

# MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

I. Základy lineární algebry

# Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

IV. Integrální počet

~~Vektorové prostory, matice, soustavy lineárních~~

~~Reálné čísla, posloupnosti, funkce, limity, derivace~~

~~Derivace funkcí, vlastnosti, derivace, výpočet~~

Primitivní funkce, integrál, vlastnosti a výpočet  
neurčitého integrálu, Riemannův integrál a jeho  
aplikace, numerický výpočet. (9.-13. týden)

# Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

<http://mat.fs.cvut.cz>

Informace o předmětu Matematika I:

<http://marian.fsik.cvut.cz/~mraz/Matematika%201.htm>

Garant předmětu: doc. František Mráz, **e-mail:** [Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz](mailto:Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

(kontakt pro zasílání dotazů, námětů, připomínek ...)

2 úrovně: A a B (A je nutno až pro absolvování TZSI, jinak volitelná. Čtěte fakultní mail!

Přednáška: středa 10:45 v D266 a pátek 9:00 v D266, možnost i v angličtině.

Cvičení: 2x v týdnu dle rozvrhu (povinné)

Seminář z Matematiky I: libovolný, **zkouška po částech** (navíc jeden termín),

- úroveň A: úterý, 17:45 v D256, Bodnár nebo čtvrtek 17:45 D366, Prokop
- úroveň B: úterý 17:45 v D266, Šístek,

Repetitorium: čtvrtek 16:00 D133, Kittlerová (od 10.10, 6 týdnů, zápočet)

# Matematika I.

## Základní doporučená literatura:

- [1] **J.Neustupa: Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2010 (a starší vydání: 2008...).
- [2] **S. Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbíрка příkladů z Matematiky I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013 (i starší, ale s jiným číslováním příkladů). Skripta obsahují vybrané úlohy ze zkoušek z minulých let.

## Další doporučená literatura

- [5] **E.Brožíková, M.Kittlerová: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.** Řešené příklady. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2004.
- [6] **MATEMATIKA I - ukázka zkouškových testů.** Webové stránky ÚTM, odkaz Matematika I, též tištěné ve firmě Copia v budově na Karlově nám.
- [7] **J.Neustupa: Mathematics I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004. (Anglická verze skripta [1].)

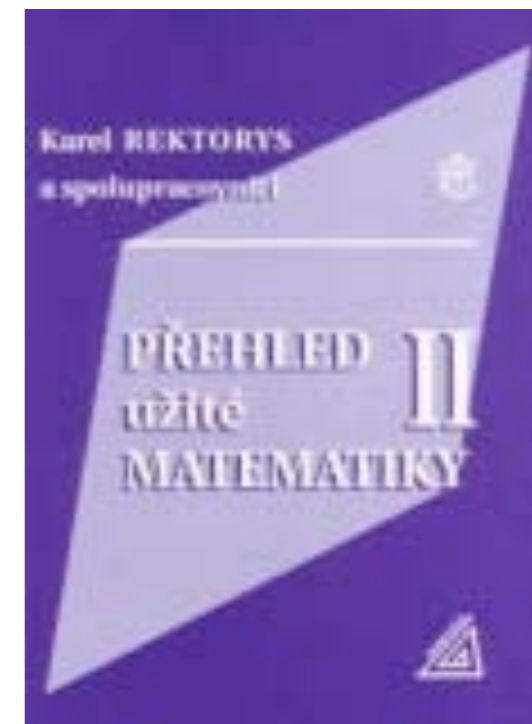
# Matematika I.

## Literatura k doplnění znalostí a počítání příkladů ze středoškolské matematiky:

- [8] **F. Mráz: Opakování středoškolské matematiky** (vybrané partie).  
Webové stránky ÚTM pod odkazem Matematika I.
- [9] **J. Černý a kolektiv: Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT.**  
Nakladatelství ČVUT Praha, 2007 (stručný přehled a příklady ze středoškolské matematiky, částečně i řešené).

## Literatura pro ty, kteří to se studiem techniky myslí vážně:

- [10] **K. Rektorys a spol.: Přehled užité matematiky I, II.** Nakladatelství Prometheus, 7. vydání 2000.  
(Encyklopedie aplikované matematiky)



# Matematika I.

## I. Lineární algebra

- I.1. Reálný aritmetický vektorový prostor
- I.2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů
- I.3. Vektorový prostor, obecná definice
- I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru, podprostor
- I.5. Matice
- I.6. Hodnota matice
- I.7. Determinant matice
- I.8. Inverzní matice
- I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic
- I.10. Frobeniova věta
- I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic
- I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

# Matematika I.

těleso reálných čísel

## 0. Reálná předmluva

**Vlastnosti reálných čísel:**  $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- pro všechna  $a, b, c \in \mathbf{R}$  je  $a + b = b + a \in \mathbf{R}$  (sčítání je komutativní)  
 $u + (v + w) = (u + v) + w$  (sčítání je asociativní)
- existuje **nulový prvek**  $0 \in \mathbf{R}$  tak, že pro všechna  $a \in \mathbf{R}$  je  $0 + a \in \mathbf{R}$
- pro každé  $x \in \mathbf{R}$  existuje **opačný prvek vzhledem ke sčítání**  $y \in \mathbf{R}$  tak, že  $x + y = 0$
- pro libovolné  $a, b, c \in \mathbf{R}$  je  $a \cdot b = b \cdot a \in \mathbf{R}$  (násobení je komutativní)  
 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (násobení je asociativní)
- násobení a sčítání jsou **distributivní**:  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}: a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- existuje **jednotkový prvek**  $1 \in \mathbf{R}$  tak, že pro všechna  $a \in \mathbf{R}$  je  $1 \cdot a \in \mathbf{R}$
- pro každé reálné  $x$ ,  $x \neq 0$  existuje v  $\mathbf{R}$  **opačný prvek vzhledem k násobení**  $y \in \mathbf{R}$  tak, že  $x \cdot y = 1$

# Matematika I.

## I. Lineární algebra

### I.1. Vektorový prostor

**Definice:** Je-li  $\mathbf{R}$  množina reálných čísel a  $n$  je nějaké přirozené číslo, potom uspořádanou  $n$ -tici reálných čísel  $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots a_n)$  budeme nazývat (*reálným*) *aritmetickým vektorem*. Číslo  $a_i$  nazýváme  *$i$ -tou složkou* vektoru  $\mathbf{a}$ . Číslo  $n$  je *rozměr* vektoru  $\mathbf{a}$ .

