MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

II. Základy matematické analýzy

Matematika I.

Matematika I.

I. Lineární algebra

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

IV. Integrální počet

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

N množina přirozených čísel 1, 2, ...

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

N množina přirozených čísel 1, 2, ...

Z množina celých čísel ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

N množina přirozených čísel 1, 2, ...

Z množina celých čísel ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

P množina racionálních čísel $r = \dfrac{a}{b}$ $a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{N},$

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

N množina přirozených čísel 1, 2, ...

Z množina celých čísel ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

P množina racionálních čísel $r = \dfrac{a}{b}$ $a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{N},$

Q množina iracionálních čísel $\sqrt{2}, \pi, e^2, \ldots$

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

N množina přirozených čísel 1, 2, ...

Z množina celých čísel ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

P množina racionálních čísel $r = \frac{a}{b}$ $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{N}$,

Q množina iracionálních čísel $\sqrt{2}, \pi, e^2, \dots$

R množina reálných čísel $\mathbf{R} = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$, $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

N množina přirozených čísel 1, 2, ...

Z množina celých čísel ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

P množina racionálních čísel $r = \frac{a}{b}$ $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{N}$,

Q množina iracionálních čísel $\sqrt{2}, \pi, e^2, \ldots$

R množina reálných čísel $\mathbf{R} = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$, $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$

C množina komplexních čísel $c = a + ib$, $c = r(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

Rozšířená množina reálných čísel $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Pro libovolné $x \in \mathbf{R}$ v $\mathbf{R}^*$ platí: $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$,
$x - (+\infty) = -\infty$, $x - (-\infty) = +\infty$, $x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0$

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

Rozšířená množina reálných čísel $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Pro libovolné $x \in \mathbf{R}$ v $\mathbf{R}^*$ platí:

$x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$,

$x - (+\infty) = -\infty$, $x - (-\infty) = +\infty$, $x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0$

dále:

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$,

$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$,

$(+\infty) \,.\, (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \,.\, (+\infty) = -\infty$, $(-\infty) \,.\, (-\infty) = +\infty$,

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

Rozšířená množina reálných čísel $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Pro libovolné $x \in \mathbf{R}$ v $\mathbf{R}^*$ platí:

$x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$,

$x - (+\infty) = -\infty$, $x - (-\infty) = +\infty$, $x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0$

dále:

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$,

$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$,

$(+\infty) \,.\, (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \,.\, (+\infty) = -\infty$, $(-\infty) \,.\, (-\infty) = +\infty$,

a je-li $x>0$, potom: $x \,.\, (+\infty) = +\infty$, $x \,.\, (-\infty) = -\infty$,

a je-li $x<0$, potom: $x \,.\, (+\infty) = -\infty$, $x \,.\, (-\infty) = +\infty$

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

Rozšířená množina reálných čísel $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Pro libovolné $x \in \mathbf{R}$ v $\mathbf{R}^*$ platí:

$x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$,
$x - (+\infty) = -\infty$, $x - (-\infty) = +\infty$, $x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0$

dále:

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$,
$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$,
$(+\infty) \,.\, (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \,.\, (+\infty) = -\infty$, $(-\infty) \,.\, (-\infty) = +\infty$,

a je-li $x>0$, potom: $x \,.\, (+\infty) = +\infty$, $x \,.\, (-\infty) = -\infty$,
a je-li $x<0$, potom: $x \,.\, (+\infty) = -\infty$, $x \,.\, (-\infty) = +\infty$

Neurčité výrazy, které nemají smysl:
$(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(\pm\infty) / (\pm\infty)$, $0.(\pm\infty)$

II.1. Číselné množiny, intervaly, okolí bodu

ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon , x+ \varepsilon)$

levým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^-(x) = (x-\varepsilon , x)$

pravým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^+(x) = (x, x+\varepsilon)$

prstencové ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je množina $P_\varepsilon(x) - \{x\} = U_\varepsilon^-(x) \cup U_\varepsilon^+(x)$

okolím $+\infty$ je množina $(a ,+\infty)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

okolím $-\infty$ je množina $(-\infty, a)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

II.1. Číselné množiny, intervaly, okolí bodu

otevřený interval v **R**: $I = (a,b) = \{x \in \mathbf{R}: a < x < b\}$

ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$
levým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^-(x) = (x-\varepsilon, x)$
pravým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^+(x) = (x, x+\varepsilon)$
prstencové ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je množina $P_\varepsilon(x) - \{x\} = U_\varepsilon^-(x) \cup U_\varepsilon^+(x)$
okolím $+\infty$ je množina $(a, +\infty)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$
okolím $-\infty$ je množina $(-\infty, a)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

II.1. Číselné množiny, intervaly, okolí bodu

otevřený interval v **R**: $I = (a,b)=\{x\in\mathbf{R}: a < x < b\}$

uzavřený interval v **R**: $J = \langle a,b\rangle=\{x\in\mathbf{R}: a \leq x \leq b\}$

ε-okolí bodu $x\in\mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon , x+ \varepsilon)$

levým ε-okolím bodu $x\in\mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^-(x) = (x-\varepsilon , x)$

pravým ε-okolím bodu $x\in\mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^+(x) = (x, x +\varepsilon)$

prstencové ε-okolí bodu $x\in\mathbf{R}$ je množina $P_\varepsilon(x) - \{x\}= U_\varepsilon^-(x) \cup U_\varepsilon^+(x)$

okolím $+\infty$ je množina $(a ,+\infty)$ pro libovolné $a\in\mathbf{R}$

okolím $-\infty$ je množina $(-\infty, a)$ pro libovolné $a\in\mathbf{R}$

II.1. Číselné množiny, intervaly, okolí bodu

otevřený interval v **R**: $I = (a,b) = \{x \in \mathbf{R}: a < x < b\}$

uzavřený interval v **R**: $J = \langle a,b \rangle = \{x \in \mathbf{R}: a \leq x \leq b\}$

sjednocení intervalů v **R**: $I \cup J = \{x \in \mathbf{R}: x \in I \vee x \in J\}$

ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon)$

levým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^-(x) = (x-\varepsilon\ ,\ x)$

pravým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^+(x) = (x,\ x+\varepsilon)$

prstencové ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je množina $P_\varepsilon(x) - \{x\} = U_\varepsilon^-(x) \cup U_\varepsilon^+(x)$

okolím $+\infty$ je množina $(a\ ,+\infty)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

okolím $-\infty$ je množina $(-\infty,\ a)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

II.1. Číselné množiny, intervaly, okolí bodu

otevřený interval v **R**: $I = (a,b) = \{x \in \mathbf{R}: a < x < b\}$

uzavřený interval v **R**: $J = \langle a,b \rangle = \{x \in \mathbf{R}: a \leq x \leq b\}$

sjednocení intervalů v **R**: $I \cup J = \{x \in \mathbf{R}: x \in I \vee x \in J\}$

průnik intervalů v **R**: $I \cap J = \{x \in \mathbf{R}: x \in I \wedge x \in J\}$

ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

levým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^-(x) = (x - \varepsilon, x)$

pravým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^+(x) = (x, x + \varepsilon)$

prstencové ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je množina $P_\varepsilon(x) - \{x\} = U_\varepsilon^-(x) \cup U_\varepsilon^+(x)$

okolím $+\infty$ je množina $(a, +\infty)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

okolím $-\infty$ je množina $(-\infty, a)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

II.1. Číselné množiny, intervaly, okolí bodu

otevřený interval v **R**: $I = (a,b) = \{x \in \mathbf{R}: a < x < b\}$

uzavřený interval v **R**: $J = \langle a,b \rangle = \{x \in \mathbf{R}: a \le x \le b\}$

sjednocení intervalů v **R**: $I \cup J = \{x \in \mathbf{R}: x \in I \vee x \in J\}$

průnik intervalů v **R**: $I \cap J = \{x \in \mathbf{R}: x \in I \wedge x \in J\}$

doplněk intervalu I v **R**: $I^C = \{x \in \mathbf{R}: x \notin I\} = (-\infty, a\rangle \cup \langle b, +\infty)$

ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

levým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^-(x) = (x-\varepsilon, x)$

pravým ε-okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^+(x) = (x, x+\varepsilon)$

prstencové ε-okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je množina $P_\varepsilon(x) - \{x\} = U_\varepsilon^-(x) \cup U_\varepsilon^+(x)$

okolím $+\infty$ je množina $(a, +\infty)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

okolím $-\infty$ je množina $(-\infty, a)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

$\forall\, x,y \in \mathbf{R}$: $(x \leq y)$ nebo $(y \leq x)$

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

$\forall\, x,y \in \mathbf{R}$: $(x \leq y)$ nebo $(y \leq x)$

Je-li $(x \leq y)$ a neplatí $(y \leq x)$, potom je $x < y$ (*ostrá nerovnost*)

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

$\forall\, x,y \in \mathbf{R}$: $(x \leq y)$ nebo $(y \leq x)$

Je-li $(x \leq y)$ a neplatí $(y \leq x)$, potom je $x < y$ (*ostrá nerovnost*)

$\forall\, x \in \mathbf{R}$: $\quad -\infty < x < +\infty$

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

$\forall\, x,y \in \mathbf{R}$: $(x \leq y)$ nebo $(y \leq x)$

Je-li $(x \leq y)$ a neplatí $(y \leq x)$, potom je $x < y$ (*ostrá nerovnost*)

$\forall\, x \in \mathbf{R}$: $\quad -\infty < x < +\infty$

minimum množiny $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}$: $\quad z = \min(\mathrm{M}) \iff z \in \mathrm{M}$ a platí $\forall\, x \in \mathrm{M}$: $\quad z \leq x$

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

$\forall x,y \in \mathbf{R}$: $(x \leq y)$ nebo $(y \leq x)$

Je-li $(x \leq y)$ a neplatí $(y \leq x)$, potom je $x < y$ (*ostrá nerovnost*)

$\forall x \in \mathbf{R}$: $\quad -\infty < x < +\infty$

minimum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $z = \min(M) \Longleftrightarrow z \in M$ a platí $\forall x \in M$: $z \leq x$

maximum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $w = \max(M) \Longleftrightarrow w \in M$ a platí $\forall x \in M$: $x \leq w$

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

$\forall\, x,y \in \mathbf{R}$: $(x \leq y)$ nebo $(y \leq x)$

Je-li $(x \leq y)$ a neplatí $(y \leq x)$, potom je $x < y$ (*ostrá nerovnost*)

$\forall\, x \in \mathbf{R}$: $-\infty < x < +\infty$

extrémy množiny M

minimum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $z = \min(M) \iff z \in M$ a platí $\forall\, x \in M$: $z \leq x$

maximum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $w = \max(M) \iff w \in M$ a platí $\forall\, x \in M$: $x \leq w$

maximum ani minimum nemusí existovat!

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

$\forall\, x,y \in \mathbf{R}$: $(x \leq y)$ nebo $(y \leq x)$

Je-li $(x \leq y)$ a neplatí $(y \leq x)$, potom je $x < y$ (*ostrá nerovnost*)

$\forall\, x \in \mathbf{R}$: $-\infty < x < +\infty$

extrémy množiny M

minimum množiny $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}$: $z = \min(\mathrm{M}) \iff z \in \mathrm{M}$ a platí $\forall\, x \in \mathrm{M}$: $z \leq x$

maximum množiny $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}$: $w = \max(\mathrm{M}) \iff w \in \mathrm{M}$ a platí $\forall\, x \in \mathrm{M}$: $x \leq w$

maximum ani minimum nemusí existovat!

infimum množiny $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}$: $a = \inf(\mathrm{M}) \iff a \in \mathrm{R}^*$ a platí

$(\forall\, x \in \mathrm{M}$: $a \leq x)$ a zároveň v R^* neexistuje $b > a$ se stejnou vlastností

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

$\forall\, x,y \in \mathbf{R}$: $(x \leq y)$ nebo $(y \leq x)$

Je-li $(x \leq y)$ a neplatí $(y \leq x)$, potom je $x < y$ (*ostrá nerovnost*)

$\forall\, x \in \mathbf{R}$: $-\infty < x < +\infty$

extrémy množiny M

minimum množiny $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}$: $z = \min(\mathrm{M}) \Leftrightarrow z \in \mathrm{M}$ a platí $\forall\, x \in \mathrm{M}$: $z \leq x$

maximum množiny $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}$: $w = \max(\mathrm{M}) \Leftrightarrow w \in \mathrm{M}$ a platí $\forall\, x \in \mathrm{M}$: $x \leq w$

maximum ani minimum nemusí existovat!

infimum množiny $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}$: $a = \inf(\mathrm{M}) \Leftrightarrow a \in \mathrm{R}^*$ a platí

$(\forall\, x \in \mathrm{M}$: $a \leq x)$ a zároveň v R^* neexistuje $b > a$ se stejnou vlastností

supremum množiny $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}$: $c = \sup(\mathrm{M}) \Leftrightarrow c \in \mathrm{R}^*$ a platí

$(\forall\, x \in \mathrm{M}$: $x \leq c)$ a zároveň v R^* neexistuje $d < c$ se stejnou vlastností

II.1. Číselné množiny, extrémy množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací $\leq$:

$\forall x,y \in \mathbf{R}$: $(x \leq y)$ nebo $(y \leq x)$

Je-li $(x \leq y)$ a neplatí $(y \leq x)$, potom je $x < y$ (*ostrá nerovnost*)

$\forall x \in \mathbf{R}$: $-\infty < x < +\infty$

extrémy množiny M

minimum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $z = \min(M) \iff z \in M$ a platí $\forall x \in M$: $z \leq x$

maximum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $w = \max(M) \iff w \in M$ a platí $\forall x \in M$: $x \leq w$

maximum ani minimum nemusí existovat!

infimum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $a = \inf(M) \iff a \in R^*$ a platí

$(\forall x \in M$: $a \leq x)$ a zároveň v R^* neexistuje $b > a$ se stejnou vlastností

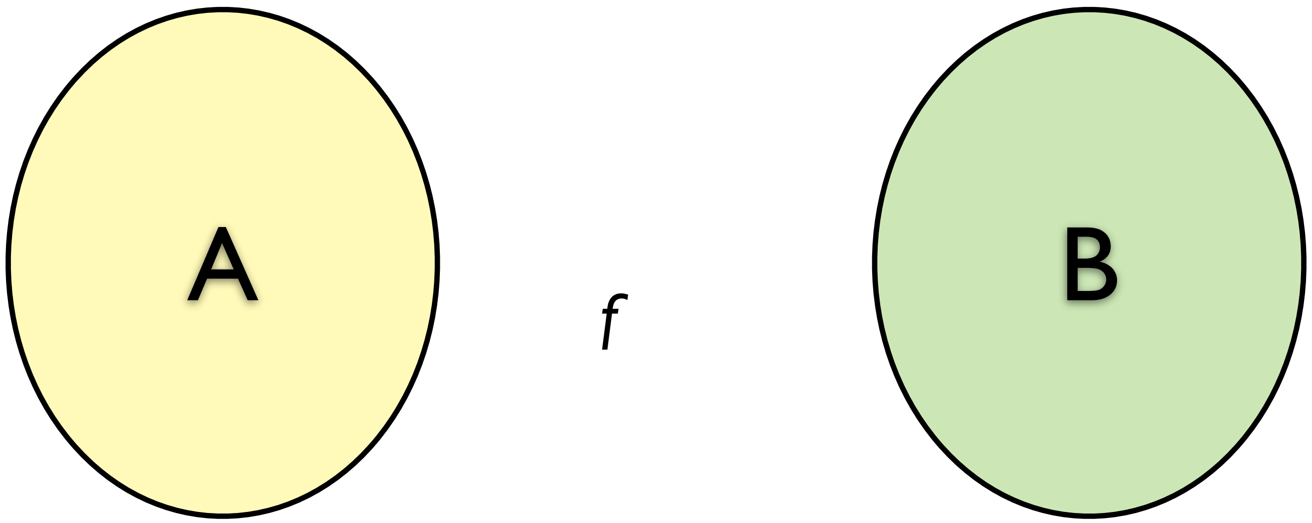
supremum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $c = \sup(M) \iff c \in R^*$ a platí

$(\forall x \in M$: $x \leq c)$ a zároveň v R^* neexistuje $d < c$ se stejnou vlastností

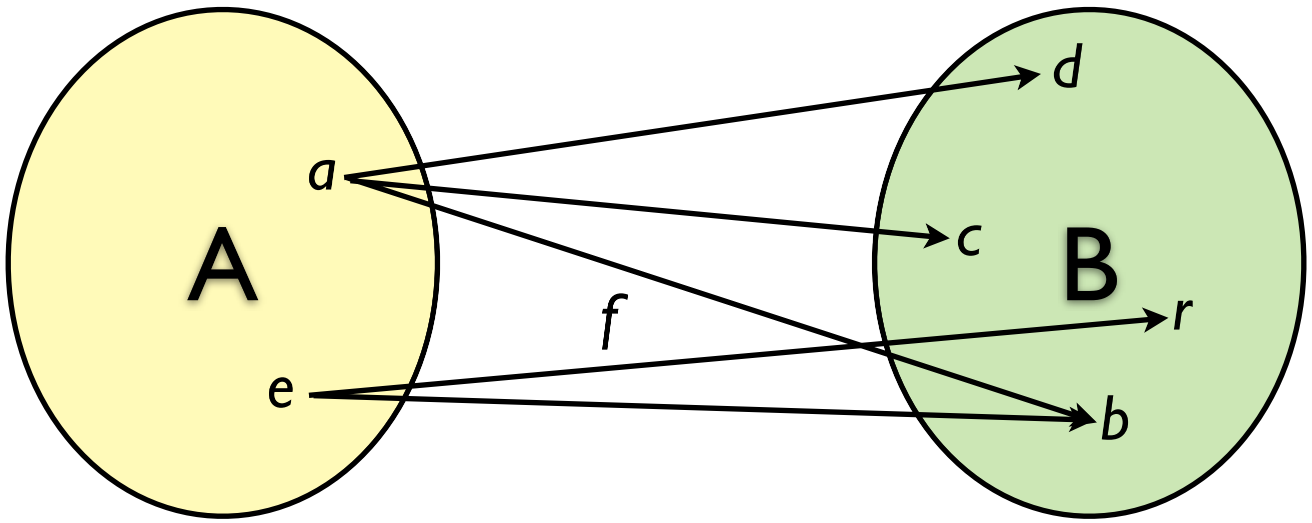
supremum a infimum existuje vždy!

Pokud existují, je $\min(M) = \inf(M)$ a $\max(M) = \sup(M)$.

