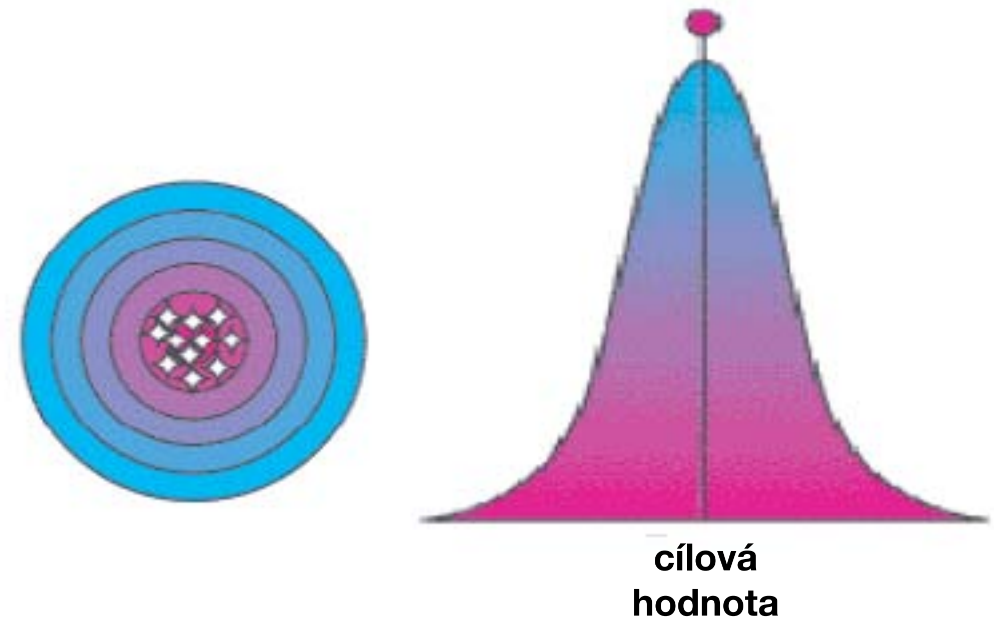
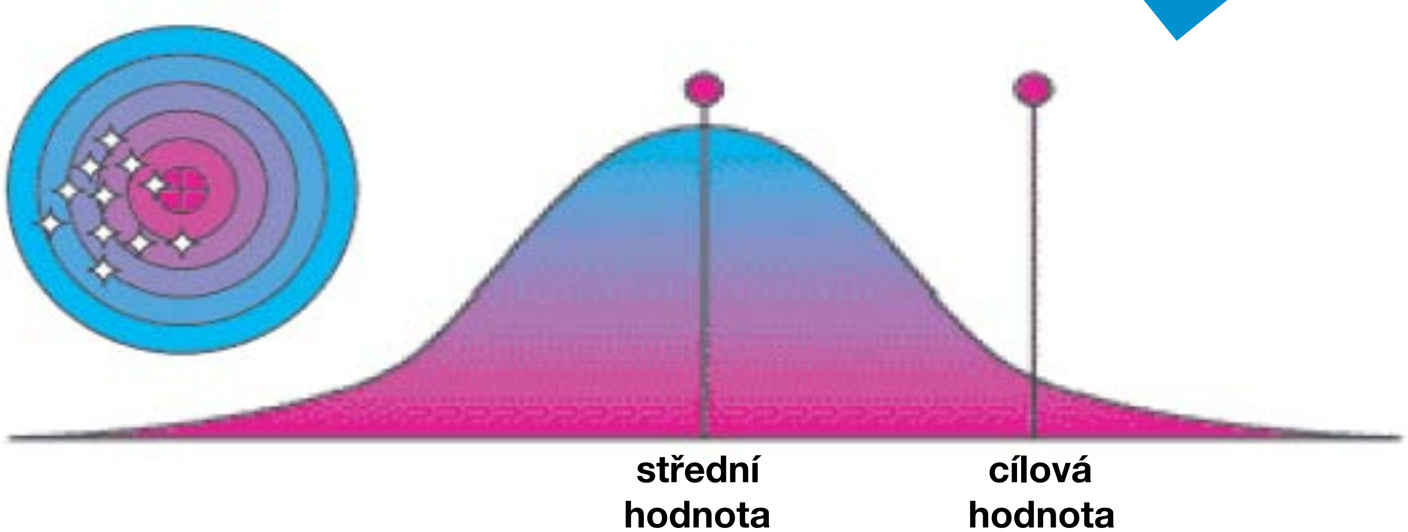
Základy navrhování průmyslových experimentů DOE



IV. Vícefaktoriální experimenty



Gejza Dohnal

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Příklad

Při výrobě integrovaných obvodů se na leštěných silikonových destičkách nechává růst epitaxiální vrstva [14]. Destičky jsou připevněny na šestibokém hranolu (dvě destičky na každé plošce), který je umístěn pod krycím zvonem, do nějž jsou vstřikovány chemické páry. Proces probíhá určitou dobu a cílová hodnota epitaxiální vrstvy je 14,5 μm. Zkoumáme vliv způsobu rotace hranolu (A), pozice trysky (B), teploty při pokovování (C) a doby pokovování (D) na tloušťku vrstvy. U každého faktoru volíme dvě úrovně.

	Úroveň	
Faktor	−	+
A - způsob rotace	plynulý	oscilující
B - pozice trysky	2	6
C - teplota	1210 °F	1220 °F
D - doba	kratší	delší

Poznámka:

S ohledem na různou pozici destiček by bylo vhodné uvažovat ještě další dva faktory, vymezující pozici destičky. To by však v úplném faktoriálním experimentu znamenalo měřit dvanáct destiček při každé kombinaci faktorů A, B, C, D (při jedné replikaci). Vzhledem k tomu, že neřešíme skutečný problém, ale chceme ukázat postup analýzy v případě čtyř faktorů, představíme si např., že jsme při každé kombinaci úrovní ABCD změřili jen tři destičky, odebrané náhodně pokaždé z jiných pozic.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Příklad

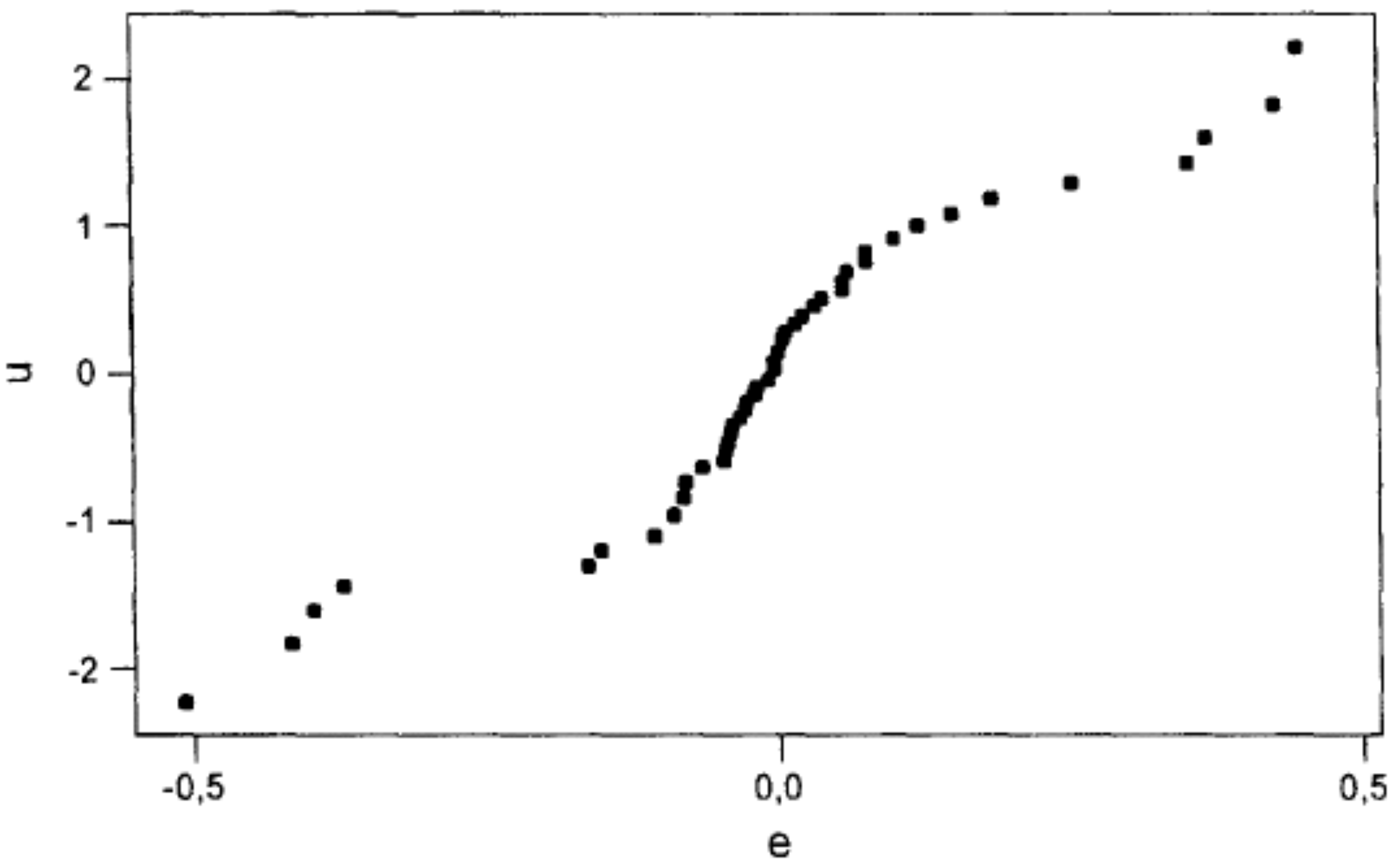
Matice návrhu:

A	B	C	D	y			$\overline{y}$	s^2
−	−	−	−	13,896	13,932	13,914	13,914	0,0003
+	−	−	−	13,588	13,964	14,328	13,960	0,1369
−	+	−	−	14,274	14,154	14,082	14,170	0,0094
+	+	−	−	13,970	13,738	13,738	13,815	0,0179
−	−	+	−	13,846	13,896	13,870	13,871	0,0006
+	−	+	−	14,264	14,432	14,228	14,308	0,0119
−	+	+	−	14,028	14,108	14,060	14,065	0,0016
+	+	+	−	14,000	13,640	13,592	13,744	0,0497
−	−	−	+	14,794	14,860	14,914	14,856	0,0036
+	−	−	+	14,718	15,198	15,490	15,135	0,1519
−	+	−	+	14,876	14,958	14,932	14,922	0,0018
+	+	−	+	15,034	15,384	15,170	15,196	0,0311
−	−	+	+	14,778	14,682	14,850	14,770	0,0071
+	−	+	+	14,962	14,504	14,136	14,534	0,1712
−	+	+	+	15,058	14,938	14,936	14,977	0,0049
+	+	+	+	15,424	15,036	14,470	14,977	0,2302

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Příklad

Pravděpodobnostní graf reziduí:



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Statistický model:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijk}$$

Předpoklady modelu:

- stejné podmínky měření
- nezávislost měření
- konstantní rozptyl
- normalita reziduí

je třeba je zajistit návrhem; uspořádání do bloků, dodatečné faktory, ...

nejdůležitější, ale také nejhůře ověřitelná podmínka

často se zdůrazňuje, ale není až tak důležitá, hlavně pro velké soubory

časté porušení předpokladů, které může podstatně ovlivnit naše závěry

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Stejné podmínky měření

- Lze je zajistit prostým uspořádáním experimentu (časovým, organizačním, materiálovým)
- Často používáme zavedení dalších, tzv. blokových faktorů (blokováním)

Rozdělení měření do bloků nelze provádět libovolně.

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
a	+	-	-	-	-	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+
c	-	-	+	+	-	-	+
ab	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	-	+	-	+	-	-
bc	-	+	+	-	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Stejné podmínky měření

- Lze je zajistit prostým uspořádáním experimentu (časovým, organizačním, materiálovým)
- Často používáme zavedení dalších, tzv. blokových faktorů (blokováním)

Rozdělení měření do bloků nelze provádět libovolně.

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
a	+	-	-	-	-	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+
c	-	-	+	+	-	-	+
ab	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	-	+	-	+	-	-
bc	-	+	+	-	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+

Rozdělení měření do 2 bloků podle interakce ABC - vliv interakce ABC potom nelze odlišit od vlivu rozdělení na bloky

- hlavní blok

- alternativní blok

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Stejné podmínky měření

- Lze je zajistit prostým uspořádáním experimentu (časovým, organizačním, materiálovým)
- Často používáme zavedení dalších, tzv. blokových faktorů (blokováním)

Rozdělení měření do 4 bloků metodou sudá-lichá podle interakcí AC a BD:

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	0	0	-
a	+	-	-	-	1	0	+
b	-	+	-	-	0	1	+
c	-	-	+	+	1	1	+
ab	+	+	-	+	1	1	-
ac	+	-	+	-	2	1	-
bc	-	+	+	-	1	2	-
abc	+	+	+	+	2	2	+

	BC sudá	BD lichá
AC sudá	1 abc	b ac
AC lichá	a bc	c ab

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Stejné podmínky měření

- Lze je zajistit prostým uspořádáním experimentu (časovým, organizačním, materiálovým)
- Často používáme zavedení dalších, tzv. blokových faktorů (blokováním)

Rozdělení měření do 4 bloků metodou sudá-lichá podle interakcí AC a BD:

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	0	0	-
a	+	-	-	-	1	0	+
b	-	+	-	-	0	1	+
c	-	-	+	+	1	1	+
ab	+	+	-	+	1	1	-
ac	+	-	+	-	2	1	-
bc	-	+	+	-	1	2	-
abc	+	+	+	+	2	2	+

	BC sudá	BD lichá
AC sudá	1 abc	b ac
AC lichá	a bc	c ab

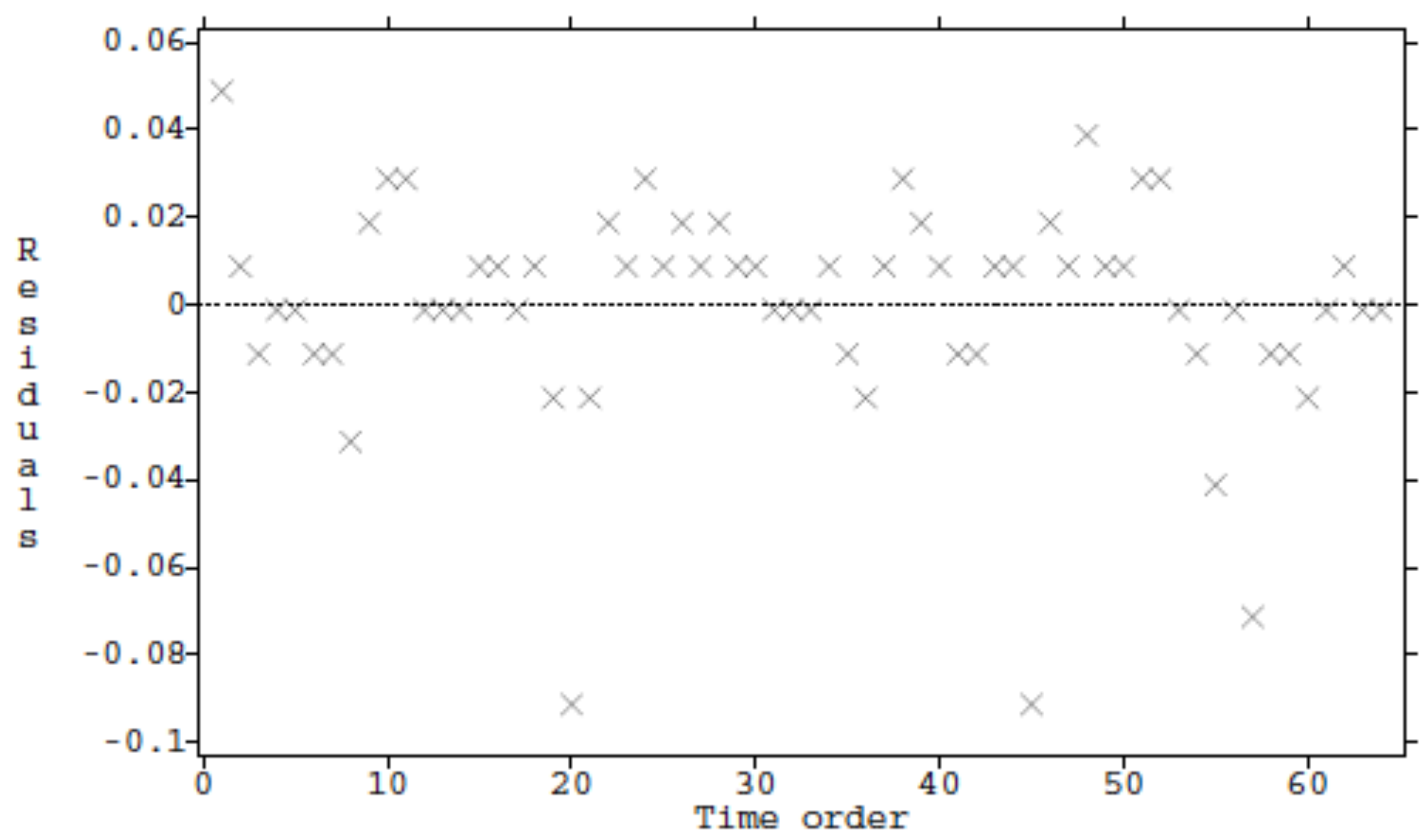
Vícefaktoriální návrhy experimentů

Nezávislost měření

Závislost v posloupnosti měření se zjišťuje prostřednictvím reziduí $r_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$

Tato "pořadová závislost" může vznikat posunem v měřícím zařízení, únavou operátora, změnou podmínek měření apod.

