému bodu $[x, y] \in M$ existuje bod $[\xi, \eta] \in M$ takový, že

$$f(x, y) = f(A) + df(A) + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(A)}{n!} + R_{n+1},$$

kde $df(A) = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$,

$$d^2 f(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \cdot (y - y_0)^2,$$

⋮

$$d^n f(A) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(A) \cdot (x - x_0)^k \cdot (y - y_0)^{n-k},$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n + 1)!} d^{n+1} f(\xi, \eta).$$

Příklad 118.* Napište Taylorův rozvoj funkce $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2 + 4x - 5y$ v okolí bodu $A = [2, -1]$ a výsledek využijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $[2.1, -1.1]$.

Řešení :

$$f(A) = 16, \quad dx = x - x_0 = x - 2, \quad dy = y - y_0 = y + 1,$$

$$\left. \begin{aligned} f_x(A) &= (3x^2 - 3y^2 + 4) \Big|_A = 13 \\ f_y(A) &= (-6xy + 2y - 5) \Big|_A = 5 \end{aligned} \right\} \implies dz(A) = 13 dx + 5 dy = 13(x - 2) + 5(y + 1),$$

$$\left. \begin{aligned} f_{xx}(A) &= (6x)\Big|_A = 12 \\ f_{yy}(A) &= (-6x + 2)\Big|_A = -10 \\ f_{xy}(A) &= (-6y)\Big|_A = 6 \end{aligned} \right\} \implies d^2z(A) = 12(dx)^2 + 12dx dy - 10(dy)^2 = \\ = 12(x-2)^2 + 12(x-2)(y+1) - 10(y+1)^2,$$

$$\left. \begin{aligned} f_{xxx}(A) &= 6 \\ f_{yyy}(A) &= -6 \\ f_{yxx}(A) &= f_{yyy}(A) = 0 \end{aligned} \right\} \implies d^3z(A) = 6(dx)^3 - 18dx(dy)^2 = 6(x-2)^3 - 18(x-2)(y+1)^2,$$

$$f(x, y) = 16 + 13(x-2) + 5(y+1) + 6(x-2)^2 + 6(x-2)(y+1) - 5(y+1)^2 + (x-2)^3 - 3(x-2)(y+1)^2,$$

$R_4 = 0$, protože derivace 4. a vyššího řádu jsou nulové

$$f(2.1; -1.1) = 16 + 13 \cdot 0.1 + 5(-0.1) + 6 \cdot 0.1^2 - 6 \cdot 0.1^2 - 5 \cdot 0.1^2 + 0.1^3 - 3 \cdot 0.1^3 = \\ = 17.3 - 0.552 = 16.748. \quad \blacksquare$$

Příklad 119.* Napište Taylorův rozvoj čtvrtého stupně funkce $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ v okolí bodu $[0, 0]$.

Řešení: Použijeme Taylorův vzorec pro $\cos z \doteq 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!}$, do kterého dosadíme

$$z = x^2 + y^2: \quad \cos(x^2 + y^2) \doteq 1 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2!} + \frac{(x^2 + y^2)^4}{4!};$$

$$T_4(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4). \quad \blacksquare$$

• Najděte parciální derivace druhého řádu dané funkce :

120. $\phi(s, t) = \ln(s^3 + t)$ $[\phi_{ss} = \frac{3s(2t - s^3)}{(s^3 + t)^2}, \phi_{tt} = \frac{-1}{(s^3 + t)^2}, \phi_{st} = \phi_{ts} = \frac{-3s^2}{(s^3 + t)^2}]$

121. $\phi(x, t) = \frac{\cos x^2}{t}$ $[\phi_{xx} = \frac{-1}{t}(4x^2 \cos x^2 + 2 \sin x^2), \phi_{tt} = \frac{2}{t^3} \cos x^2, \phi_{xt} = \phi_{tx} = \frac{2x}{t^2} \sin x^2]$

122. $f(x, y) = e^{ax+by}$ $[f_{xx} = a^2 e^{ax+by}, f_{yy} = b^2 e^{ax+by}, f_{xy} = f_{yx} = ab e^{ax+by}]$

123. Ověřte, že funkce $u(x, t) = \sin(x - ct)$ a funkce $u(x, t) = \sin(\omega ct) \cdot \sin(\omega x)$ vyhovují diferenciální rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (tzv. vlnová rovnice).