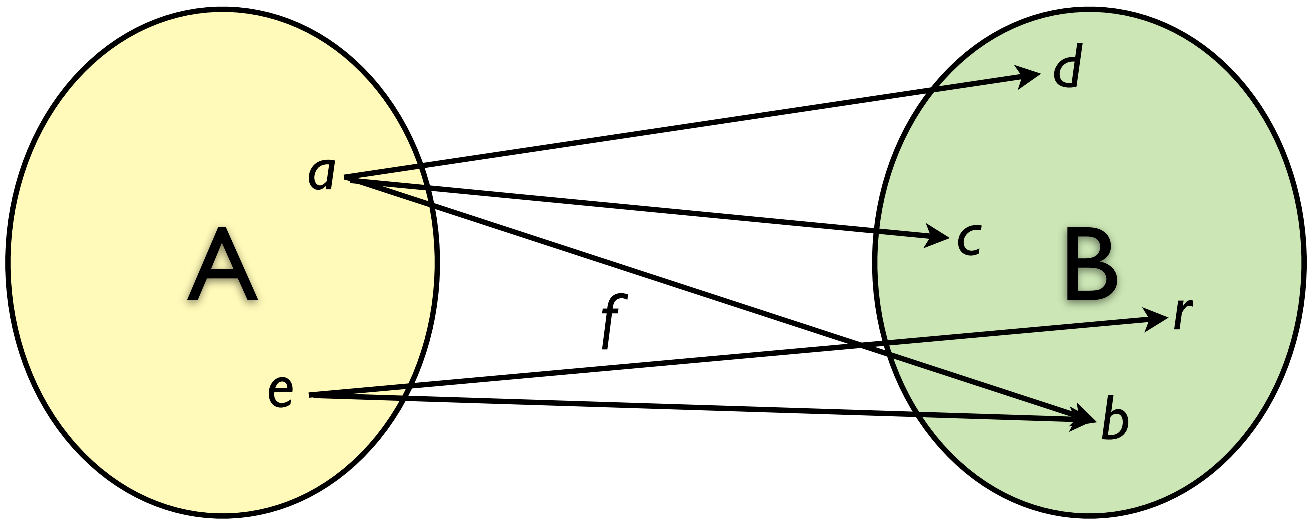
II.2. Zobrazení a funkce



II.2. Zobrazení a funkce

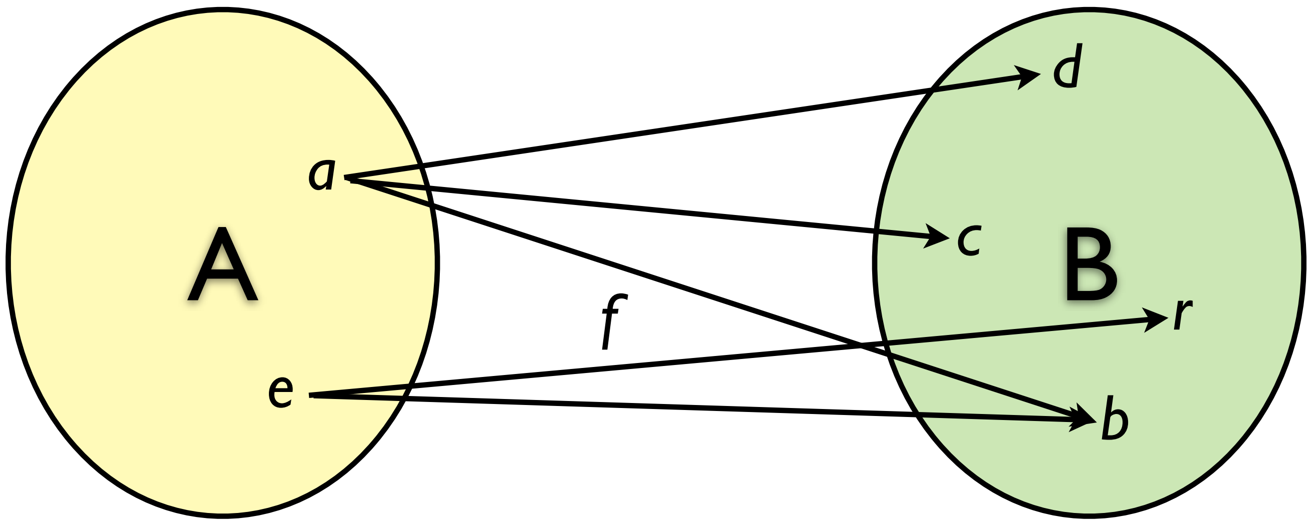


II.2. Zobrazení a funkce



- *relace f z množiny* A *do množiny* B: $f = \{(x,y)\colon x \in \mathrm{A},\ y \in \mathrm{B}\}$

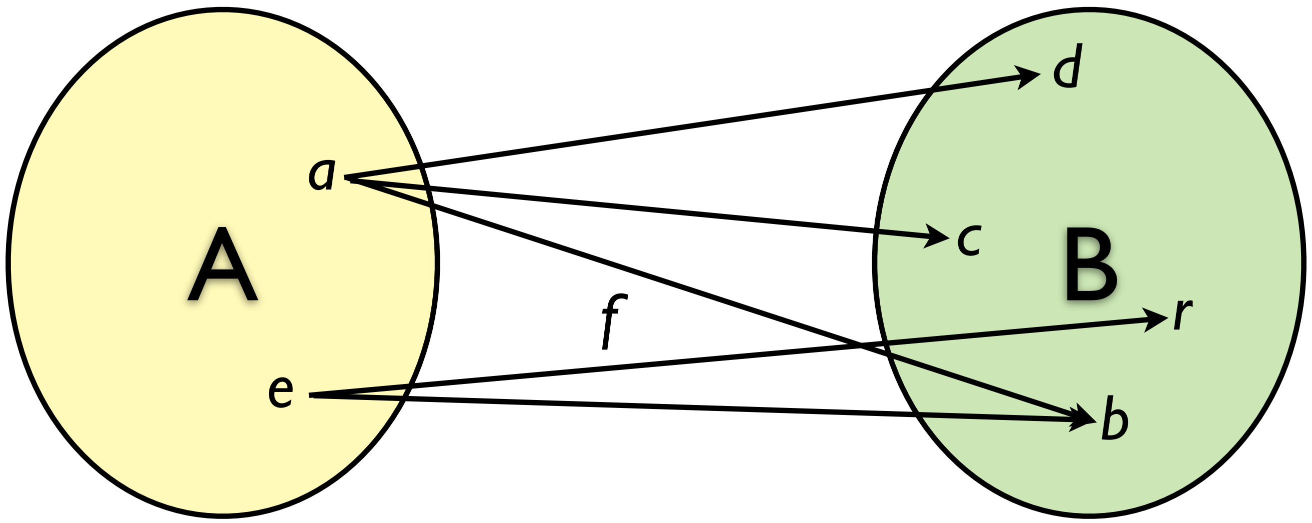
II.2. Zobrazení a funkce



$(a,b)\in f,\ (a,c)\in f,\ \ (a,d)\in f$

- *relace f z množiny* A *do množiny* B: $f = \{(x,y)\colon x\in \mathrm{A},\ y\in \mathrm{B}\}$

II.2. Zobrazení a funkce



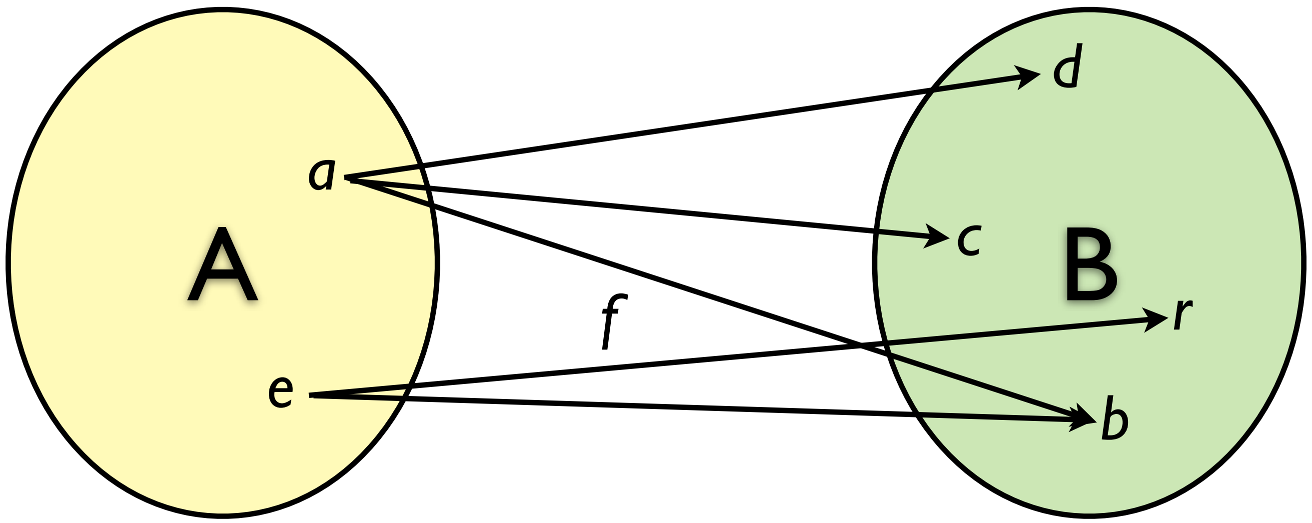
$(a,b) \in f$, $(a,c) \in f$, $(a,d) \in f$

$(e,b) \in f$, $(e,r) \in f$,

- *relace f z množiny* A *do množiny* B: $f = \{(x,y)\colon x \in \mathrm{A},\ y \in \mathrm{B}\}$

II.2. Zobrazení a funkce

$f: \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$



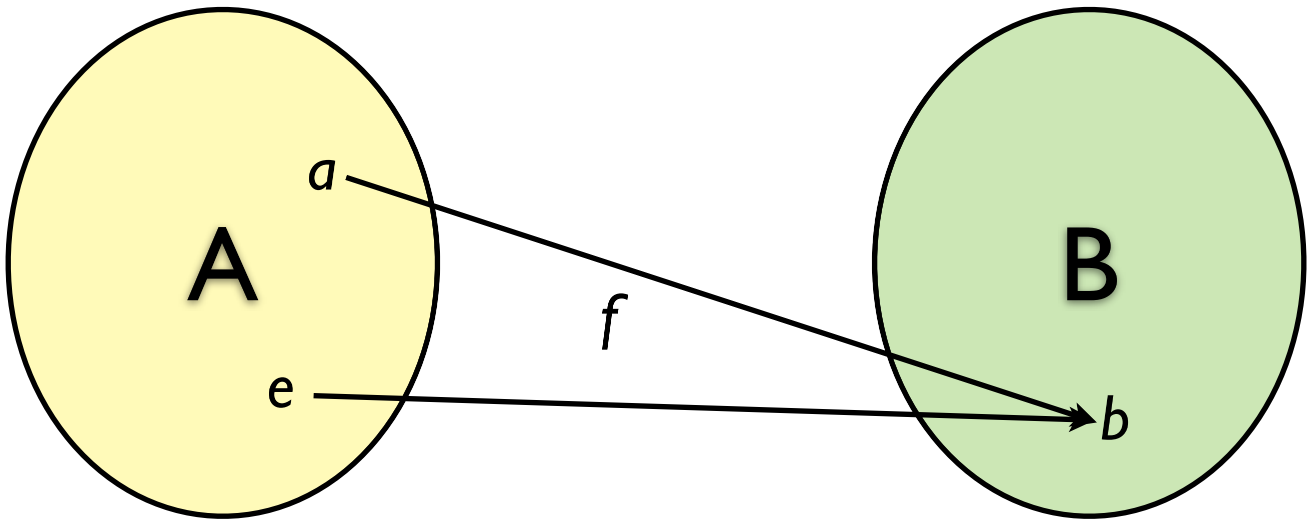
$(a,b)\in f,\ (a,c)\in f,\ (a,d)\in f$

$(e,b)\in f,\ (e,r)\in f,$

- *relace f z množiny* A *do množiny* B: $f=\{(x,y):\ x\in \mathsf{A},\ y\in \mathsf{B}\}$

II.2. Zobrazení a funkce

$f: A \longrightarrow B$



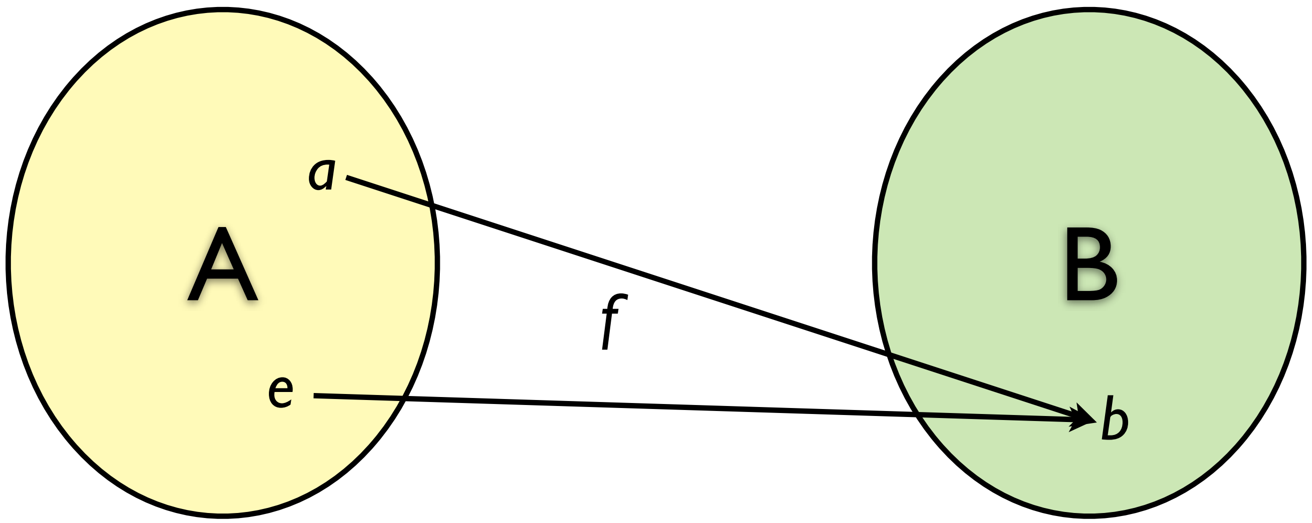
$(a,b) \in f$, $(a,c) \in f$, $(a,d) \in f$

$(e,b) \in f$, $(e,r) \in f$,

- *relace f z množiny* A *do množiny* B: $f = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$
- pokud platí: $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c$ budeme relaci *f* nazývat *zobrazením z množiny* A *do množiny* B

II.2. Zobrazení a funkce

$f: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$



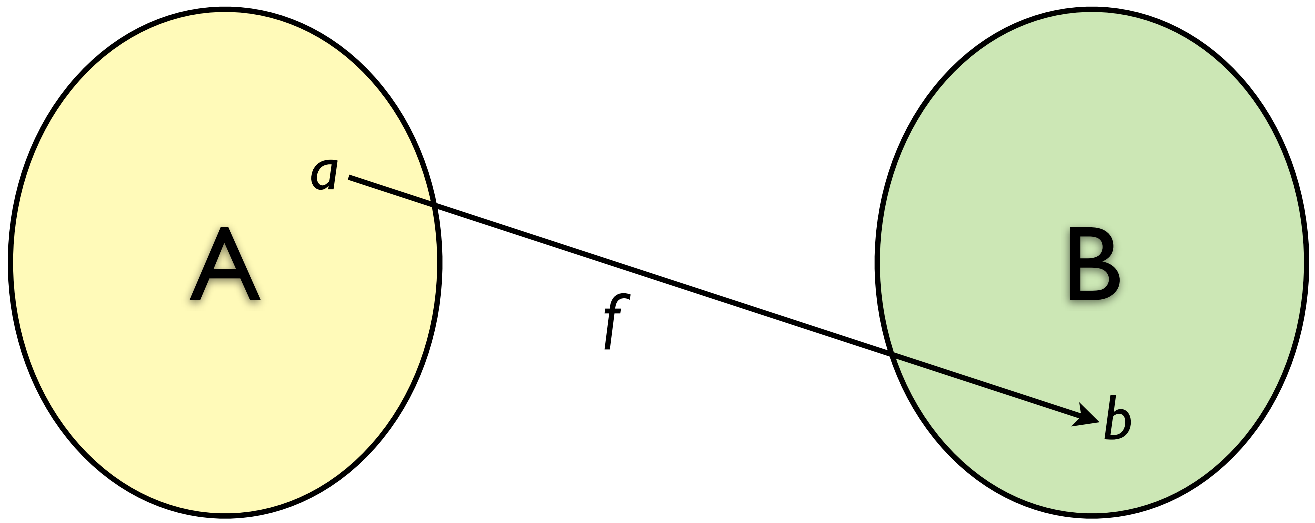
$(a,b)\in f$, $\cancel{(a,c)\in f}$, $\cancel{(a,d)\in f}$

$(e,b)\in f$, $\cancel{(e,r)\in f}$,

- *relace f z množiny* A *do množiny* B: $f=\{(x,y): x\in \mathrm{A}, y\in \mathrm{B}\}$
- pokud platí: $(a,b)\in f \wedge (a,c)\in f \Rightarrow b=c$ budeme relaci f nazývat *zobrazením z množiny* A *do množiny* B

II.2. Zobrazení a funkce

$f: \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$



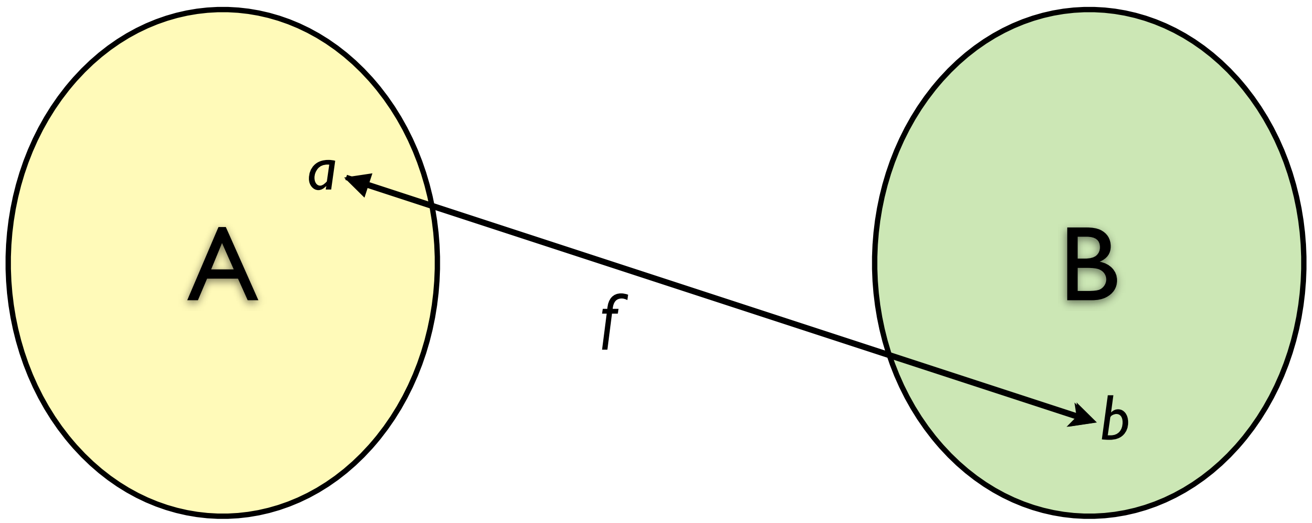
$(a,b)\in f$, $\cancel{(a,c)\in f}$, $\cancel{(a,d)\in f}$

$\cancel{(e,b)\in f}$, $\cancel{(e,r)\in f}$,

- *relace f z množiny* A *do množiny* B: $f=\{(x,y)\colon x\in \mathsf{A},\ y\in \mathsf{B}\}$
- pokud platí: $(a,b)\in f \wedge (a,c)\in f \Rightarrow b=c$ budeme relaci f nazývat *zobrazením z množiny* A *do množiny* B
- platí-li pro zobrazení f i opačná podmínka: $(a,b)\in f \wedge (e,b)\in f \Rightarrow a=e$, říkáme, že zobrazení f je *prosté*

II.2. Zobrazení a funkce

$f: \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$



$(a,b) \in f$, $\cancel{(a,c) \in f}$, $\cancel{(a,d) \in f}$

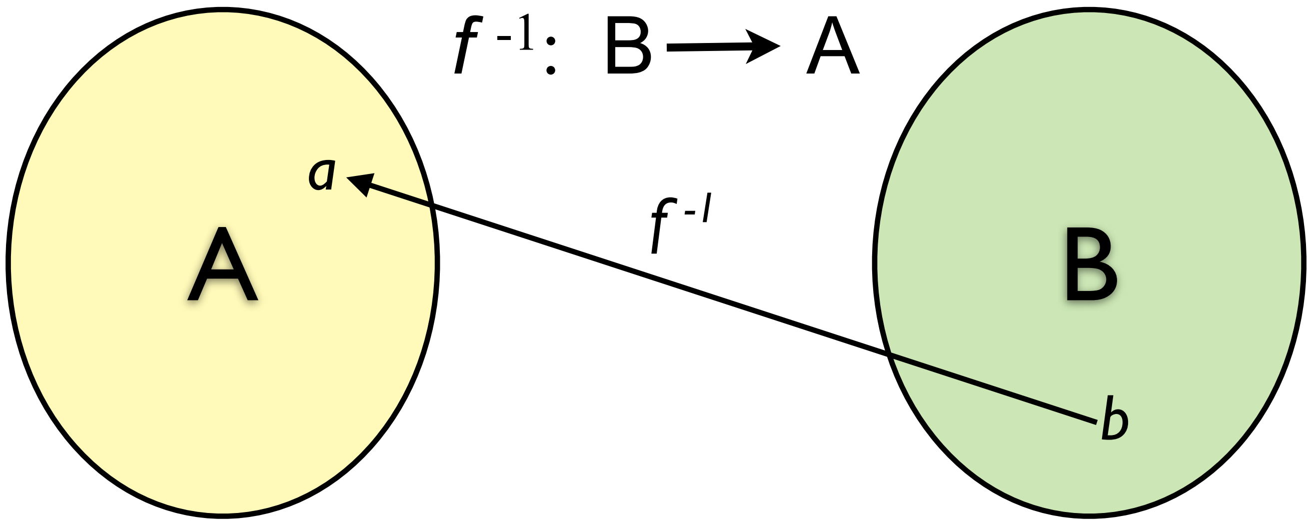
$\cancel{(e,b) \in f}$, $\cancel{(e,r) \in f}$,

- *relace f z množiny* A *do množiny* B: $f = \{(x,y): x \in \mathsf{A},\ y \in \mathsf{B}\}$
- pokud platí: $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c$ budeme relaci *f* nazývat *zobrazením z množiny* A *do množiny* B
- platí-li pro zobrazení *f* i opačná podmínka: $(a,b) \in f \wedge (e,b) \in f \Rightarrow a = e$, říkáme, že zobrazení *f* je *prosté*
- Je-li zobrazení prosté a platí, že $\forall a \in \mathsf{A}\ \exists b \in \mathsf{B}: (a,b) \in f$ a naopak, $\forall d \in \mathsf{B}\ \exists c \in \mathsf{A}: (c,d) \in f$, říkáme, že zobrazení *f* je *vzájemně jednoznačné zobrazení množiny* A *na množinu* B

II.2. Zobrazení a funkce

$f: A \longrightarrow B$

$f^{-1}: B \longrightarrow A$

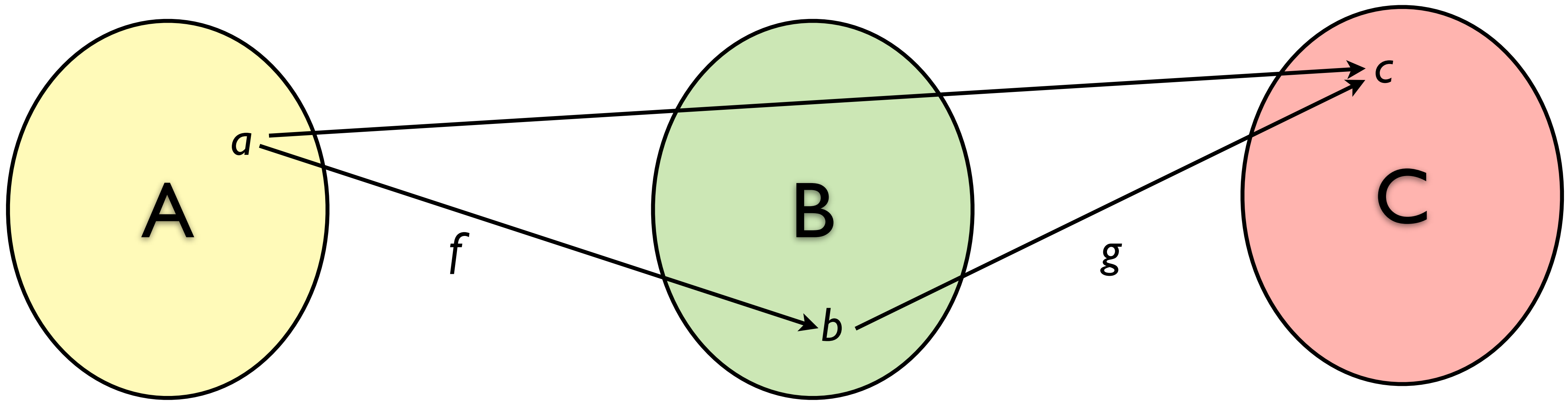


$(a,b) \in f, \qquad (b,a) \in f^{-1}$

- je-li zobrazení f z množiny A do množiny B prosté, potom množinu
- $f^{-1} = \{(y,x): x \in A, y \in B, (x,y) \in f\}$ nazýváme *inverzním zobrazením* k zobrazení f

