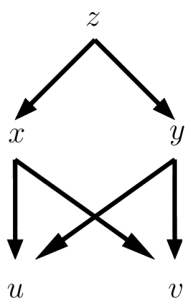
II.7.* Derivace složené funkce

• Vypočítejte derivace daných složených funkcí :

***Příklad* 160**. $z = \mathrm{e}^x \ln y, \quad x = u\cos v,\ y = u\sin v, \quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = ?, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

Řešení : Závislost mezi proměnnými znázorníme orientovaným grafem, ze kterého sestavíme vzorce pro jednotlivé derivace.



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

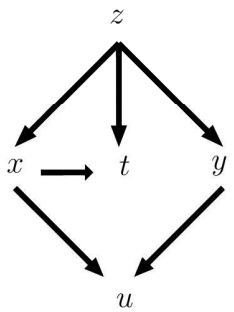
Nyní tyto derivace vypočítáme :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \mathrm{e}^x \ln y\cdot\cos v + \frac{\mathrm{e}^x}{y}\sin v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\mathrm{e}^x \ln y\cdot u\sin v + \frac{\mathrm{e}^x}{y}u\cos v. \qquad \blacksquare$$

Poznámka : V tomto jednoduchém příkladě bychom mohli dosadit za x a y. Pak derivace funkce $z = \mathrm{e}^{u\cos v}\ln(u\sin v)$ by se dala spočítat přímo, avšak naším úkolem je procvičení derivací složených funkcí.

***Příklad* 161**. $z = \ln(x^2 + y^2 + \dfrac{1}{t^2}), \quad x = u^2 + t,\ y = u^2 - u, \quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = ?, \ \dfrac{\partial z}{\partial t} = ?$

Řešení :



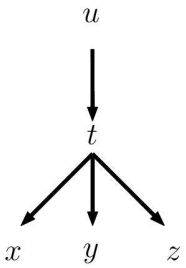
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \overline{\frac{\partial z}{\partial t}}.$$

(Derivace s pruhem $\overline{\dfrac{\partial z}{\partial t}}$ je pomocné označení a odpovídá přímé šipce od z k t, kdežto $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ je celková derivace z podle t.)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}\cdot 2u + \frac{2y}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}(2u-1) = \frac{2}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}(2xu + 2yu - y),$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2x}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}\cdot 1 + \frac{1}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}(-\frac{2}{t^3}) = \frac{2}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}(x - \frac{1}{t^3}). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 162**. $u = f(x^4 + y^4 - 2z^4)$. Spočítejte výraz $V = \dfrac{1}{4x^3}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{4y^3}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{1}{4z^3}\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Řešení : Označme $t = x^4 + y^4 - 2z^4$. Pak $u = f(t)$ a



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) \cdot 4x^3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = f'(t) \cdot 4y^3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = f'(t) \cdot (-8z^3).$$

Po dosazení snadno spočítáme, že $V = 0$. ■

163. Přesvědčte se, že funkce $y = f(x + at) + g(x - at)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. Předpokládáme, že f a g jsou dvakrát diferencovatelné funkce. [Návod: $u = x + at,\ v = x - at,\ y = f(u) + g(v)$]

164. Přesvědčte se, že funkce $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ splňuje rovnici $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Předpokládáme, že f je diferencovatelná funkce.

165. Jsou dány funkce $z = f(u, v),\ u = x^2 - y^2,\ v = \mathrm{e}^{xy}$. Spočítejte diferenciální výraz $W = y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$, kde f je diferencovatelná funkce. $\left[W = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{xy} \dfrac{\partial f}{\partial v}\right]$

166. Je dána funkce $f(x, y) = x^y$, kde $x = u^2 + v^2,\ y = uv + v^2$. Spočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ v bodě A, jehož souřadnice jsou $u = 1,\ v = -1$. $\left[\dfrac{\partial f}{\partial u}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(A) = -\ln 2\right]$

II.9. Funkce definované implicitně

***Příklad* 167**. Dokažte, že rovnicí $x^3 + y^3 = 2x^2 + xy - 1 = 0$ je implicitně definována jediná funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $A = [1, 0]$. Určete $f'(1)$ a $f''(1)$.