124. Ověřte, že funkce $u(x, y) = e^x \sin y$ vyhovuje diferenciální rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Laplaceova rovnice).

• Rozložte funkci $f(x, y)$ podle Taylorovy věty v okolí bodu A :

125.* $f(x, y) = x^3 + 5x^2 - 6xy + 2y^2, A = [1, -2]$ $[f(x, y) = 26 + 25(x-1) - 14(y+2) + 8(x-1)^2 + 2(y+2)^2 - 6(x-1)(y+2) + (x-1)^3]$

126.* $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^3 + 1, A = [2, -1]$ $[f(x, y) = (x-2) + 3(y+1) + (x-2)^2 + 3(y+1)^2 + 3(x-2)(y+1) - (y+1)^3]$

II.6. Gradient. Derivace ve směru

- Určete úhel mezi gradienty daných funkcí v bodě A :

Příklad 127. $f(x, y, z) = x^y + yz$, $g(x, y, z) = \sin(xz) + x + y - \frac{z}{y} - 1$, $A = [1, 1, 0]$

Řešení : $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (yx^{y-1}, x^y \ln x + z, y) \implies \text{grad } f(A) = (1, 0, 1)$
 $\text{grad } g = \left(z \cos(xz) + 1, 1 + \frac{z}{y^2}, x \cos(xz) - \frac{1}{y} \right) \implies \text{grad } g(A) = (1, 1, 0)$

Označme $\varphi = \angle(\text{grad } f(A), \text{grad } g(A))$. Potom

$$\cos \varphi = \frac{\text{grad } f(A) \cdot \text{grad } g(A)}{\|\text{grad } f(A)\| \cdot \|\text{grad } g(A)\|} = \frac{(1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Příklad 128. $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$, $g(x, y) = y\sqrt{x}$, $A = [1, 1]$

Řešení : $\text{grad } f(A) = \nabla f(A) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$, $\text{grad } g(A) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$,

$$\cos \varphi = \frac{\text{grad } f(A) \cdot \text{grad } g(A)}{\|\text{grad } f(A)\| \|\text{grad } g(A)\|} = \frac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}, 1 \right)}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \implies$$

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{\sqrt{10}}{10} \right).$$

Příklad 129. Určete, ve kterých bodech z $D(f) \equiv \mathbb{E}_3$ je gradient funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ roven nulovému vektoru.

Řešení : $\text{grad } f = (2x - 2yz, 2y - 2xz, 2z - 2xy) = (0, 0, 0) \implies$
 $x - yz = 0$
 $y - xz = 0$
 $z - xy = 0$

Je zřejmé, že jeden z bodů bude bod $A_1 = [0, 0, 0]$. Další spočítáme ze soustavy :

$$\left. \begin{array}{l} x = yz \\ y - yz^2 = 0 \implies z = \pm 1 \\ z - y^2z = 0 \implies y = \pm 1 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{ll} A_2 = [1, 1, 1], & A_3 = [-1, 1, -1], \\ A_4 = [-1, -1, 1], & A_5 = [1, -1, -1]. \end{array}$$

Příklad 130. Určete, ve kterých bodech z $D(f) \equiv \mathbb{E}_3$ má gradient funkce $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{3/2}$ velikost 9.

Řešení :

$$\|\text{grad } f(x, y)\| = \|(3x\sqrt{x^2 + y^2}, 3y\sqrt{x^2 + y^2})\| = \sqrt{9x^2(x^2 + y^2) + 9y^2(x^2 + y^2)} = 9,$$

$$9x^2(x^2 + y^2) + 9y^2(x^2 + y^2) = 81,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 9 \implies x^2 + y^2 = 3.$$

Hledané body leží tedy na kružnici se středem $[0, 0]$ a poloměrem $\sqrt{3}$.

