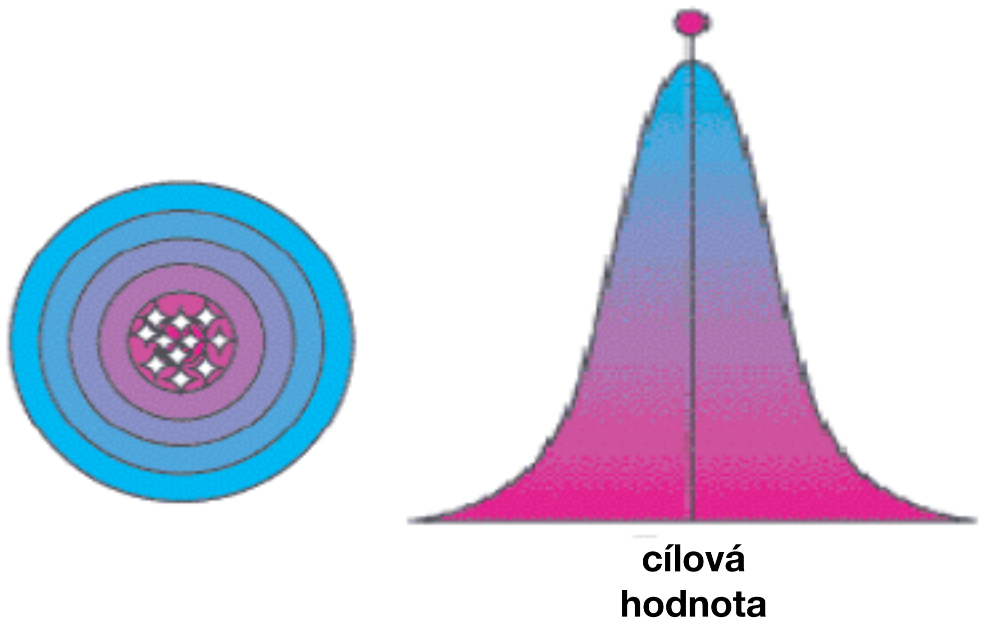
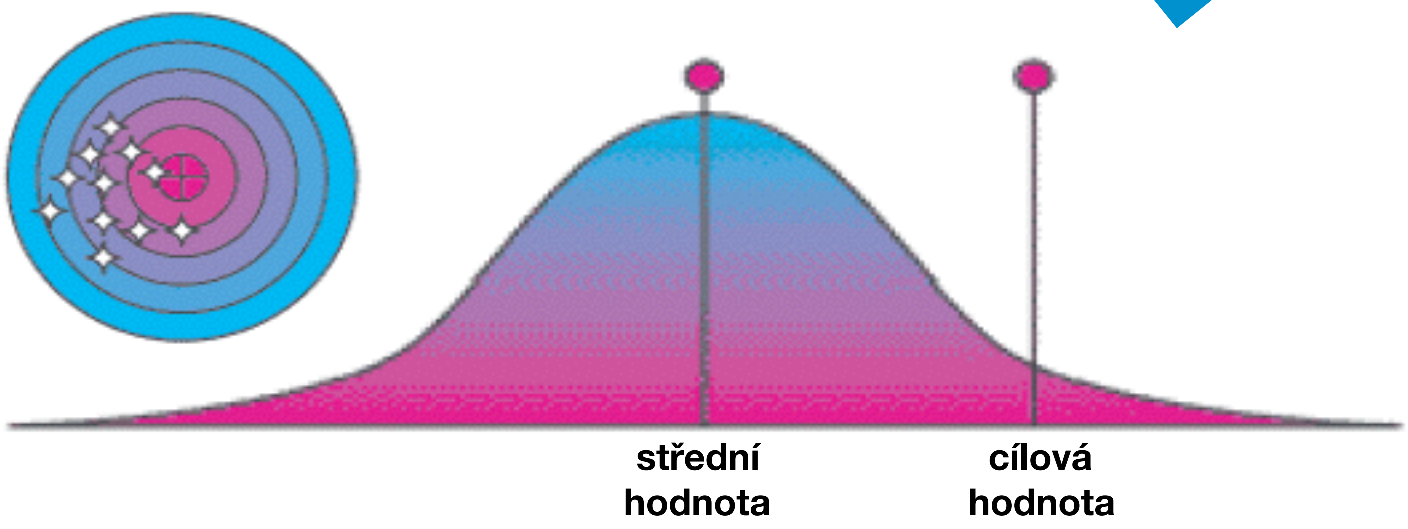
Základy navrhování průmyslových experimentů DOE



II. Jednofaktorové experimenty



Gejza Dohnal

Plánování experimentů - typy experimentu

Norma ČSN ISO 3534/3 Navrhování experimentů (1993)

- **Jednofaktorové experimenty**
- **Úplné vícefaktoriální experimenty** (znáhodnění, uspořádání do bloků)
- **Snížení počtu zkoušek** (latinské, řeckolatinské čtverce pro vyloučení vlivu rušivých faktorů)
- **Dílčí faktoriální návrh** (počáteční vyhledávání vlivných faktorů)
- **Hierarchický návrh** (vyhledání největších zdrojů variability)
- **Optimální návrhy** (optimální odezvové plochy)
- **Taguchiho ortogonální návrhy** (robustní návrhy)

Plánování experimentů - Jednofaktorové experimenty

- **Jednofaktorové experimenty:**
  - uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru
  - tento faktor může mít k úrovní
  - pro každou úroveň provedeme n měření (replikací)
  - musíme provést kxn měření, která můžeme rozdělit do bloků podle dalšího (vedlejšího) faktoru
  - provádíme znáhodnění pořadí měření (buď přes celý experiment nebo pouze uvnitř bloků)

Statistický model:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

odezva

společná úroveň

odchylka od společné úrovně, způsobená vlivem i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k

náhodná chyba v j-tém měření při i-té úrovni faktoru

O náhodných chybách ε_{ij} předpokládáme, že jsou nezávislé, stejně rozdělené s nulovou střední hodnotou a stejným rozptylem σ^2. Speciálně, předpokládáme rozdělení $N(0,\sigma^2)$

Plánování experimentů - Jednofaktorové experimenty

- **Jednofaktorové experimenty:**
  - uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru
  - tento faktor může mít k úrovní
  - pro každou úroveň provedeme n měření (replikací)
  - musíme provést kxn měření, která můžeme rozdělit do bloků podle dalšího (vedlejšího) faktoru
  - provádíme znáhodnění pořadí měření (buď přes celý experiment nebo pouze uvnitř bloků)