Řešení : Označme $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2x^2 - xy + 1$ funkci, která je spojitá v $\mathbb{E}_2$ a má spojité parciální derivace 1. a 2. řádu v $\mathbb{E}_2$. K existenci a jednoznačnosti implicitní funkce $y = f(x)$ nyní stačí, že $F(A) = F(1, 0) = 0$ a $F_y = (3y^2 - x)\Big|_A = -1 \neq 0$. Dále spočítáme

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 4x - y}{3y^2 - x}, \qquad f'(1) = -\frac{3 - 4}{-1} = -1,$$
$$y'' = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = -\frac{(6x - 4 - y')(3y^2 - x) - (3x^2 - 4x - y)(6y \cdot y' - 1)}{(3y^2 - x)^2}$$
$$f''(1) = -\frac{(6 - 4 + 1)(-1) - (3 - 4)(-1)}{1} = 4.$$ ■

***Příklad* 168**. Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x, y) \equiv x^3y + y^3x + x^2y - 3 = 0$ v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení : Jelikož $F(1, 1) = 0$ a $F_y(A) = \left(x^3 + 3y^2x + x^2\right)_{[1,1]} = 5 \neq 0$, je rovnicí $F(x, y) = 0$ skutečně definována křivka $y = y(x)$, která prochází bodem A.

$$y'(1) = -\frac{F_x}{F_y}(A) = \left(-\frac{3x^2y + y^3 + 2xy}{x^3 + 3y^2x + x^2}\right)\Big|_A = -\frac{6}{5}$$

$$t: \quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \text{ kde } A = [x_0, y_0], \quad y - 1 = -\frac{6}{5}(x-1) \Longrightarrow 6x + 5y - 11 = 0,$$

$$n: \quad y - 1 = \frac{5}{6}(x-1) \Longrightarrow 5x - 6y - 1 = 0. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 169**. Rovnicí $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ je dána **logaritmická spirála.** Stanovte y' a y''.

Řešení : Můžeme použít známý vzorec $y' = -\dfrac{F_x}{F'_y}, F_y \neq 0$ nebo můžeme danou rovnici přímo derivovat a přitom si uvědomitt, že y je závislé na x tj. $y = y(x)$.
Derivujme přímo :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} \Longrightarrow \frac{x + yy'}{x^2+y^2} = \frac{y'x - y}{x^2+y^2} \quad \Longrightarrow$$

$$x + yy' = y'x - y \Longrightarrow x + y = y'(x-y) \Longrightarrow \quad y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad x \neq y$$

Druhou derivaci spočítáme podobně :

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{x - y - x - y + y'(x - y + x + y)}{(x-y)^2} =$$

$$y'' = \frac{-2y + 2xy'}{(x-y)^2} = \frac{-2y + 2x \cdot \frac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 170**. Ukažte, že rovnicí $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $A = [0, 1]$. Zjistěte, zda je $f(x)$ konvexní v okolí bodu A. Napište rovnici tečny ke grafu funkce v bodě A.

Řešení : $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3$ je diferencovatelná v $\mathbb{E}_2$ a má v $\mathbb{E}_2$ spojité parciální derivace 2. řádu. Dále platí:

$$F(A) = F(0,1) = 0, \quad F_y = (2x + 2y + 2)\Big|_A \neq 0,$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + 2y - 4}{2x + 2y + 2} = -\frac{x + y - 2}{x + y + 1} \Longrightarrow y'(0) = \frac{1}{2},$$

$$y'' = -\frac{(1+y')(x+y+1) - (x+y-2)(1+y')}{(x+y+1)^2} = -\frac{3(1+y')}{(x+y+1)^2} \quad \Longrightarrow$$

$y''(0) = -\dfrac{3(1+\frac{1}{2})}{(0+1+1)^2} = -\dfrac{9}{8} < 0$. Funkce $y = f(x)$ je v bodě A konkávní, jelikož $y''(0) < 0$. Tečna v bodě A má rovnici $y - 1 = \dfrac{1}{2}x \Longrightarrow x - 2y + 2 = 0$. $\blacksquare$

***Příklad* 171**. Dokažte, že vztahem $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$ je definována jediná funkce $z = f(x, y)$ v okolí bodu $A = [-1, -2, 1]$. Určete grad $f(1, -2)$.

Řešení : Funkce F má spojité parciální derivace v okolí bodu A,

$F(A) = F(-1, -2, 1) = 0, \quad F_z(A) = (3z^2 + 3x^2)\Big|_A = 6 \neq 0.$ Tím je v okolí bodu A prokázaná nebo prokázána existence a jednoznačnost funkce $z = f(x, y)$, která má spojité parciální derivace.