- Vypočtete derivaci funkce f ve směru \vec{s} v bodě A :

Příklad 131. $f(x, y) = 2x^4 + xy + y^3$, $\vec{s} = (3, -4)$, $A = [1, 2]$

Řešení :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \text{grad } f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}, \quad \text{grad } f = (8x^3 + y, x + 3y^2),$$

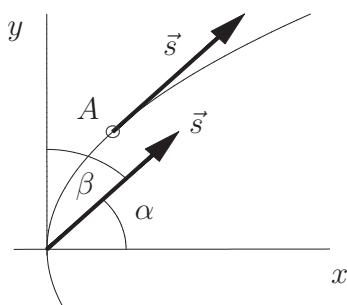
$$\text{grad } f(A) = (10, 13), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (10, 13) \cdot \frac{(3, -4)}{\sqrt{9+16}} = \frac{30-52}{5} = -\frac{22}{5}. \quad \blacksquare$$

Příklad 132. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$, $A = [-3, 2, 4]$; směr \vec{s} je vektor \overrightarrow{AB} , kde $B = [-2, 4, 2]$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení : } \vec{s} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -2), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) &= (2x, 4y, -2z) \Big|_A \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = (-6, 8, -8) \cdot \frac{(1, 2, -2)}{\sqrt{1+4+4}} = \\ &= \frac{1}{3}(-6 + 16 + 16) = \frac{26}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 133. Určete derivace funkce $z = x^2 + \ln(x + y^2)$ v bodě $A = [3, 2\sqrt{3}]$ ve směru tečny k parabole $y^2 = 4x$. Uvažujte vektor svírající ostrý úhel s vektorem \vec{i} .

Řešení : Souřadnice směrového vektoru tečny získáme z její směrnice



$$y = 2\sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$k_A = y'(A) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg } \alpha \implies \alpha = \frac{\pi}{6},$$

$$\vec{s} = (\cos \alpha, \sin \alpha) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \|\vec{s}\| = 1.$$

Nyní si připravíme $\text{grad } z(A) = \left(2x + \frac{1}{x+y^2}, \frac{2y}{x+y^2}\right) \Big|_A = \left(\frac{91}{15}, \frac{4\sqrt{3}}{15}\right)$, takže hledaná derivace bude

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \text{grad } f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \left(\frac{91}{15}, \frac{4\sqrt{3}}{15}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{95\sqrt{3}}{30}. \quad \blacksquare$$

Příklad 134. Určete v jakém směru je derivace funkce $f(x, y) = x^3y + \frac{x}{y^2} + 2y$ v bodě $A = [-1, 1]$ maximální a vypočítejte tuto derivaci.

Řešení : Z obecné teorie víme, že derivace je maximální ve směru gradientu.

$$\text{grad } f(A) = \left(3x^2y + \frac{1}{y^2}, x^3 - \frac{2x}{y^3} + 2\right) \Big|_A = (4, 3) \implies \vec{s} = (4, 3).$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \text{grad } f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \frac{16+9}{5} = 5 \quad \blacksquare$$

Příklad 135. Je dána funkce $z = \sqrt{2x+y}$, bod $A = [1, 2]$, vektor $\vec{s} = (-1, 1)$. Určete

- a) ve kterých bodech je funkce z diferencovatelná, b) $\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A)$,
c) tečnou rovinu ke grafu funkce z v bodě $T = [1, 2, ?]$.

$$\text{Řešení : } \text{a) } z_x = \frac{1}{\sqrt{2x+y}}, \quad z_y = \frac{1}{2\sqrt{2x+y}} \implies 2x+y > 0 \implies y > -2x,$$

$$b) \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{2}},$$

$$c) \quad T = [1, 2, 2], \quad \tau : z - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{4}(y - 2). \quad \blacksquare$$

Příklad 136. Určete vektor \vec{s} , v jehož směru je rychlost změny funkčních hodnot funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ v bodě $A = [1, -1, 2]$ maximální a tuto maximální rychlost vypočítejte.