Grafická analýza - graf reziduí v čase (indexový graf)



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Nezávislost měření

Závislost v posloupnosti měření se zjišťuje prostřednictvím reziduí $r_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$

Tato "pořadová závislost" může vznikat posunem v měřícím zařízení, únavou operátora, změnou podmínek měření apod.

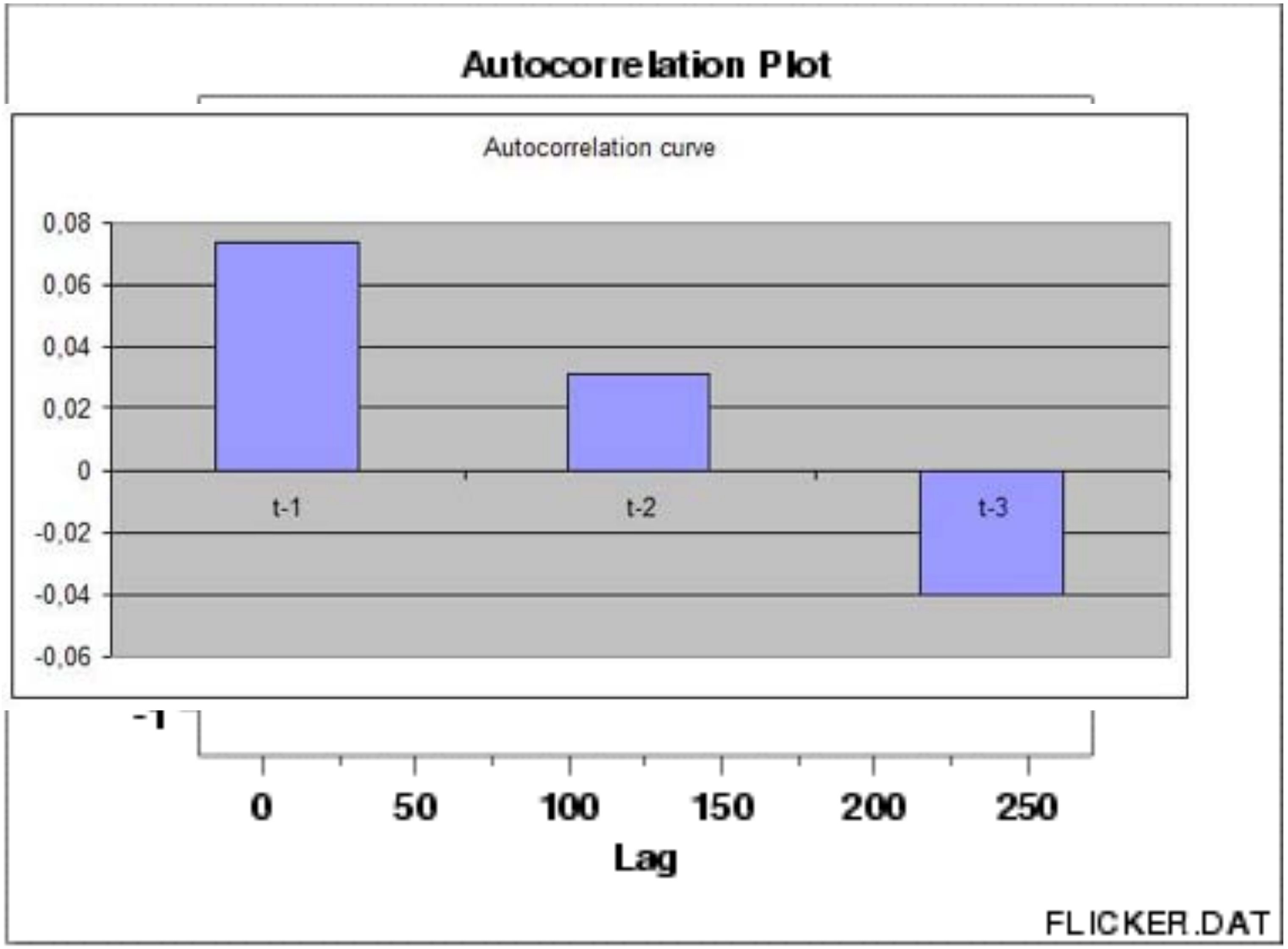
Grafická analýza - graf reziduí v čase (indexový graf)

Autokorelační funkce reziduí

$$c_{i,k} = Cov(r_{i,j}, r_{i,j-k})$$

$$\hat{c}_{i,k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k} r_{i,j} r_{i,j+k}$$

$$\hat{r}_{i,k} = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} r_{i,j} r_{i,j+k}}{\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}^2}$$



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Nezávislost měření

Závislost v posloupnosti měření se zjišťuje prostřednictvím reziduí $r_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$

Tato "pořadová závislost" může vznikat posunem v měřícím zařízení, únavou operátora, změnou podmínek měření apod.

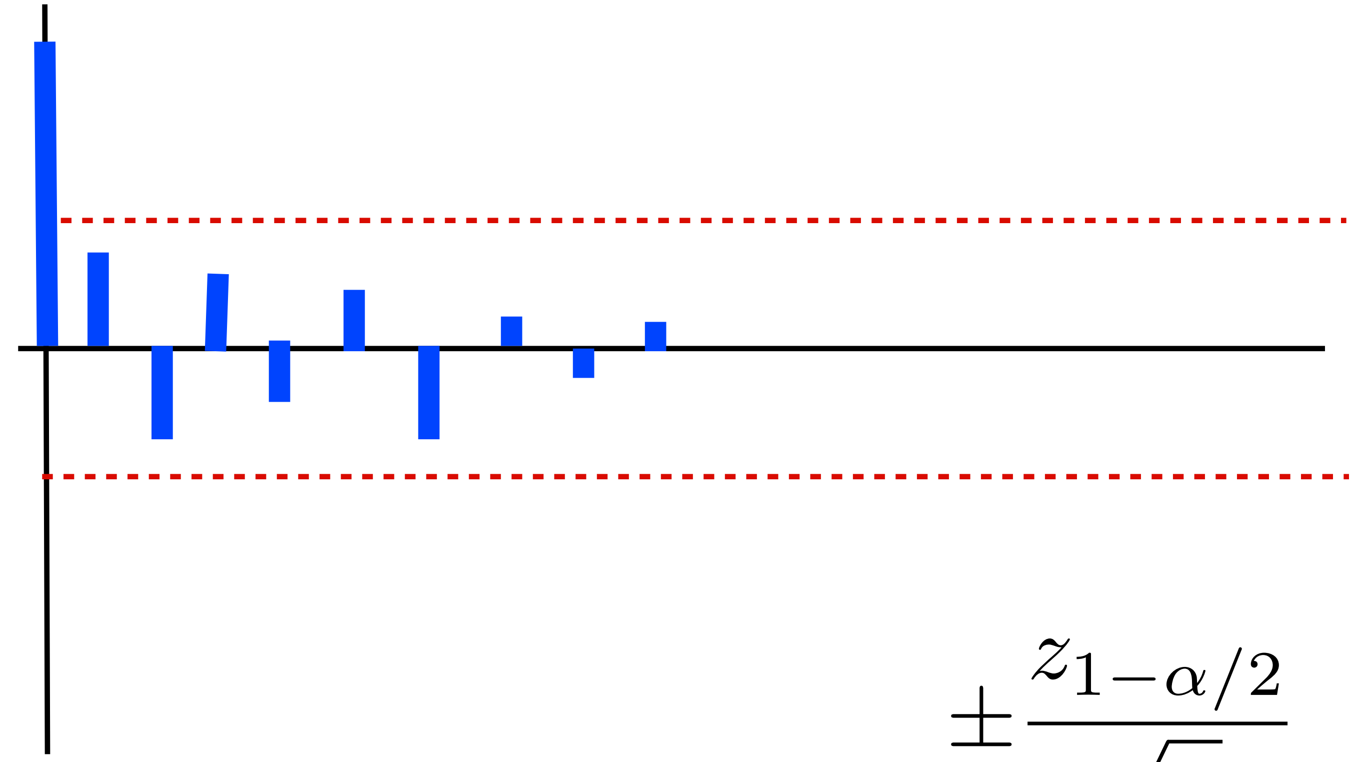
Grafická analýza - graf reziduí v čase (indexový graf)