Statistický model:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

odezva

společná úroveň

odchylka od společné úrovně, způsobená vlivem i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k

náhodná chyba v j-tém měření při i-té úrovni faktoru

vliv i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k : $\mu_i = \mu + \tau_i$

Plánování experimentů - Jednofaktorové experimenty

pořadové číslo měření (replikace)

úroveň faktoru (ošetření)

	1	2	3	...	n
1	y	y	y	...	y
2	y	y	y	...	y
3	y	y	y	...	y
:	:	:	:	⋱	:
k	y	y	y	...	y

Plánování experimentů - Jednofaktorové experimenty

pořadové číslo měření (replikace)

úroveň faktoru (ošetření)

	1	2	3	...	n
1	y	y	y	...	y
2	y	y	y	...	y
3	y	y	y	...	y
:	:	:	:	⋱	:
k	y	y	y	...	y

blok 1 blok 2 blok r

Plánování experimentů - Jednofaktorové experimenty

Statistický model při uspořádání do bloků:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$$

odezva

společná úroveň

vliv i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$$

vliv j-tého bloku, j=1,2,... r

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j = 0$$

náhodná chyba v j-tém bloku při i-té úrovni faktoru

$$\mu_i = \mu + \tau_i$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

$$H_A : \mu_i \neq \mu_m, \quad 1 \leq i < m \leq k$$

O náhodných chybách ϵ_{ij} předpokládáme, že jsou nezávislé, stejně rozdělené s nulovou střední hodnotou a stejným rozptylem σ^2. Speciálně, předpokládáme rozdělení $N(0,\sigma^2)$

Plánování experimentů - Jednofaktorové experimenty

1 faktor, 2 úrovně (nezávislá měření):

	1	2	3	...	n
A	y	y	y	...	y
B	y	y	y	...	y

1 faktor, 2 úrovně (závislá měření):

	1	2	3	...	n
A	y	y	y	...	y
B	y	y	y	...	y

Jednofaktorové experimenty

Model

Odezva: Y - výběrem na základě zadání

Faktor: X - na základě analýzy procesu, počet úrovní k (X_1. X_2, ..., X_k)

Počet replikací: n , budeme pozorovat Y_{ij} i=1,...,k, j=1,..,n

Počet měření: kxn

Experiment: počet úrovní, závislost měření (blokové uspořádání), znáhodnění

Metoda vyhodnocení: t-test, párový test, ANOVA, neparametrický test

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

$$H_A : \mu_i \neq \mu_m, \quad 1 \leq i < m \leq k$$

Jednofaktorové experimenty Příklad 1

Srovnání pevnosti dvou druhů vlákem

Odezva: pevnost vlákna v tahu (v MPa)

Faktor: druh vlákna, 2 hodnoty

Počet replikací: 4

Počet měření: 2x4 = 8

Experiment: 1 faktor, 2 úrovně, nezávislá měření

Znáhodnění (pořadí druhu vlákna při měření): 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2

Výsledky měření: 22,3 21,8 21,9 20,4 21,1 21,2 21,3 22,8

	1	2	3	4	průměr	rozptyl
A1	21,8	20,4	21,1	21,3	21,15	0,3367
A2	22,3	21,9	21,2	22,8	22,05	0,4567

Metoda vyhodnocení: Dvouvýběrový t-test

Jednofaktorové experimenty Příklad 1

Srovnání pevnosti dvou druhů vlákem

Metoda vyhodnocení: Dvouvýběrový t-test

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r} y_{ij}}{r}, \qquad s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{r-1}$$

Testová statistika je dána vzorcem

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{2s^2}{r}}},$$

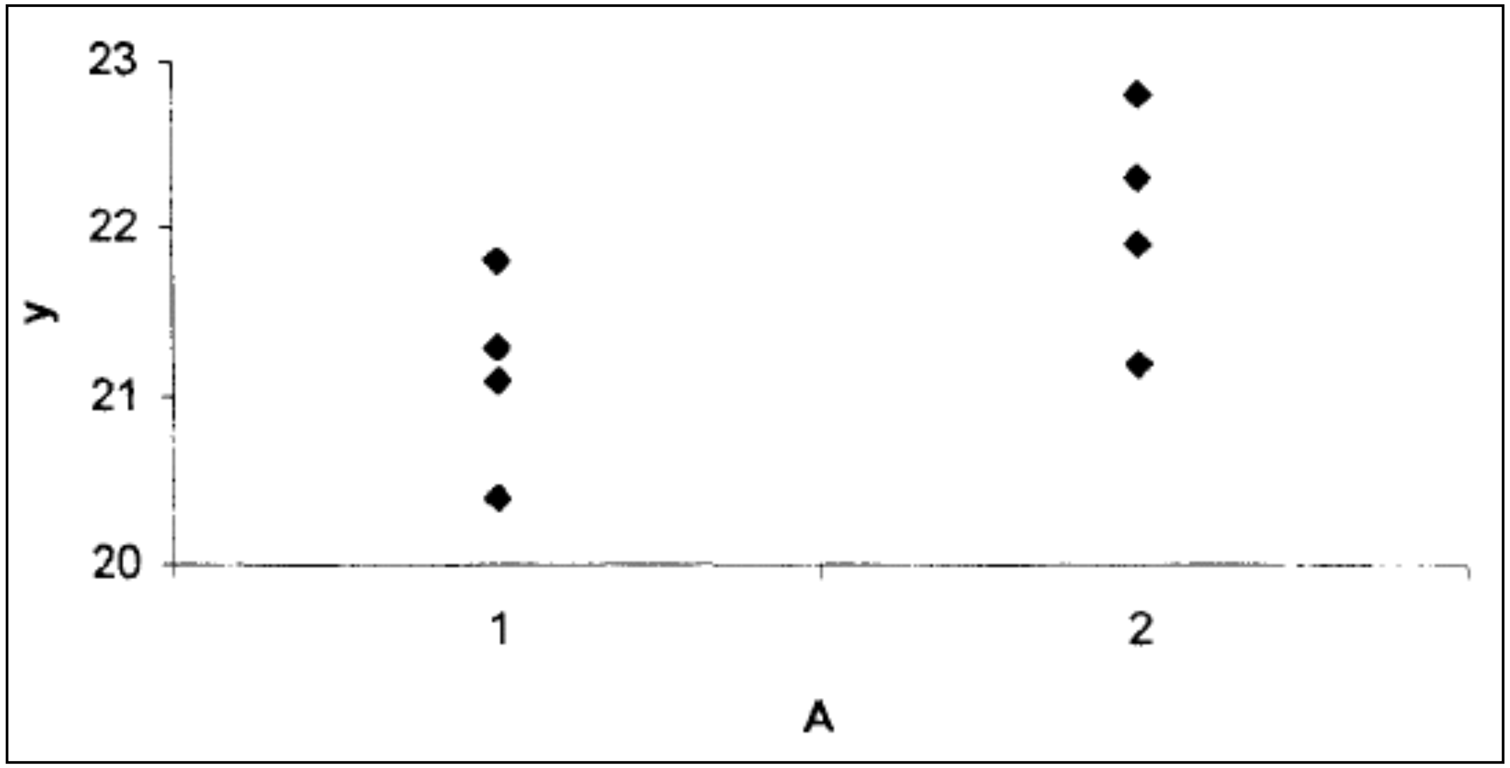
kde průměr z rozptylů uvnitř skupin $s^2 = (s_1^2 + s_2^2)/2$