Nyní je grad $f(1, -2) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(A), \dfrac{\partial z}{\partial y}(A)\right)$, kde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{6xz - 2y}{3z^2 + 3x^2} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,-2) = \frac{1}{3},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2x}{3z^2 + 3x^2} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) = -\frac{1}{3},$$
$$\operatorname{grad} f(1,-2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,-1). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 172**. V okolí bodu $[2,-2,1]$ je dána funkce $z = f(x,y)$ v implicitním tvaru $\ln z + x^2yz + 8 = 0$. Určete $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A)$, kde $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, $A = [2,-2]$, $B = [3,-3]$.

Řešení : Označíme $F(x,y,z) = \ln z + x^2yz + 8$. V bodech, kde $F(x,y,z) = 0$ a $F_z(x,y,z) \neq 0$ platí :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xyz}{\frac{1}{z} + x^2y} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(A) = -\frac{8}{7}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x^2z}{\frac{1}{z} + x^2y} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \frac{4}{7},$$
$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left(-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{-12}{7\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{7}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 173**. Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$, v bodě $A = [3,0,4]$.

Řešení : Víme, že normálový vektor k ploše má vyjádření

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}, -1\right) \Longrightarrow \vec{n} = (F_x, F_y, F_z).$$

Je-li plocha vyjádřena v implicitním tvaru, pak poslední zápis je výhodnější. Tedy $\vec{n} = (2x, 2y, 2z) \sim (x,y,z)\big|_A = (3,0,4)$,

$$\tau : 3(x-3) + 0 \cdot y + 4(z-4) = 0 \Longrightarrow 3x + 4z - 25 = 0,$$
$$n : [x,y,z] = [3,0,4] + t(3,0,4),\ t \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 174**. Napište rovnici tečné roviny k ploše $F(x,y,z) \equiv x(y+z) + z^2 - 5 = 0$ rovnoběžné s rovinou $\varrho : 3x - 3y + 6z = 2$.

Řešení : $\vec{n} = (3,-3,6) \sim (1,-1,2)$

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (y+z, x, x+2z) = k(1,-1,2)$$

$\left\{\begin{array}{r} y+z = k \\ x = -k \\ x+2z = 2k \end{array}\right\}$ a z této soustavy musíme určit souřadnice dotykového bodu A.

Vychází $x = -k$, $y = -\dfrac{k}{2}$, $z = \dfrac{3}{2}k$. Víme, že hledaný bod musí ležet na dané ploše, proto dosadíme do $F(x,y,z) = 0$ a určíme konstantu k , a tím i souřadnice hledaného bodu. Dostáváme postupně

$$-k\left(-\frac{k}{2} + \frac{3}{2}k\right) + \left(\frac{3}{2}k\right)^2 = 5, \quad -k^2 + \frac{9}{4}k^2 = 5, \quad k^2 = 4, \qquad k = \pm 2,$$
$$A_1 = [-2,3,-1], A_2 = [2,-3,1];$$
$$\tau_1 : x - y + 2z + 7 = 0, \quad \tau_2 : x - y + 2z - 7 = 0. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 175**. Určete rovnici tečny v bodě $A = [-2,1,6]$ ke křivce v $\mathbb{E}_3$, dané rovnicemi $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$.

Řešení : Snadno určíme tečnou rovinu v bodě A k první ploše $\tau_1 : -4x + 3y + 6z - 47 = 0$ a tečnou rovinu ke druhé ploše $\tau_2 : -4x + 4y - z - 6 = 0$. Směrový vektor hledané tečny je $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-27,-28,-4) \sim (27,28,4)$ a rovnice tečny

$$[x, y, z] = [-2, 1, 6] + t(27, 28, 4),\ t \in \mathbb{R}.$$

Uvedeme další možný postup. Při daném vyjádření křivky jako průniku dvou ploch budeme předpokládat, že jediná nezávislá proměnná je x. Potom y a z budou funkcemi

proměnné x, tj. $y(x), z(x)$.