Sčítání aritmetických vektorů:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots a_n) + (b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots a_n+b_n)$$

Násobení vektoru reálným číslem  $r \in \mathbf{R}$ :

$$r.\mathbf{a} = r.(a_1, a_2, \dots a_n) = (r.a_1, r.a_2, \dots r.a_n)$$



## I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru  $n$  tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat  $V(\mathbf{R}^n)$  nebo zkráceně pouze  $\mathbf{R}^n$ .

Vlastnosti:

- pro všechna  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$  je  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- existuje nulový prvek  $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$  tak, že pro všechna  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  je  $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  existuje opačný prvek  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$  tak, že  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- sčítání je asociativní:  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- sčítání je komutativní:  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- pro libovolné  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ ,  $r \in \mathbf{R}$  je  $r \cdot \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- násobení číslem je asociativní:  $\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: a(b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}$
- násobení číslem je distributivní:

$$\forall a \in \mathbf{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n: a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$$

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n: (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$$

## I. 2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Je-li  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  skupina vektorů z vektorového prostoru  $V$  a  $r_1, r_2, \dots, r_k$  jsou reálná čísla, potom vektor  $\mathbf{v}$ , který vznikne součtem

$$\mathbf{v} = r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k,$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ .

**Definice:** Množina vektorů  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$  z vektorového prostoru  $V$  je *lineárně závislá* právě tehdy, když existuje  $k$ -tice čísel  $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  z nichž alespoň jedno je nenulové taková, že

$$r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Poslední rovnice napsaná po složkách má tvar soustavy lineárních algebraických rovnic

$$r_1 \cdot a_{11} + r_2 \cdot a_{21} + \dots + r_k \cdot a_{k1} = 0$$

$$r_1 \cdot a_{12} + r_2 \cdot a_{22} + \dots + r_k \cdot a_{k2} = 0$$

.....

$$r_1 \cdot a_{1n} + r_2 \cdot a_{2n} + \dots + r_k \cdot a_{kn} = 0$$

*Lineární nezávislost* (LNZ) znamená, že tato soustava má jediné, pouze nulové řešení.

## I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$  počet řádků,  
 (řádkové vektory)

$n =$  počet sloupců, sloupcové vektory

- A je matice typu  $m \times n$
- je-li  $m=n$  matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*
- prvky  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  tvoří *hlavní diagonálu* matice A

příklady matic:

$$B = \begin{pmatrix} 8, & -1, & 5, & 15, & -7, & 2 \\ 0, & 3, & -11, & 5, & -12, & 24 \\ -4, & 8, & 0, & 7, & -3, & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1, & 4, \\ 2, & 0, \\ 3, & 5, \\ -2, & 8, \\ 4, & 0, \end{pmatrix} \quad D = (1, 4, 2, 0, 3)$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

horní  
trojúhelníková

$$F = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dolní  
trojúhelníková

$$G = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \\ 0, & 5, & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diagonální

$$H = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \cdots & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

transponovaná  
 $J = A^T, J = A'$

$$F = G^T$$

## I.5. Matice, operace

Rovnost:  $A = B \Leftrightarrow$  jsou stejného typu  $m \times n$  a platí  $\forall i,j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání:  $C = A+B \Leftrightarrow$  A a B jsou stejného typu a platí  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem:  $D = k.A \Leftrightarrow \forall i,j: d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu  $m \times n$  tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

a) existuje nulová matice  $O: \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n : o_{ij}=0$

b) platí  $A + B = B + A$

c)  $A + (B + C) = (A + B) + C$

d) k matici A existuje matice  $B = -A$  tak, že  $A + B = A - A = O$

e) pro  $\alpha \in \mathbf{R}$  platí  $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$

f) pro  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  platí  $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$

Navíc pro sčítání a transpozici platí

g)  $(A + B)^T = A^T + B^T$

## I.5. Matice, násobení matic

Násobení matic:  $C = A.B \iff$  jsou *zřetězené*, tj. počet řádků matice A je stejný, jako počet sloupců matice B (A je typu  $m \times k$  a B je typu  $k \times n$ ) a platí

$$d_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Pro násobení matic platí následující vlastnosti (při dodržení zřetězení):

a)  $A.(B + C) = A.B + A.C$  (je distributivní)

b)  $(A.B).C = A.(B.C)$  (je asociativní)

**c) násobení matic není komutativní:  $A.B \neq B.A$**


d)  $(A.B)^T = B^T . A^T$

e) existuje jednotková matice

$$I = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

tak, že platí:  $I.A = A.I = A$

## I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$


$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 4, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ -18z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

---


$$z = \frac{1}{18} \quad y = 1 - 5z = \frac{13}{18} \quad x = 3y + 2z = \frac{41}{18}$$

## I.5. Matice, ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy matice (nemění řešení odpovídající soustavy rovnic):

- a) změna pořadí řádků
- b) vynásobení řádku nenulovým číslem
- c) přičtení k libovolnému řádku lineární kombinace ostatních řádků
- d) vynechání nulového řádku



## I.6. Hodnost matice

**Definice:** *Hodnost matice*  $A$  je číslo  $h(A)$ , rovné maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců nebo řádků matice.

- Je-li  $A$  horní trojúhelníková matice typu  $m \times n$  jejíž diagonální prvky jsou všechny nenulové, potom  $h(A) = \min\{m, n\}$ .
- Ekvivalentní úpravy (na řádcích i na sloupcích) nemění hodnost matice



Hodnost matice určíme tak, že ji postupně převedeme ekvivalentními úpravami na trojúhelníkový tvar a spočteme počet nenulových řádků.