H_1	Kritická hodnota	H_0 zamítneme, když
$\mu_1 - \mu_2 > 0$	$t_{1-\alpha}$	$t > t_{1-\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 < 0$	t_{α}	$t < t_{\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$t_{1-\alpha/2}$	$\lvert t \rvert > t_{1-\alpha/2}$

Pro $\alpha = 0{,}05$ je $t_{0,95}(6) = 1{,}943$

Jednofaktorové experimenty Příklad 1

Srovnání pevnosti dvou druhů vlákem



	A1	A2
Stř. hodnota	21,15	22,05
Rozptyl	0,336666667	0,456666667
Pozorování	4	4
Společný rozptyl	0,396666667	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Stupně volnosti	6	
t stat	-2,020899209	
P(T<=t) (1)	0,044894253	
t krit (1)	1,943180905	
P(T<=t) (2)	0,089788507	
t krit (2)	2,446913641	

Jednofaktorové experimenty Příklad 2

Srovnání výkonnosti v závislosti na typu stroje (1 faktor, závislá měření)

Odezva: výkon v počtu výrobků za hodinu

Faktor: typ stroje

Počet replikací: 8 (máme 8 operátorů)

můžeme volit a) 16 znáhodněých "nezávislých měření"

b) 8 párových (závislých měření)

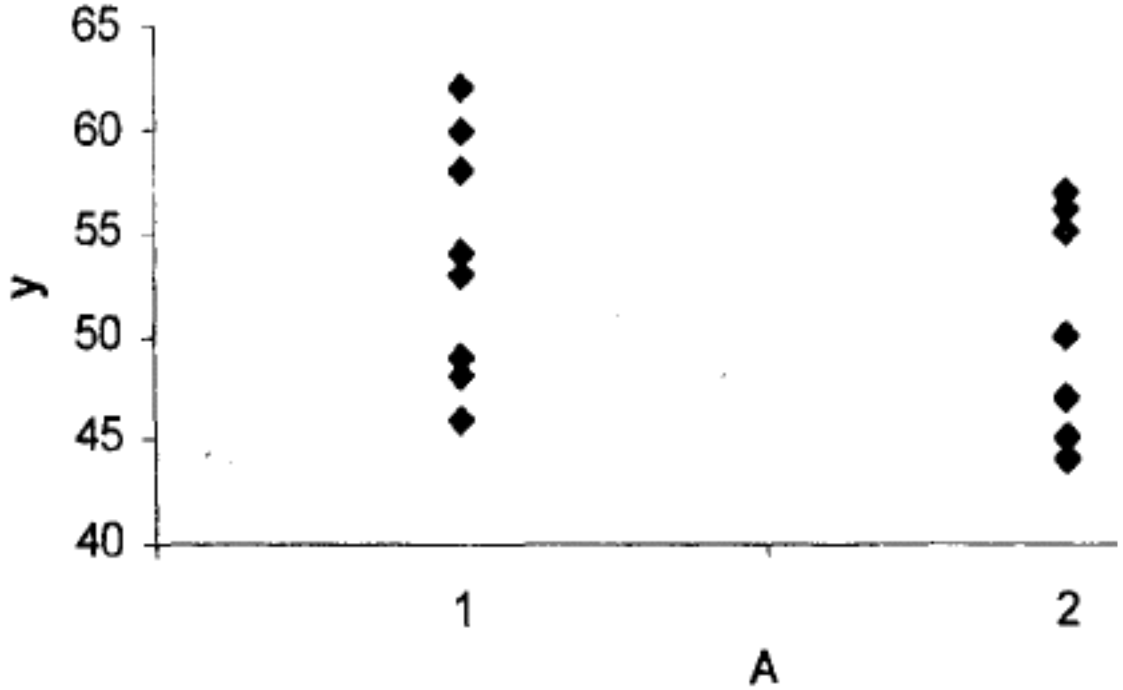
Experiment: 1 faktor, 2 úrovně, závislá měření - blokové (párové) uspořádání