Řešení : Funkce maximálně roste, resp. klesá, ve směru \vec{s} , resp. $(-\vec{s})$, kde

$$\vec{s} = \text{grad } f(A) = (6, -6, 6) \implies \vec{s}^o = \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (6, -6, 6) \cdot \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial (-\vec{s})}(A) = -6\sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

Příklad 137. Určete, ve kterých bodech je gradient funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ kolmý k ose x .

Řešení : $\vec{i} = (1, 0, 0)$ je směrovým vektorem osy x , $\text{grad } f = (2x - 2yz, 2y - 2xz, 2z - 2xy)$,

$\vec{i} \perp \text{grad } f$ znamená $\vec{i} \cdot \text{grad } f = 0$. Odtud $2x - 2yz = 0$
takže hledané body leží na ploše $x = yz$. \blacksquare

Příklad 138. Určete úhel vektorů $\text{grad } f(A)$ a $\text{grad } g(A)$, kde $f(x, y, z) = x - 3y + \sqrt{3xy} + z^3$,
 $g(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2} + xyz$, $A = [3, 4, 0]$.

Řešení : $\text{grad } f(A) = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3y}{x}}, -3 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x}{y}}, 3z^2\right)(A) = \left(2, -\frac{9}{4}, 0\right)$

$$\text{grad } g(A) = \left(\frac{zx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + yz, \frac{zy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + xz, \sqrt{x^2 + y^2} + xy\right)(A) = (0, 0, 17)$$

$$\cos \varphi = \frac{(2, -\frac{9}{4}, 0) \cdot (0, 0, 17)}{\|(2, -\frac{9}{4}, 0)\| \|(0, 0, 17)\|} = 0 \implies \varphi = \frac{\pi}{2} \implies \text{grad } f(A) \perp \text{grad } g(A) \quad \blacksquare$$

• Určete gradienty daných funkcí

$$139. \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \quad \left[\text{grad } f(x, y) = \left(\frac{-3x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \frac{-3y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \right) \right]$$

$$140. \quad f(x, y) = \sin(x^2 y) + \frac{x^2}{3} \quad \left[\text{grad } f(x, y) = \left(2xy \cos(x^2 y) + \frac{2x}{3}, x^2 \cos(x^2 y) \right) \right]$$

$$141. \quad f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \quad \left[\text{grad } f(x, y) = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right]$$

$$142. \quad f(x, y, z) = x^2 yz + \ln y - 15 \quad \left[\text{grad } f(x, y, z) = \left(2xyz, x^2 z + \frac{1}{y}, x^2 y \right) \right]$$

$$143. \quad f(u, v, t) = t\sqrt{u^2 + v^2} \quad \left[\text{grad } f(u, v, t) = \left(\frac{tu}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{tv}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \sqrt{u^2 + v^2} \right) \right]$$

- Určete gradienty daných funkcí v bodě A

144. $f(x, y) = \operatorname{arccotg}(x - 2y)$, $A = [4, 1]$ $\left[\operatorname{grad} f(A) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) \right]$

145. $(x, y, z) = x\sqrt{yz}$, $A = [-2, 1, 4]$ $\left[\operatorname{grad} f(A) = \left(2, -2, -\frac{1}{2} \right) \right]$

146. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{2y} - \frac{4}{x}$, $A = [1, 2, -3]$ $\left[\operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{9}{8}, -\frac{29}{18} \right) \right]$

147. Ve kterých bodech je gradientem funkce $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ vektor $\left(1, -\frac{16}{9}\right)$?
 $\left[\text{v bodech } \left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right] \text{ a } \left[\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}\right] \right]$