II.2. Zobrazení a funkce

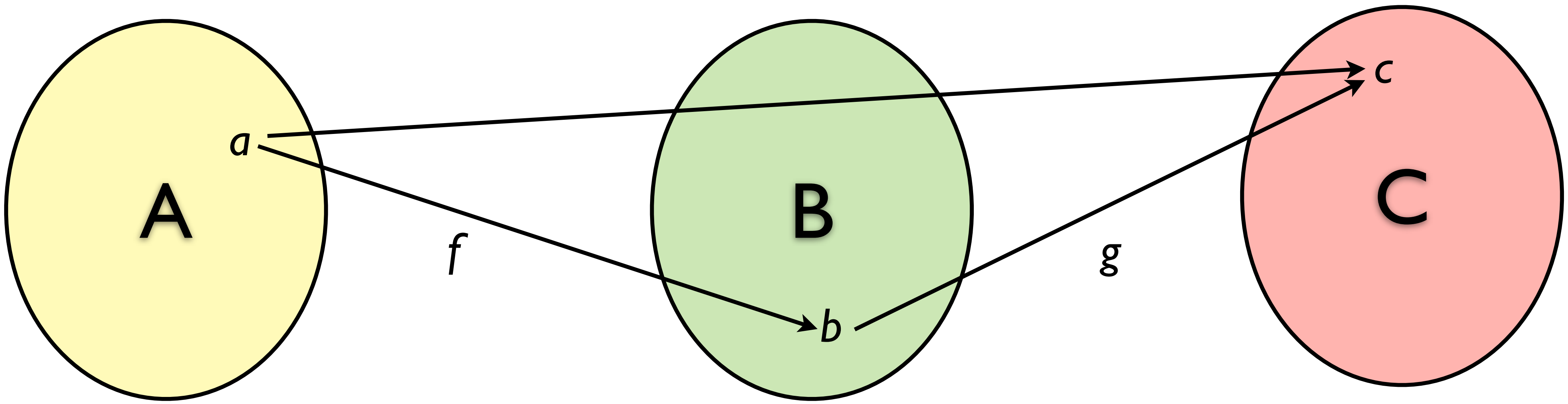
$f: A \longrightarrow B$ $\qquad$ $g: B \longrightarrow C$



$h = g \circ f: A \longrightarrow C$ $\qquad$ *složené zobrazení*

II.2. Zobrazení a funkce

$f: A \longrightarrow B$ $\qquad$ $g: B \longrightarrow C$

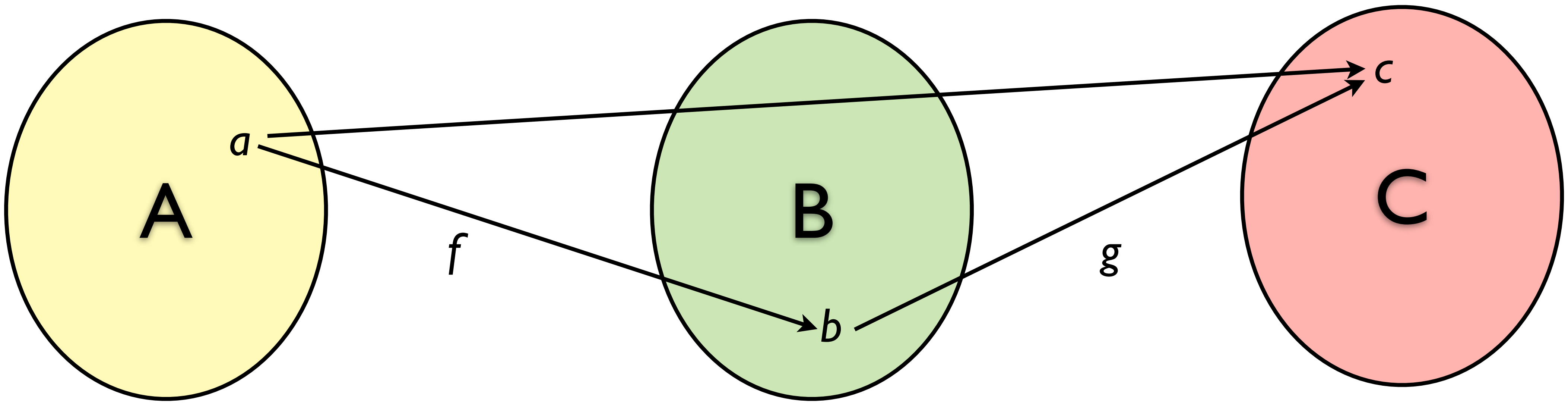


$h = g \circ f: A \longrightarrow C$ $\qquad$ *složené zobrazení*

- f je prosté a g je prosté => $g \circ f$ je prosté a existuje $(g \circ f)^{-1}$

II.2. Zobrazení a funkce

$f: A \longrightarrow B$ $\qquad$ $g: B \longrightarrow C$

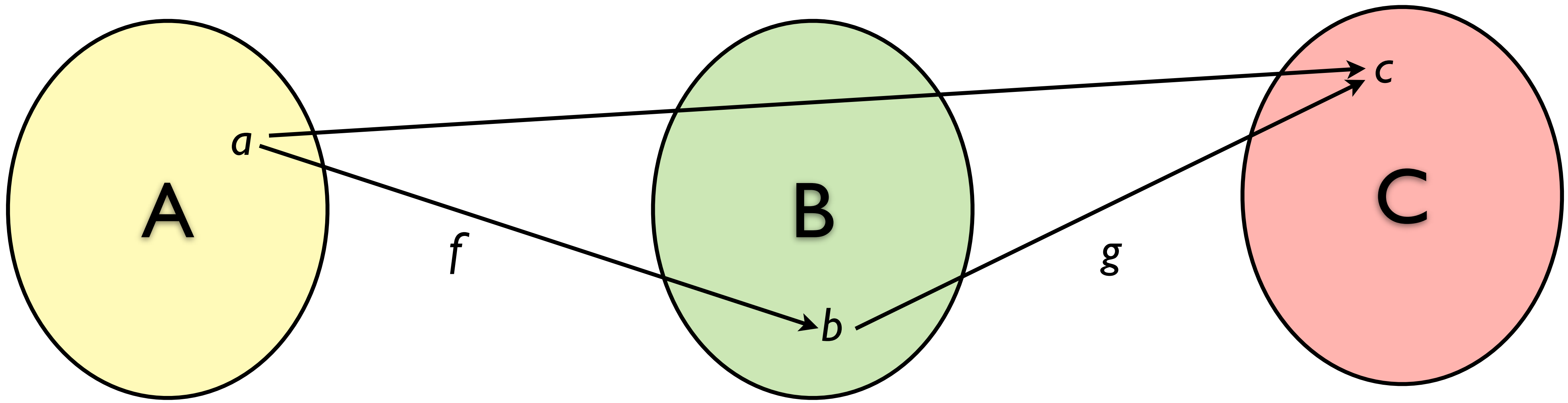


$h = g \circ f: A \longrightarrow C$ $\qquad$ *složené zobrazení*

- f je prosté a g je prosté => $g \circ f$ je prosté a existuje $(g \circ f)^{-1}$
- $f \circ f^{-1} = i$ (*identické zobrazení*: $i(x) = x$)

II.2. Zobrazení a funkce

$f: \text{A} \longrightarrow \text{B}$ $\qquad$ $g: \text{B} \longrightarrow \text{C}$

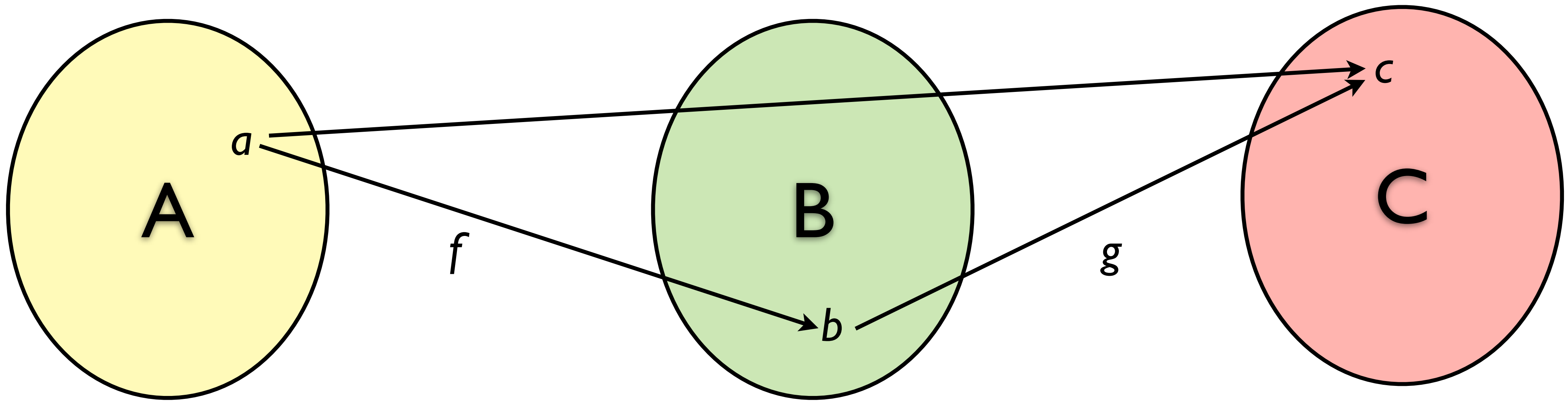


$h = g \circ f: \text{A} \longrightarrow \text{C}$ $\qquad$ *složené zobrazení*

- f je prosté a g je prosté => $g \circ f$ je prosté a existuje $(g \circ f)^{-1}$
- $f \circ f^{-1} = i$ (*identické zobrazení*: $i(x) = x$)
- jsou-li A a B číselné množiny, potom namísto pojmu *zobrazení* používáme pojem *funkce*

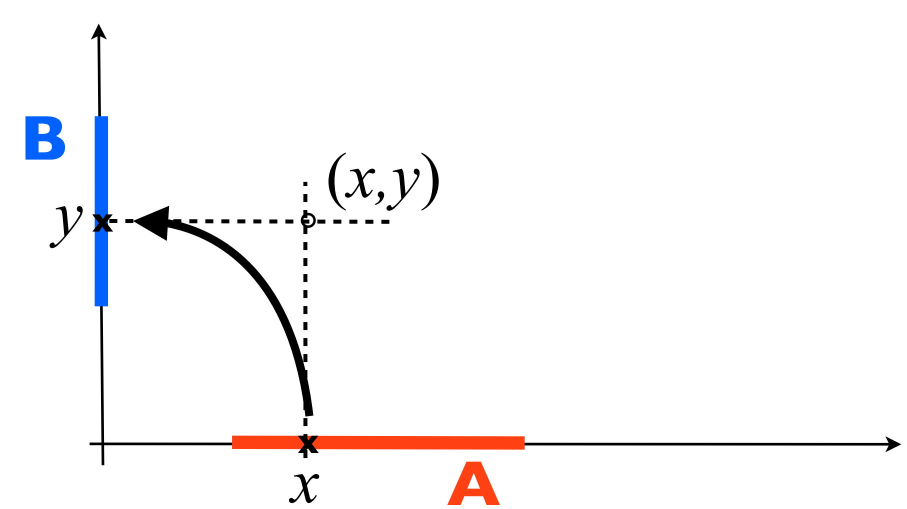
II.2. Zobrazení a funkce

$f: A \longrightarrow B$ $\quad$ $g: B \longrightarrow C$

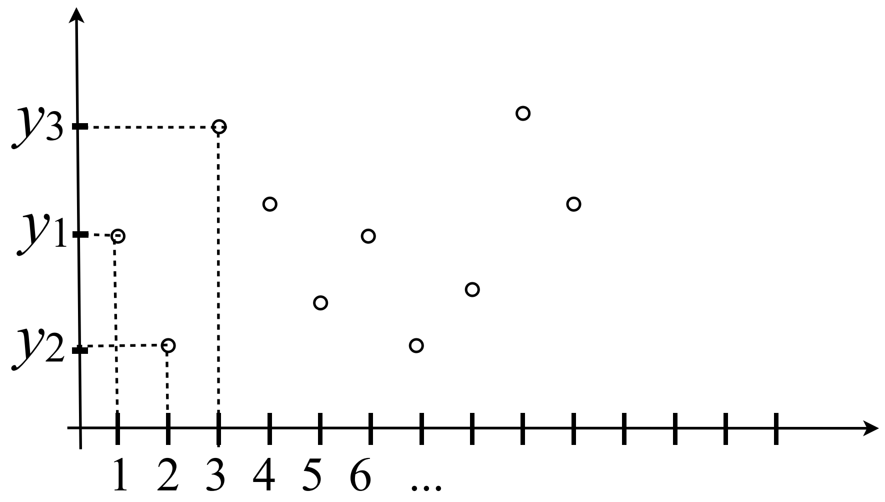


$h = g \circ f: A \longrightarrow C$ $\quad$ *složené zobrazení*

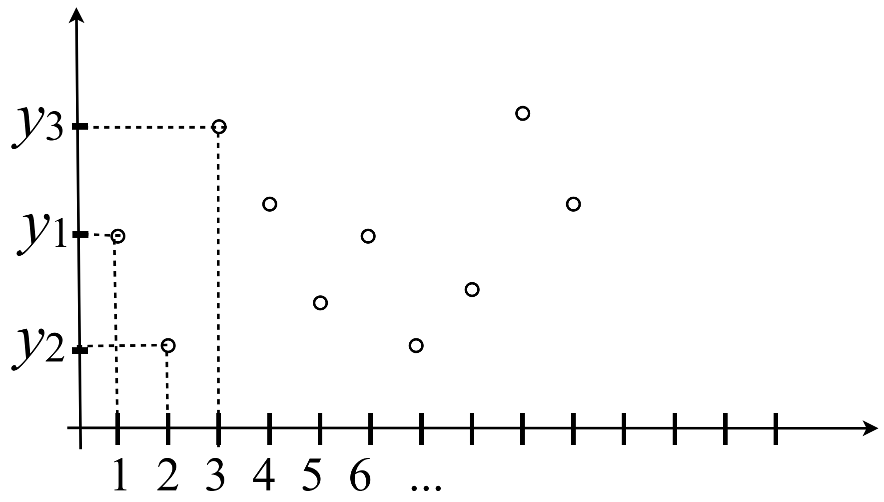
- f je prosté a g je prosté => $g \circ f$ je prosté a existuje $(g \circ f)^{-1}$
- $f \circ f^{-1} = i$ (*identické zobrazení*: $i(x) = x$)
- jsou-li A a B číselné množiny, potom namísto pojmu *zobrazení* používáme pojem *funkce*



II.2. Posloupnosti reálných čísel

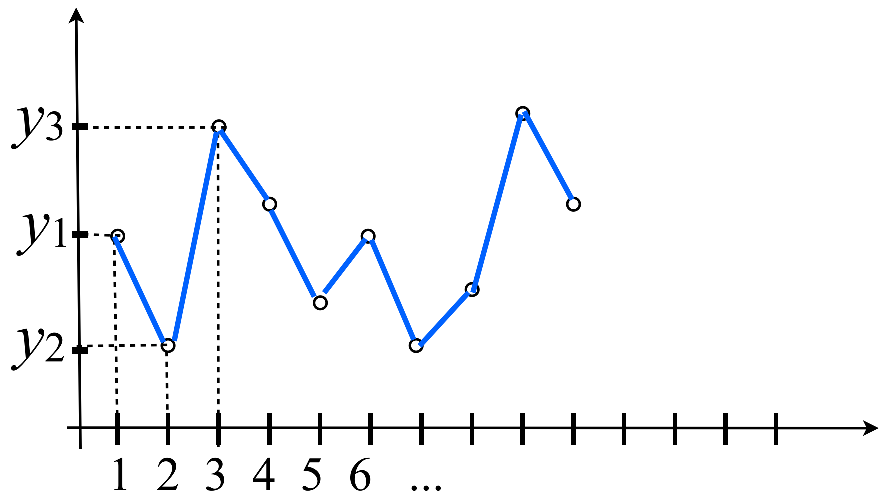


II.2. Posloupnosti reálných čísel



Definice: Posloupností reálných čísel budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel **N** do množiny reálných čísel **R**.

II.2. Posloupnosti reálných čísel



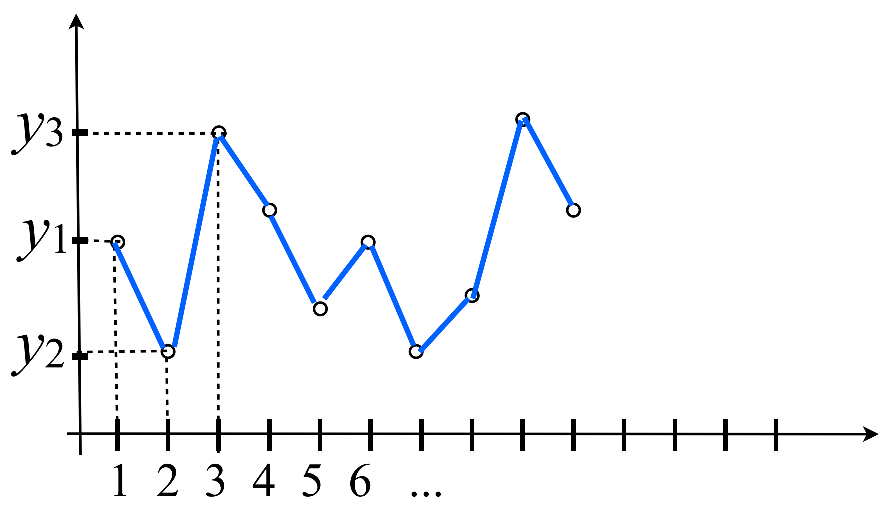
$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}$$

Definice: Posloupností reálných čísel budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel **N** do množiny reálných čísel **R**.

II.2. Posloupnosti reálných čísel



$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

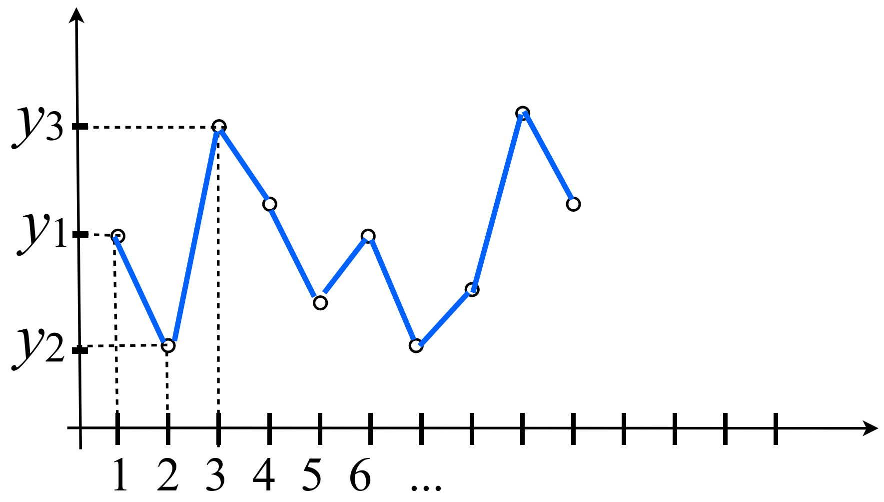
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}$$

Definice: Posloupností reálných čísel budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel **N** do množiny reálných čísel **R**.

- Obecně může být posloupnost zobrazením množiny přirozených čísel do jakékoliv množiny (posloupnost vektorů, matic, bodů, funkcí, obrázků, ...)

II.2. Posloupnosti reálných čísel



$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

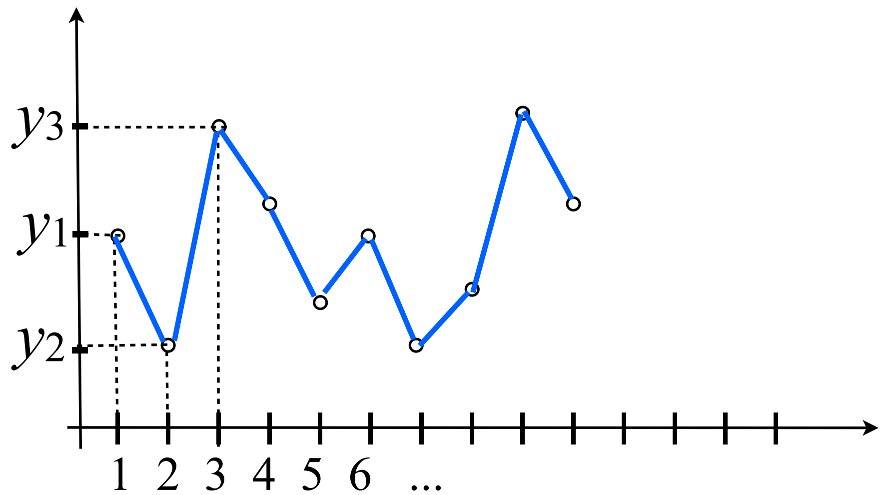
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}$$

Definice: Posloupností reálných čísel budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel **N** do množiny reálných čísel **R**.