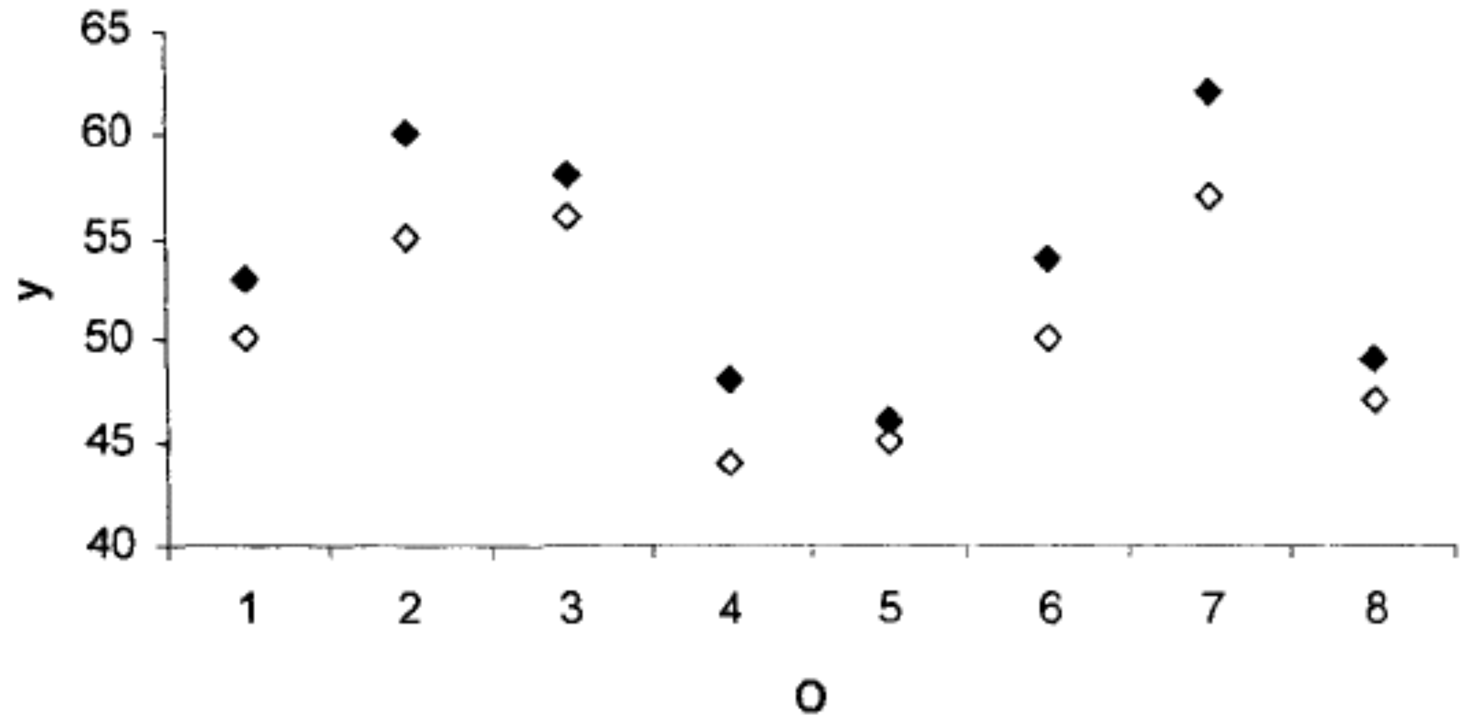
operátor	1	2	3	4	5	6	7	8
stroj A1	53	60	58	48	46	54	62	49
stroj A2	50	55	56	44	45	50	57	47
rozdíl dj	3	5	2	4	1	4	5	2

Metoda vyhodnocení: Párový t-test

Jednofaktorové experimenty Příklad 2

Srovnání výkonnosti v závislosti na typu stroje





Metoda vyhodnocení: Párový t-test

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{r}}}$$

kde

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{r} d_j}{r}, \qquad s_d^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r} (d_j - \bar{d})^2}{r-1}$$

	y1	*y2*
Stř. hodnota	53,75	50,5
Rozptyl	34,5	25,42857
Pozorování	8	8
Pears. korelace	0,974278	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Stupně volnosti	7	
t stat	6,177483	
P(T<=t) (1)	0,000228	
t krit (1)	1,894578	
P(T<=t) (2)	0,000455	
t krit (2)	2,364623	

Jednofaktorové experimenty Příklad 3

Srovnání pevnosti vláken od tří dodavatelů

Odezva: pevnost vlákna v tahu (v MPa)

Faktor: dodavatel vlákna, 3 hodnoty

Počet replikací: 6

Počet měření: 3x6 = 18

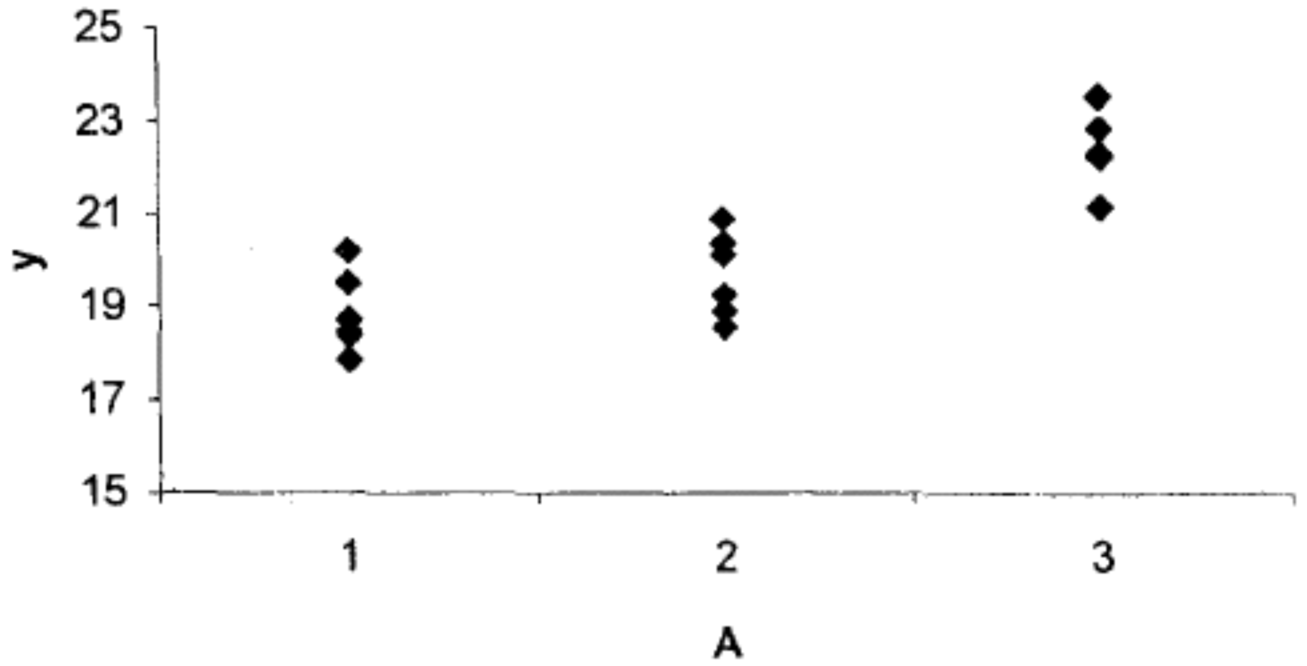
Experiment: 1 faktor, 3 úrovně, nezávislá měření)

	1	2	3	4	5	6	průměr	rozptyl
A1	17,9	18,7	18,4	18,5	20,2	19,5	18,867	0,6987
A2	20,9	19,3	20,1	18,9	18,6	20,4	19,7	0,82
A3	22,3	22,8	23,5	22,2	22,3	21,2	22,383	0,5737

Metoda vyhodnocení: ANOVA pro 1 faktor

Jednofaktorové experimenty Příklad 3

Srovnání pevnosti vláken od tří dodavatelů



$$SS_A = r\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_i - \bar{y})^2, \qquad SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \qquad SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y})^2$$