### I.3. Vektorový prostor: Obecnější definice

**Definice:** Množinu  $V$  budeme nazývat *vektorovým prostorem*, pokud jsou pro její prvky (*vektory*) definovány operace

- sčítání, pro kterou platí
  - ▶ pro všechna  $v \in V$ ,  $w \in V$  je  $v+w \in V$
  - ▶ existuje nulový prvek  $0 \in V$ : pro všechna  $v \in V$  je  $0+v \in V$
  - ▶ pro každé  $w \in V$  existuje opačný prvek  $v \in V$  tak, že  $w+v=0$
  - ▶ sčítání je asociativní:  $u+(v+w)=(u+v)+w$
  - ▶ sčítání je komutativní:  $u+v=v+u$
- násobení reálným číslem (skalárem), pro které platí
  - ▶ pro libovolné  $v \in V$ ,  $a \in \mathbf{R}$  existuje prvek  $a.v \in V$
  - ▶ pro libovolné  $v \in V$  a jednotkový prvek  $1 \in \mathbf{R}$  platí  $1.v \in V$
  - ▶ asociativní zákon: pro všechna  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $w \in V$  je  $a(b.w)=(ab).w$
  - ▶ distributivní zákon: pro všechna  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $u, v \in V$  platí
$$a(u+v)=a.u+a.v \quad \text{a také} \quad (a+b).v=a.v+b.v$$

### I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor  $V(U)$  s nosičem  $U$  nad tělesem  $F$  ( $F$  je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
  - pokud je  $F$  množina reálných čísel  $\mathbf{R}$ , hovoříme o reálném vektorovém prostoru,
  - je-li  $F$  tělesem komplexních čísel, potom mluvíme o komplexním vektorovém prostoru.
- Nosič prostoru  $\mathbf{R}^n$  je vlastně kartézským součinem  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$
- Nulový vektor je určen jednoznačně (je ve  $V(U)$  jediný)
- Opačný vektor k vektoru  $\mathbf{x}$  značíme  $-\mathbf{x}$  a je také určen jednoznačně.
- Pro každý vektor  $\mathbf{x}$  platí:  $-(-\mathbf{x})=\mathbf{x}$ ;  $-\mathbf{x}=(-1).\mathbf{x}$
- Pro každý vektor  $\mathbf{x}$  je  $0.\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ; podobně pro každý skalár  $r$  je  $r.0=\mathbf{0}$
- Z rovnice  $r.\mathbf{x}=\mathbf{0}$  vyplývá, že buď  $r=0$  nebo  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ .

### I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem:  $\mathbf{0}$  (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel  $\mathbf{R}$
- Množina všech komplexních čísel  $\mathbf{C}$
- Množina všech uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel  $\mathbf{R}^n$
- Množina všech uspořádaných  $n$ -tic komplexních čísel  $\mathbf{C}^n$
- Množina všech reálných mnohočlenů (polynomů)
- Množina všech mnohočlenů stupně nejvýše  $p$
- Množina všech matic typu  $m \times n$
- Množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu  $\langle a, b \rangle$
- Množina všech spojitých funkcí definovaných na intervalu  $\langle a, b \rangle$

### I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

*n*- rozměrný Eukleidovský vektorový prostor  $V(E_n)$  je vektorový prostor, jehož nosičem je  $\mathbf{R}^n$ , na němž jsou definovány obvyklé operace sčítání a násobení skalárem a navíc je definována tzv. Eukleidovská vzdálenost  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dvou vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , definovaná takto:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

- Vektorový prostor  $V(E_n)$  se často označuje pouze zkráceně symbolem  $E_n$
- Prostor  $E_n$  pro  $n=1, 2, 3$  také někdy nazýváme geometrickým prostorem
- Eukleidovská vzdálenost vektorů definuje tzv. Eukleidovskou normu vektoru  $\mathbf{x}$ , což je jeho vzdálenost od nulového vektoru  $\mathbf{0}$ . Tuto normu značíme  $\|\mathbf{x}\|$  a je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

### I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

*skalární součin vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  v  $E_n$  je číslo (skalár)*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

- V  $E_3$  s pro skalární součin platí rovnost

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\varphi)$$

kde  $\varphi$  je úhel, který svírají geometrické vektory  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ .

- Odtud lze spočítat úhel  $\varphi$  jako

$$\cos(\varphi) = \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

- Nulovost skalárního součinu je kritériem "kolmosti":

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

## I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru

**Definice:** *Báze* vektorového prostoru  $V$  je největší množina lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru. Počet vektorů báze nazýváme *dimenzí* vektorového prostoru  $V$ .

**Věta:** Je-li  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  báze vektorového prostoru  $V$  dimenze  $n$ , potom pro každý vektor  $\mathbf{u}$ , který je z prostoru  $V$  a není prvkem báze platí, že jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze a to právě jediným způsobem (tedy *jednoznačně*).

Koeficienty ve vyjádření vektoru  $\mathbf{u}$  pomocí báze  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  nazýváme *souřadnicemi* vektoru  $\mathbf{u}$  vzhledem k bázi  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ .

**Báze vektorového prostoru  $V$  dimenze  $n$  není určena jednoznačně!**  
To znamená, že v každém vektorovém prostoru kromě triviálního můžeme nalézt nekonečně mnoho různých bází. Všechny však mají stejný počet členů rovný dimenzi tohoto prostoru  $n$ .

## I.4. Podprostor

**Definice:** Je-li  $V$  vektorový prostor a  $U$  je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$  je  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné  $\mathbf{a} \in U$  a  $r \in \mathbf{R}$  je  $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom  $U$  nazýváme podprostorem vektorového prostoru  $V$ .

**Věta:** Je-li  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  skupina vektorů z vektorového prostoru  $V$  dimenze  $n$  a je  $k < n$ , potom všechny lineární kombinace vektorů  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  tvoří podprostor dimenze  $k$  prostoru  $V$  (tzv. *lineární obal*).