- Obecně může být posloupnost zobrazením množiny přirozených čísel do jakékoliv množiny (posloupnost vektorů, matic, bodů, funkcí, obrázků, ...)
- pokud je $a_n \in$ M pro všechna n, hovoříme o posloupnosti v množině M

II.2. Posloupnosti reálných čísel



$$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

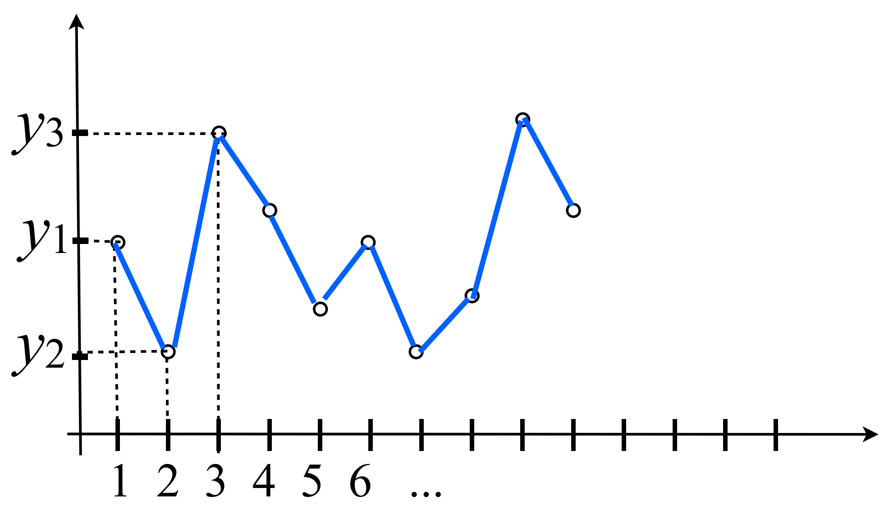
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}$$

Definice: Posloupností reálných čísel budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel **N** do množiny reálných čísel **R**.

- Obecně může být posloupnost zobrazením množiny přirozených čísel do jakékoliv množiny (posloupnost vektorů, matic, bodů, funkcí, obrázků, ...)
- pokud je $a_n \in$M pro všechna n, hovoříme o posloupnosti v množině M
- prvek a_n nazýváme n-tým členem posloupnosti

II.2. Posloupnosti reálných čísel



$$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}$$

Definice: Posloupností reálných čísel budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel **N** do množiny reálných čísel **R**.

- Obecně může být posloupnost zobrazením množiny přirozených čísel do jakékoliv množiny (posloupnost vektorů, matic, bodů, funkcí, obrázků, ...)
- pokud je $a_n \in$M pro všechna n, hovoříme o posloupnosti v množině M
- prvek a_n nazýváme n-tým členem posloupnosti
- jsou-li členy reálné posloupnosti od nějakého indexu n dále všechny nulové, říkáme, že posloupnost je konečná $\{a_i\}_{i=1}^{n}$

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq K$;

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}:\ a_n \leq K$;
- omezenou zdola <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}:\ a_n \geq K$;

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq K$;
- omezenou zdola <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq K$;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}:\ a_n \leq K$;
- omezenou zdola <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}:\ a_n \geq K$;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
- (ryze) rostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}:\ a_n < a_{n+1}$;

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq K$;
- omezenou zdola <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq K$;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
- (ryze) rostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n < a_{n+1}$;
- neklesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$;

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq K$;
- omezenou zdola <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq K$;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
- (ryze) rostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n < a_{n+1}$;
- neklesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$;
- (ryze) klesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n > a_{n+1}$;

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq K$;
- omezenou zdola <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq K$;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
- (ryze) rostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n < a_{n+1}$;
- neklesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$;
- (ryze) klesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n > a_{n+1}$;
- nerostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$;

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq K$;
- omezenou zdola <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq K$;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
- (ryze) rostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n < a_{n+1}$;
- neklesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$;
- (ryze) klesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n > a_{n+1}$;
- nerostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$;
- monotónní, je-li nerostoucí nebo neklesající;

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq K$;
- omezenou zdola <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq K$;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
- (ryze) rostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n < a_{n+1}$;
- neklesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$;
- (ryze) klesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n > a_{n+1}$;
- nerostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$;
- monotónní, je-li nerostoucí nebo neklesající;
- ryze monotónní, je-li rostoucí nebo klesající;

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq K$;
- omezenou zdola <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq K$;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
- (ryze) rostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n < a_{n+1}$;
- neklesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$;
- (ryze) klesající <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n > a_{n+1}$;
- nerostoucí <=> $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$;
- monotónní, je-li nerostoucí nebo neklesající;
- ryze monotónní, je-li rostoucí nebo klesající;
- konstantní, je-li nerostoucí a zároveň neklesající.

II.3. Limita posloupnosti

Definice: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} \;\; (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

II.3. Limita posloupnosti

Definice: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} \;\; (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad a = \lim a_n \qquad a_n \to a$$

II.3. Limita posloupnosti

Definice: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} \;\; (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \qquad a = \lim a_n \qquad a_n \to a$$

Posloupnost $\{a_n\}$

- je *konvergentní*, pokud má limitu $a \in \mathbf{R}$

II.3. Limita posloupnosti

Definice: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} \;\; (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad a = \lim a_n \qquad a_n \to a$$

Posloupnost $\{a_n\}$

- je *konvergentní*, pokud má limitu $a \in \mathbf{R}$

  - v takovém případě říkáme, že má *vlastní limitu*;

II.3. Limita posloupnosti

Definice: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} \ \ (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \qquad a = \lim a_n \qquad a_n \to a$$

Posloupnost $\{a_n\}$

- je *konvergentní*, pokud má limitu $a \in \mathbf{R}$

  - v takovém případě říkáme, že má *vlastní limitu*;

- je *divergentní*, není-li konvergentní; v takovém případě buď

II.3. Limita posloupnosti

Definice: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} \ \ (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad a = \lim a_n \qquad a_n \to a$$

Posloupnost $\{a_n\}$

- je *konvergentní*, pokud má limitu $a \in \mathbf{R}$

  - v takovém případě říkáme, že má *vlastní limitu*;

- je *divergentní*, není-li konvergentní; v takovém případě buď

  - limita neexistuje, nebo

II.3. Limita posloupnosti

Definice: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N} \ \ (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \qquad\qquad a = \lim a_n \qquad\qquad a_n \to a$$

Posloupnost $\{a_n\}$

- je *konvergentní*, pokud má limitu $a \in \mathbf{R}$

  - v takovém případě říkáme, že má *vlastní limitu*;

- je *divergentní*, není-li konvergentní; v takovém případě buď

  - limita neexistuje, nebo

  - posloupnost má nevlastní limitu, tedy buď $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$

II.3. Limita posloupnosti

Definice: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N} \;\; (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad a = \lim a_n \qquad a_n \to a$$

Posloupnost $\{a_n\}$

- je *konvergentní*, pokud má limitu $a \in \mathbf{R}$

  - v takovém případě říkáme, že má *vlastní limitu*;

- je *divergentní*, není-li konvergentní; v takovém případě buď

  - limita neexistuje, nebo

  - posloupnost má nevlastní limitu, tedy buď $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$

Příklady: 1) $\lim \dfrac{1}{n} \sin n\dfrac{\pi}{2}$, 2) $\lim \sin n\dfrac{\pi}{2}$, 3) $\lim n \sin \dfrac{\pi}{2}$

II.3. Limita posloupnosti

Věta: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$: $\{a_{k_n}\}$, kde $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

II.3. Limita posloupnosti

Věta: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$: $\{a_{k_n}\}$, kde $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Věta: Posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a právě tehdy, když každá vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ má limitu a .

II.3. Limita posloupnosti

Věta: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$: $\{a_{k_n}\}$, kde $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Věta: Posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a právě tehdy, když každá vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ má limitu a .

Věta: Jestliže existují limity posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a je $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, potom platí

1) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$,
2) $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b$,
3) $\lim (a_n \,.\, b_n) = \lim a_n \,.\, \lim b_n = a \,.\, b$,

pokud výrazy na pravých stranách mají smysl. Pokud navíc pro všechna $n \in N$ mají smysl podíly a_n / b_n a $b \neq 0$, potom je

4) $\lim (a_n / b_n) = \lim a_n / \lim b_n = a / b$.

Příklady: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}+n}{\sqrt[3]{3n^2+2n-1}}, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} n\big(\sqrt{n^2+1}-n\big)$

II.3. Limita posloupnosti

Příklady: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}+n}{\sqrt[3]{3n^2+2n-1}}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

Věta (o limitě sevřené posloupnosti): Nechť jsou $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ takové posloupnosti, pro které platí

i) $\lim\{a_n\} = \lim\{c_n\} = a$,

ii) $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} \ (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$.

Potom je $\lim\{b_n\} = a$.

Příklady: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}+n}{\sqrt[3]{3n^2+2n-1}}, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

Věta (o limitě sevřené posloupnosti): Nechť jsou $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ takové posloupnosti, pro které platí

i) $\lim\{a_n\} = \lim\{c_n\} = a$,

ii) $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$: $\forall n \in \mathbf{N}$ $(n \geq n_0) \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$.

Potom je $\lim\{b_n\} = a$.

Příklad: Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

II.3. Limita posloupnosti

Příklady: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}+n}{\sqrt[3]{3n^2+2n-1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

Věta (o limitě sevřené posloupnosti): Nechť jsou $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ takové posloupnosti, pro které platí

i) $\lim\{a_n\} = \lim\{c_n\} = a$,

ii) $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N}\ (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$.

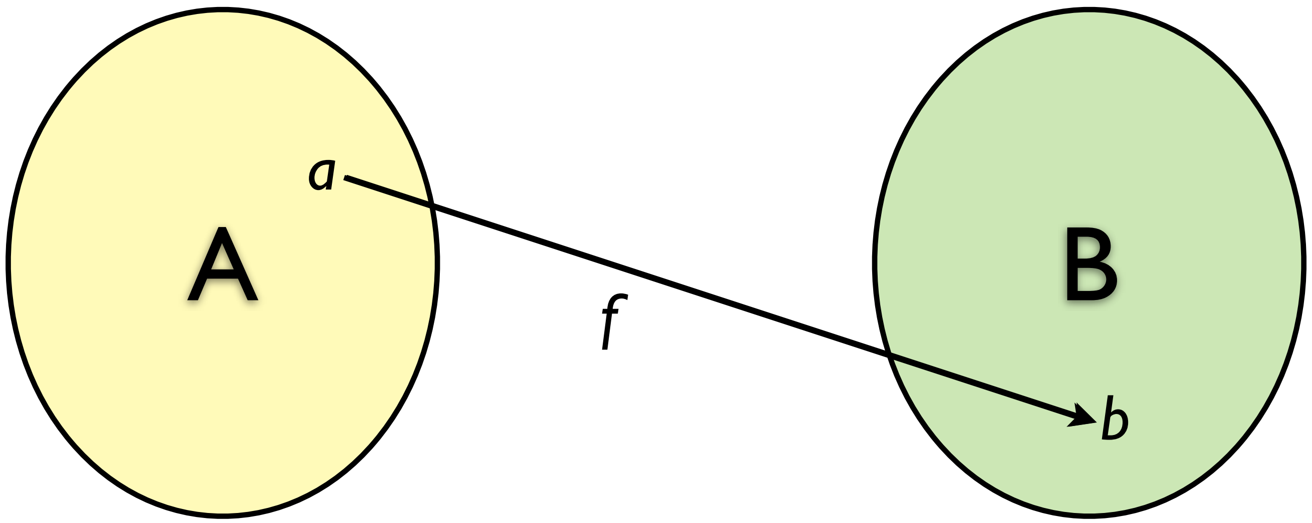
Potom je $\lim\{b_n\} = a$.

Příklad: Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Věta: Zdola omezená nerostoucí posloupnost má vždy limitu. Podobně shora omezená neklesající posloupnost má vždy limitu.