Jednofaktorové experimenty Příklad 3

Srovnání pevnosti vláken od tří dodavatelů

Metoda vyhodnocení: ANOVA pro 1 faktor

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	F	P-hodnota
faktor	SS_A	a - 1	$MS_A = \dfrac{SS_A}{a-1}$	$F = \dfrac{MS_A}{MS_E}$	
reziduální	SS_E	$a(r-1)$	$MS_E = \dfrac{SS_E}{a(r-1)}$		
celkový	SS_T	ar - 1			

kde

$$SS_A = r\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_i - \bar{y})^2, \qquad SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \qquad SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y})^2$$

$$F = \frac{\dfrac{SS_A}{a-1}}{\dfrac{SS_E}{a(r-1)}} = \frac{MS_A}{MS_E}$$

má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení o $(a$-1$)$ a $a(r$-1$)$ stupních volnosti

Jednofaktorové experimenty Příklad 3

Srovnání pevnosti vláken od tří dodavatelů

Metoda vyhodnocení: ANOVA pro 1 faktor

ANOVA

Zdroj variability	*SS*	*St. vol.*	*MS*	*F*	*Hodnota P*	*F krit*
faktor A	40,52333	2	20,26167	29,0513	6,94E-06	3,682317
reziduální	10,46167	15	0,697444			
celkový	50,985	17				

kde

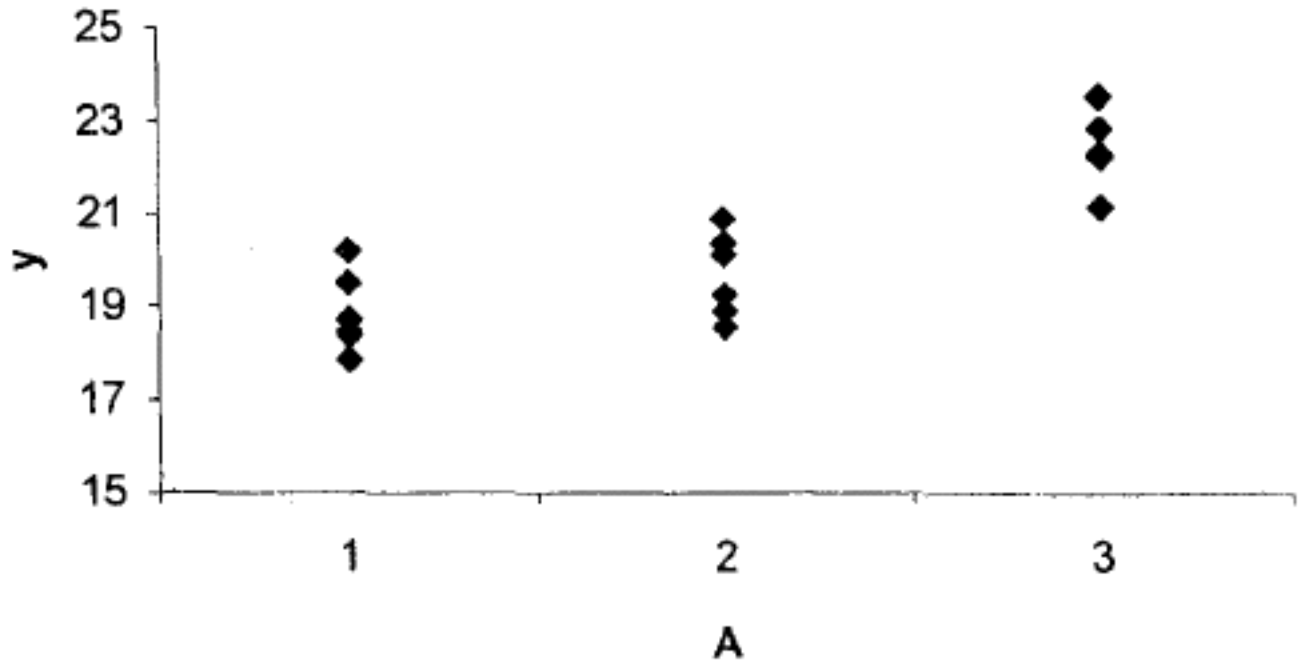
$$SS_A = r\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_i - \bar{y})^2, \qquad SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \qquad SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y})^2$$

$$F = \frac{\frac{SS_A}{a-1}}{\frac{SS_E}{a(r-1)}} = \frac{MS_A}{MS_E}$$

má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení o $(a-1)$ a $a(r-1)$ stupních volnosti

Jednofaktorové experimenty Příklad 3

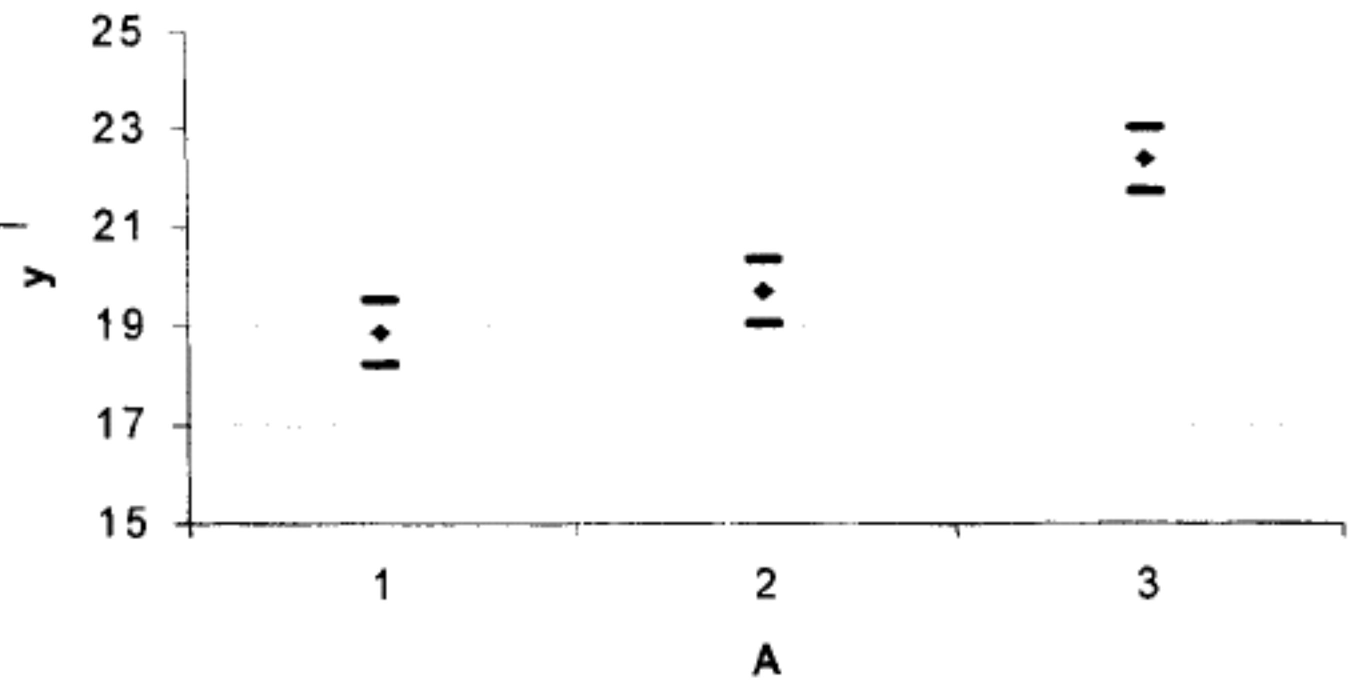
Srovnání pevnosti vláken od tří dodavatelů