Autokovarianční funkce reziduí

$$c_{i,k} = Cov(r_{i,j}, r_{i,j-k})$$

$$\hat{c}_{i,k} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k} r_{i,j} r_{i,j+k}$$

$$\hat{r}_{i,k} = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} r_{i,j} r_{i,j+k}}{\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}^2}$$



$$\pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Nezávislost měření

Závislost v posloupnosti měření se zjišťuje prostřednictvím reziduí $r_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$

Tato "pořadová závislost" může vznikat posunem v měřícím zařízení, únavou operátora, změnou podmínek měření apod.

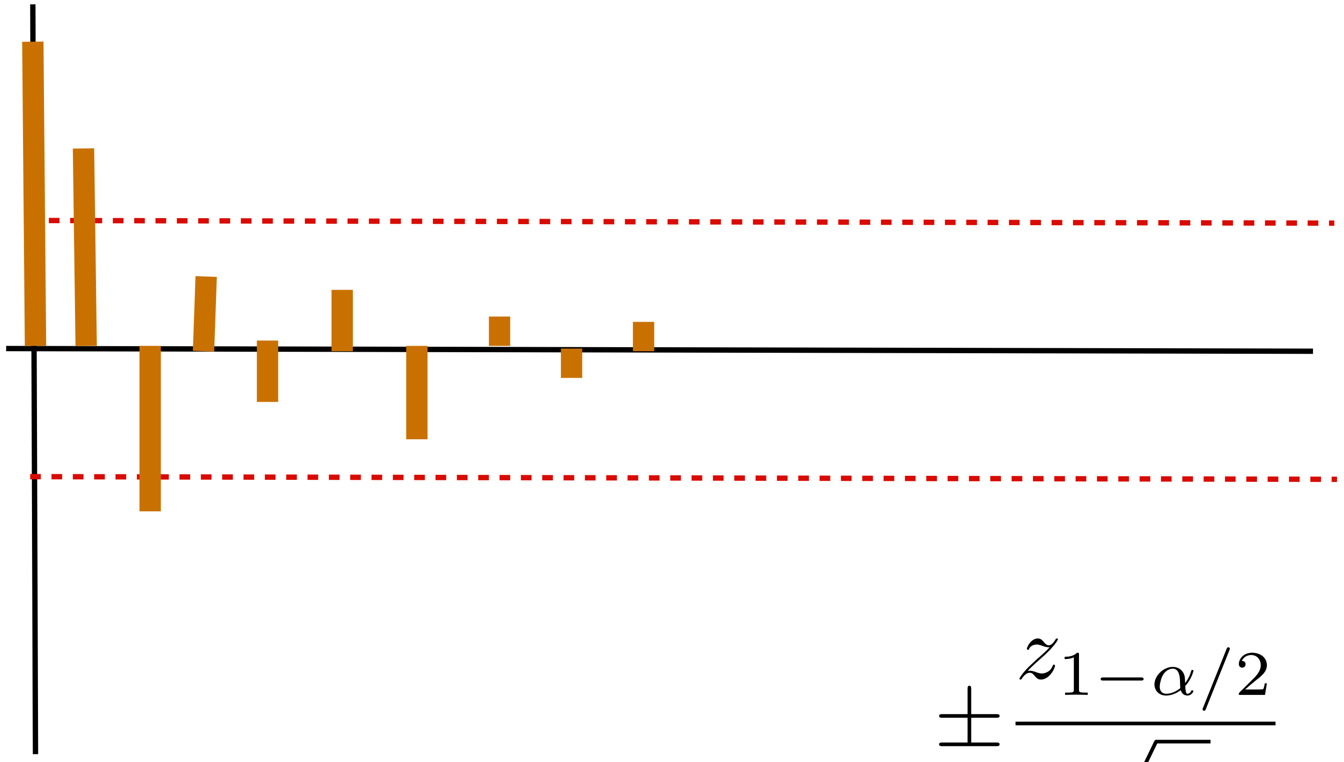
Grafická analýza - graf reziduí v čase (indexový graf)

Autokovarianční funkce reziduí

$$c_{i,k} = Cov(r_{i,j}, r_{i,j-k})$$

$$\hat{c}_{i,k} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k} r_{i,j} r_{i,j+k}$$

$$\hat{r}_{i,k} = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} r_{i,j} r_{i,j+k}}{\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}^2}$$



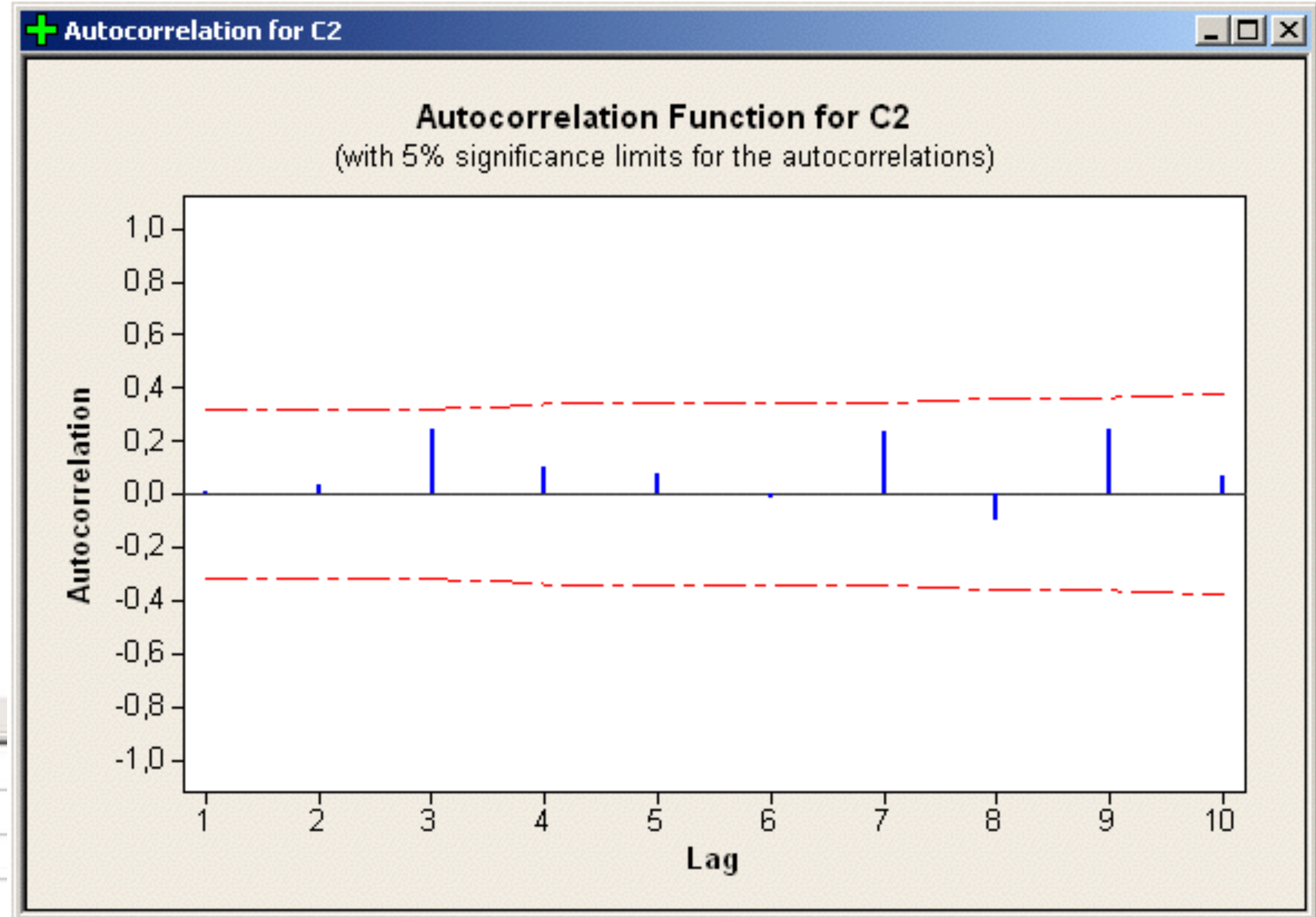
$$\pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Nezávislost měření