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

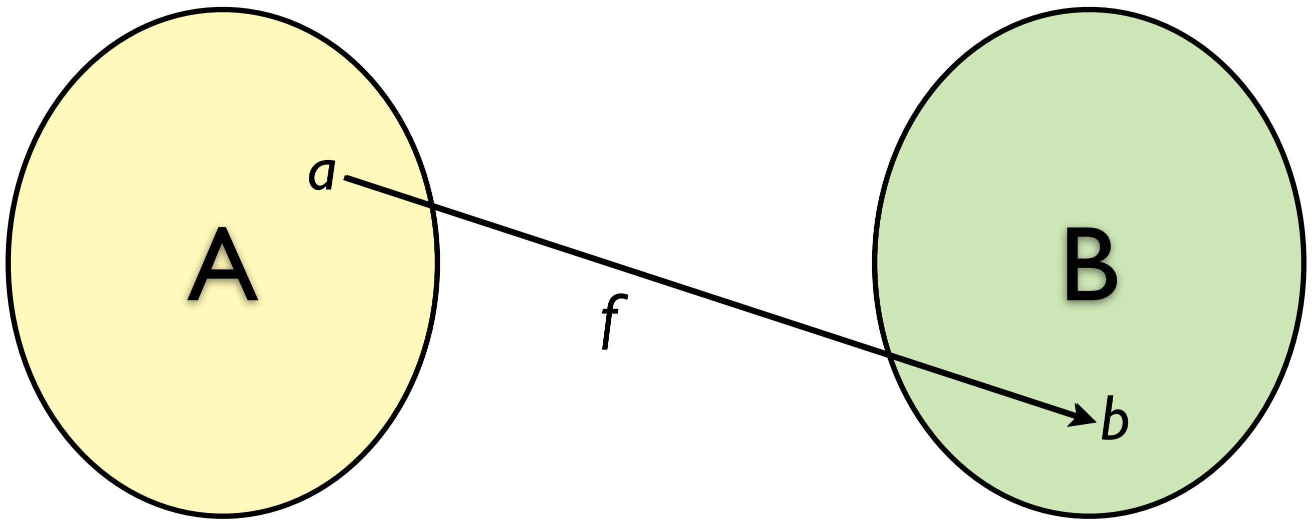
$$f: A \longrightarrow B$$

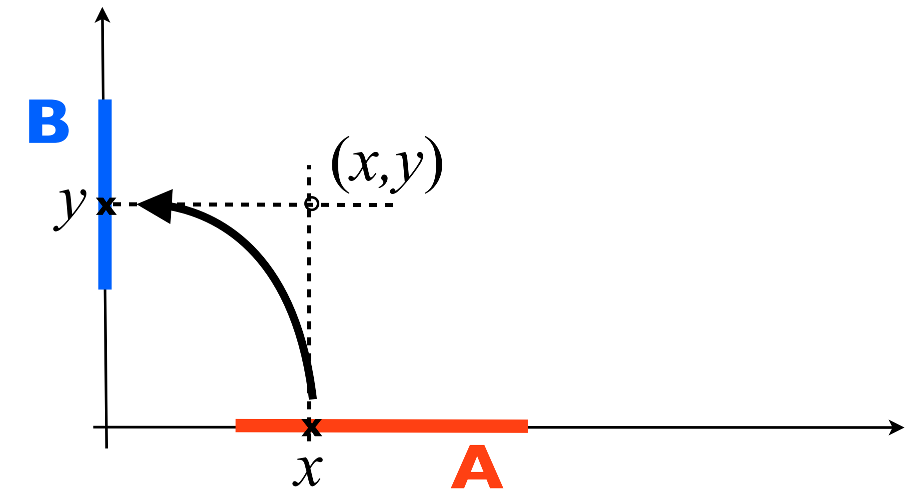


II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

$f: A \longrightarrow B$

$f(x),\ f,\ y = f(x)$

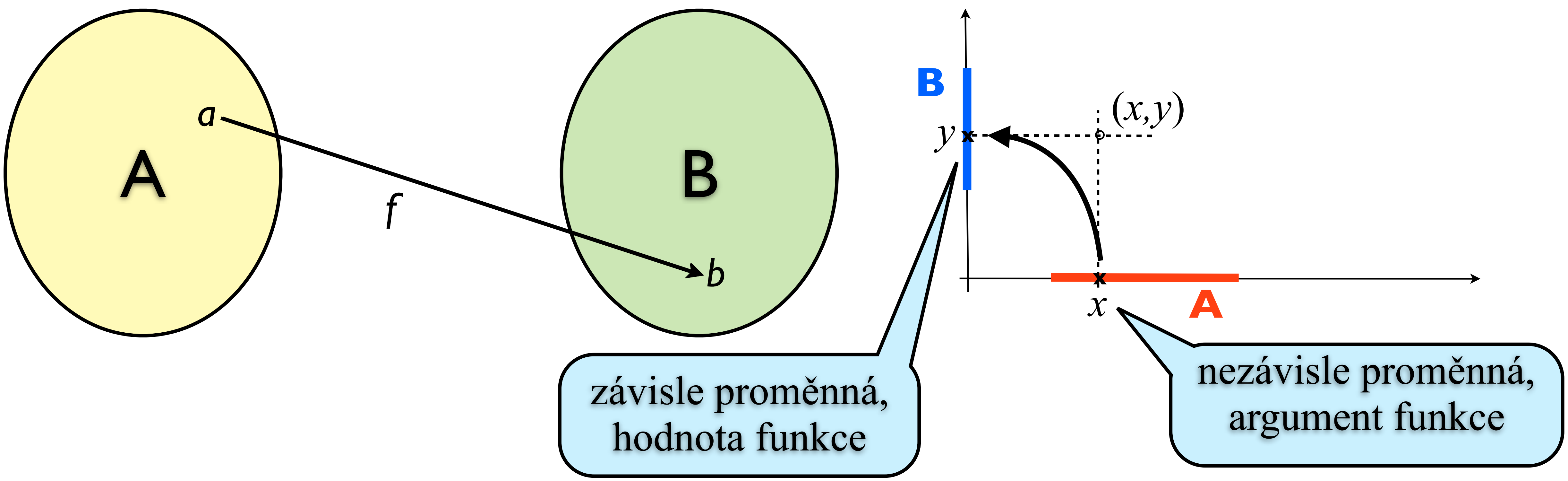




II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

$f: A \longrightarrow B$

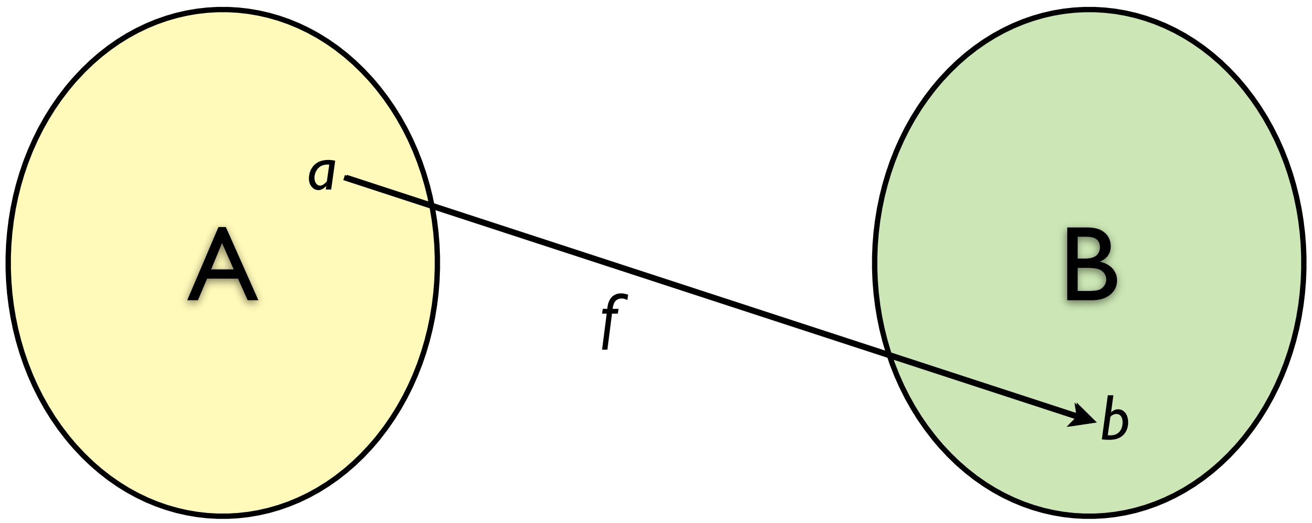
$f(x)$, f, $y = f(x)$

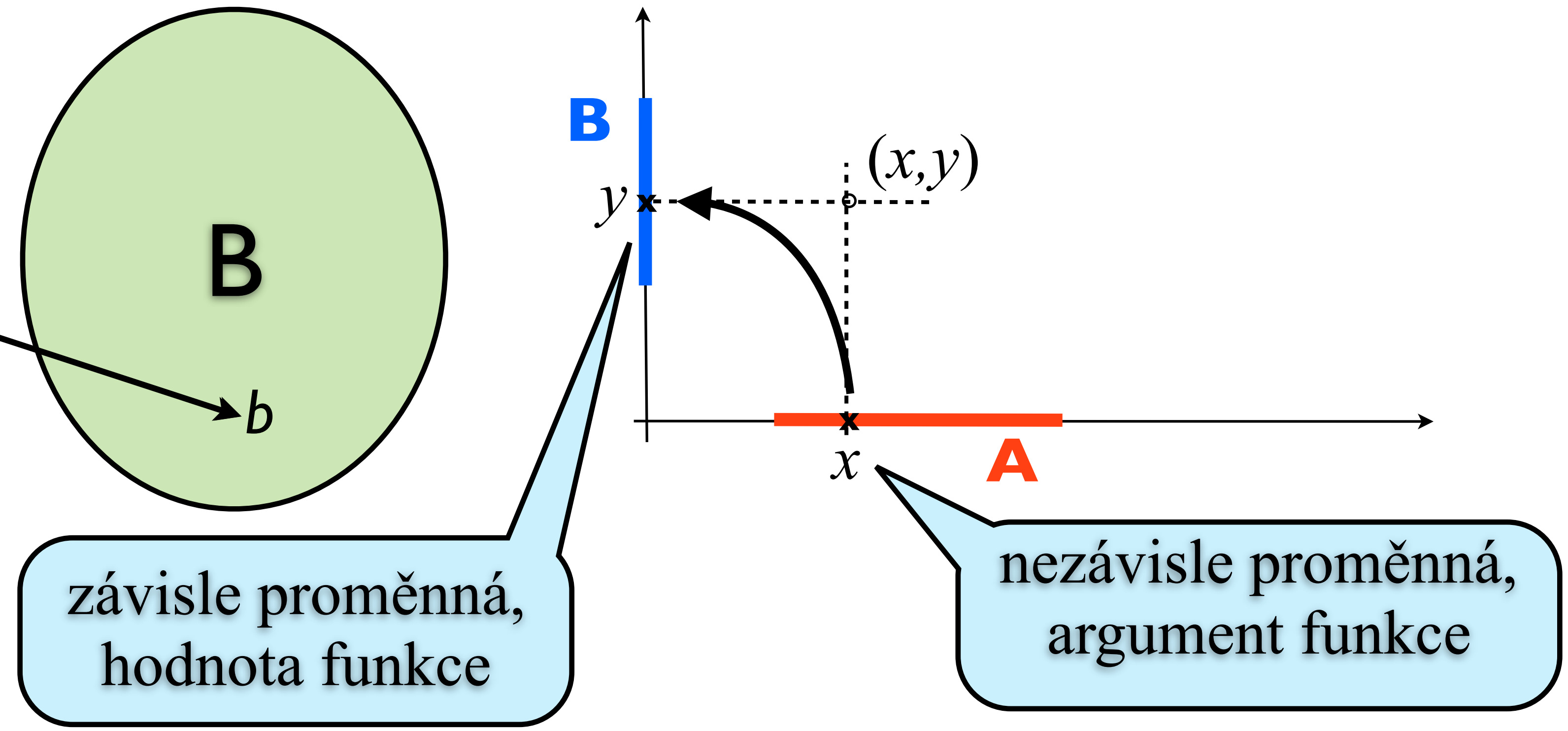


II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

$f:\ A \longrightarrow B$

$f(x),\ f,\ y=f(x)$

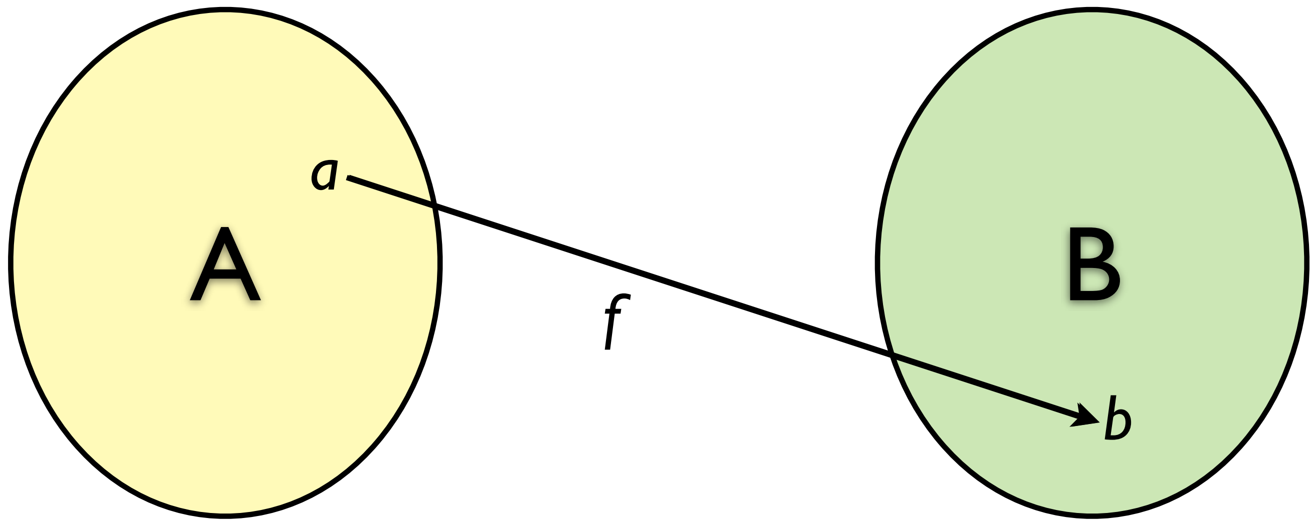


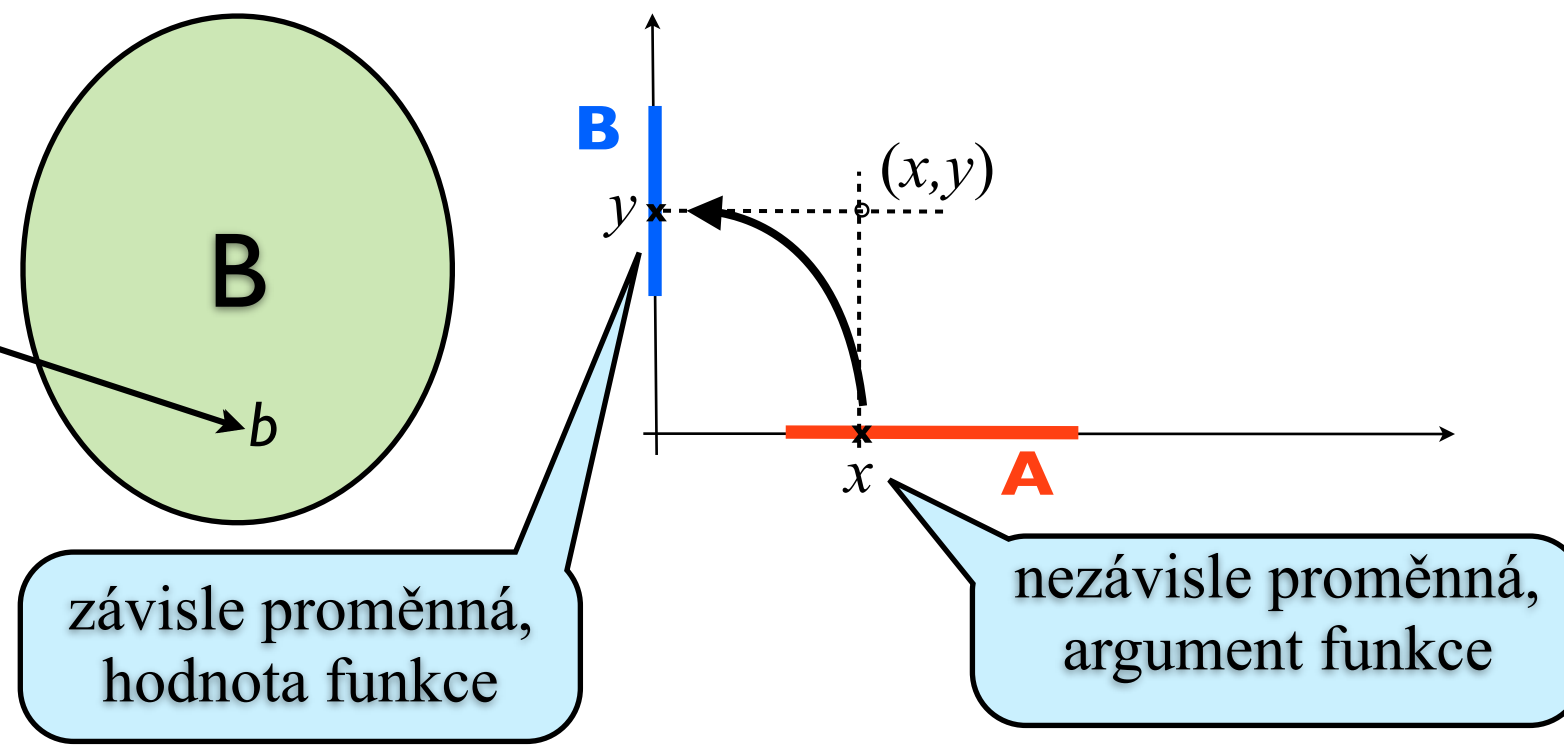


- definiční obor D(f)

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

$f: \text{A} \longrightarrow \text{B}$ $\qquad\qquad$ $f(x),\ f,\ y=f(x)$

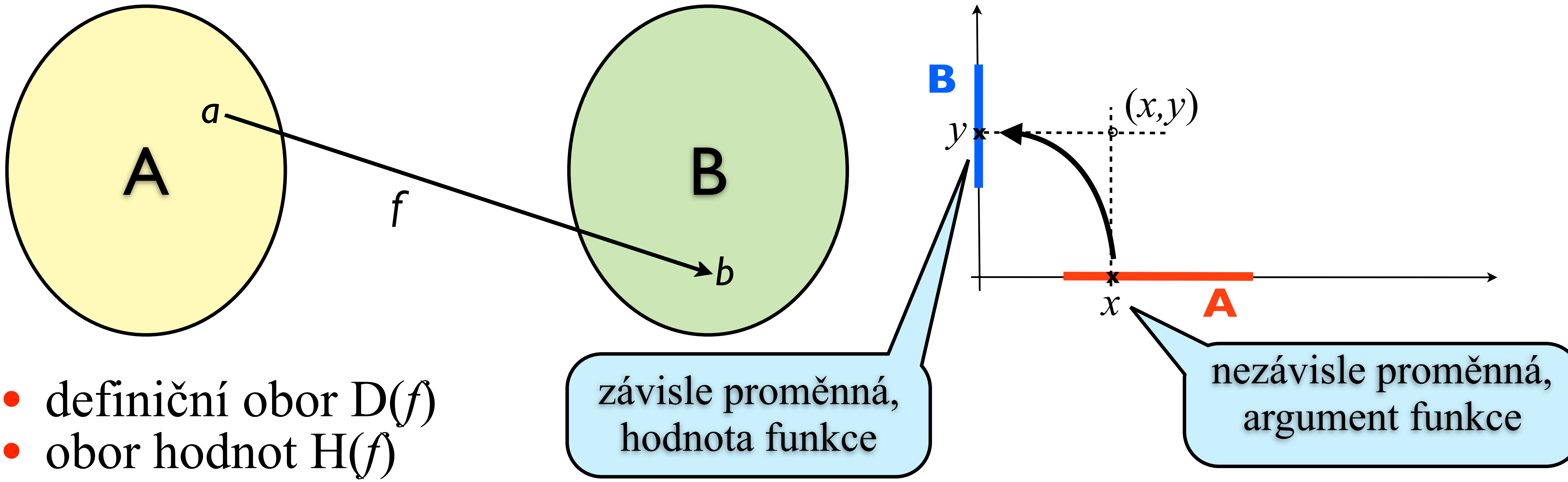




- definiční obor D(f)
- obor hodnot H(f)

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

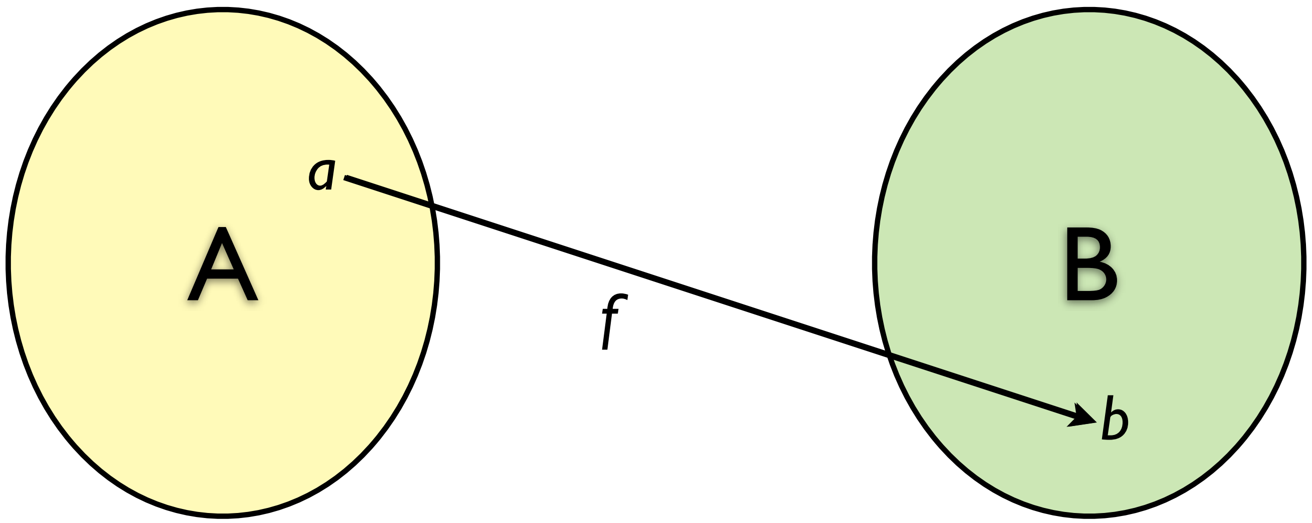
$f: \text{A} \longrightarrow \text{B}$ $\qquad$ $f(x),\ f,\ y=f(x)$

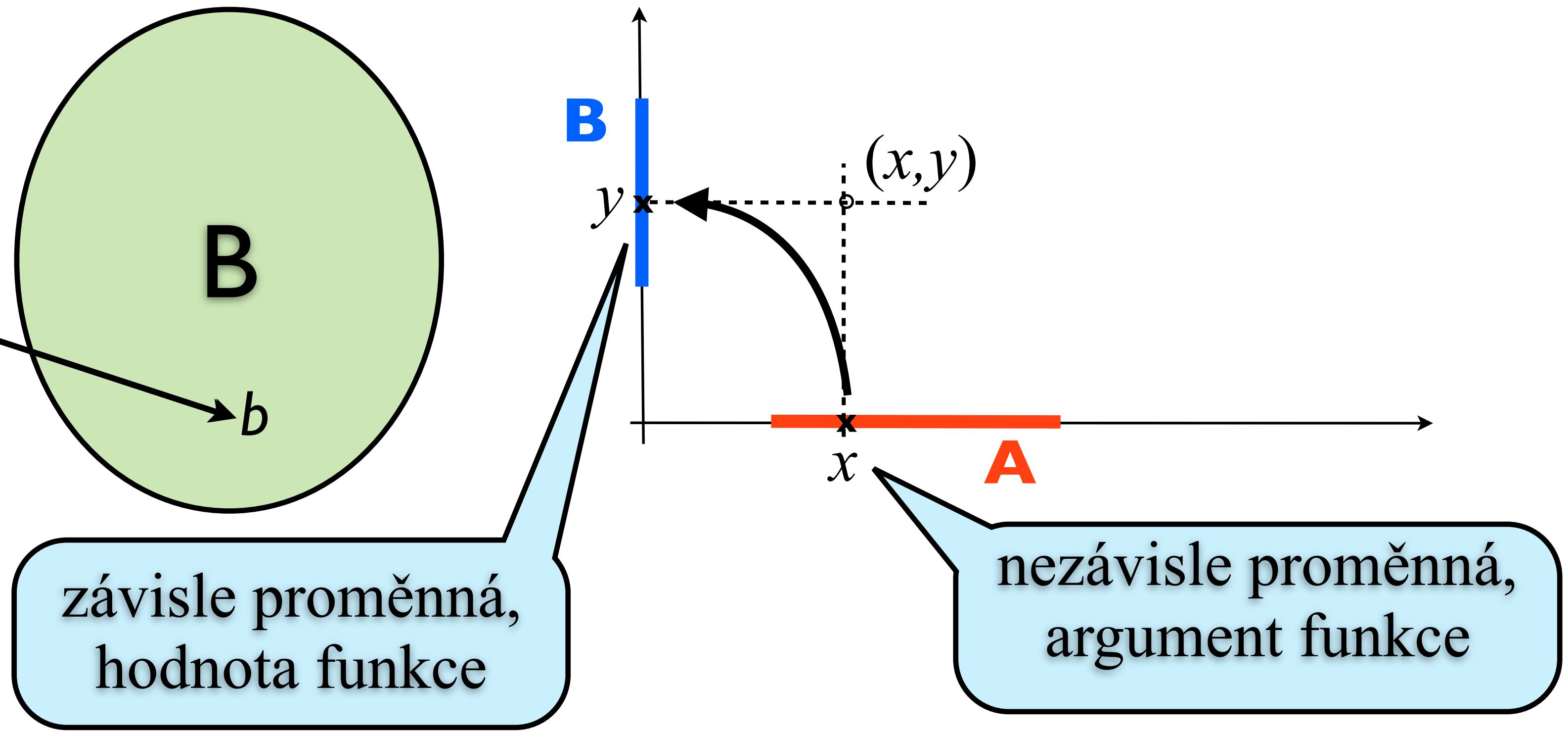


- definiční obor D(f)
- obor hodnot H(f)
- graf funkce G(f)

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

$f: A \longrightarrow B$ $\qquad$ $f(x),\ f,\ y=f(x)$



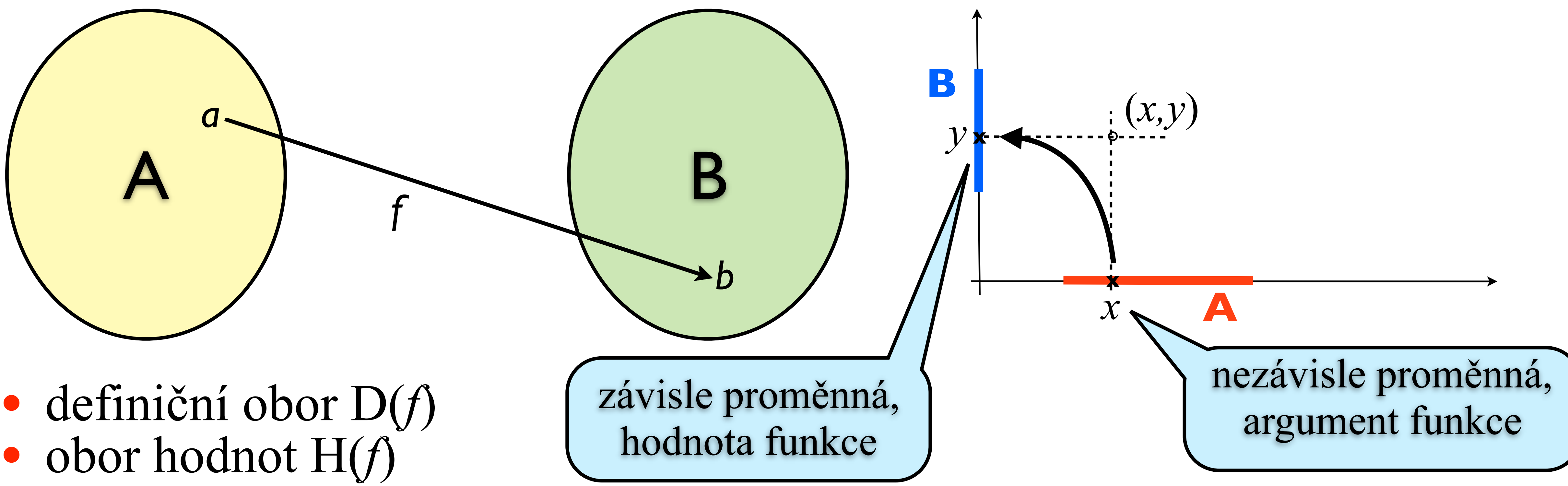


- definiční obor D(f)
- obor hodnot H(f)
- graf funkce G(f)

- Reálnou funkci budeme vždy chápat jako dvojici (f, D).