Bonferroniho metoda mnohonásobného srovnání úrovní faktorů:

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A_1	18,867	18,217	19,516
A_2	19,700	19,051	20,349
A_3	22,383	21,734	23,033

$$\overline{y}_i \pm t_{1-\alpha/2p} \cdot \sqrt{\frac{MS_E}{2 \cdot a}}$$



Jednofaktorové experimenty   Příklad 4

Vliv katalyzátoru na výtěžek chemického procesu

Odezva: výtěžek procesu (množství vyráběné látky)

Faktor: druh katalyzátoru, 4 hodnoty

Počet replikací: 6

Počet měření: 4x6 = 24

Vedlejší faktor: vliv várky vstupní suroviny

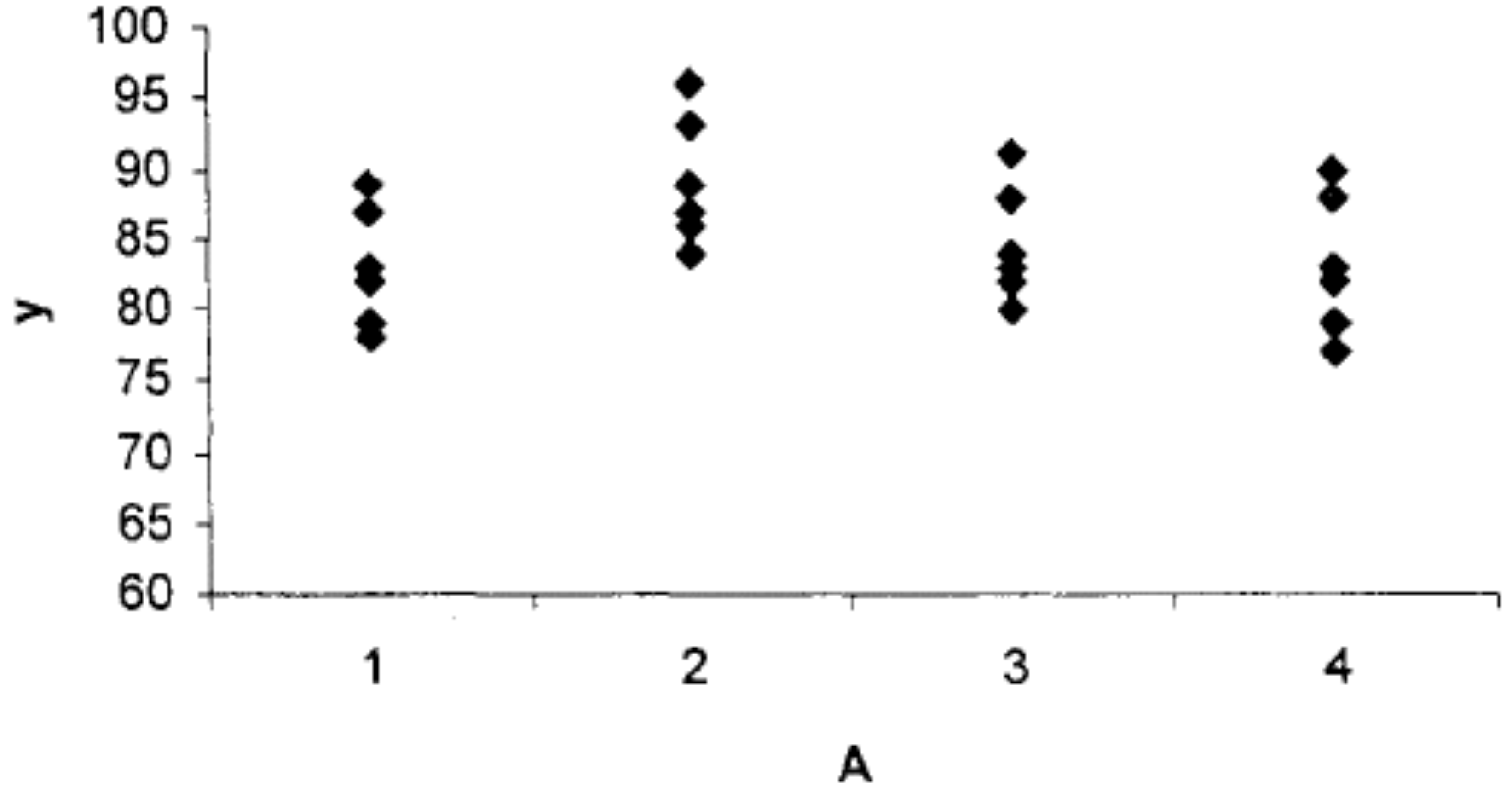
Experiment: **1 faktor, 4 úrovně, uspořádání do bloků, znáhodnění v blocích)**

várka	1	2	3	4	5	6	průměr	rozptyl
A1	87	79	82	89	83	78	83	18,8
A2	93	84	89	96	86	87	89,2	20,57
A3	88	80	84	91	83	82	84,7	16,67
A4	88	77	83	90	82	79	83,2	25,37

Metoda vyhodnocení: ANOVA pro 2 faktory (bez opakování)

Jednofaktorové experimenty Příklad 4

Vliv katalyzátoru na výtěžek chemického procesu



	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	Součet
A_1	87	79	82	89	83	78	498
A_2	93	84	89	96	86	87	535
A_3	88	80	84	91	83	82	508
A_4	88	77	83	90	82	79	499
Součet	356	320	338	366	334	326	2040

Jednofaktorové experimenty Příklad 4

Vliv katalyzátoru na výtěžek chemického procesu

Postup výpočtu:

Testujeme hypotézu H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

(1) Řádkové součty umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem hodnot v každém řádku

$$\frac{1}{6}\left(498^2 + 535^2 + 508^2 + 499^2\right) = 173\,549\,.$$

(2) Sloupcové součty umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem hodnot v každém sloupci

$$\frac{1}{4}\left(356^2 + 320^2 + \ldots + 334^2 + 326^2\right) = 173\,792\,.$$

(3) Utvoříme součet čtverců jednotlivých hodnot

$$87^2 + 79^2 + \ldots + 82^2 + 79^2 = 173\,956$$

(4) Celkový součet všech hodnot umocníme na druhou a dělíme celkovým počtem hodnot

$$\frac{1}{24}(87 + 79 + \ldots + 82 + 79)^2 = 173\,400\,.$$

Jednofaktorové experimenty Příklad 4

Vliv katalyzátoru na výtěžek chemického procesu

Postup výpočtu:

Pro součty čtverců platí

$$SS_A = (1) - (4) = 173\,549 - 173\,400 = 149$$

$$SS_b = (2) - (4) = 173\,792 - 173\,400 = 392$$

$$SS_E = (3) - (1) - (2) + (4) = 15$$

ANOVA

Zdroj variability	*SS*	*St.vol*	*MS*	*F*	*Hodnota P*	*F krit*
Faktor A	149	3	49,66667	49,66667	5,03E-08	3,287383
Bloky	392	5	78,4	78,4	3,28E-10	2,901295
Reziduální	15	15	1			
Celkový	556	23				

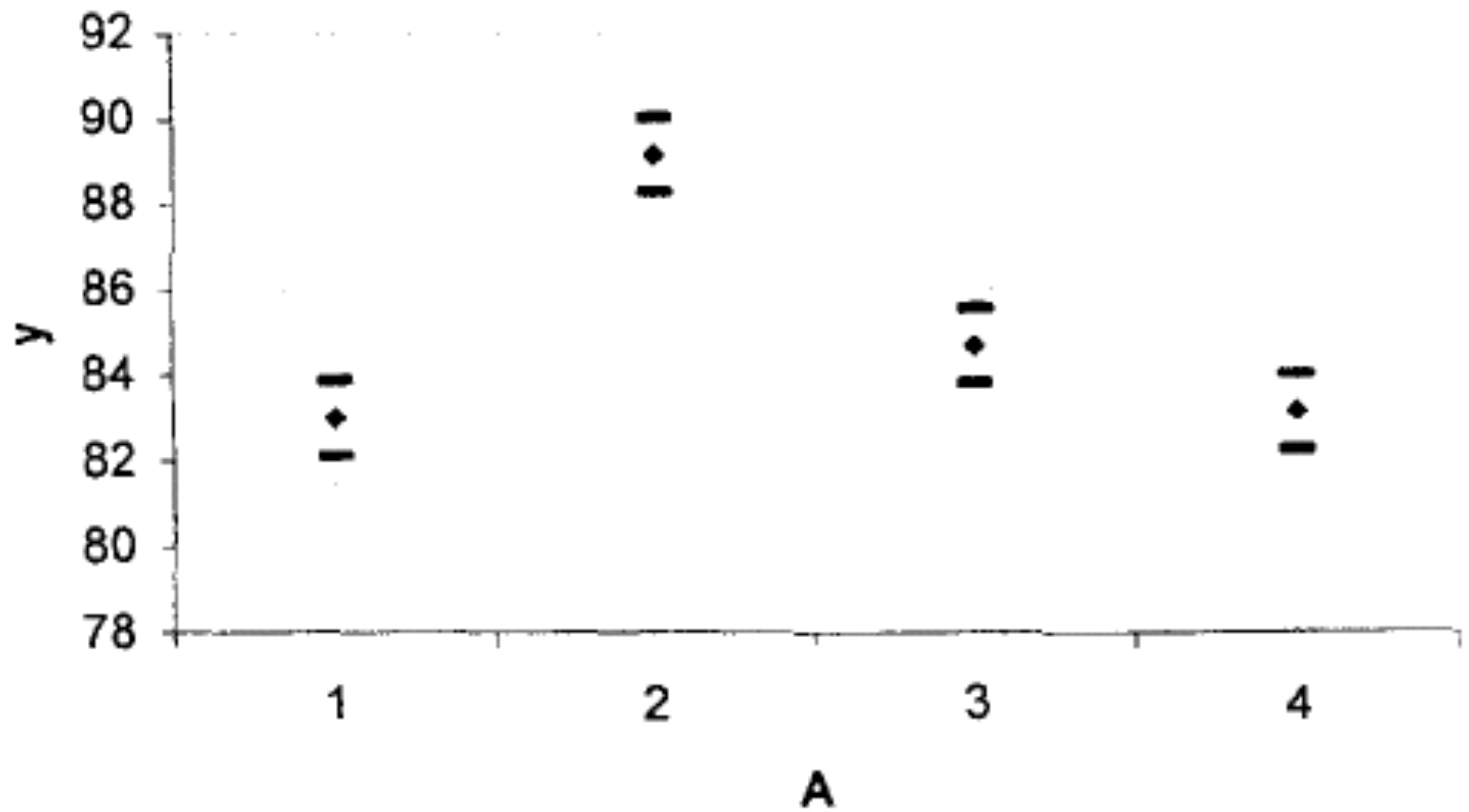
Jednofaktorové experimenty Příklad 4

Vliv katalyzátoru na výtěžek chemického procesu

Bonferroniho metoda mnohonásobného srovnání srovnání úrovní faktorů:

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A_1	83,0	82,1	83,9
A_2	89,2	88,3	90,0
A_3	84,7	83,8	85,5
A_4	83,2	82,3	84,0

$$\bar{y}_i \pm t_{1-\alpha/2p} \cdot \sqrt{\frac{MS_E}{2 \cdot a}}$$



Plánování experimentů - Jednofaktorové experimenty

- **Latinské čtverce:**
  - uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru
  - tento faktor může mít k úrovní
  - uvažujeme další dva vedlejší faktory, každý o k úrovních
  - cílem je provést k replikací měření s maximálním vyloučením vlivů vedlejších faktorů

1. vedlejší faktor

2. vedlejší faktor	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	B	C	D	E	A
3	C	D	E	A	B
4	D	E	A	B	C
5	E	A	B	C	D

Plánování experimentů - Jednofaktorové experimenty

- **Latinské čtverce:**
  - uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru
  - tento faktor může mít k úrovní
  - uvažujeme další dva vedlejší faktory, každý o k úrovních
  - cílem je provést k replikací měření s maximálním vyloučením vlivů vedlejších faktorů

operátor

materiál	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	B	C	D	E	A
3	C	D	E	A	B
4	D	E	A	B	C
5	E	A	B	C	D