Autocorrelation Function: C2

Lag	ACF	T	LBQ
1	0,006385	0,04	0,00
2	0,029956	0,19	0,04
3	0,244418	1,54	2,75
4	0,103208	0,62	3,25
5	0,072088	0,43	3,50
6	-0,018962	-0,11	3,52
7	0,231183	1,36	6,24
8	-0,102598	-0,58	6,79
9	0,240214	1,34	9,92
10	0,066817	0,36	10,17



12	2	84
13	2	64
14	2	128
15	2	79
16	3	81
17	3	91
18	3	142
19	3	84
20	3	85
21	3	93
22	3	99
23	3	119
24	3	92

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Nezávislost měření

- Analýza reziduí $r_{ij} = y_{ij} - \bar{y}i.$

Durbin-Watsonův test:

$$DW = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (r_k - r_{k+1})^2}{\sum_{k=1}^{n-1} r_k^2}$$

Hodnoty této statistiky se pohybují od nuly do čtyř. Pokud je tato statistika rovna číslu 2, rezidua nevykazují žádnou autokorelaci, hodnoty DW menší než 2 značí pozitivní autokorelaci a hodnoty větší než 2 značí autokorelaci negativní.
Orientační vodítko: leží-li hodnota testové statistiky DW v intervalu (1,4;2,6), rezidua nevykazují autokorelaci, hodnota pod 1,4 značí kladnou autokorelaci, hodnota nad 2,6 značí zápornou autokorelaci

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Nezávislost měření

Co se stane, když jsou data závislá?

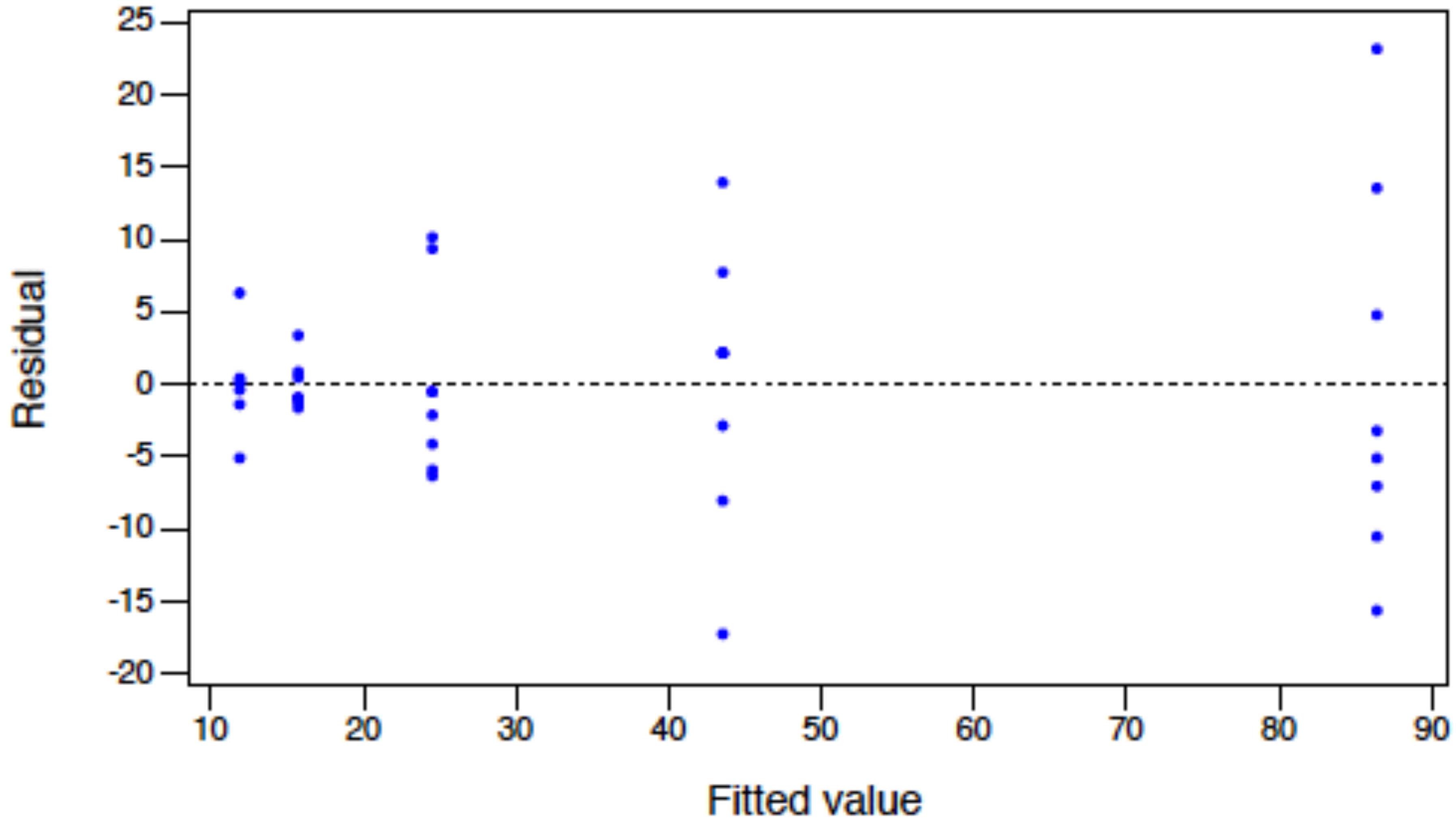
- Největší změnou je to, že rozptyly průměrů se stávají vychýlené (velikost vychýlení závisí na typu závislosti). To způsobí vychýlenost odhadů pro jednotlivé skupiny a pro efekty faktorů a jejich interakcí.
- Vliv randomizace může být na závislých datech různý účinek. Na stejných datech může jedno znáhodnění pořadí zvýšit pravděpodobnost chyby I. druhu, jiné naopak snížit.
- Náhodné seřazení kombinací v blocích také nepomůže, pokud není znáhodněno pořadí měření.

Jak se vypořádat se závislostí dat?

- Použít analýzu časových řad ke zjištění trendu a případné periodicity časové řady měření
- Pomocí autokorelační (parciální autokorelační) funkce zjistit závislosti v čase a určit ARMA model pro časovou řadu měření
- Na základě předchozích kroků provést "očištění" časové řady měření a dále pracovat pouze s rezidui, která by už měla být nezávislá

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Konstantní rozptyl



- O'Brienův test
- Brown-Forsythův tet
- Levenův test
- Bartlettův test

první tři jsou založeny na transformaci do nové odezvy z_{ij} a použití ANOVA

vyžaduje předpoklad normality!