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

$f: A \longrightarrow B$ $\qquad$ $f(x)$, f, $y=f(x)$



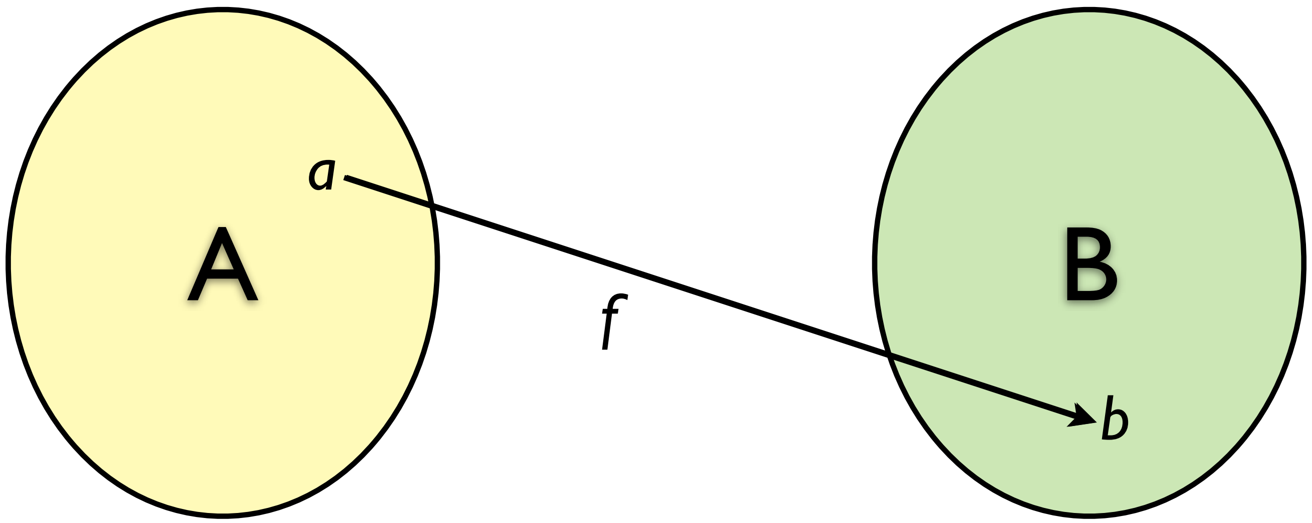
- definiční obor D(f)
- obor hodnot H(f)
- graf funkce G(f)

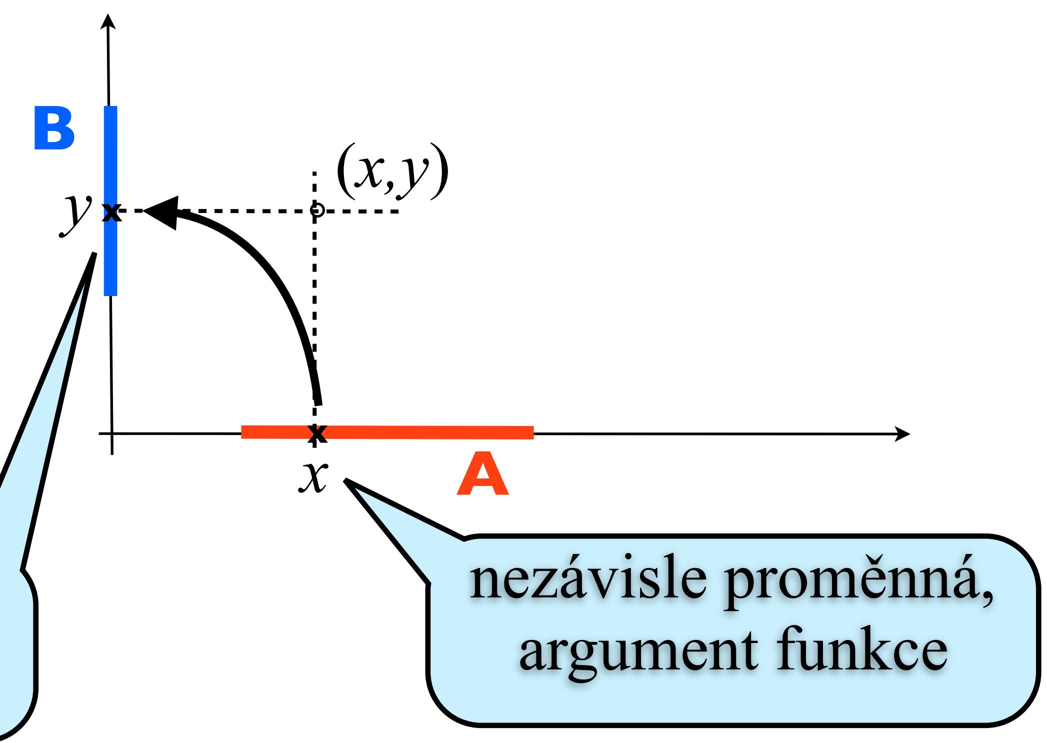
- Reálnou funkci budeme vždy chápat jako dvojici (f, D).

- Funkce (f, D) a (f, B), kde D≠B jsou dvě různé funkce.
  Je-li B⊂D, říkáme, že (f, B) je *zúžením* funkce (f, D).

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

$f: A \longrightarrow B$ $\qquad$ $f(x),\ f,\ y=f(x)$

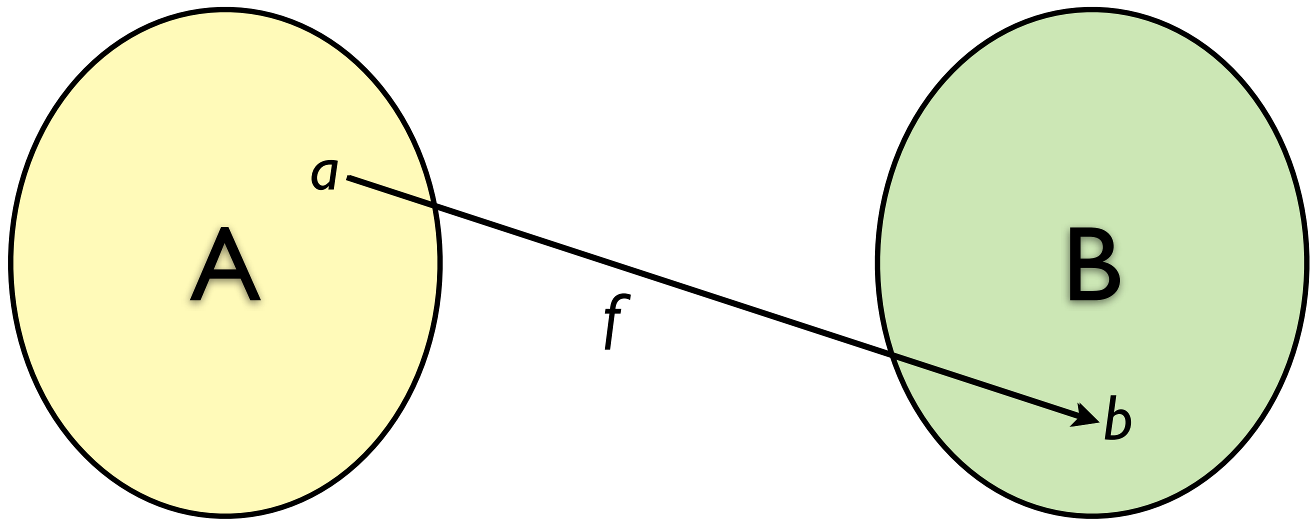


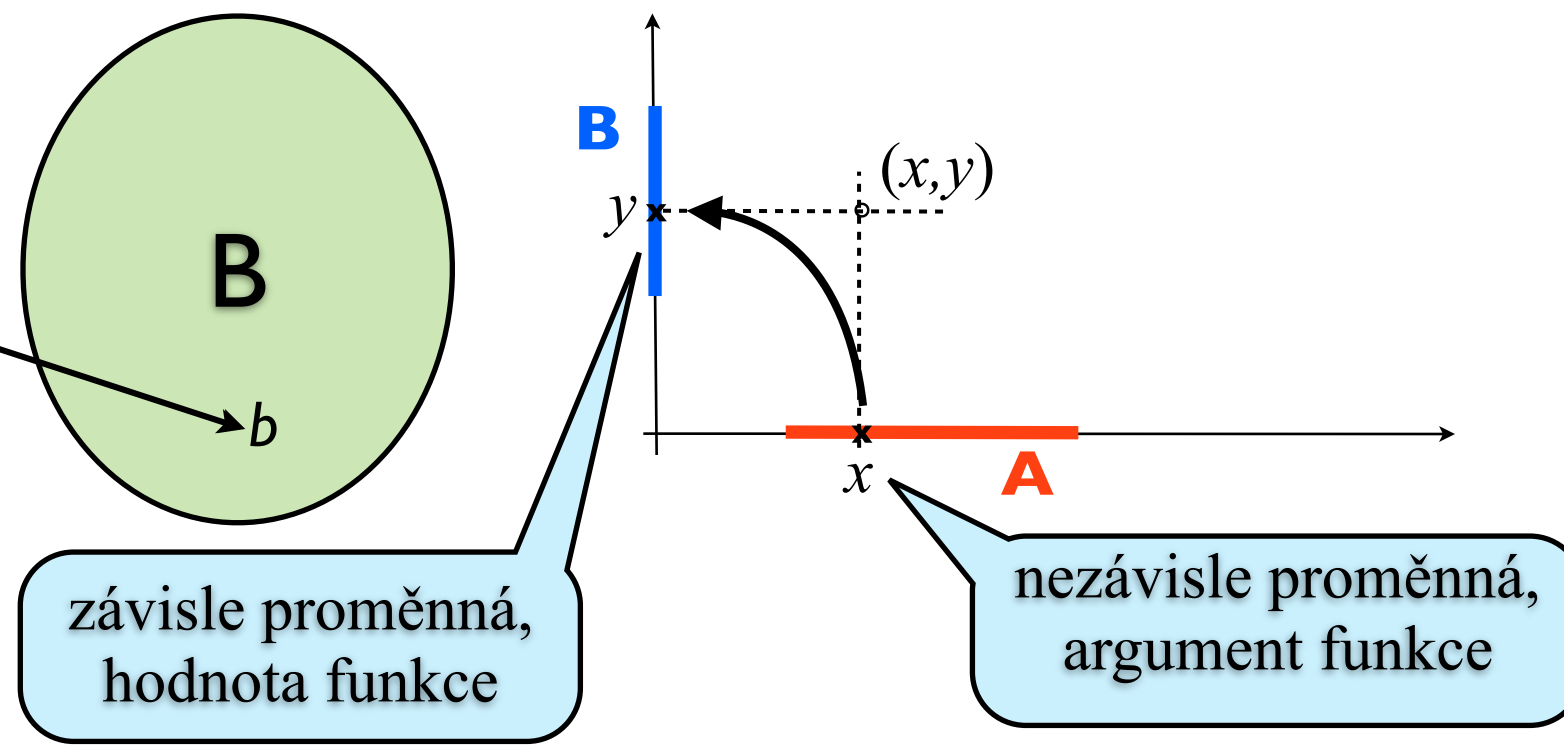


- definiční obor D(f)
- obor hodnot H(f)
- graf funkce G(f)
- Reálnou funkci budeme vždy chápat jako dvojici (f, D).
- Funkce (f, D) a (f, B), kde D≠B jsou dvě různé funkce.
  Je-li B⊂D, říkáme, že (f, B) je *zúžením* funkce (f, D).
- je-li funkce prostá, potom existuje funkce inverzní: $x = f^{-1}(y)$

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

$f: A \longrightarrow B$ $\qquad\qquad f(x),\ f,\ y=f(x)$





- definiční obor D(f)
- obor hodnot H(f)
- graf funkce G(f)
- Reálnou funkci budeme vždy chápat jako dvojici (f, D).
- Funkce (f, D) a (f, B), kde D$\neq$B jsou dvě různé funkce.
  Je-li B$\subset$D, říkáme, že (f, B) je *zúžením* funkce (f, D).
- je-li funkce prostá, potom existuje funkce inverzní: $x = f^{-1}(y)$

  Je-li D(f) = A a H(f) = B, potom je D(f^{-1}) = B a H(f^{-1}) = A

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + ... + a_n f_n(x)$

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení: $h(x) = f(x).g(x)$, $(x) \in D(h) = D \cap C$;

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení: $h(x) = f(x).g(x)$, $(x) \in D(h) = D \cap C$;
  $r(x) = f(x)/g(x)$, $D(r) = D \cap \{x \in C \mid g(x) \neq 0\}$;

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení: $h(x) = f(x).g(x)$, $(x) \in D(h) = D \cap C$;
  $r(x) = f(x)/g(x)$, $D(r) = D \cap \{x \in C \mid g(x) \neq 0\}$;
- složení funkcí (f, D) a (g,C): $y = f(x)$, $z = g(y)$ => $z = g \circ f(x)$, $D(z) = D$

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení: $h(x) = f(x).g(x)$, $(x) \in D(h) = D \cap C$;
  $r(x) = f(x)/g(x)$, $D(r) = D \cap \{x \in C \mid g(x) \neq 0\}$;
- složení funkcí (f, D) a (g,C): $y = f(x)$, $z = g(y)$ => $z = g \circ f(x)$, $D(z) = D$

funkce vnější

funkce vnitřní

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení: $h(x) = f(x).g(x)$, $(x) \in D(h) = D \cap C$;
  $r(x) = f(x)/g(x)$, $D(r) = D \cap \{x \in C \mid g(x) \neq 0\}$;
- složení funkcí (f, D) a (g,C): $y = f(x)$, $z = g(y)$ => $z = g \circ f(x)$, $D(z) = D$

funkce vnější

funkce vnitřní

Funkci $y = f(x)$ nazýváme

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení: $h(x) = f(x).g(x)$, $(x) \in D(h) = D \cap C$;
  $r(x) = f(x)/g(x)$, $D(r) = D \cap \{x \in C \mid g(x) \neq 0\}$;
- složení funkcí (f, D) a (g,C): $y = f(x)$, $z = g(y)$ => $z = g \circ f(x)$, $D(z) = D$

funkce vnější

funkce vnitřní

Funkci $y = f(x)$ nazýváme

- sudou <=> $\forall x \in D(f)$: $(-x) \in D(f) \;\wedge\; f(x) = f(-x)$;

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení: $h(x) = f(x).g(x)$, $(x) \in D(h) = D \cap C$;
  $r(x) = f(x)/g(x)$, $D(r) = D \cap \{x \in C \mid g(x) \neq 0\}$;
- složení funkcí (f, D) a (g,C): $y = f(x)$, $z = g(y)$ => $z = g \circ f(x)$, $D(z) = D$

funkce vnější

funkce vnitřní

Funkci $y = f(x)$ nazýváme

- sudou <=> $\forall x \in D(f)$: $(-x) \in D(f) \;\wedge\; f(x) = f(-x)$;
- lichou <=> $\forall x \in D(f)$: $(-x) \in D(f) \;\wedge\; f(x) = -f(-x)$;

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g,C): $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D): $g(x) = k.f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení: $h(x) = f(x).g(x)$, $(x) \in D(h) = D \cap C$;
  $r(x) = f(x)/g(x)$, $D(r) = D \cap \{x \in C \mid g(x) \neq 0\}$;
- složení funkcí (f, D) a (g,C): $y = f(x)$, $z = g(y)$ => $z = g \circ f(x)$, $D(z) = D$

funkce vnější

funkce vnitřní

Funkci $y = f(x)$ nazýváme

- sudou <=> $\forall x \in D(f)$: $(-x) \in D(f) \wedge f(x) = f(-x)$;
- lichou <=> $\forall x \in D(f)$: $(-x) \in D(f) \wedge f(x) = -f(-x)$;
- periodickou <=> $\exists p \in \mathbf{R}\ \forall x \in D(f)$: $(x \pm p) \in D(f) \wedge f(x) = f(x \pm p)$

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f):\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f):\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- (*ryze*) *klesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- (*ryze*) *klesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f):\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f):\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- (*ryze*) *klesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f):\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- *nerostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- (*ryze*) *klesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- *nerostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f):\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f):\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- (*ryze*) *klesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f):\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- *nerostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f):\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- *monotónní* v bodě $x_0 \in D(f)$, je-li v tomto bodě nerostoucí nebo neklesající;

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- (*ryze*) *klesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- *nerostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- *monotónní* v bodě $x_0 \in D(f)$, je-li v tomto bodě nerostoucí nebo neklesající;
- *ryze monotónní* v bodě $x_0 \in D(f)$, je-li v tomto bodě rostoucí nebo klesající;

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- (*ryze*) *rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon>0 \; \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon>0 \; \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- (*ryze*) *klesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon>0 \; \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- *nerostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ <=>

  $$\exists \varepsilon>0 \; \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- *monotónní* v bodě $x_0 \in D(f)$, je-li v tomto bodě nerostoucí nebo neklesající;
- *ryze monotónní* v bodě $x_0 \in D(f)$, je-li v tomto bodě rostoucí nebo klesající;

Pokud v těchto definicích nahradíme okolí $U_\varepsilon(x_0)$ levým okolím $U_\varepsilon^-(x)$, resp. pravým okolím $U_\varepsilon^+(x)$, budeme hovořit o vlastnosti "zleva", resp. "zprava".

II.4. Globální vlastnosti funkce

Globální vlastnosti = vlastnost na nějaké množině $M \subset D(f)$

II.4. Globální vlastnosti funkce

Globální vlastnosti = vlastnost na nějaké množině $M \subset D(f)$

- (ryze) rostoucí (případně neklesající, ryze klesající, nerostoucí, monotónní či ryze monotónní) na množině M <=> má-li tuto vlastnost v každém bodě množiny M;

II.4. Globální vlastnosti funkce

Globální vlastnosti = vlastnost na nějaké množině $M \subset D(f)$

- (ryze) rostoucí (případně neklesající, ryze klesající, nerostoucí, monotónní či ryze monotónní) na množině M <=> má-li tuto vlastnost v každém bodě množiny M;
- omezenou shora na množině M <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in M\colon\ f(x) \leq K$;

II.4. Globální vlastnosti funkce

Globální vlastnosti = vlastnost na nějaké množině $M \subset D(f)$

- (ryze) rostoucí (případně neklesající, ryze klesající, nerostoucí, monotónní či ryze monotónní) na množině M <=> má-li tuto vlastnost v každém bodě množiny M;
- omezenou shora na množině M <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in M$: $f(x) \leq K$;
- omezenou zdola na množině M <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in M$: $f(x) \geq K$;

II.4. Globální vlastnosti funkce

Globální vlastnosti = vlastnost na nějaké množině $M \subset D(f)$

- (ryze) rostoucí (případně neklesající, ryze klesající, nerostoucí, monotónní či ryze monotónní) na množině M <=> má-li tuto vlastnost v každém bodě množiny M;
- omezenou shora na množině M <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in M\colon\ f(x) \leq K$;
- omezenou zdola na množině M <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in M\colon\ f(x) \geq K$;
- omezenou na množině M, je-li tato funkce omezená shora i zdola na množině M;

II.4. Globální vlastnosti funkce

Globální vlastnosti = vlastnost na nějaké množině $\mathrm{M} \subset \mathrm{D}(f)$

- (ryze) rostoucí (případně neklesající, ryze klesající, nerostoucí, monotónní či ryze monotónní) na množině M <=> má-li tuto vlastnost v každém bodě množiny M;
- omezenou shora na množině M <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathrm{M}:\ f(x) \leq K$;
- omezenou zdola na množině M <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathrm{M}:\ f(x) \geq K$;
- omezenou na množině M, je-li tato funkce omezená shora i zdola na množině M;
- konstantní, je-li nerostoucí a zároveň neklesající.

II.4. Globální vlastnosti funkce

Globální vlastnosti = vlastnost na nějaké množině M $\subset$ D(f)

- (ryze) rostoucí (případně neklesající, ryze klesající, nerostoucí, monotónní či ryze monotónní) na množině M <=> má-li tuto vlastnost v každém bodě množiny M;
- omezenou shora na množině M <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathrm{M}$: $f(x) \leq K$;
- omezenou zdola na množině M <=> $\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathrm{M}$: $f(x) \geq K$;
- omezenou na množině M, je-li tato funkce omezená shora i zdola na množině M;
- konstantní, je-li nerostoucí a zároveň neklesající.

Pokud pouze řekneme, že funkce je rostoucí (případně neklesající, klesající, nerostoucí, monotónní, ryze monotónní, omezená či konstantní), rozumíme tím, že má tuto vlastnost na celém svém definičním oboru D(f).

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého:

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in \mathrm{D}(f)$ svého:

- *ostrého lokálního minima* <=> $\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{D}(f)\colon\ f(x_0) < f(x)$;

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého:

- *ostrého lokálního minima* $\Leftrightarrow \exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) < f(x)$;
- *ostrého lokálního maxima* $\Leftrightarrow \exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) > f(x)$;

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in \mathrm{D}(f)$ svého:

- *ostrého lokálního minima* $\iff \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{D}(f)\colon\ f(x_0) < f(x)$;
- *ostrého lokálního maxima* $\iff \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{D}(f)\colon\ f(x_0) > f(x)$;
- *lokálního minima* $\iff \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{D}(f)\colon\ f(x_0) \leq f(x)$;

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého:

- *ostrého lokálního minima* <=> $\exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) < f(x)$;
- *ostrého lokálního maxima* <=> $\exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) > f(x)$;
- *lokálního minima* <=> $\exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) \leq f(x)$;
- *lokálního maxima* <=> $\exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) \geq f(x)$;

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého:

- *ostrého lokálního minima* <=> $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) < f(x)$;
- *ostrého lokálního maxima* <=> $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) > f(x)$;
- *lokálního minima* <=> $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) \leq f(x)$;
- *lokálního maxima* <=> $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$: $f(x_0) \geq f(x)$;

Pokud nastane některý z výše uvedených případů, říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého (ostrého či neostrého) *lokálního extrému*.

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého:

- *ostrého lokálního minima* $\Longleftrightarrow \exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)\colon\ f(x_0) < f(x)$;
- *ostrého lokálního maxima* $\Longleftrightarrow \exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)\colon\ f(x_0) > f(x)$;
- *lokálního minima* $\Longleftrightarrow \exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)\colon\ f(x_0) \leq f(x)$;
- *lokálního maxima* $\Longleftrightarrow \exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)\colon\ f(x_0) \geq f(x)$;

Pokud nastane některý z výše uvedených případů, říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého (ostrého či neostrého) *lokálního extrému*.

Pokud nastane některý z výše uvedených případů, říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého (ostrého či neostrého) *lokálního extrému*.