**Příklady:**

$$1) P = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{u} = (x, 2y), x, y \in \mathbf{R} \}$$

$$2) Q = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 0), x, y \in \mathbf{R} \}$$

$$3) W = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 1), x, y \in \mathbf{R} \}$$

$$4) Q = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, 2x, 3x), x \in \mathbf{R} \}$$

$$5) Z = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 2x - 3y), x, y \in \mathbf{R} \}$$

$$6) S = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 2x + 3y - 1), x, y \in \mathbf{R} \}$$



## I.7. Determinant matice

Uvažujme čtvercovou matici  $A$  typu  $n \times n$ . *Determinantem* matice  $A$  nazveme číslo  $\det A$  (někdy též označovaný symbolem  $|A|$ ), které dostaneme výpočtem podle následujících pravidel:

- a) je-li  $A = (a)$  čtvercová matice typu  $1 \times 1$ , potom je  $\det A = a$
- b) je-li  $n > 1$ , vybereme libovolný řádek (například  $i$ -tý) a položíme

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in},$$

kde  $A_{ij}$  je tzv. *algebraický doplněk* prvku  $a_{ij}$  v matici  $A$ :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$$

kde  $A_{ij}^*$  je determinant části matice  $A$ , která vznikne vyškrtnutím  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce

- bod b) popisuje tzv. *rozvoj determinantu* podle  $i$ -tého řádku
- podobně lze počítat determinant rozvojem podle  $j$ -tého sloupce:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Geometrická interpretace: Absolutní hodnota determinantu je rovna objemu rovnoběžnostěnu, vytvořeného nad řádky matice  $A$

## I.7. Determinant matice

**Definice:** Je-li matice  $A$  čtvercová typu  $n \times n$ , potom *determinant matice  $A$*  je definován vztahem

kde sočin je  
tzv. znaménko

Sarussovo pravidlo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}$   
 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$

$\cdot a_{n,j_n}$   
,  $n$  a  $\pi(j_1, \dots, j_n)$  je

Výpočet det

a)  $n = 1$ :

b)  $n = 2$ :

b)  $n = 3$ :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}}_{\text{green line}} - \underbrace{a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}}_{\text{red line}}$$

c)  $n > 3$ : rozvojem podle nějakého řádku nebo sloupce

## I.7. Determinant matice, vlastnosti

- a)  $\det A = \det A^T$
- b) Jsou-li  $A$  a  $B$  čtvercové matice stejného typu, je  $\det(A.B) = \det A \cdot \det B$
- c) Obsahuje-li matice  $A$  nulový řádek nebo sloupec, je  $\det A = 0$
- d) Vyměníme-li v matici  $A$  dva sousední řádky nebo sloupce, celý determinant změní znaménko
- e) vynásobíme-li některý řádek (sloupec) matice  $A$  číslem  $\lambda$ , je determinant nové matice roven  $\lambda \cdot \det A$
- f) Determinant se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců)

Z vlastností c), f) vyplývají přímo dvě následující vlastnosti:

- a) Je-li některý řádek (sloupec) v matici  $A$  násobkem jiného řádku (sloupce), je  $\det A = 0$
- b) Je-li v matici  $A$  některý řádek (sloupec) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je  $\det A = 0$

## I.8. Inverzní matice

Čtvercovou matici  $n \times n$  s hodností  $n$  nazýváme *regulární*.  
Je-li její hodnost menší než  $n$ , potom říkáme, že je *singulární*.

**Definice:** Je-li matice  $A$  regulární, potom k ní existuje matice  $A^{-1}$  taková, že

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I,$$

kde  $I$  je jednotková matice stejného rozměru jako  $A$ . Matici  $A^{-1}$  nazýváme inverzní maticí k matici  $A$ .

- Matice  $A$  je regulární právě když  $\det A \neq 0$ .
- Pro inverzní matice platí
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

## I.8. Inverzní matice, výpočet

Výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$A_{ij}$  jsou algebraické doplňky prvků  $a_{ij}$  v matici  $A$ .

Výpočet inverzní matice pomocí ekvivalentních úprav:

$$(A | I) \sim \cdots \sim (I | A^{-1})$$

Úpravy se mohou provádět pouze na řádcích celé rozšířené matice.

## I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

vektor  
neznámých

Zápis soustavy v maticovém tvaru:

matice  
soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektor  
pravých  
stran

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

rozšířená  
matice  
soustavy

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$n$  = počet neznámých  
 $m$  = počet rovnic  
 (obecně nemusí být  $n = m$ )

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b})$$

## I.10. Frobeniova věta

Soustava  $m$  lineárních algebraických rovnic o  $n$  neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

$$\text{Soustava má řešení} \iff h(A) = h(A|\mathbf{b})$$

Je-li  $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = n$ , potom má soustava právě jedno řešení.  
Je-li  $h(A) = h(A|\mathbf{b}) < n$ , pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

- Příklad kdy  $h(A) = h(A|\mathbf{b}) > n$  nikdy nemůže nastat!
- Pokud je  $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = k < n$ , potom množinu všech řešení lze vyjádřit pomocí  $n-k$  obecných parametrů.
- Pokud je  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , je vždy  $h(A) = h(A|\mathbf{0})$  a tedy taková soustava má vždy řešení (jedná se o tzv. *homogenní soustavu rovnic*)
- Je-li hodnota matice homogenní soustavy rovna počtu neznámých  $n$ , tedy  $h(A) = n$ , má tato soustava pouze triviální řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- Je-li hodnota matice homogenní soustavy menší než  $n$ , potom množina všech jejích řešení vytvoří podprostor  $\mathbf{R}^n$  dimenze  $n-h(A)$ .

## I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

### Gaussova eliminační metoda:

- i. vezmeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji posloupností ekvivalentních řádkových úprav na trojúhelníkový tvar
- ii. výslednou matici opět vyjádříme jako soustavu rovnic, kterou řešíme "zdola nahoru"

Gaussovou eliminační metodu lze použít na jakoukoli soustavu algebraických rovnic.

### Řešení soustavy rovnic s použitím Cramerova pravidla:

- i. spočteme determinant matice soustavy  $d = \det A$ . Pokud je různý od nuly, pokračujeme dál.  
V opačném případě Cramerovo pravidlo nelze použít.
- ii. spočteme determinanty  $d_i = \det A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  kde  $A_i$  je matice, která vznikne z matice  $A$  záměnou  $i$ -tého sloupce za vektor pravých stran.
- iii. potom pro řešení  $(x_1, \dots, x_n)$  platí, že  $x_i = \frac{d_i}{d}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .



## I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Řešení pomocí inverzní matice:

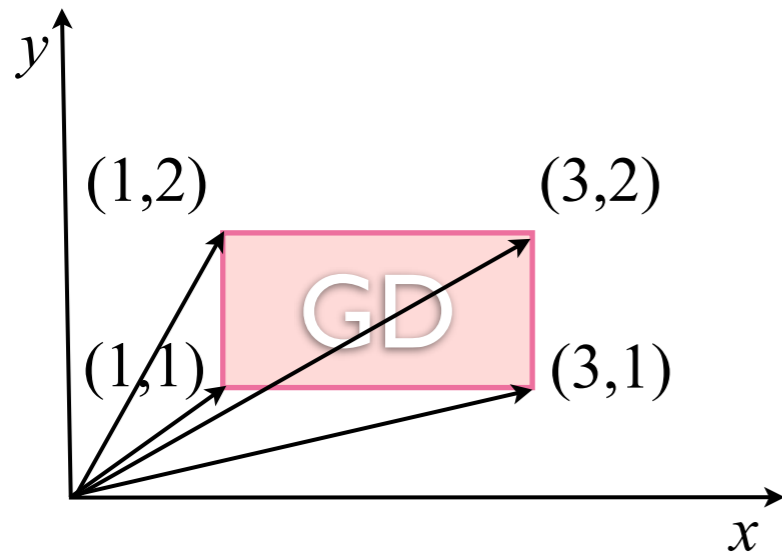
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

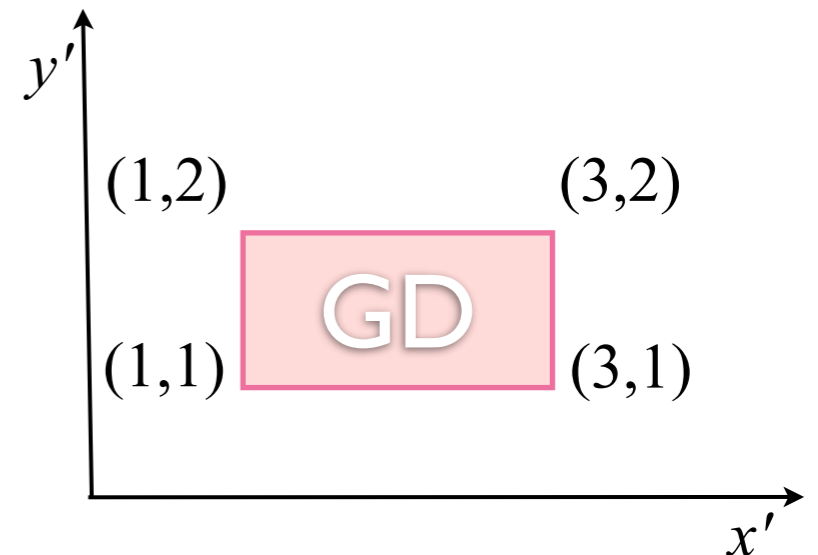
Stejně jako Cramerovo pravidlo, tuto metodu lze použít pouze když  
 $\det A \neq 0$

# I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

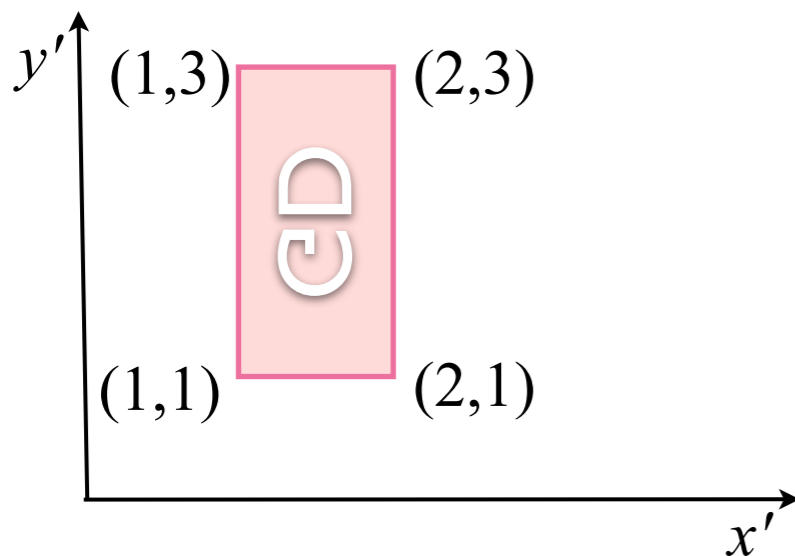
Geometrické transformace v  $E_2$ :  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



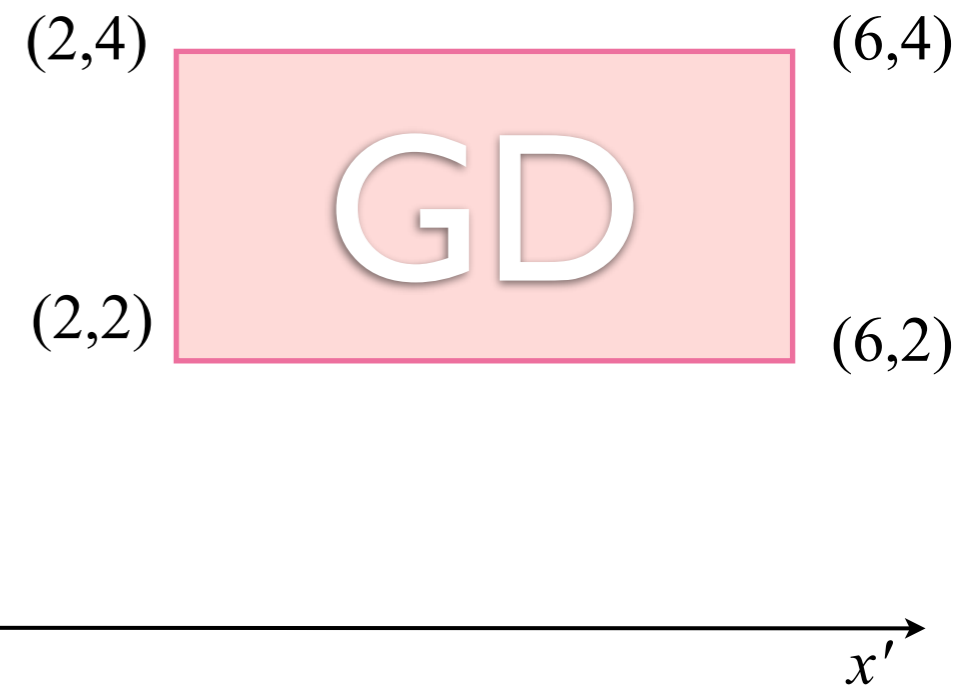
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