Hledaný tečný vektor $\vec{s}$ bude $(1, y'(x), z'(x))$. Proto danou soustavu zderivujeme podle x :

$$\begin{cases} 4x + 6yy' + 2zz' = 0 \\ 2x + 4yy' = z' \end{cases} \quad \text{neboli} \quad \begin{cases} 2x + 3yy' + zz' = 0 \\ 2x + 4yy' = z' \end{cases}.$$

Nás zajímá tečný vektor v daném bodě, proto dosadíme souřadnice bodu A a obdržíme postupně vzájemně ekvivalentní soustavy

$$\left\{ \begin{array}{l} -4 + 3y' + 6z' = 0 \\ -4 + 4y' - z' = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} 3y' + 6z' = 4 \\ 4y' - z' = 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} y' = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-28}{-27} = \dfrac{28}{27}, \\ z' = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{-27} = \dfrac{-4}{-27} = \dfrac{4}{27} \end{array} \right\}.$$

Hledaný tečný vektor je $\vec{s} = \left(1, \dfrac{28}{27}, \dfrac{4}{27}\right) \sim (27, 28, 4)$. Parametrické vyjádření tečny je tedy opět $[x, y, z] = [-2, 1, 6] + t(27, 28, 4),\ t \in \mathbb{R}$. ■

***Příklad* 176**. a) Najděte jednotkový vektor $\vec{n}^o$ vnější normály v bodě $A = [1, -1, 1]$ plochy vyjádřené implicitně ve tvaru $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$.

b) Spočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}^o}(A)$, kde $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Řešení : a) $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 2z) \sim (x, y, z)$, $\quad \vec{n}^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}^o}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{n}^o = (1, -2, 3) \cdot \dfrac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$ ■

• Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě A :

177. $F(x, y) \equiv \arcsin x + xy^2 = 0,\ A = [0, 2]$ $\quad [t:\ x = 0, n:\ y = 2]$

178. $F(x, y) \equiv x^2y + xy^2 - axy - a^3 = 0,\ A = [a, a]$ $\quad [t:\ y = -x + 2a, n:\ y = x]$

179. Dokažte, že rovnicí $\ln(x + y) + 2x + y = 0$ je definována funkce $y = f(x)$ splňující $f(-1) = 2$. Napište rovnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $A = [-1, 2]$.

$[t : y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)]$

• Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.

a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $F(x, y)$.

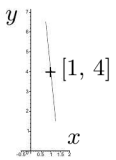
b) Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci $f'(x)$ v okolí bodu x_0.

c) Určete hodnotu derivace $f'(x_0)$ a napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[x_0, y_0]$. Popište chování této funkce v bodě x_0, tj. rostoucí, resp. klesající.

d) Rovnici tečny užijte k přibližnému výpočtu hodnoty $y = f(x)$ v bodě x_1 a tečnu načrtněte.

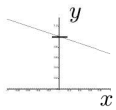
180. $F(x,y) = x^2y - x^3 - 2\cdot\sqrt{y} + 1$, $[x_0, y_0] = [1, 4]$, $x_1 = 0.8$

$$\left[\begin{array}{r} a)\ F_x = 2xy - 3x^2,\ F_y = x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{y}} \\ c)\ f'(1) = -10,\ t:\ y = 4 - 10(x-1),\ n:\ y = 4 + \dfrac{1}{10}(x-1), \\ \text{funkce} f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ klesající} \\ d)\ f(0.8) \doteq 6 \end{array}\right]$$



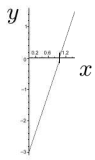
181. $F(x,y) = y\,\mathrm{e}^x + y^2 - 2x^2y - 2$, $[x_0, y_0] = [0, 1]$, $x_1 = -0.3$

$$\left[\begin{array}{r} a)\ F_x = y\,\mathrm{e}^x - 4xy,\ F_y = \mathrm{e}^x + 2y - 2x^2 \\ c)\ f'(0) = -1/3,\ t:\ y = 1 - x/3,\ n:\ y = 1 + 3x, \\ \text{funkce} f \text{ je v bodě } x_0 = 0 \text{ klesající} \\ d)\ f(-0.3) \doteq 1.1 \end{array}\right]$$



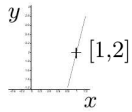
182. $F(x,y)) = \ln(x-y) + 2x + y^2 - 2 = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 0]$, $x_1 = 1.1$

$$\left[\begin{array}{r} a)\ F_x = \dfrac{1}{x-y} + 2,\ F_y = -\dfrac{1}{x-y} + 2y \\ c)\ f'(1) = 3,\ t:\ 3x - y = 3,\ n:\ x + 3y = 1, \\ \text{funkce} f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ rostoucí} \\ d)\ f(1.1) \doteq 0.3 \end{array}\right]$$