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého extrému, pokud nastane některá z následujících situací:

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého extrému, pokud nastane některá z následujících situací:

- ostré lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M \; \forall x \in M$: $f(x_0) < f(x)$;

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého extrému, pokud nastane některá z následujících situací:

- ostré lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M \ \forall x \in M$: $f(x_0) < f(x)$;
- ostré lokální maximum <=> $\exists x_0 \in M \ \forall x \in M$: $f(x_0) > f(x)$;

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého extrému, pokud nastane některá z následujících situací:

- ostré lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) < f(x)$;
- ostré lokální maximum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) > f(x)$;
- lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) \leq f(x)$;

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého extrému, pokud nastane některá z následujících situací:

- ostré lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) < f(x)$;
- ostré lokální maximum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) > f(x)$;
- lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) \leq f(x)$;
- lokální maximum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) \geq f(x)$;

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého extrému, pokud nastane některá z následujících situací:

- ostré lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) < f(x)$;
- ostré lokální maximum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) > f(x)$;
- lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) \leq f(x)$;
- lokální maximum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) \geq f(x)$;

Pokud je $M = D(f)$, hovoříme o "globálních" extrémech funkce.

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého extrému, pokud nastane některá z následujících situací:

- ostré lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) < f(x)$;
- ostré lokální maximum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) > f(x)$;
- lokální minimum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) \leq f(x)$;
- lokální maximum <=> $\exists x_0 \in M\ \forall x \in M$: $f(x_0) \geq f(x)$;

Pokud je $M = D(f)$, hovoříme o "globálních" extrémech funkce.

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x) \qquad x_0 = \arg\min_{x \in M} f(x)$$

$$f(x_0) = \min_{M} f(x) \qquad x_0 = \arg\min_{M} f(x)$$

$$f(x_0) = \min f(x) \qquad x_0 = \arg\min f(x)$$

II.4. Extrémy funkce

Označme f(M) = $\{y \in \mathbf{R}: y = f(x), x \in M\}$ množinu všech hodnot funkce f na množině M.

II.4. Extrémy funkce

Označme f(M) = $\{y \in \mathbf{R}: y = f(x), x \in M\}$ množinu všech hodnot funkce f na množině M.

Hodnotu sup $(f(M))$ nazýváme supremem funkce f na množině M.
Podobně inf $(f(M))$ nazveme infimem funkce f na množině M.

$$y = \sup_{x \in M} f(x) \qquad y = \sup_{M} f(x) \qquad y = \sup f(x)$$

$$y = \inf_{x \in M} f(x) \qquad y = \inf_{M} f(x) \qquad y = \inf f(x)$$

II.4. Extrémy funkce

Označme f(M) = $\{y \in \mathbf{R}: y = f(x), x \in M\}$ množinu všech hodnot funkce f na množině M.

Hodnotu sup $\big(f(M)\big)$ nazýváme supremem funkce f na množině M.
Podobně inf $\big(f(M)\big)$ nazveme infimem funkce f na množině M.

$$y = \sup_{x\in M} f(x) \qquad y = \sup_{M} f(x) \qquad y = \sup f(x)$$

$$y = \inf_{x\in M} f(x) \qquad y = \inf_{M} f(x) \qquad y = \inf f(x)$$

- supremum a infimum jsou pouze globální pojmy (nedefinují se lokálně)

II.4. Extrémy funkce

Označme f(M) = $\{y \in \mathbf{R}: y = f(x), x \in M\}$ množinu všech hodnot funkce f na množině M.

Hodnotu sup $\big(f(M)\big)$ nazýváme supremem funkce f na množině M.
Podobně inf $\big(f(M)\big)$ nazveme infimem funkce f na množině M.

$$y = \sup_{x \in M} f(x) \qquad y = \sup_{M} f(x) \qquad y = \sup f(x)$$

$$y = \inf_{x \in M} f(x) \qquad y = \inf_{M} f(x) \qquad y = \inf f(x)$$

- supremum a infimum jsou pouze globální pojmy (nedefinují se lokálně)
- maximum ani minimum funkce nemusí existovat ani v lokální formě, ani ve formě globální a to ani pro omezenou funkci;

II.4. Extrémy funkce

Označme f(M) = $\{y \in \mathbf{R}: y = f(x), x \in M\}$ množinu všech hodnot funkce f na množině M.

Hodnotu sup $\big(f(M)\big)$ nazýváme supremem funkce f na množině M.
Podobně inf $\big(f(M)\big)$ nazveme infimem funkce f na množině M.

$$y = \sup_{x \in M} f(x) \qquad y = \sup_{M} f(x) \qquad y = \sup f(x)$$

$$y = \inf_{x \in M} f(x) \qquad y = \inf_{M} f(x) \qquad y = \inf f(x)$$

- supremum a infimum jsou pouze globální pojmy (nedefinují se lokálně)
- maximum ani minimum funkce nemusí existovat ani v lokální formě, ani ve formě globální a to ani pro omezenou funkci;
- supremum a infimum funkce existuje vždy;

II.4. Extrémy funkce

Označme f(M) = $\{y \in \mathbf{R}: y = f(x), x \in M\}$ množinu všech hodnot funkce f na množině M.

Hodnotu sup $(f(M))$ nazýváme supremem funkce f na množině M.
Podobně inf $(f(M))$ nazveme infimem funkce f na množině M.

$$y = \sup_{x \in M} f(x) \qquad y = \sup_{M} f(x) \qquad y = \sup f(x)$$

$$y = \inf_{x \in M} f(x) \qquad y = \inf_{M} f(x) \qquad y = \inf f(x)$$

- supremum a infimum jsou pouze globální pojmy (nedefinují se lokálně)
- maximum ani minimum funkce nemusí existovat ani v lokální formě, ani ve formě globální a to ani pro omezenou funkci;
- supremum a infimum funkce existuje vždy;
- pokud existuje minimum nebo maximum, potom je $\min f = \inf f$ a $\max f = \sup f$

II.5. Elementární funkce

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

d) goniometrické funkce

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

d) goniometrické funkce

e) cyklometrické funkce

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

d) goniometrické funkce

e) cyklometrické funkce

f) funkce $\operatorname{sgn}(x)$

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce
b) exponenciální funkce
c) logaritmické funkce
d) goniometrické funkce
e) cyklometrické funkce
f) funkce $\operatorname{sgn}(x)$

---

a) Mocninné funkce: $f(x) = x^a, \; a \in \mathbf{R}$

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

d) goniometrické funkce

e) cyklometrické funkce

f) funkce sgn(x)

---

a) Mocninné funkce: $f(x) = x^a, \; a \in \mathbf{R}$

- $a = 0 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

d) goniometrické funkce

e) cyklometrické funkce

f) funkce $\mathrm{sgn}(x)$

---

a) Mocninné funkce: $f(x) = x^a,\ a \in \mathbf{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \ \text{- konstantní funkce} \\ \bullet\ a \in \mathbf{N} \Rightarrow \text{přirozená mocnina} \end{array}\right\} \mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$$

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

d) goniometrické funkce

e) cyklometrické funkce

f) funkce sgn(x)

---

a) Mocninné funkce: $f(x) = x^a, \ a \in \mathbf{R}$

- $a = 0 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a \in \mathbf{N} \Rightarrow$ přirozená mocnina

$\left.\right\}$ $D(f) = \mathbf{R}$

- lineární kombinace konstanty a přirozených mocnin => *polynomické funkce*

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

d) goniometrické funkce

e) cyklometrické funkce

f) funkce sgn(x)

---

a) Mocninné funkce: $f(x) = x^a, \; a \in \mathbf{R}$

- $a = 0 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a \in \mathbf{N} \Rightarrow$ přirozená mocnina

$\Big\}$ $D(f) = \mathbf{R}$

- lineární kombinace konstanty a přirozených mocnin => *polynomické funkce*
- je-li a celé záporné, potom definiční obor nesmí obsahovat nulu

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

d) goniometrické funkce

e) cyklometrické funkce

f) funkce sgn(x)

---

a) Mocninné funkce: $f(x) = x^a, \ a \in \mathbf{R}$

- $a = 0 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a \in \mathbf{N} \Rightarrow$ přirozená mocnina

$\}$ D(f) = $\mathbf{R}$

- lineární kombinace konstanty a přirozených mocnin => *polynomické funkce*
- je-li a celé záporné, potom definiční obor nesmí obsahovat nulu
- pro $a \in \mathbf{R}$ je D(f) = $(0, \infty)$

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce

b) exponenciální funkce

c) logaritmické funkce

d) goniometrické funkce

e) cyklometrické funkce

f) funkce sgn(x)

---

a) <u>Mocninné funkce:</u> $f(x) = x^a,\ a \in \mathbf{R}$

- $a = 0 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a \in \mathbf{N} \Rightarrow$ přirozená mocnina

$\left.\right\}$ $D(f) = \mathbf{R}$

- lineární kombinace konstanty a přirozených mocnin => *polynomické funkce*
- je-li a celé záporné, potom definiční obor nesmí obsahovat nulu
- pro $a \in \mathbf{R}$ je $D(f) = (0, \infty)$
- dodefinujeme-li $0^a = 0$, pak pro $a > 0$ je $D(f) = \langle 0, \infty)$

II.5. Elementární funkce

a) mocninné funkce
b) exponenciální funkce
c) logaritmické funkce
d) goniometrické funkce
e) cyklometrické funkce
f) funkce sgn(x)

---

a) <u>Mocninné funkce:</u> $f(x) = x^a,\ a \in \mathbf{R}$

- $a = 0 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a \in \mathbf{N} \Rightarrow$ přirozená mocnina

$\}$ $D(f) = \mathbf{R}$

- lineární kombinace konstanty a přirozených mocnin => *polynomické funkce*
- je-li a celé záporné, potom definiční obor nesmí obsahovat nulu
- pro $a \in \mathbf{R}$ je $D(f) = (0, \infty)$
- dodefinujeme-li $0^a = 0$, pak pro $a > 0$ je $D(f) = \langle 0, \infty)$
- pro a=p/q, kde $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ liché, lze definiční obor rozšířit i na $x<0$.

II.5. Elementární funkce

b) Exponenciální funkce: $f(x) = a^x$, $a > 0$

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$

II.5. Elementární funkce

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí

II.5. Elementární funkce

b) Exponenciální funkce: $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce

II.5. Elementární funkce

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$ přirozená exponenciální funkce a značíme ji $y = \exp(x)$

II.5. Elementární funkce

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$ přirozená exponenciální funkce a značíme ji $y = \exp(x)$

  (e = Eulerova konstanta) $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

II.5. Elementární funkce

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- D(f) = **R**, H(f) = (0,∞)
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$ přirozená exponenciální funkce a značíme ji $y = \exp(x)$

  (e = Eulerova konstanta) $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\qquad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

c) <u>Logaritmické funkce:</u> $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

II.5. Elementární funkce

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$ přirozená exponenciální funkce a značíme ji $y = \exp(x)$

(e = Eulerova konstanta) $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

c) <u>Logaritmické funkce:</u> $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $D(f) = (0,\infty)$, $H(f) = \mathbf{R}$

II.5. Elementární funkce

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$ přirozená exponenciální funkce a značíme ji $y = \exp(x)$

  (e = Eulerova konstanta) $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\quad e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

c) <u>Logaritmické funkce:</u> $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $D(f) = (0,\infty)$, $H(f) = \mathbf{R}$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí

II.5. Elementární funkce

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$ přirozená exponenciální funkce a značíme ji $y = \exp(x)$

  (e = Eulerova konstanta) $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\qquad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

c) <u>Logaritmické funkce:</u> $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $D(f) = (0,\infty)$, $H(f) = \mathbf{R}$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = e \Rightarrow$ přirozený logaritmus a značíme ji $y = \ln(x)$

II.5. Elementární funkce

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$ přirozená exponenciální funkce a značíme ji $y = \exp(x)$

  (e = Eulerova konstanta) $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

c) <u>Logaritmické funkce:</u> $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $D(f) = (0,\infty)$, $H(f) = \mathbf{R}$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = e \Rightarrow$ přirozený logaritmus a značíme ji $y = \ln(x)$
- $a = 10 \Rightarrow$ dekadický logaritmus

II.5. Elementární funkce

b) <u>Exponenciální funkce:</u> $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0,\infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$ přirozená exponenciální funkce a značíme ji $y = \exp(x)$

(e = Eulerova konstanta) $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

c) <u>Logaritmické funkce:</u> $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $D(f) = (0,\infty)$, $H(f) = \mathbf{R}$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = e \Rightarrow$ přirozený logaritmus a značíme ji $y = \ln(x)$
- $a = 10 \Rightarrow$ dekadický logaritmus

Funkce exponenciální a logaritmické jsou navzájem inverzní. Platí

$x = \log_a(y) \iff y = a^x$ nebo též $\log_a(a^x) = x$

II.5. Elementární funkce

d) <u>Goniometrické funkce:</u> $f(x) = \sin(\mathrm{x})$, $f(\mathrm{x}) = \cos(x)$,

II.5. Elementární funkce

d) <u>Goniometrické funkce:</u> $f(x) = \sin(\mathrm{x})$, $f(\mathrm{x}) = \cos(x)$,

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

II.5. Elementární funkce

d) <u>Goniometrické funkce:</u> $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$,

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- jsou periodické s periodou 2π, sinus je lichá, kosinus je sudá funkce

II.5. Elementární funkce

d) <u>Goniometrické funkce:</u> $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$,

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- jsou periodické s periodou 2π, sinus je lichá, kosinus je sudá funkce
- podílem dostaneme funkce tangens a kotangens:

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

II.5. Elementární funkce

d) <u>Goniometrické funkce:</u> $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$,

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- jsou periodické s periodou 2π, sinus je lichá, kosinus je sudá funkce
- podílem dostaneme funkce tangens a kotangens:

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

e) <u>Cyklometrické funkce:</u> $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \arcsin(x)$

II.5. Elementární funkce

d) <u>Goniometrické funkce:</u> $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$,

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1, 1\rangle$
- jsou periodické s periodou 2π, sinus je lichá, kosinus je sudá funkce
- podílem dostaneme funkce tangens a kotangens:

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

e) <u>Cyklometrické funkce:</u> $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \arcsin(x)$

- zúžíme-li funkci sinus na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, potom inverzní funkce k této funkci je $\arcsin(x)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$

II.5. Elementární funkce

d) Goniometrické funkce: $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$,

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1, 1\rangle$
- jsou periodické s periodou 2π, sinus je lichá, kosinus je sudá funkce
- podílem dostaneme funkce tangens a kotangens:

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

e) Cyklometrické funkce: $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \arcsin(x)$

- zúžíme-li funkci sinus na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, potom inverzní funkce k této funkci je $\arcsin(x)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$
- zúžíme-li funkci kosinus na interval $\langle 0, \pi\rangle$, potom inverzní funkce k této funkci je $\arccos(x)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$

II.5. Elementární funkce

d) <u>Goniometrické funkce:</u> $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$,

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1, 1\rangle$
- jsou periodické s periodou 2π, sinus je lichá, kosinus je sudá funkce
- podílem dostaneme funkce tangens a kotangens:

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

e) <u>Cyklometrické funkce:</u> $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \arcsin(x)$

- zúžíme-li funkci sinus na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, potom inverzní funkce k této funkci je $\arcsin(x)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$
- zúžíme-li funkci kosinus na interval $\langle 0, \pi\rangle$, potom inverzní funkce k této funkci je $\arccos(x)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$
- $\mathrm{arctg}(x)$, $\mathrm{arccotg}(x)$ jsou inverzní funkce k jedné větvi $\mathrm{tg}(x)$, $\mathrm{cotg}(x)$

II.5. Elementární funkce

d) <u>Goniometrické funkce:</u> $f(x) = \sin(\mathrm{x})$, $f(\mathrm{x}) = \cos(x)$,

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- jsou periodické s periodou 2π, sinus je lichá, kosinus je sudá funkce
- podílem dostaneme funkce tangens a kotangens:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

e) <u>Cyklometrické funkce:</u> $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \arcsin(x)$

- zúžíme-li funkci sinus na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, potom inverzní funkce k této funkci je $\arcsin(x)$, $\mathrm{x} \in \langle -1, 1 \rangle$
- zúžíme-li funkci kosinus na interval $\langle 0, \pi \rangle$, potom inverzní funkce k této funkci je $\arccos(x)$, $\mathrm{x} \in \langle -1, 1 \rangle$
- $\operatorname{arctg}(x)$, $\operatorname{arccotg}(x)$ jsou inverzní funkce k jedné větvi $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{cotg}(x)$

Funkce goniometrické zúžené na jednu periodu a funkce cyklometrické jsou navzájem inverzní.

II.5. Elementární funkce

f) Funkce signum: $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

II.5. Elementární funkce

f) Funkce signum: $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \{-1, 0, 1\}$

f) Funkce signum: $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \{-1, 0, 1\}$

- $$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

II.5. Elementární funkce

f) Funkce signum: $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \{-1, 0, 1\}$

- $$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

- funkce absolutní hodnota: $|x| = x.\mathrm{sgn}(x)$

II.5. Elementární funkce

f) <u>Funkce signum:</u> $f(x) = \text{sgn}(x)$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \{-1, 0, 1\}$
- $$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$
- funkce absolutní hodnota: $|x| = x.\text{sgn}(x)$

Ostatní funkce, se kterými budeme pracovat, vznikají jako lineární kombinace, součin, podíl či složení těchto elementárních funkcí.

II.6. Limita funkce

Definice 1: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in P_\delta(x_0) \ \ f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

Věta: Funkce může mít v jednom bodě nejvýše jednu limitu.

II.6. Limita funkce

Definice 1: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0: \forall x \in P_\delta(x_0) \quad f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

Definice 2: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v tomto okolí platí

$$\lim x_n = x_0 \quad \Rightarrow \lim f(x_n) = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Věta: Funkce může mít v jednom bodě nejvýše jednu limitu.

II.6. Limita funkce

Definice 1: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in P_\delta(x_0) \;\; f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

Definice 2: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v tomto okolí platí

$$\lim x_n = x_0 \;\; \Rightarrow \lim f(x_n) = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Věta: Funkce může mít v jednom bodě nejvýše jednu limitu.

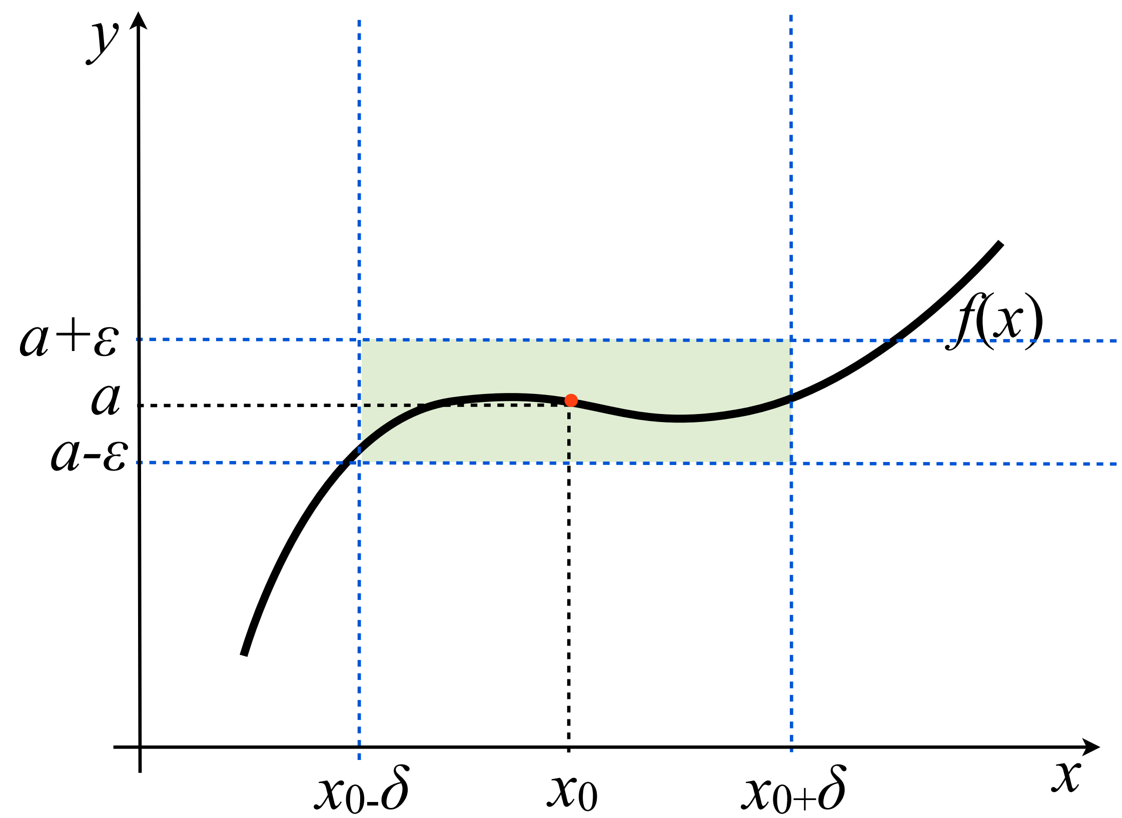
Příklady: 1) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 2x + 1)$, 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$, 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 2)$

II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)

II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)



