III. Křivkové integrály

1. Jednoduchá křivka v $\mathbb{E}_2$, v $\mathbb{E}_3$
Parametrizace, orientace

2. Křivkový integrál skalární funkce $\int_C \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$
(délka, hmotnost, těžiště, momenty ...)

3. Křivkový integrál vektorové funkce
$\int_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ (práce vykonaná silou $\overrightarrow{f}$ po křivce C)

4. Greenova věta
výpočet cirkulace $\oint_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ pomocí dvojného integrálu $\int\int_{IntC}$

5. Potenciální vektorové pole
(nevířivé, konzervativní)

III.1 Jednoduché křivky

Definice. Jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_3$, resp. v $\mathbb{E}_2$ je množina bodů $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$, kde P je zobrazení intervalu $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ do $\mathbb{E}_3$ popsané vztahy

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$$
$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{t} \in \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle, \quad \text{přičemž platí}$$

1. Zobrazení P je spojité a prosté v $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ s možností $P(a) = P(b)$ (tzv. uzavřená křivka).
2. Derivace $\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{t}) = (\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}),\ \dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}),\ \dot{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}))$ je spojitá, omezená a nenulová v $(a,\ b)$.

Zobrazení P se nazývá parametrizace křivky.

Křivky značíme např. $C,\ C_1,\ K, \ldots$

Jednoduchá po částech hladká křivka

Př. Křivka $C : x = 2\,y^2 + 1$ mezi body $A = [3, 1]$, $B = [9, 2]$.

III.2 Křivkový integrál skalární funkce

$\int_C \boldsymbol{f(x,y)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, resp. $\int_C \boldsymbol{f(x,y,z)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, stručně $\int_C \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenní struny (drátu) tvaru JHK

Definice.
Nechť $\boldsymbol{C}$ je JHK v $\mathbb{E}_2$, resp. v $\mathbb{E}_3$ s parametrizací P v $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.
Funkce f se nazývá integrovatelná na křivce C, jestliže existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b \boldsymbol{f(P(t))\|\dot{P}(t)\|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}.$$

Značíme $\int_C f\,\mathrm{d}s$ a nazýváme křivkovým integrálem skalární funkce f na křivce C (též integrál 1. druhu)

Poznámka: Existence a hodnota nezávisí na volbě parametrizace P.

Nutná podm. pro existenci:
Fce f je omezená na křivce C

Postačující podm. pro existenci:
Fce f je spojitá na křivce C

Slabší požadavek:
Fce f je spojitá na $(C - M)$, kde M je konečná mn.

Poznámka. $\boldsymbol{C} = \cup \boldsymbol{C}_i$ je jedn. po částech hl. křivka