148. Ve kterém bodě je gradient funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + xy + 3y + 8z$
 a) kolmý k ose z ; b) rovnoběžný s osou z ; c) roven nulovému vektoru?
 $\left[\begin{array}{l} \text{a) v bodech roviny } z = 2 \text{ tj. } [x, y, 2] \\ \text{b) v bodech přímky } x = 1, y = -2, z = t, t \in \mathbb{R} \\ \text{c) } [1, -2, 2] \end{array} \right]$

149. Nalezněte úhel φ gradientů funkce $f(x, y) = \arcsin \frac{x-1}{y}$, $y \neq 0$, v bodech
 $A = [1, 1], B = [3, 4]$. $\left[\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \right]$

- Je dána funkce $f(x, y)$, bod A a vektor \vec{s} . Určete, ve kterých bodech je funkce f diferencovatelná, spočítejte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $T = [A, f(A)]$:

150. $f(x, y) = |x| + y$, $A = [1, 0]$, $\vec{s} = (-1, 1)$ $\left[\{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x \neq 0\}, \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 0, x + y - z = 0 \right]$

151. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$, $A = [1, 0]$, $\vec{s} = (1, 2)$ $\left[\mathbb{E}_2, \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{8}{\sqrt{5}}, 2x + 3y - z - 1 = 0 \right]$

152. Určete v jakém směru je derivace funkce $f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x-y}$, v bodě $A = [3, 0]$
 maximální a vypočítejte tuto derivaci. $\left[\vec{s} = \operatorname{grad} f(A) = \left(0, \frac{6}{9} \right), \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{2}{3} \right]$

153. Určete derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v bodě $A = [2, 3]$ ve směru \vec{s} , svírající
 s vektorem \vec{i} úhel $\alpha = \frac{\pi}{3}$. ($\alpha = \frac{\pi}{3}$ je směrový úhel) $\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 2 - 3\sqrt{3} \right]$

154.* Určete derivaci funkce $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + y^2z - 5z$ v bodě $A = [1, -2, -1]$
 ve směru \vec{s} , jehož směrové úhly jsou $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{3\pi}{4}, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{7 - \sqrt{2}}{2} \right]$

Příklad 155. Je dána funkce $z = f(x, y) = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$

- Napište postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce n -proměnných v otevřené množině $M \subset \mathbb{E}_n$. Určete a načrtněte v \mathbb{E}_2 množinu D , ve které je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná. Zdůvodněte!
- Určete a načrtněte graf funkce $z = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$.
- Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [1, -2]$ ve směru, který je určen vektorem $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, kde bod $B = [0, 0]$. Popište chování funkce f v bodě A v daném směru (funkce roste, resp. klesá, jak rychle (odhad)).
- Napište rovnici tečné roviny a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě dotyku $T = [1, -2, ?]$.
- Napište rovnice izokřivky (tj. $f(x, y) = k$) této funkce pro $k = 0, k = 3$. Izokřivky načrtněte.

Řešení:

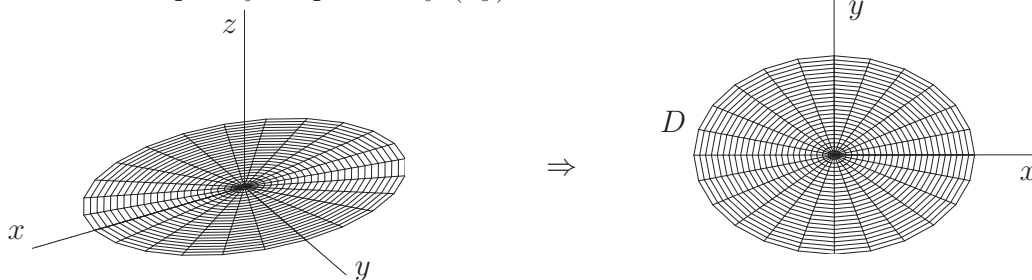
$$\text{a) } f_x = \frac{1}{2\sqrt{18 - x^2 - 2y^2}} \cdot (-2x), \quad f_y = \frac{1}{2\sqrt{18 - x^2 - 2y^2}} \cdot (-4y) \Rightarrow$$