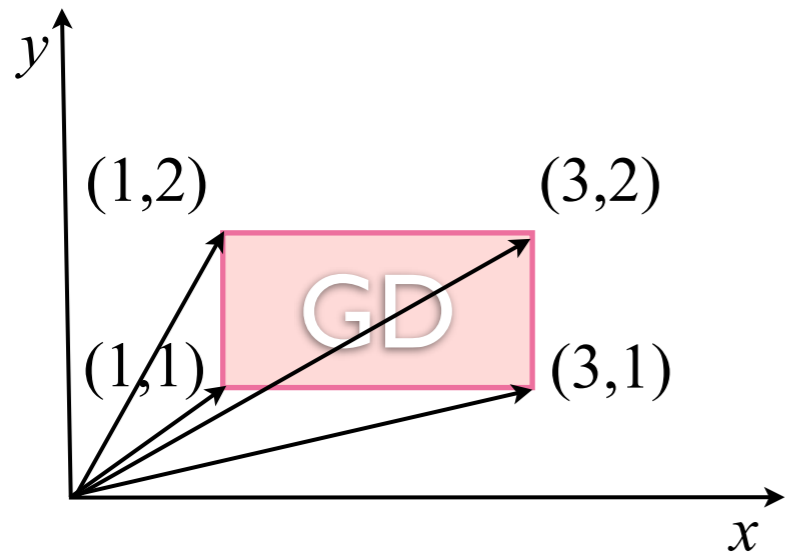


$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

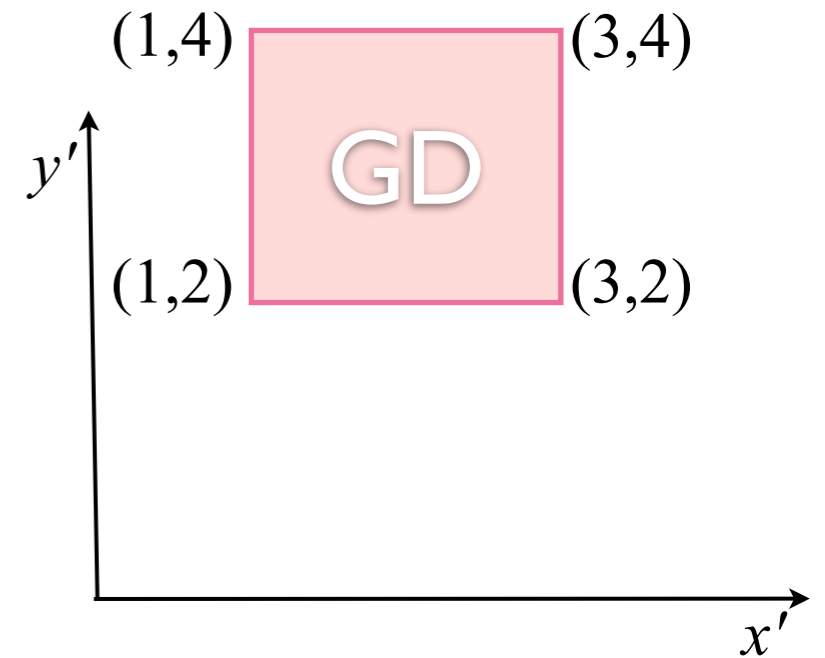


# I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

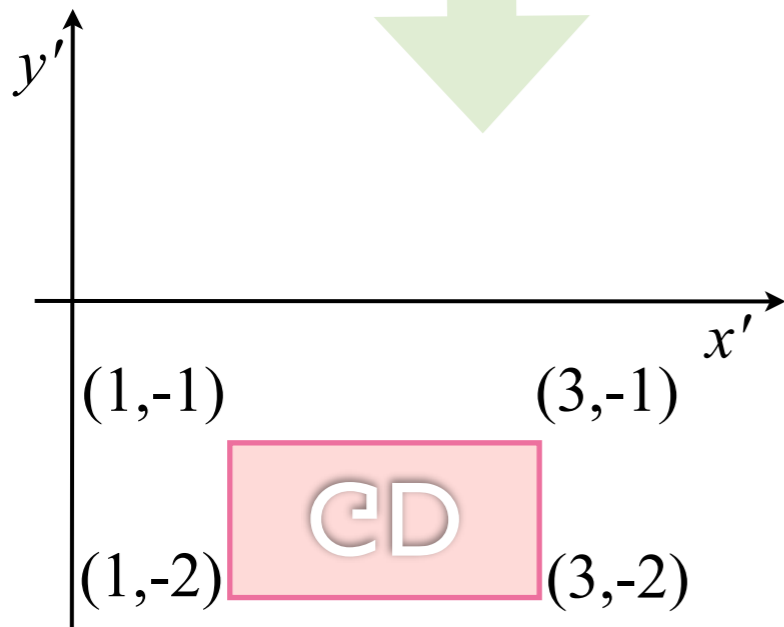
Geometrické transformace v  $E_2$ :  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