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Konstantní rozptyl

- O'Brien

$$z_{ij} = \frac{(n_j + w - 2) n_j \left(y_{ij} - \bar{y}_{j.} \right)^2 - w s_j^2 \left(n_j - 1 \right)}{\left(n_j - 1 \right)\left(n_j - 2 \right)}$$

y_{ij} - odezva pro i-té měření v j-té skupině
$\bar{y}_j$ - průměr odezvy ve skupině j
s^2_j - rozptyl odezvy ve skupině j
n_j - je počet měření ve skupině j
w - konstanta (0,5)
$\tilde{y}_j$ - medián odezvy ve skupině j
p - počet skupin

- Brown-Forsythe

$$z_{ij} = \left| y_{ij} - \tilde{y}_j \right|$$

- Levene

$$z_{ij} = \left| y_{ij} - \bar{y}_j \right|$$

testová statistika (ANOVA) má F-rozdělení o (p-1) a (N-p) stupních volnosti

$$F = \frac{(N-p) \sum_{j=1}^{p} n_j \left(\bar{z}_{j.} - \bar{\bar{z}}_{..} \right)^2}{(p-1) \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} \left(z_{ij} - \bar{z}_{j.} \right)^2}$$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Konstantní rozptyl

Grp 1	Grp 2	Grp 3	Grp 4	Grp 5	Grp 6
95	112				
123	107				
74	67				
145	98				
64	105				
84	95				
128	79				
79	.				
.	.				
.	.				
.	.				
.	.				

```
               Test for Homogeneity of Variances

   Number of Observations    =  40
   Number of Groups          =  6

   Group Statistics:
   Group        Median      Mean         Std.Dev      N
    1          89.5000    99.0000       29.3355       8
    2          98.0000    94.7143       16.2349       7
    3          96.0000   100.8333       17.7551      12
    4         106.0000   108.2857       10.8737       7
    5         115.0000   118.3333        8.5049       3
    6         134.0000   140.6667       28.5890       3

  The p-value for rejecting = .05
  Test                        F-Ratio    p-value
 Levene                        3.0079     0.0236     Reject HO
 Brown-Forsythe                2.1035     0.0890     Accept HO
 O'Brien                       2.0498     0.0963     Accept HO
 Bartlett   Chi2 = 8.1337      1.6267     0.1490     Accept HO

 Bartlett's test is chi-square with df =  5
 All F tests are done with df =  5 and  34


 Welch 1 way ANOVA             2.4737     0.1120     Accept HO

 Here, the variances may be unequal. The df are 5, 10.112
```

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Konstantní rozptyl

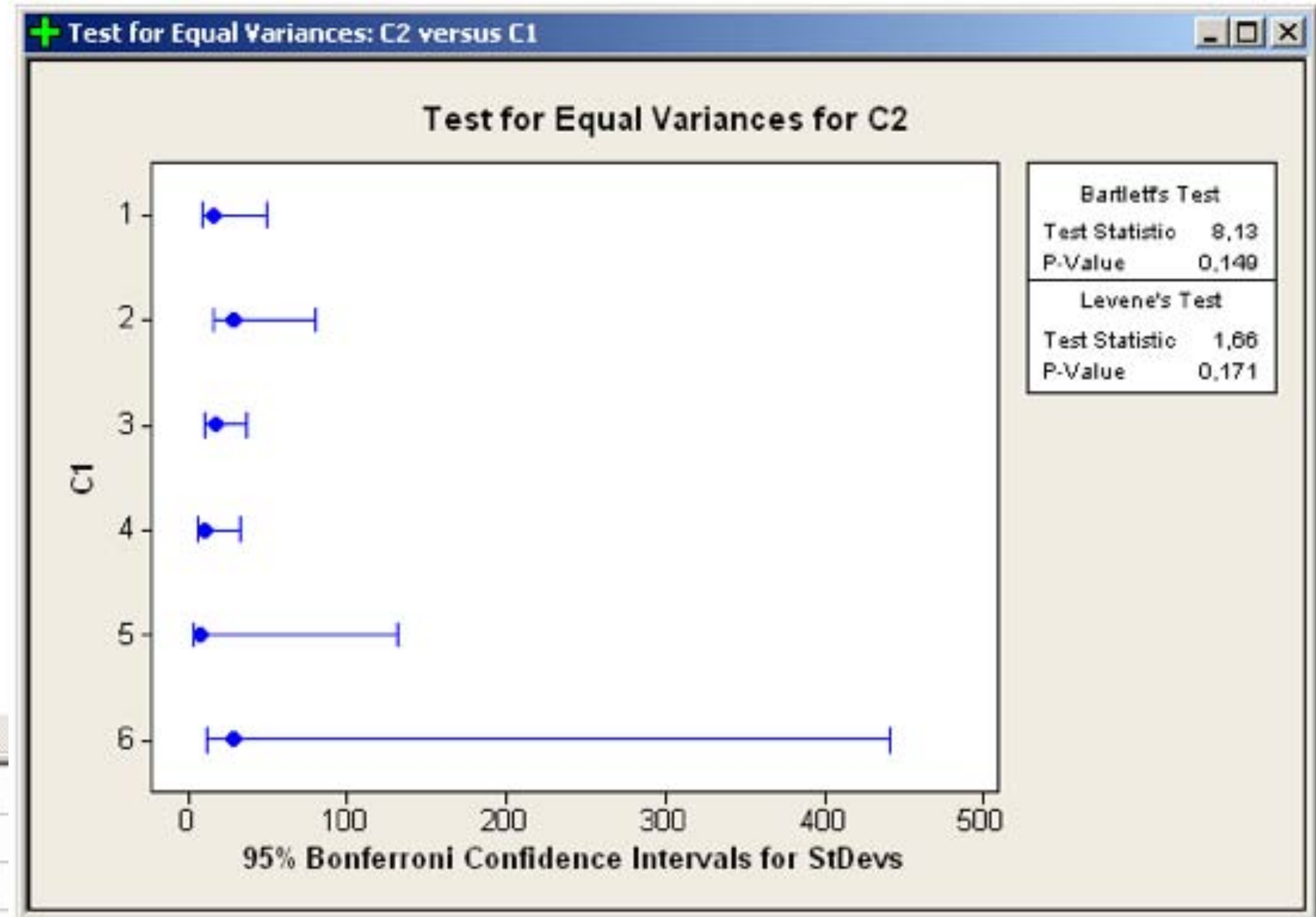
Test for Equal Variances: C2 versus C1

95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

C1	N	Lower	StDev	Upper
1	7	9,1236	16,2349	50,002
2	8	17,0400	29,3343	80,335
3	12	11,2743	17,7551	37,252
4	7	6,1108	10,8737	33,490
5	3	3,6329	8,5049	131,620
6	3	12,2119	28,5890	442,438

Bartlett's Test (normal distribution)
Test statistic = 8,13; p-value = 0,149

Levene's Test (any continuous distribution)
Test statistic = 1,66; p-value = 0,171



12	2	84
13	2	64
14	2	128
15	2	79
16	3	81
17	3	91
18	3	142
19	3	84
20	3	85
21	3	93
22	3	99
23	3	119
24	3	92

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Konstantní rozptyl

- Jsou-li stejné rozsahy skupin ($n_1, \ldots, n_g$), potom je vliv nestejných rozptylů na *p*-hodnotu F-testu relativně malý
- Při větším rozsahu skupin s větším rozptylem se p-hodnota zmenšuje oproti nominální (nadhodnocujeme odhad a dostáváme konzervativní test)
- Při větším rozsahu skupin s menším rozptylem je skutečná p-hodnota větší oproti nominální (podhodnocujeme odhad a dostáváme liberální test)

Co se stane, když jsou rozptyly nehomogenní?

g	σ_i^2	n_i	ε
3	1, 1, 1	5, 5, 5	.05
	1, 2, 3	5, 5, 5	.0579
	1, 2, 5	5, 5, 5	.0685
	1, 2, 10	5, 5, 5	.0864
	1, 1, 10	5, 5, 5	.0954
	1, 1, 10	50, 50, 50	.0748
3	1, 2, 5	2, 5, 8	.0202
	1, 2, 5	8, 5, 2	.1833
	1, 2, 10	2, 5, 8	.0178
	1, 2, 10	8, 5, 2	.2831
	1, 2, 10	20, 50, 80	.0116
	1, 2, 10	80, 50, 20	.2384
5	1, 2, 2, 2, 5	5, 5, 5, 5, 5	.0682
	1, 2, 2, 2, 5	2, 2, 5, 8, 8	.0292
	1, 2, 2, 2, 5	8, 8, 5, 2, 2	.1453
	1, 1, 1, 1, 5	5, 5, 5, 5, 5	.0908
	1, 1, 1, 1, 5	2, 2, 5, 8, 8	.0347
	1, 1, 1, 1, 5	8, 8, 5, 2, 2	.2029

Přibližná pravděpodobnost chyby I. druhu ε při nominální hodnotě α=5% pro různé rozptyly ve skupinách

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Konstantní rozptyl **Jak lze nehomogenitu rozptylů odstranit?**

V podstatě jediný způsob "napravení" nehomogenity rozptylů je transformace.
V následující tabulce jsou některé uvedeny:

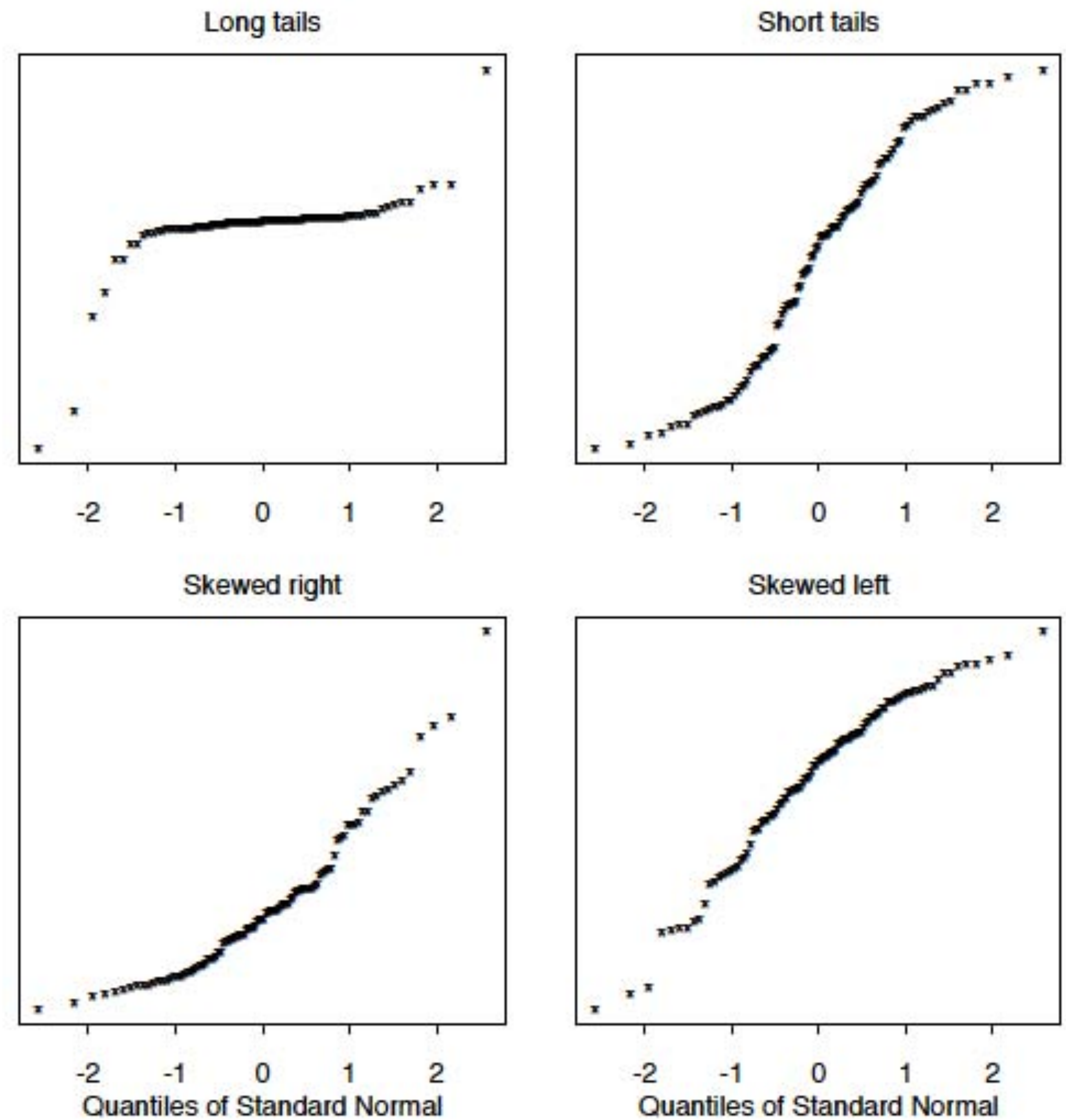
Rozdělení	Transformace	Nový rozptyl
Binomické rozdělení $X \approx Binom(n,p)$ $Var(\hat{p}) = p(1-p)/n$	$\arcsin(\sqrt{\hat{p}})$	$\frac{1}{4n}$
Poissonovo rozdělení $X \approx Poisson(\lambda)$ $Var(X) = \lambda$	$\sqrt{X}$	$\frac{1}{4}$
Pokud lze vyjádřit $Var(X) = g(\mu)$ pomocí $E(X) = \mu$	$y = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{g(v)}} dv$	1

Alternativou je použití neparametrického testu (Kruskal-Wallis) namísto F-testu v ANOVA

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Normalita reziduí

Normální pravděpodobnostní graf (rankitový graf, Q-Q graf)



rankit je aproximace normálního rozdělení:

$$\frac{i - 3/8}{n + 1/4}$$

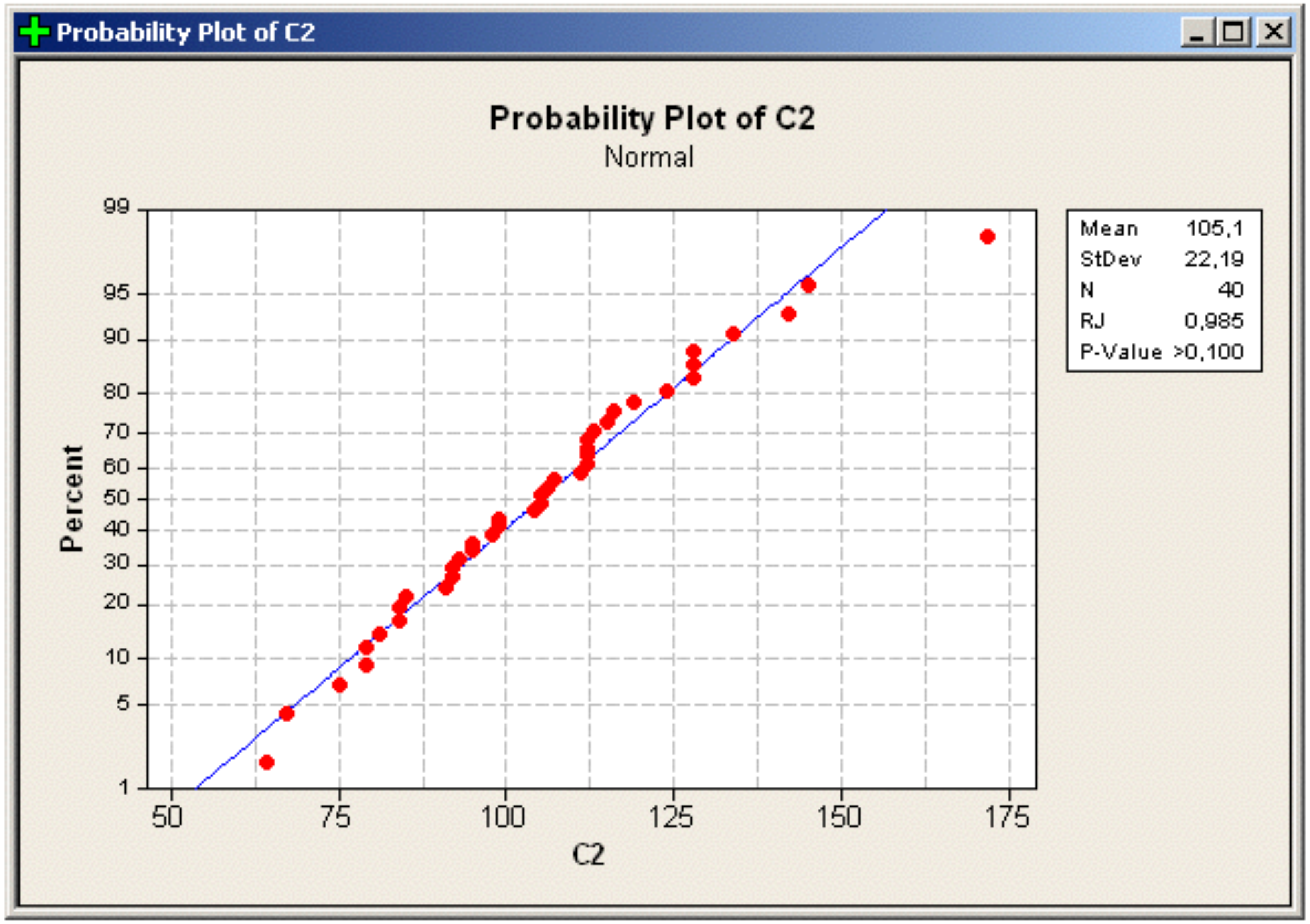
Vícefaktoriální návrhy experimentů

Normalita reziduí

Testy normality:

- Chí-kvadrát test
- Anderson-Darling
- Shapiro-Wilk (Ryan-Joiner)

- Test normality založený na šikmosti a špičatosti



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Normalita reziduí

Test normality založený na šikmosti a špičatosti

výběrový koeficient šikmosti:

$$S_k = \frac{M_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2}\right)^3}, \qquad ES_k = 0, \qquad DS_k = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

$$\boxed{\frac{|S_k|}{\sqrt{DS_k}} \geq z_\alpha}$$

výběrový koeficient špičatosti:

$$E_k = \frac{M_4}{s^4} - 3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2\right)^2} - 3, \qquad EE_k = \frac{-6}{n+1}, \qquad DE_k = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

$$\boxed{\frac{|E_k - EE_k|}{\sqrt{DE_k}} \geq z_\alpha}$$

kde $z_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Normalita reziduí

Co se stane, když jsou data nenormální?