Příklad:

Hlavní faktor:

Jednofaktorové experimenty Příklad 5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Odezva: pevnos v ohybu (MPa)

Faktor: druh plnidla, 5 hodnot

Počet replikací: 5

Počet měření: 5x5 = 25

Vedlejší faktor: bakelizační doba, vliv polohy vzorku v matrici

Experiment: 1 faktor, 5 úrovní, 2 vedlejší faktory, uspořádání do (znáhodněného) latinského čtverce

Řádky (1.blokový faktor)	Sloupce (2.blokový faktor) 1	2	3	4
1	A	B	D	C
2	B	C	A	D
3	C	D	B	A
4	D	A	C	B

Jednofaktorové experimenty Příklad 5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Odezva: pevnos v ohybu (MPa)

Faktor: druh plnidla, 5 hodnot

Počet replikací: 5

Počet měření: 5x5 = 25

Vedlejší faktor: bakelizační doba, vliv polohy vzorku v matrici

Experiment: 1 faktor, 5 úrovní, 2 vedlejší faktory, uspořádání do (znáhodněného) latinského čtverce

	1	2	3	4
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C

	1	2	3	4
1	C	D	A	B
2	D	A	B	C
3	A	B	C	D
4	B	C	D	A

	1	2	3	4
1	D	B	C	A
2	A	C	D	B
3	B	D	A	C
4	C	A	B	D

Jednofaktorové experimenty Příklad 5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Odezva: pevnos v ohybu (MPa)

Faktor: druh plnidla, 5 hodnot

Počet replikací: 5

Počet měření: 5x5 = 25

Vedlejší faktor: bakelizační doba, vliv polohy vzorku v matrici

Experiment: **1 faktor, 5 úrovní, 2 vedlejší faktory, uspořádání do (znáhodněného) latinského čtverce**

Doba (série)	Poloha v matrici				
	1	2	3	4	5
1	B 15,5	E 17,0	C 12,0	A 16,0	D 15,5
2	C 13,5	A 16,0	D 14,0	B 13,5	E 17,5
3	E 17,0	C 13,0	A 15,0	D 13,0	B 15,0
4	A 19,5	D 17,0	B 19,0	E 18,5	C 16,0
5	D 14,5	B 13,5	E 12,0	C 11,0	A 14,0

Metoda vyhodnocení:
ANOVA pro 3 faktory

Jednofaktorové experimenty — Příklad 5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Podíl F
faktor L	SS_L	$k-1$	$MS_F = \dfrac{SS_L}{k-1}$	$\dfrac{MS_L}{MS_E}$
řádky	SS_r	$k-1$	$MS_r = \dfrac{SS_r}{k-1}$	$\dfrac{MS_r}{MS_E}$
sloupce	SS_c	$k-1$	$MS_c = \dfrac{SS_c}{k-1}$	$\dfrac{MS_c}{MS_E}$
reziduální	SS_E	$(k-1)(k-2)$	$MS_E = \dfrac{SS_E}{(k-1)(k-2)}$	
celkový	SS_T	k^2-1		

$$SS_T = SS_L + SS_r + SS_c + SS_E$$

Podíl F má Fisherovo rozdělení s (k-1) a (k-1)(k-2) stupni volnosti

Metoda vyhodnocení:
ANOVA pro 3 faktory

Jednofaktorové experimenty Příklad 5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Postup výpočtu:

Doba (série)	Poloha v matrici					Řádkové součty
	1	2	3	4	5	
1	B 15,5	E 17,0	C 12,0	A 16,0	D 15,5	76,0
2	C 13,5	A 16,0	D 14,0	B 13,5	E 17,5	74,5
3	E 17,0	C 13,0	A 15,0	D 13,0	B 15,0	73,0
4	A 19,5	D 17,0	B 19,0	E 18,5	C 16,0	90,0
5	D 14,5	B 13,5	E 12,0	C 11,0	A 14,0	65,0
Sloupcové součty	80,0	76,5	72,0	72,0	78,0	378,5

Plnidlo	A	B	C	D	E
Součet	80,5	76,5	65,5	74,0	82,0

Jednofaktorové experimenty Příklad 5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Postup výpočtu:

(1) Řádkové součty umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem hodnot v každém řádku

$$\frac{1}{5}\left(76^2 + 74{,}5^2 + 73^2 + 90^2 + 65^2\right) = 5\,796{,}05\,.$$

(2) Sloupcové součty umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem hodnot v každém sloupci

$$\frac{1}{5}\left(80^2 + 76{,}5^2 + 72^2 + 72^2 + 78^2\right) = 5\,740{,}85\,.$$

(3) Součty podle jednotlivých úrovní zkoumaného faktoru umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem úrovní faktoru

$$\frac{1}{5}\left(80{,}5^2 + 76{,}5^2 + 65{,}5^2 + 74^2 + 82^2\right) = 5\,764{,}55\,.$$

(4) Utvoříme součet čtverců jednotlivých hodnot

$$15{,}5^2 + 13{,}5^2 + \ldots + 16^2 + 14^2 = 5\,851{,}25.$$

Jednofaktorové experimenty Příklad 5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Postup výpočtu:

(5) Celkový součet všech hodnot umocníme na druhou a dělíme celkovým počtem hodnot

$$\frac{1}{25}378{,}5^2 = 5\,730{,}49\,.$$

Vypočteme potřebné součty čtverců pro tabulku ANOVA

$$SS_P = (3) - (5) = 5\,764{,}55 - 5\,730{,}49 = 34{,}06$$

$$SS_r = (1) - (5) = 5\,796{,}05 - 5\,730{,}49 = 65{,}56$$

$$SS_c = (2) - (5) = 5\,740{,}85 - 5\,730{,}49 = 10{,}36$$

$$SS_E = (4) - (1) - (2) - (3) + 2 \cdot (5) = 5\,851{,}25 - 5\,796{,}05 - 5\,740{,}85 - 5\,764{,}55 + 2 \cdot 5\,730{,}49 = 10{,}78$$

Jednofaktorové experimenty Příklad 5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Podíl F
faktor L	34,06	4	8,515	9,479
řádky	65,56	4	16,390	18,245
sloupce	10,36	4	2,590	2,883
reziduální	10,78	12	0,898	

Kritická hodnota F-rozdělení: $F_{0,95}(4,12) = 3,259$

Mnohonásobná porovnávání (Bonferroni):

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A	16,1	15,1	17,1
B	15,3	14,3	16,3
C	13,1	12,1	14,1
D	14,8	13,8	15,8
E	16,4	15,4	17,4