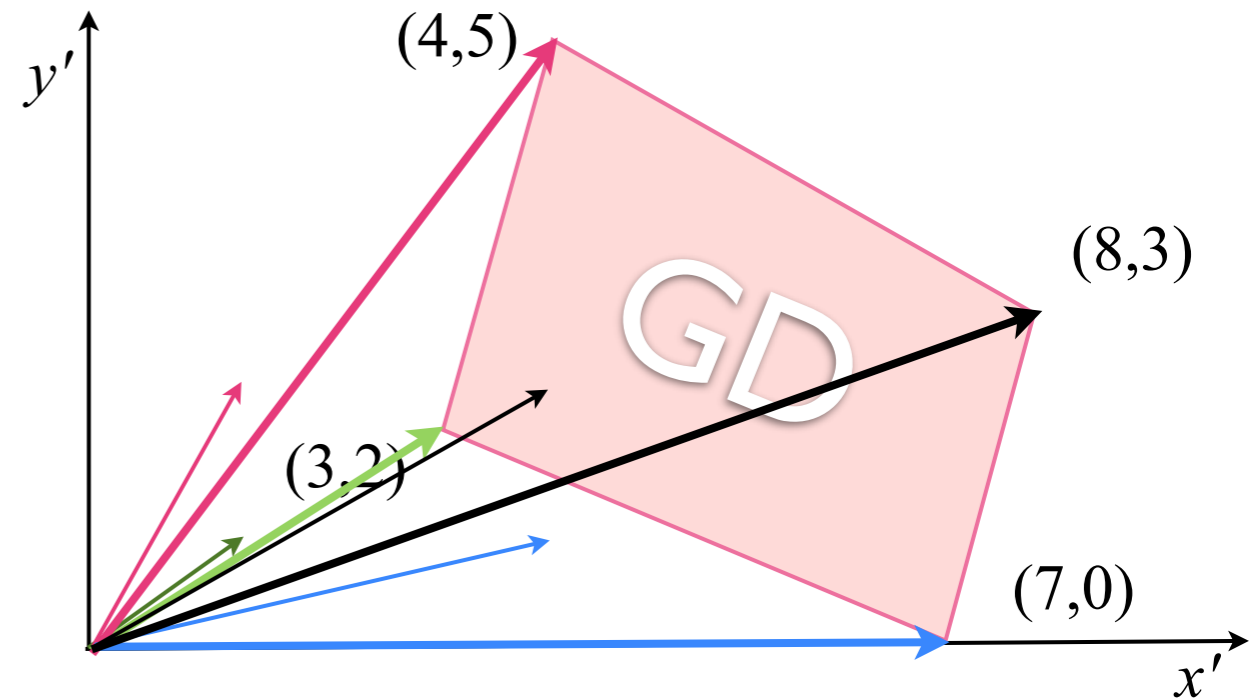
$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

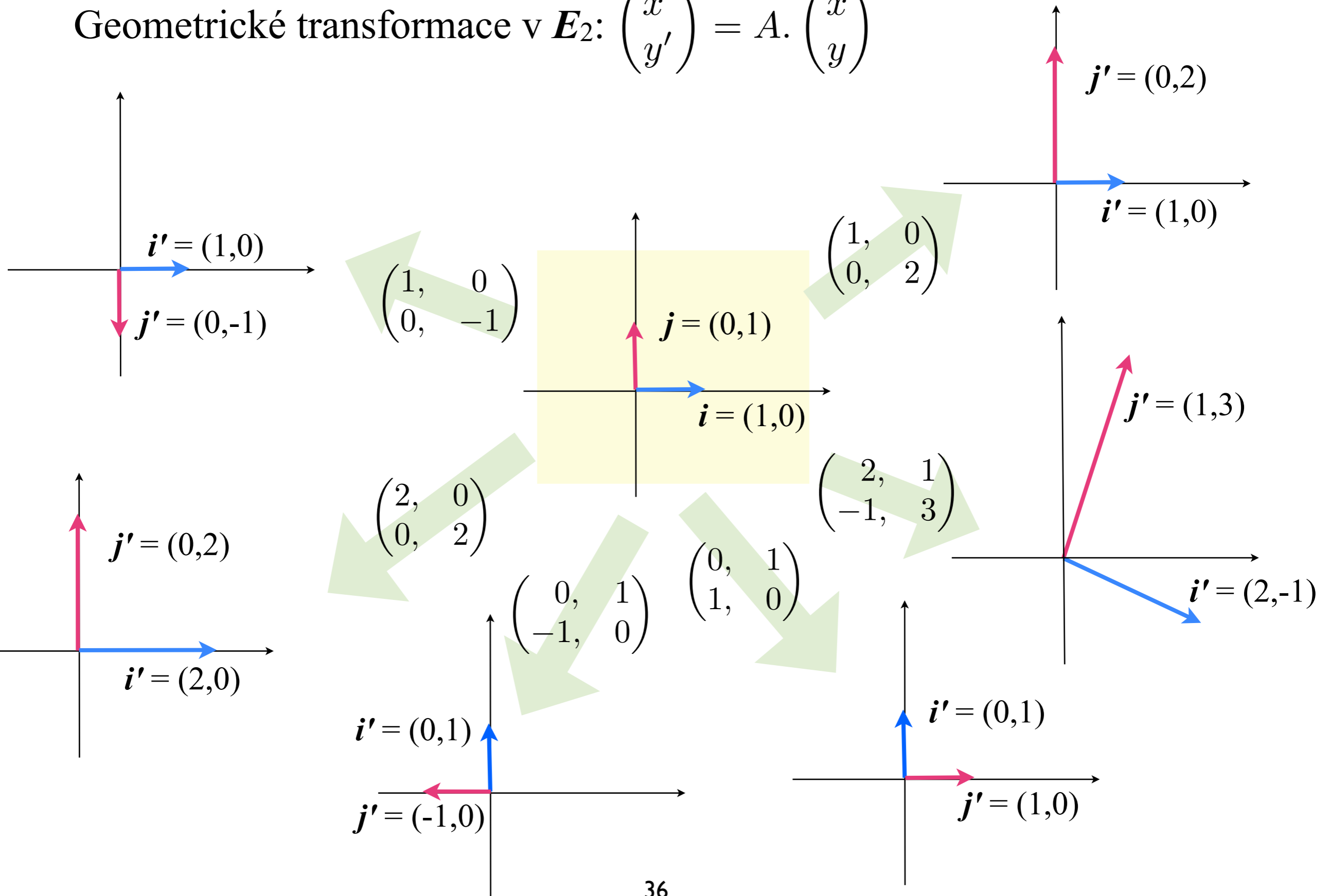


$$\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$$



# I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v  $E_2$ :  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