$$18 - x^2 - 2y^2 > 0 \Rightarrow D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 18 - x^2 - 2y^2 > 0\},$$

tj. vnitřek elipsy se středem v počátku, poloosy: $a = 3\sqrt{2}, b = 3$,

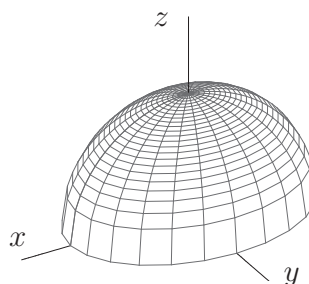
ZDŮVODNĚNÍ: v oblasti D má daná funkce spojité parciální derivace

Promítnutí plochy do průmětny (xy)



b)

Grafem je "horní" polovina (tj. $z \geq 0$) elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$



c) $\text{grad}f(A) = (-1/3, 4/3)$, $\vec{s} = (-1, 2)$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 3\sqrt{5}/5$, daná funkce je v bodě A v daném směru rostoucí, směr tečny svírá se směrem \vec{s} úhel asi 50°

d) $A = [1, -2] \in D(f)$, $T = [1, -2, ?]$ leží na ploše $\Rightarrow z_T = f(A) = 3$

Tečná rovina τ má rovnici $z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\tau : z = 3 - \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{4}{3}(y + 2), \text{ po úpravě na obecný tvar } x - 4y + 3z = 18,$$

normála $n : [x, y, z] = [1, -2, 3] + t(1, -4, 3), t \in \mathbb{R}$

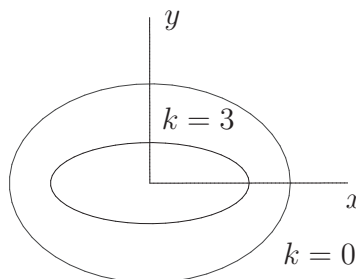
e)

Izokřivky jsou elipsy:

$$x^2 + 2y^2 = k$$

$$x^2 + 2y^2 = 18 \text{ (hranice } D(f), \text{ pro } k=0),$$

$$x^2 + 2y^2 = 9 \text{ (pro } k = 3).$$



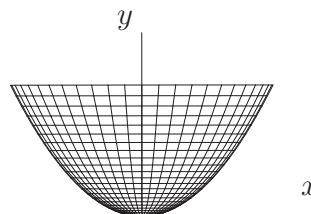
Příklad 156. Je dána funkce $z = f(x, y) = -\sqrt{5y - x^2}$.

- Napište (a zdůvodněte), ve kterých bodech $[x, y] \in \mathbb{E}_2$ je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná. Množinu těchto bodů načrtněte.
- Vypočítejte parciální derivace 1. řádu dané funkce v bodě $A = [4, 5]$. Popište chování dané funkce v bodě A (funkce roste, resp. klesá, v jakém směru a odhadněte, jak rychle).
- Určete směr \vec{s} , ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A v tomto směru \vec{s} .
- Napište diferenciál funkce f v bodě $A = [4, 5]$. Jeho užitím vypočítejte přibližnou hodnotu funkce f v bodě $[4.3, 5.3]$.
- Načrtněte graf funkce $z = f(x, y)$.

Řešení :

- Na množině $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 5y - x^2 > 0\}$ má daná funkce spojité parciální derivace.

D je "vnitřek" paraboly s vrcholem v počátku a osou v ose y



- $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{4}{3}$, daná funkce je v bodě A v kladném směru osy x rostoucí,

a to pod úhlem asi $50^\circ - 55^\circ$,

- $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{5}{6}$, daná funkce je v bodě A v kladném směru osy y klesající,

úhel mezi vektorem tečny a vektorem \vec{j} je asi 40° .