II.6. Limita funkce

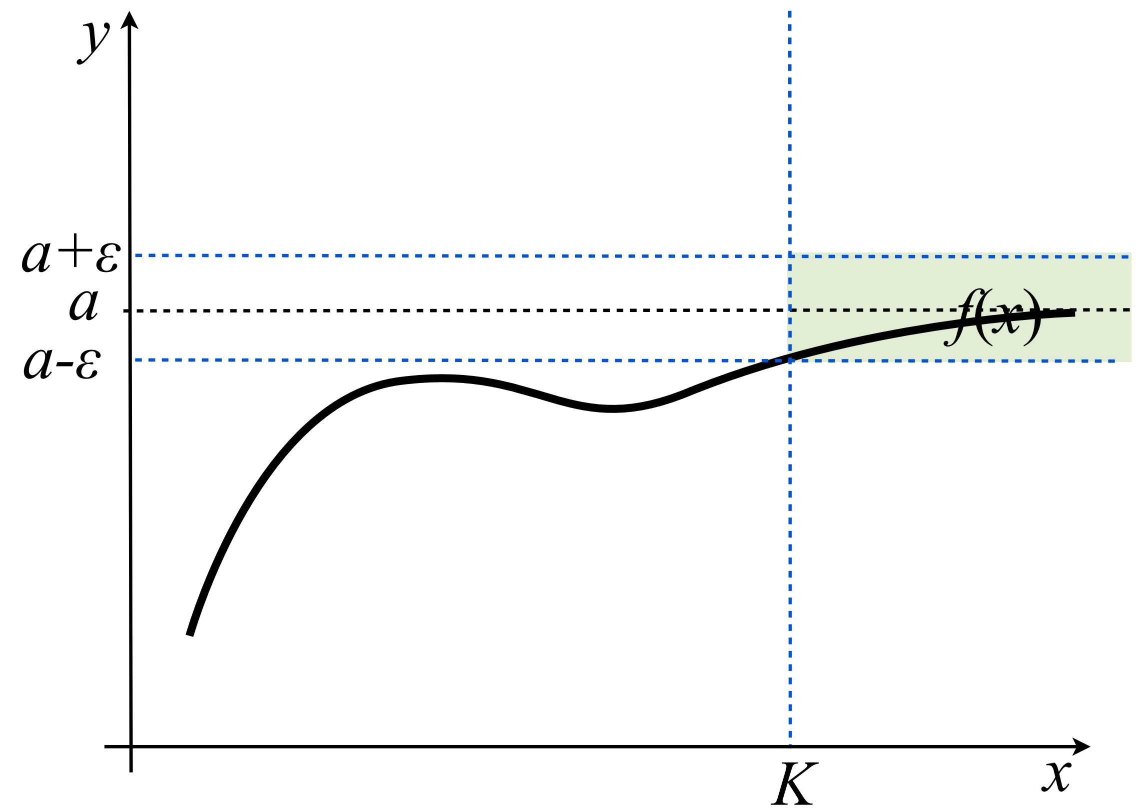
- *vlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)

- *vlastní limita v nevlastním bodě*
  ($x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbf{R}$)

II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)

- *vlastní limita v nevlastním bodě*
  ($x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbf{R}$)



II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*

  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)

- *vlastní limita v nevlastním bodě*

  ($x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbf{R}$)

- *nevlastní limita ve vlastním bodě*

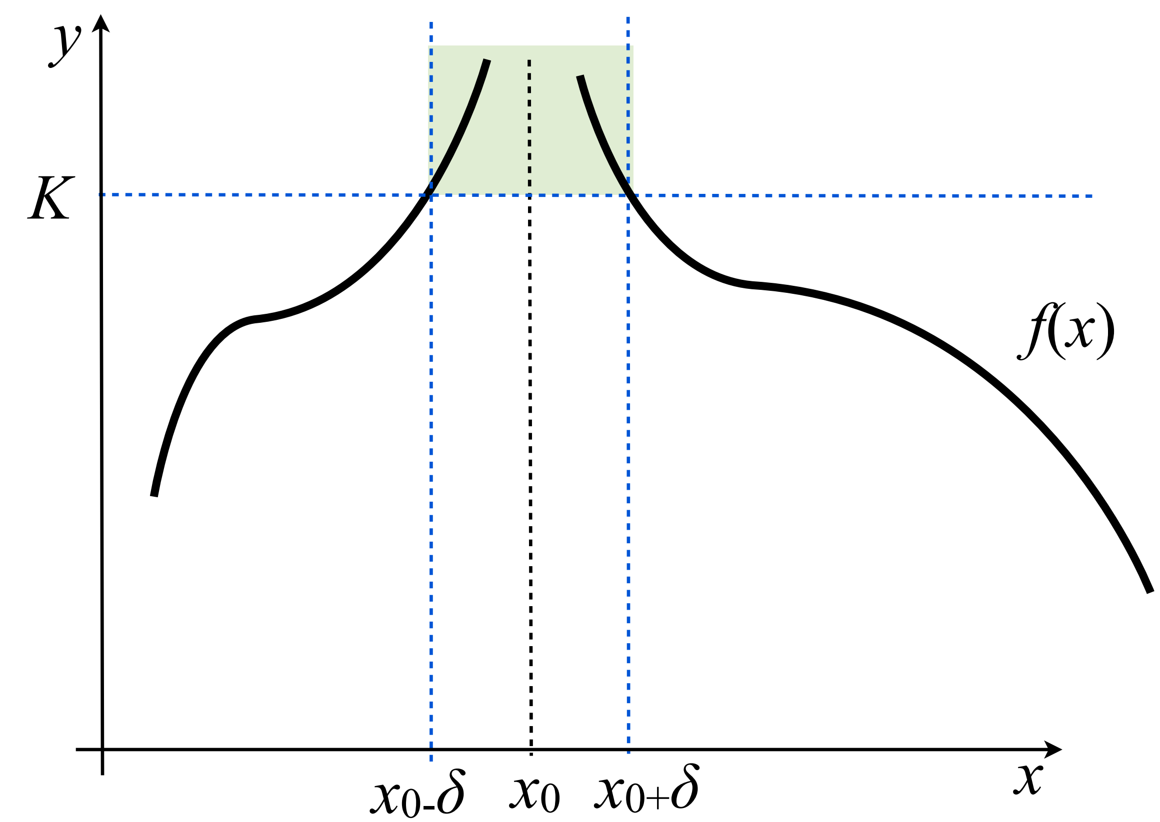
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a = \pm\infty$)

II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)

- *vlastní limita v nevlastním bodě*
  ($x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbf{R}$)

- *nevlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a = \pm\infty$)



II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)

- *vlastní limita v nevlastním bodě*
  ($x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbf{R}$)

- *nevlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a = \pm\infty$)

- *nevlastní limita v nevlastním bodě*
  ($x_0 = \pm\infty$, $a = \pm\infty$)

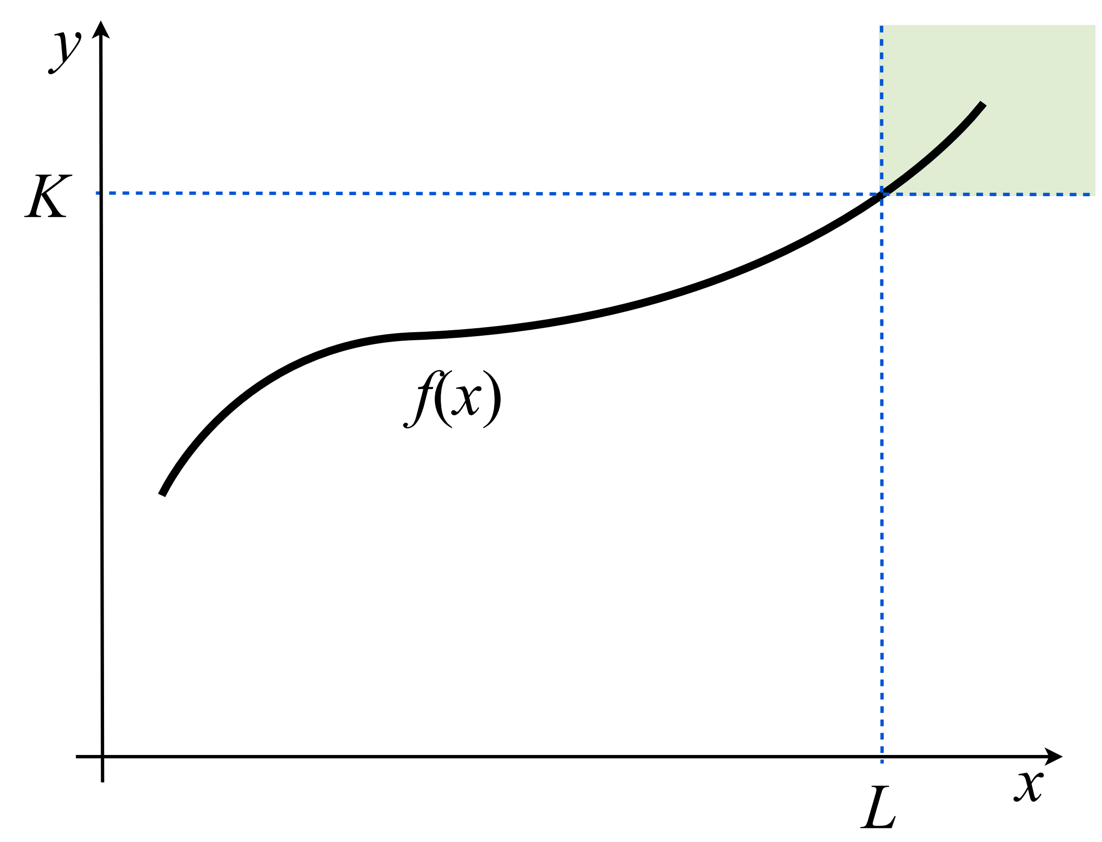
II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)

- *vlastní limita v nevlastním bodě*
  ($x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbf{R}$)

- *nevlastní limita ve vlastním bodě*
  ($x_0 \in \mathbf{R}$, $a = \pm\infty$)

- *nevlastní limita v nevlastním bodě*
  ($x_0 = \pm\infty$, $a = \pm\infty$)



II.6. Limita funkce

Věta (o limitě složené funkce): Má-li funkce g limitu $\pm\infty$ v bodě $x_0 \in \mathbf{R}^*$ a funkce f má v $\pm\infty$ limitu rovnou číslu L, potom je

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$$

II.6. Limita funkce

Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí):
Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ a $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$. Pak platí:

a) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$,

b) $\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = a.b$,

c) $\lim_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] = a/b$,

pokud výrazy na pravé straně mají smysl.

Věta (o limitě složené funkce): Má-li funkce g limitu $\pm\infty$ v bodě $x_0 \in \mathbf{R}^*$ a funkce f má v $\pm\infty$ limitu rovnou číslu L, potom je

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$$

II.6. Jednostranné limity funkce

Definice 1: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in P_\delta(x_0) \ \ f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

Definice 2: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v tomto okolí platí

$$\lim x_n = x_0 \ \ \Rightarrow \lim f(x_n) = a$$

Nahradíme-li v definici prstencové δ-okolí levým nebo pravým δ-okolím, budeme hovořit o jednostranné *limitě zleva* nebo *limitě zprava* v bodě x_0.

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = a \qquad \qquad \lim_{x \to x_0 +} f(x) = a$$

II.6. Jednostranné limity funkce

Definice 1: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \forall x \in P_\delta(x_0) \ \ f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

Definice 2: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v tomto okolí platí

$$\lim x_n = x_0 \ \ \Rightarrow \lim f(x_n) = a$$

Nahradíme-li v definici prstencové δ-okolí levým nebo pravým δ-okolím, budeme hovořit o jednostranné *limitě zleva* nebo *limitě zprava* v bodě x_0.

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = a \qquad\qquad \lim_{x \to x_0 +} f(x) = a$$

Věta: Funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou číslu a právě když má v tomto bodě limitu zleva a zároveň limitu zprava a obě jsou rovné a.

II.7. Spojitost funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

II.7. Spojitost funkce

Definice: Řekneme, že funkce *f* je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nahradíme-li v této definici oboustrannou limitu limitou jednostrannou, potom hovoříme o *spojitosti zleva* nebo *spojitosti zprava* v bodě x_0.

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

II.7. Spojitost funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nahradíme-li v této definici oboustrannou limitu limitou jednostrannou, potom hovoříme o *spojitosti zleva* nebo *spojitosti zprava* v bodě x_0.

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

Spojitost funkce v bodě x_0 je lokální vlastností funkce. Globálně lze definovat spojitost funkce na nějaké množině $M \subset D(f)$:

II.7. Spojitost funkce

Definice: Řekneme, že funkce *f* je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nahradíme-li v této definici oboustrannou limitu limitou jednostrannou, potom hovoříme o *spojitosti zleva* nebo *spojitosti zprava* v bodě x_0.

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

Spojitost funkce v bodě x_0 je lokální vlastností funkce. Globálně lze definovat spojitost funkce na nějaké množině $M \subset D(f)$:

Vnitřek množiny $M \subset \mathbf{R}$ je množina $\mathrm{Int}(M) = \{x \in M \colon \exists \delta > 0\ U_\delta(x) \subset M\}$.

II.7. Spojitost funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nahradíme-li v této definici oboustrannou limitu limitou jednostrannou, potom hovoříme o *spojitosti zleva* nebo *spojitosti zprava* v bodě x_0.

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

Spojitost funkce v bodě x_0 je lokální vlastností funkce. Globálně lze definovat spojitost funkce na nějaké množině $M \subset D(f)$:

Vnitřek množiny $M \subset \mathbf{R}$ je množina $\mathrm{Int}(M) = \{x \in M: \exists \delta > 0\ U_\delta(x) \subset M\}$.

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subset D(f)$, pokud je (oboustranně)spojitá v každém vnitřním bodě $x_0 \in \mathrm{Int}(M)$ a jednostranně spojitá v jejích krajních bodech.

II.7. Spojitost funkce

Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí): Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, potom také funkce $f \pm g$, $f.g$ a $|f|$ jsou spojité v tomto bodě. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, potom i podíl f/g je spojitá funkce v bodě x_0.

II.7. Spojitost funkce

Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí): Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, potom také funkce $f \pm g$, $f.g$ a $|f|$ jsou spojité v tomto bodě. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, potom i podíl f/g je spojitá funkce v bodě x_0.

Uvedená věta platí i pro spojitost zleva, spojitost zprava a spojitost na intervalu.

II.7. Spojitost funkce

Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí): Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, potom také funkce $f \pm g$, $f.g$ a $|f|$ jsou spojité v tomto bodě. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, potom i podíl f/g je spojitá funkce v bodě x_0.

Uvedená věta platí i pro spojitost zleva, spojitost zprava a spojitost na intervalu.

Všechny elementární funkce a jejich lineární kombinace jsou spojité na svých definičních oborech. Výjimkou je funkce sgn, která je jediná nespojitá na každém intervalu, obsahujícím nulu.

II.7. Spojitost funkce

Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí): Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, potom také funkce $f \pm g$, $f.g$ a $|f|$ jsou spojité v tomto bodě. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, potom i podíl f/g je spojitá funkce v bodě x_0.

Uvedená věta platí i pro spojitost zleva, spojitost zprava a spojitost na intervalu.

Všechny elementární funkce a jejich lineární kombinace jsou spojité na svých definičních oborech. Výjimkou je funkce sgn, která je jediná nespojitá na každém intervalu, obsahujícím nulu.

Věta (o spojitosti složené funkce): Platí-li, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a gunkce g je spojitá v bodě $f(x_0) \in D(g)$, potom je spojitá i funkce složená $h = g \circ f$ v bodě x_0.

II.7. Spojitost funkce

Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí): Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, potom také funkce $f \pm g$, $f.g$ a $|f|$ jsou spojité v tomto bodě. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, potom i podíl f/g je spojitá funkce v bodě x_0.

Uvedená věta platí i pro spojitost zleva, spojitost zprava a spojitost na intervalu.

Všechny elementární funkce a jejich lineární kombinace jsou spojité na svých definičních oborech. Výjimkou je funkce sgn, která je jediná nespojitá na každém intervalu, obsahujícím nulu.

Věta (o spojitosti složené funkce): Platí-li, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a gunkce g je spojitá v bodě $f(x_0) \in D(g)$, potom je spojitá i funkce složená $h = g \circ f$ v bodě x_0.

Je-li funkce f spojitá v intervalu M, funkce g je spojitá v intervalu H a platí, že $f(I) \subset H$, potom je spojitá i funkce složená $h = g \circ f$ v M.

II.7. Spojitost funkce

Věta (Darbouxova vlastnost): Je-li funkce f spojitá v intervalu I, potom pro každé dva body x_1 a x_2 z I pro něž je $f(x_1) \leq f(x_2)$ platí, že ke každému číslu η takovému, že $f(x_1) \leq \eta \leq f(x_2)$ existuje číslo ξ tak, že $f(\xi) = \eta$.

II.7. Spojitost funkce

Věta (Darbouxova vlastnost): Je-li funkce f spojitá v intervalu I, potom pro každé dva body x_1 a x_2 z I pro něž je $f(x_1) \leq f(x_2)$ platí, že ke každému číslu η takovému, že $f(x_1) \leq \eta \leq f(x_2)$ existuje číslo ξ tak, že $f(\xi) = \eta$.

Důsledky: Pro spojitou funkci na intervalu I platí

II.7. Spojitost funkce

Věta (Darbouxova vlastnost): Je-li funkce f spojitá v intervalu I, potom pro každé dva body x_1 a x_2 z I pro něž je $f(x_1) \leq f(x_2)$ platí, že ke každému číslu η takovému, že $f(x_1) \leq \eta \leq f(x_2)$ existuje číslo ξ tak, že $f(\xi) = \eta$.

Důsledky: Pro spojitou funkci na intervalu I platí

- Existuje-li $x_0 \in I$ tak, že $f(x_0) > 0$, potom existuje prstencové okolí bodu x_0 tak, že $f(x) > 0$ pro všechna x z tohoto okolí.

II.7. Spojitost funkce

Věta (Darbouxova vlastnost): Je-li funkce f spojitá v intervalu I, potom pro každé dva body x_1 a x_2 z I pro něž je $f(x_1) \leq f(x_2)$ platí, že ke každému číslu η takovému, že $f(x_1) \leq \eta \leq f(x_2)$ existuje číslo ξ tak, že $f(\xi) = \eta$.

Důsledky: Pro spojitou funkci na intervalu I platí

- Existuje-li $x_0 \in I$ tak, že $f(x_0) > 0$, potom existuje prstencové okolí bodu x_0 tak, že $f(x)>0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- Jestliže pro dva body x_1 a x_2 z I platí, že $f(x_1).f(x_2)<0$, potom existuje číslo ξ ležící mezi body x_1 a x_2 tak, že $f(\xi)=0$.

II.7. Spojitost funkce

Věta (Darbouxova vlastnost): Je-li funkce f spojitá v intervalu I, potom pro každé dva body x_1 a x_2 z I pro něž je $f(x_1) \leq f(x_2)$ platí, že ke každému číslu η takovému, že $f(x_1) \leq \eta \leq f(x_2)$ existuje číslo ξ tak, že $f(\xi) = \eta$.

Důsledky: Pro spojitou funkci na intervalu I platí

- Existuje-li $x_0 \in I$ tak, že $f(x_0) > 0$, potom existuje prstencové okolí bodu x_0 tak, že $f(x)>0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- Jestliže pro dva body x_1 a x_2 z I platí, že $f(x_1).f(x_2)<0$, potom existuje číslo ξ ležící mezi body x_1 a x_2 tak, že $f(\xi)=0$.
- $f(I)$ je buď opět interval nebo jednobodová množina (množina $f(I)$ je souvislá).

II.7. Spojitost funkce

Věta (Darbouxova vlastnost): Je-li funkce f spojitá v intervalu I, potom pro každé dva body x_1 a x_2 z I pro něž je $f(x_1) \leq f(x_2)$ platí, že ke každému číslu η takovému, že $f(x_1) \leq \eta \leq f(x_2)$ existuje číslo ξ tak, že $f(\xi) = \eta$.

Důsledky: Pro spojitou funkci na intervalu I platí

- Existuje-li $x_0 \in I$ tak, že $f(x_0) > 0$, potom existuje prstencové okolí bodu x_0 tak, že $f(x)>0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- Jestliže pro dva body x_1 a x_2 z I platí, že $f(x_1).f(x_2)<0$, potom existuje číslo ξ ležící mezi body x_1 a x_2 tak, že $f(\xi)=0$.
- $f(I)$ je buď opět interval nebo jednobodová množina (množina $f(I)$ je souvislá).

Věta (o spojitosti inverzní funkce): Je-li funkce f spojitá a prostá v intervalu I a je $f(I)=J$, potom k ní existuje inverzní funkce která je spojitá na intervalu J.

II.7. Spojitost funkce

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to\pi}(\sin x)^{\frac{1}{2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\sin(x) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+5) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{x-3}-\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \qquad \lim_{x\to 1}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

II.7. Spojitost funkce

Věta (o existenci maxima a minima): Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu nabývá vždy svého maxima i minima.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to\pi}(\sin x)^{\frac{1}{2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\sin(x) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+5) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{x-3}-\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \qquad \lim_{x\to 1}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

II.7. Spojitost funkce

Věta (o existenci maxima a minima): Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu nabývá vždy svého maxima i minima.

Věta (o limitě složené funkce): Má-li funkce g vlastní limitu λ ve vlastním bodě x_0 a funkce f je spojitá v bodě λ, potom platí

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lambda)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to \pi}(\sin x)^{\frac{1}{2}} \qquad \lim_{x\to +\infty} x\sin(x) \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\sin(x)$$

$$\lim_{x\to -\infty}(x^3-3x+5) \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-3x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} \qquad \lim_{x\to +\infty}\ln(\sqrt{x-3}-\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \qquad \lim_{x\to 1}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

II.7. Spojitost funkce

Věta (o existenci maxima a minima): Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu nabývá vždy svého maxima i minima.

Věta (o limitě složené funkce): Má-li funkce g vlastní limitu λ ve vlastním bodě x_0 a funkce f je spojitá v bodě λ, potom platí

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lambda)$$

Příklady:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to\pi}(\sin x)^{\frac{1}{2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\sin(x) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+5) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{x-3}-\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \qquad \lim_{x\to 1}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right)$$