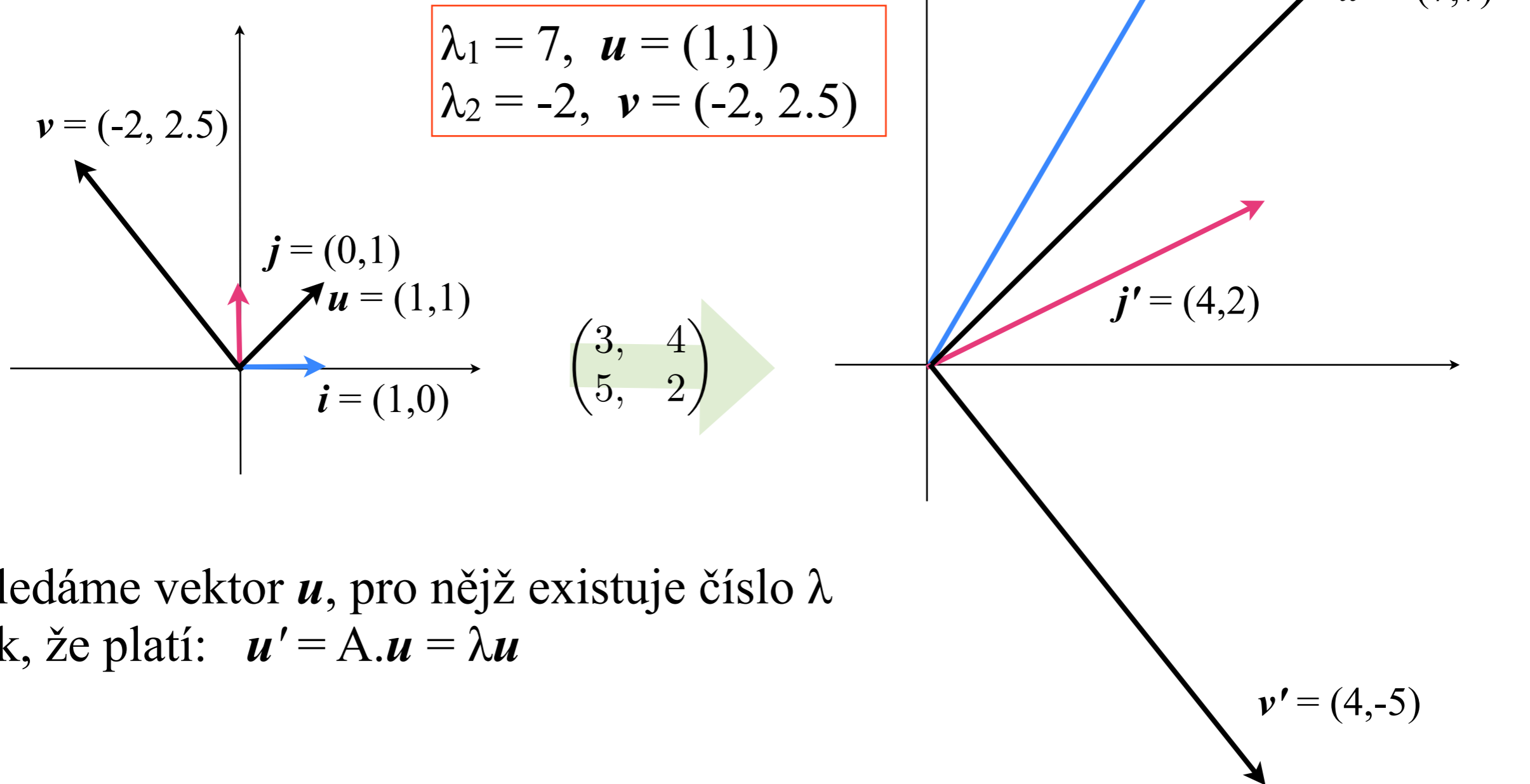
## I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v  $E_2$ :  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- identické zobrazení:  $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy x:  $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy y:  $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- otočení o úhel  $\psi$  doleva:  $A = \begin{pmatrix} \cos\psi, & -\sin\psi \\ \sin\psi, & \cos\psi \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 1. a 3. kvadrantu:  $A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 2. a 4. kvadrantu:  $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- změna měřítka:  $A = \begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & b \end{pmatrix}$
- zpětná transformace:  $B = A^{-1}$

## I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v  $E_2$ :



Hledáme vektor  $\mathbf{u}$ , pro nějž existuje číslo  $\lambda$  tak, že platí:  $\mathbf{u}' = A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

## I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

**Definice:** Komplexní číslo  $\lambda$  nazveme *vlastním číslem* čtvercové matice  $A$ , existuje-li nenulový vektor  $\mathbf{u}$  takový, že platí  $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ . Vektor  $\mathbf{u}$  potom nazýváme *vlastním vektorem* odpovídajícím vlastnímu číslu  $\lambda$ .

Hledáme vektor  $\mathbf{u}$ , pro nějž existuje číslo  $\lambda$  tak, že platí:  $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

$$(A - \lambda) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\det (A - \lambda) = 0 \quad \text{charakteristická rovnice}$$

Je-li matice typu  $n \times n$ , potom má charakteristická rovnice  $n$  kořenů  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Každému z nich odpovídají vlastní vektory  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  jako řešení soustav rovnic  $(A - \lambda_i) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Vlastní čísla a vlastní vektory hledáme obecně jako komplexní. Pokud má matice  $2 \times 2$  komplexní vlastní čísla (řešení charakteristické rovnice), potom při transformaci souřadnic v  $\mathbb{R}^2$  neexistují vektory, které by zachovávaly směr.

## I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice, vlastnosti

- Vlastní vektory matice  $A$  odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé
- Matice  $A$  má nulové vlastní číslo právě když je singulární.
- Je-li  $\lambda_1=(a+ib)$  komplexní vlastní číslo matice  $A$  a  $\mathbf{u}_1$  je příslušný vlastní vektor, potom má tato matice i komplexně sdružené vlastní číslo  $\lambda_2=(a-ib)$  s vlastním vektorem  $\mathbf{u}_2$  komplexně sdruženým k  $\mathbf{u}_1$ .
- Je-li  $\lambda$  vlastním číslem matice  $A$  spolu s vlastním vektorem  $\mathbf{u}$ , potom  $\lambda^2$  je vlastním číslem matice  $A^2 = A \cdot A$  se stejným vlastním vektorem  $\mathbf{u}$ .
- Je-li  $\lambda$  vlastním číslem matice  $A$  spolu s vlastním vektorem  $\mathbf{u}$ , potom  $1/\lambda$  je vlastním číslem matice  $A^{-1}$  se stejným vlastním vektorem  $\mathbf{u}$ .
- Je-li  $A$  symetrickou čtvercovou maticí, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná. Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou v tomto případě vzájemně kolmé.