183. $F(x,y) = xy\mathrm{e}^{\mathrm{x-y}} - \dfrac{2}{\mathrm{e}} = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $x_1 = 1.1$

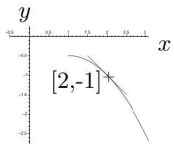
$$\left[\begin{array}{r} a)\ F_x = (y + xy)\,\mathrm{e}^{x-y},\ F_y(x,y) = (x - xy)\,\mathrm{e}^{x-y} \\ c)\ f'(1) = 4,\ t:\ y = 2 + 4(x-1),\ n:\ x + 4y = 9, \\ \text{funkce} f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ rostoucí} \\ d)\ f(1.1) \doteq 2.4 \end{array}\right]$$



- Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$
  a) Napište **postačující** podmínky pro existenci spojité funkce $y = f(x)$ určené implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a pro spojitost její derivace $f'(x)$ v okolí bodu x_0.
  b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x,y) = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0]$ a která má spojitou 1. a 2. derivaci v okolí bodu x_0.
  c) Určete hodnoty derivací $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.
  d) Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem v bodě x_0. Pomocí $T_2(x)$ k vypočítejte přibližně hodnotu $f(x)$ pro x_1.
  e) Načrtněte graf funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

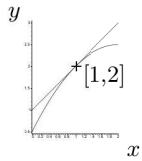
184. $F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$, $[x_0, y_0] = [2, -1]$, $x_1 = 2.2$

$$\left[\begin{array}{r} c) f'(2) = f''(2) = -1, \\ d)\, T_2(x) = 1 - x - \dfrac{(x-2)^2}{2}, \\ f(2.2) \doteq -1.22 \end{array}\right]$$



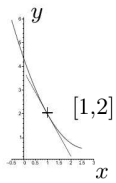
185. $F(x,y) = x^3 + \dfrac{y^2}{2} - x^2 y - 1 = 0,\ [x_0, y_0] = [1,2],\ x_1 = 1.2$

$$\left[\begin{array}{r} c) f'(1) = f''(1) = 1, \\ d)\, T_2(x) = 1 + x - \dfrac{(x-1)^2}{2}, \\ f(1.2) \doteq 2.18 \end{array}\right]$$



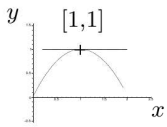
186. $F(x,y) = x^3 + xy^2 + xy - 7 = 0,\ [x_0, y_0] = [1,2],\ x_0 = 0.9$

$$\left[\begin{array}{r} c) f'(1) = -\dfrac{9}{5},\ f''(1) = \dfrac{138}{125}, \\ d)\, T_2(x) = 2 - \dfrac{9}{5}(x-1) - \dfrac{69}{125}(x-1)^2, \\ f(1.2) \doteq \dfrac{27319}{12500} \end{array}\right]$$



187. $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0,\ [x_0, y_0] = [1,1],\ x_0 = 1.2$

$$\left[\begin{array}{r} c) f'(1) = 0,\ f''(1) = -2, \\ \text{v bodě nastává lokální maximum} \\ d)\, T_2(x) = 1 - (x-1)^2,\ f(1.2) \doteq 0.8 \end{array}\right]$$



• Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše $F(x,y,z) = 0$ v bodě A :

188. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0,\ A = [1,2,2]$

$[\tau:\ x + 4y + 6z - 21 = 0,\ n:\ [x,y,z] = (1,2,2) + t(1,4,6),\ t \in \mathbb{R}]$

189. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0,\ A = [1,2,-1]$

$[\tau:\ x + 11y + 5z - 18 = 0,\ n:\ [x,y,z] = (1,2,-1) + t(1,11,5),\ t \in \mathbb{R}]$

190. $xyz^2 - x - y - z = 0,\ A = [1,-1,-1]$

$[\tau:\ -2x + z + 3 = 0,\ n:\ [x,y,z] = (1,-1,-1) + t(-2,0,1),\ t \in \mathbb{R}]$

• Napište rovnici takové tečné roviny k ploše $F(x,y,z) = 0$, která je rovnoběžná s rovinou ϱ.

191. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\ \varrho: x + 2y + z = 0$

$[x + 2y + z \pm \sqrt{6} = 0$, body dotyku $T_{1,2} = [\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}]]$

192. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0,\ \varrho:\ x + 4y + 6z = 0$ $\quad [x + 4y + 6z \pm 21 = 0,\ T_{1,2} = [\pm 1, \pm 2, \pm 2]]$

193. Je dána funkce $z = f(x,y)$ v implicitním tvaru $\mathrm{e}^z - xyz = \mathrm{e}$. Určete $f_x(A), f_y(A), f_{xy}(A)$, kde bod $A = [0, \mathrm{e}, 1]$ $\quad [f_x(A) = 1,\ f_y(A) = 0,\ f_{xy}(A) = 1/\mathrm{e}]$

194. Jsou dány dvě plochy rovnicemi v implicitním tvaru $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ a $x^2 - xy - 8x + \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{11}{2} = 0$. Určete vzájemnou polohu tečných rovin obou ploch

ve společném bodě $T = [2, -3, 1]$. [$x + 2y - z + 5 = 0$ je společná tečná rovina]

- Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$.
  a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y, z) =$ je implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, jejíž graf prochází bodem A, a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$.
  b) Vypočtěte derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ a určete grad $f\,(x_0, y_0)$.
  c) Napište rovnici tečné roviny τ a rovnici normály n ke grafu funkce f v bodě A (tj. též k ploše popsané rovnicí $F(x, y, z) = 0$).
  d) Rovnici tečné roviny užijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $[x_1, y_1]$.
  e) Určete derivaci funkce f v bodě A ve směru $\vec{u}$. Napište směr $\vec{s}$, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A ve směru $\vec{s}$.

195. $F(x, y, z) = 2x^3yz - x + y^3 + z^3 - 2 = 0, A = [1, 2, -1], [x_1, y_1] = [0.9, 2.1], \vec{u} = (1, 2)$

$$\left[\begin{array}{r} b)\ \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{6x^2yz-1}{2x^3y+3z^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x^3z+3y^2}{2x^3y+3z^2},\ \operatorname{grad} f\,(1,2) = (13, -10) \\ [c)\ \tau:\ 13x - 10y - z = 8,\ n:\ [x, y, z] = [1, 2, -1] + t(13, -10, -1),\ t \in \mathbb{R} \\ \left[d)\ f(0.9, 2.1) \doteq -1.3,\quad e)\ \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = \frac{17}{\sqrt{5}},\quad \vec{s} = (-13, 10),\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1,2) = -1\right. \end{array}\right]$$

196. $F(x, y, z) = x^3 + 3xy^2z + 2yz^3 = 0, A = [1, -1, -1], [x_1, y_1] = [0.9, -1.1], \vec{u} = (1, -2)$

$$\left[\begin{array}{r} b)\ \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3x^2 + 3y^2z}{3xy^2 + 6yz^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{6xyz + 2z^3}{3xy^2 + 6yz^2},\ \operatorname{grad} f\,(1,-1) = \left(0, -\frac{4}{3}\right) \\ [c)\ \tau:\ 4y - 3z + 1 = 0,\ n:\ [x, y, z] = [1, -1, -1] + t(0, 4, -3),\ t \in \mathbb{R} \\ d)\ f(0.9, -1.1) \doteq -1.13,\quad e)\ \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1) = -\frac{8}{3\sqrt{5}},\quad \vec{s} = \left(0, -\frac{4}{3}\right),\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1,-1) = -1 \end{array}\right]$$

197. $F(x, y, z) = z\mathrm{e}^{x+y} - xy + z^2 - 6 = 0,\ A = [0, 0, 2],\ [x_1, y_1] = [-0.2, 0.1],\ \vec{u} = (-1, 2)$

$$\left[\begin{array}{r} b)\ \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{z\mathrm{e}^{x+y} - y}{\mathrm{e}^{x+y} + 2z},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y\mathrm{e}^{x+y} - x}{\mathrm{e}^{x+y} + 2z},\ \operatorname{grad} f\,(0,0) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right) \\ c)\ \tau:\ 2x + 2y + 5z = 10,\ n:\ [x, y, z] = [0, 0, 2] + t(2, 2, 5),\ t \in \mathbb{R} \\ d)\ f(-0.2, 0.1) \doteq 1.96,\quad e)\ \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = -\frac{2}{5\sqrt{5}},\quad \vec{s} = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right),\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0) = -1 \end{array}\right]$$