# Mat I - Matice

**Definice.** *Maticí typu* $m \times n$ nazýváme obdélníkové pole, tvořené z $m \cdot n$ reálných čísel (tzv. *prvků* matice), zapsaných v $m$ řádcích a $n$ sloupcích.

Značíme např. $A = (a_{ij})$, kde $i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, n$

**Příklad**

Předpokládejme, že $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$:

*Hlavní diagonála* je tvořena prvky $a_{11}$, $a_{22}$, $\ldots$ .

Matice $A$ se nazývá *horní trojúhelníkovou maticí*, jestliže všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny nule.

Matice $A$ se nazývá *nulovou maticí*, jsou-li všechny její prvky rovny nule.

Maticí *transponovanou k matici* $A$ nazýváme matici $A^T = (a_{ji})$.

Transponovanou matici $A^T$ získáme "překlopením"matice $A$ kolem hlavní diagonály. Z řádků matice $A$ se stanou sloupce matice $A^T$.

**Příklad.**

Matici typu $n \times n$ nazýváme *čtvercovou maticí*.

Čtvercovou matici, která má na hlavní diagonále samé jednotky a všude mimo hlavní diagonálu nuly, nazýváme *jednotkovou maticí.* Tuto matici označujeme $E$.

## Operace s maticemi

**Sčítání matic.** *Součtem* matic $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ stejného typu $m \times n$ nazýváme matici $C = A + B$, pro jejíž prvky platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$.

**Násobení matice reálným číslem**

*Součinem reálného čísla $\lambda$ a matice $A$* (nebo také *$\lambda$–násobkem matice $A$*) nazýváme matici $C = \lambda \cdot A$, kde $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m)$.

**Příklad:**

**Poznámka.** Množina všech matice stejného typu $m \times n$ s těmito dvěma operacemi tvoří vektorový prostor dimenze $m \cdot n$. Navrhněte bázi tohoto prostoru.

**Poznámka.** Matice stejného typu lze také odčítat: *Rozdílem matic $A$ a $B$* nazýváme matici $C = A + (-1) \cdot B$. Píšeme $C = A - B$.

Pro definici násobení matic se hodí následující pojem:

*Skalárním součinem* vektorů $\overrightarrow{u} = (u_1, \dots, u_n)$ a $\overrightarrow{v} = (v_1, \dots, v_n)$ z $\mathbb{R}^n$ nazýváme číslo $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

**Násobení matic.**
Předpoklad: $A = (a_{ij})$ je typu $m \times n$, $B = (b_{ij})$ je typu $n \times p$.
*Součinem matic $A$ a $B$* pak nazýváme matici $C = A \cdot B$ typu $m \times p$,
jejíž prvek $c_{ij}$ je skalárním součinem $i$–tého řádku z $A$ a $j$–tého sloupce z $B$,
$(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, p)$.

**Poznámka.** Je tedy $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$.

**Pravidla pro operace s maticemi.**

Předpokládejme, že $\alpha$, $\beta$ jsou reálná čísla a $A$, $B$ a $C$ jsou matice takové, že níže uvedené operace mají smysl. Pak platí:

a) $A + B = B + A$,

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

c) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$,

d) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$,

e) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,

f) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

g) $A \cdot E = A$,

h) $E \cdot B = B$,

i) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

j) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

**Násobení matic není komutativní,** tj. obecně neplatí, že $A \cdot B = B \cdot A$ !

**Příklady.**

## Hodnost matice

**Definice.** *Hodností* matice $A$ nazýváme maximální počet lin. nezávislých řádků matice $A$ (jako aritmetických vektorů). Značíme ji $h(A)$.

**Jednduché příklady:**

**Poznámka.** $h(A)$ lze definovat i jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců.

**Postup** při určení hodnosti dané matice:

Je-li $\boldsymbol{m = 2}$ nebo $\boldsymbol{n = 2}$, pak lze určit hodnost přímo podle definice.

Je-li $\boldsymbol{m > 2}$ a $\boldsymbol{n > 2}$, pak danou matici převedeme na horní trojúhelníkovou.

**Věta 2.17.**
*Nechť $A$ je horní trojúhelníková matice typu $m \times n$, která má všechny prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Pak $h(A) = \min\{m; n\}$, tj. počet nenulových řádků.*

**Příklad**

Pro převod dané matice na horní trojúhelníkovou používáme tzv. ekvivalentní úpravy, které nemění hodnost matice.

**Ekvivalentní úpravy matice**, které budeme používat

a) změna pořadí řádků,

b) vynásobení některého řádku nenulovým číslem,

c) přičtení násobku některého řádku k jinému řádku

d) vynechání nulového řádku; vynechání řádku, který je násobkem jiného.

Úpravy z bodů a) – d) lze provádět i se sloupci matice, hodnost se rovněž nemění.

Postup převedení libovolné matice pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkovou matici (s nenulovými prvky na hlavní diagonále), se nazývá **Gaussův algoritmus.**

**Příklad:**