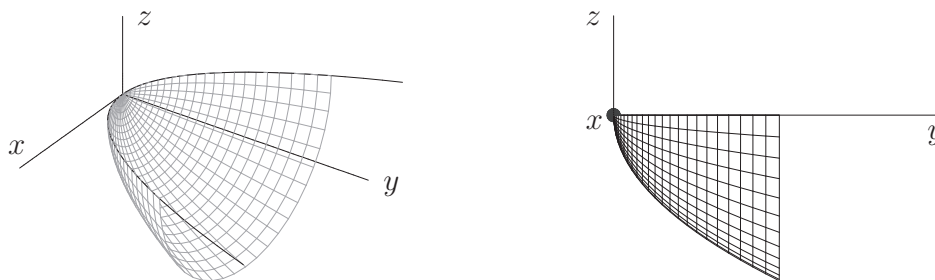
- $\vec{s} = -\text{grad}f(A) = (-4/3, 5/6)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{\text{grad}f(A) \cdot (-\text{grad}f(A))}{\|-\text{grad}f(A)\|} = -\|\text{grad}f(A)\| = -\sqrt{89}/6 \doteq -1.6,$$

funkce je v bodě A ve směru vektoru \vec{s} klesající a úhel mezi tečnou a vektorem \vec{s} je asi 60°

- $df(A) = \frac{4}{3} dx - \frac{5}{6} dy, f(4.3, 5.3) \doteq f(A) + \frac{4}{3} 0.3 - \frac{5}{6} 0.3 = -2.85.$

- e) Graf je "dolní" polovina ($z \leq 0$) rotačního paraboloidu $y = (x^2 + z^2)/5$, osa rotace je v ose y .



157. a) Určete a načrtněte v \mathbb{E}_2 oblasti, ve kterých je funkce $z = \ln(xy - 4)$ diferencovatelná a zdůvodněte.
 b) Určete gradient této funkce f v bodě $A = [-2, -4]$. Popište, co vypočtený vektor udává.
 c) Určete velikost derivace zadané funkce v bodě A ve směru gradientu.
 d) Určete vektor \vec{s} , v jehož směru je derivace dané funkce v bodě A nulová. Ověřte výpočtem.
 e) Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0$ a pro $k = \ln 4$.
 [a) $D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x < 0, y < 4/x\}$, $D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0, y > 4/x\}$,
 [b) $\text{grad}f(A) = (-1, -1/2)$ udává směr maximálního růstu dané funkce v bodě A
 [c) $\vec{s} \cdot \text{grad}f(A) = 0 \Rightarrow \vec{s} \perp \text{grad}f(A)$, např. $\vec{s} = (1/2, -1)$, d) $y = 5/x$, $y = 8/x$.]

158. Je dána funkce $f(x, y) = x^2 - y^2 + 6xy + 2x$, bod $A = [-1, 2]$ a směr $\vec{s} = (2, -2)$.

- a) Vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$. Je to směr maximálního růstu funkce f v bodě A ?
 b) Určete všechny body, v nichž je $\text{grad} f(x, y) = \vec{0}$.
 c) Najděte bod dotyku a rovnici tečné roviny τ ke grafu funkce f rovnoběžné s rovinou $\rho : 4x + 6y - z + 3 = 0$.

$$[a) \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 11\sqrt{2}, \text{ NE}]$$

$$[b) x = -1/10, y = -3/10, c) T = [1, 0, 3], 4x + 6y - z - 1 = 0.]$$

159. Je dána funkce $z = f(x, y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$.

- a) Určete, kde je funkce diferencovatelná a vypočítejte f_x, f_y .
 b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, 1, ?]$.
 c) Užitím diferenciálu vypočítejte přibližnou hodnotu funkce f v bodě $[0.9, 1.1]$.

$$[a) f_x = 2xy^2 \cos(x^2 - y^2), f_y = 2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2)]$$

$$[b) z = 2x - 2y, c) f(0.9, 1.1) \doteq -0.4.]$$