

Funkce. Limita a spojitost

skriptum J. Neustupa

III.2 Fce - základní pojmy

Fce složená, omezená, periodická, ...

III.3 Vybrané fce. Grafy, $D(f)$, ...

III.3.5 Cyklometrické fce.

Podrobněji

1. $D(f)$, přehled
2. Fce sudá, lichá
3. Fce inverzní

Definice

limita funkce f v bodě x_0

limity jednostranné

limita vlastní

limita nevlastní

Základní věty o limitě funkce

Věta 4.4 Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.12 Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu a právě tehdy, když má v bodě x_0 limitu zleva i zprava a obě jsou rovny a .

Věta 4.6 Nechť existují $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$.

Pak platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * g(x) = a * b$, **pokud** výraz $a * b$ má smysl.

Zde symbol $*$ znamená operaci z mn. $\{+, -, \times, /\}$

Věta 4.9 o limitě typu $1/f(x)$

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$ v $P(x_0)$.

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Věta 4.32* (limita složené funkce)

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, kde $g(x) \neq 0$ v $P(x_0)$.

Nechť $\lim_{y \rightarrow a} f(y) = L$.

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L$

Spojitosť funkce

je podstatná vlastnost, která se objevuje v předpokladech mnoha vět a výpočetních postupů (algoritmů).

Definice Ř., že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Spojitosť zprava, zleva v bodě $x_0 \in D(f)$

Ř., že funkce f je spojitá v intervalu I , je-li f spojitá v každém bodě intervalu I . Patří-li krajní bod(y) do I , pak se v nich požaduje spojitost zleva, resp. zprava.

Základní věty o spojitosti

Věta 4.24 o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí
v bodě resp. v intervalu.

Věta 4.25 o spojitosti složené funkce $f(g(x))$ v bodě x_0

Věta 4.22 (spojitost tzv. základních funkcí)

Funkce mocninná, exponenciální, logaritmická, funkce goniometrické, cyklometrické a funkce abs. hodnota jsou **spojité v každém bodě svého def. oboru**. Tedy též v každém intervalu, který je částí $D(f)$.

!!! Důsledek předchozích vět.

Stejné tvrzení platí pro každou funkci, která vznikla operacemi sčítání, odečítání, násobení, dělení a/nebo skládání funkcí z Věty 4.22.

Příklad 1. Polynom

Příklad 2. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Příklad 3. Důležitý !!!

Postačující podmínkou pro existenci integrálu je spojitost fce \implies

Integrál $\int f(x) dx$ existuje v každém intervalu I , který je částí $D(f)$.

Další důležité vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.26 (Darbouxova vlastnost)

Nechť funkce f je spojitá v omezeném intervalu $I = \langle a, b \rangle$.
Pak funkce f nabývá na I všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Důsledek. Nechť navíc je $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Pak existuje bod $\alpha \in (a, b)$ takový, že $f(\alpha) = 0$.

Poznámka. Na tom je založena numerická **metoda půlení intervalu** (bisekce) pro řešení rovnice $f(x) = 0$.
Najde řešení přibližné, ALE s požadovanou přesností.