Změní se hladina významnosti:

Čtyři skupiny po 5 měřeních

S \ K	-1	-.5	0	.5	1	1.5	2
0	.0527	.0514	.0500	.0486	.0473	.0459	.0446
.5	.0530	.0516	.0503	.0489	.0476	.0462	.0448
1	.0538	.0524	.0511	.0497	.0484	.0470	.0457
1.5	.0552	.0538	.0525	.0511	.0497	.0484	.0470

$S = 0$ a $K = 1.5$

4 skupiny po k		k skupin po 5		(k_1, k_1, k_2, k_2)	
k	α	k	α	k_1, k_2	α
2	.0427	4	.0459	10,10	.0480
10	.0480	8	.0474	8,12	.0483
20	.0490	16	.0485	5,15	.0500
40	.0495	32	.0492	2,18	.0588

Vícefaktoriální návrhy experimentů

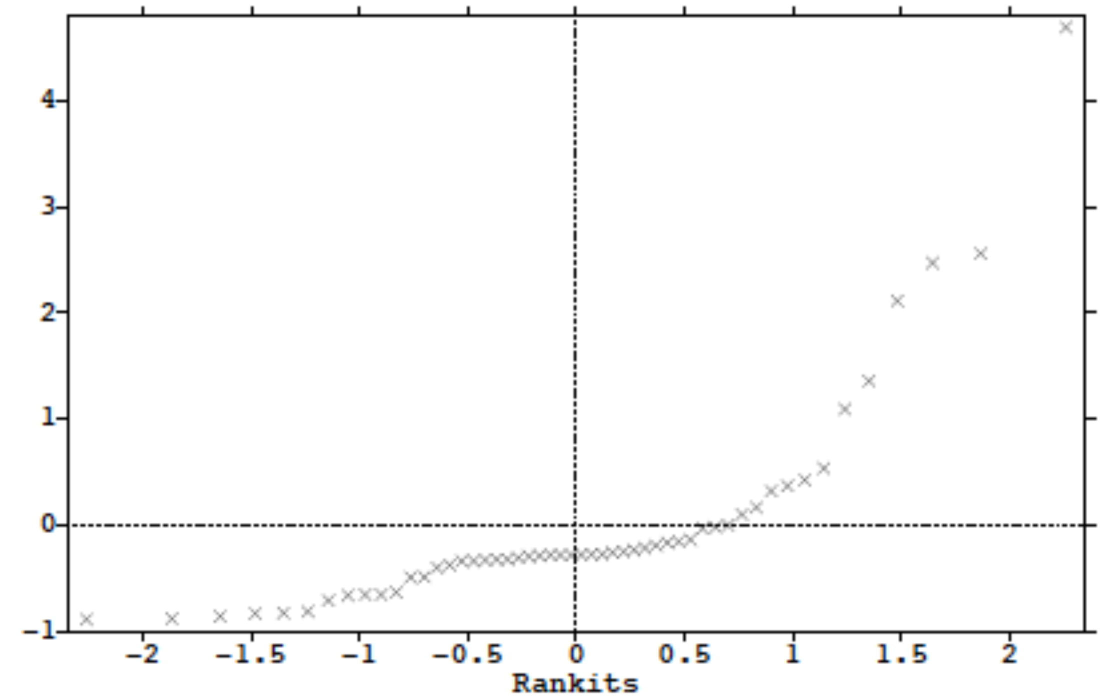
Normalita reziduí

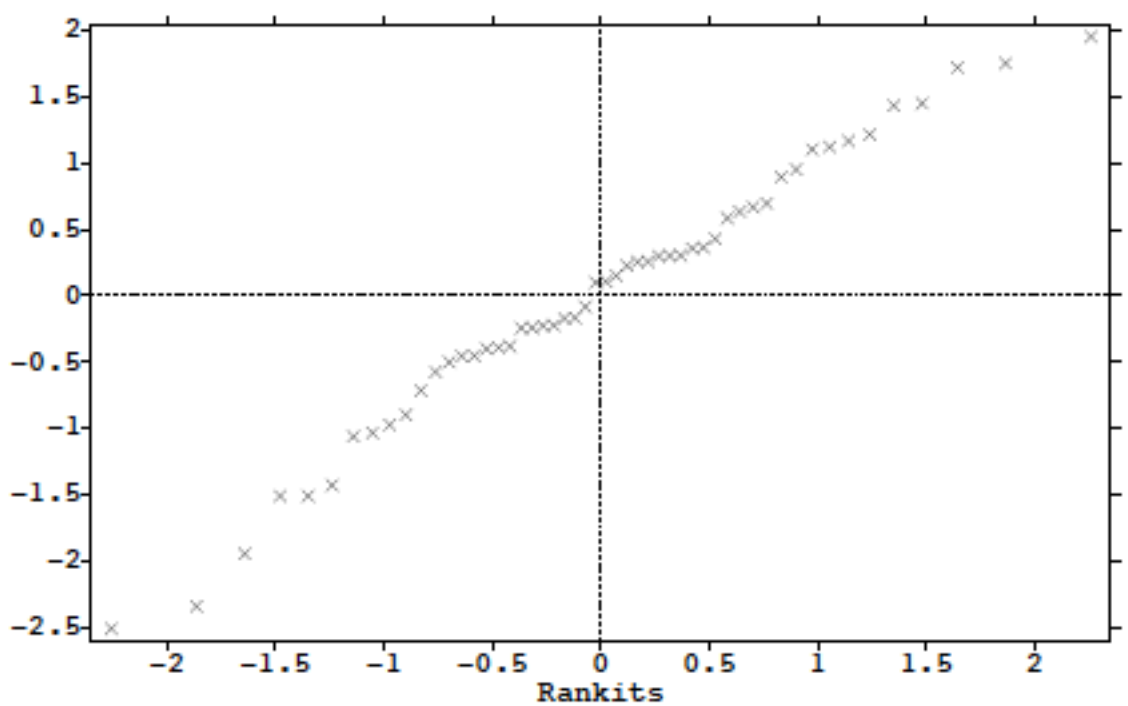
Jak data "znormalizovat"?

Nejčastější způsob "napravení" normality je opět transformace. Na obr. vpravo nahoře jsou původní data a dole jsou tatáž data po logaritmické transformaci.

Nejjednodušší je transformace v případě sešikmení původních dat. Zešikmení napravo pomůže transformace odmocninou, logaritmem nebo jinou mocninou transformací s exponentem menším než 1.
Data zešikmená doleva lze úspěšně transformovat mocninnou transformací s exponentem větším než 1.
Problematický je případ symetrického rozdělení se špičatostí různou od 3.

Zvláštní přístup je třeba zaujmout k odlehlým měřením.





R_i – součet pořadí měření patřících do skupiny i

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA

Kruskal – Wallisův test

je neparametrickou obdobou analýzy rozptylu jednoduchého třídění. Slouží k ověření nulové hypotézy H_0, že ***k > 2*** nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pochází z jednoho základního souboru. Předpokládáme, že tyto náhodné výběry byly pořízeny ze základních souborů se spojitými distribučními funkcemi $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x)$. Nulovou hypotézu H_0 můžeme zapsat takto:

$$H_0\colon F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x) \text{ pro všechna } x.$$

Postup při stanovení testového kritéria:

1) Máme k dispozici ***k*** výběrových souborů o četnostech $n_1, n_2, \ldots, n_k$.
2) Všechny výběrové soubory sloučíme do jediného souboru.
3) Každé hodnotě souboru přiřadíme vzestupně pořadové číslo, stejným hodnotám pak pořadí průměrné.
4) Následně sečteme pořadová čísla jednotlivých pozorování pro každý původní výběrový soubor zvlášť a získáme součty $T_1, T_2, \ldots, T_k$ (T_i ; $i = 1, \ldots, k$, je tedy součet pořadových čísel pro i-tý výběr).

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA

Testové kritérium má tvar
$$KW = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3 \cdot (n+1),$$

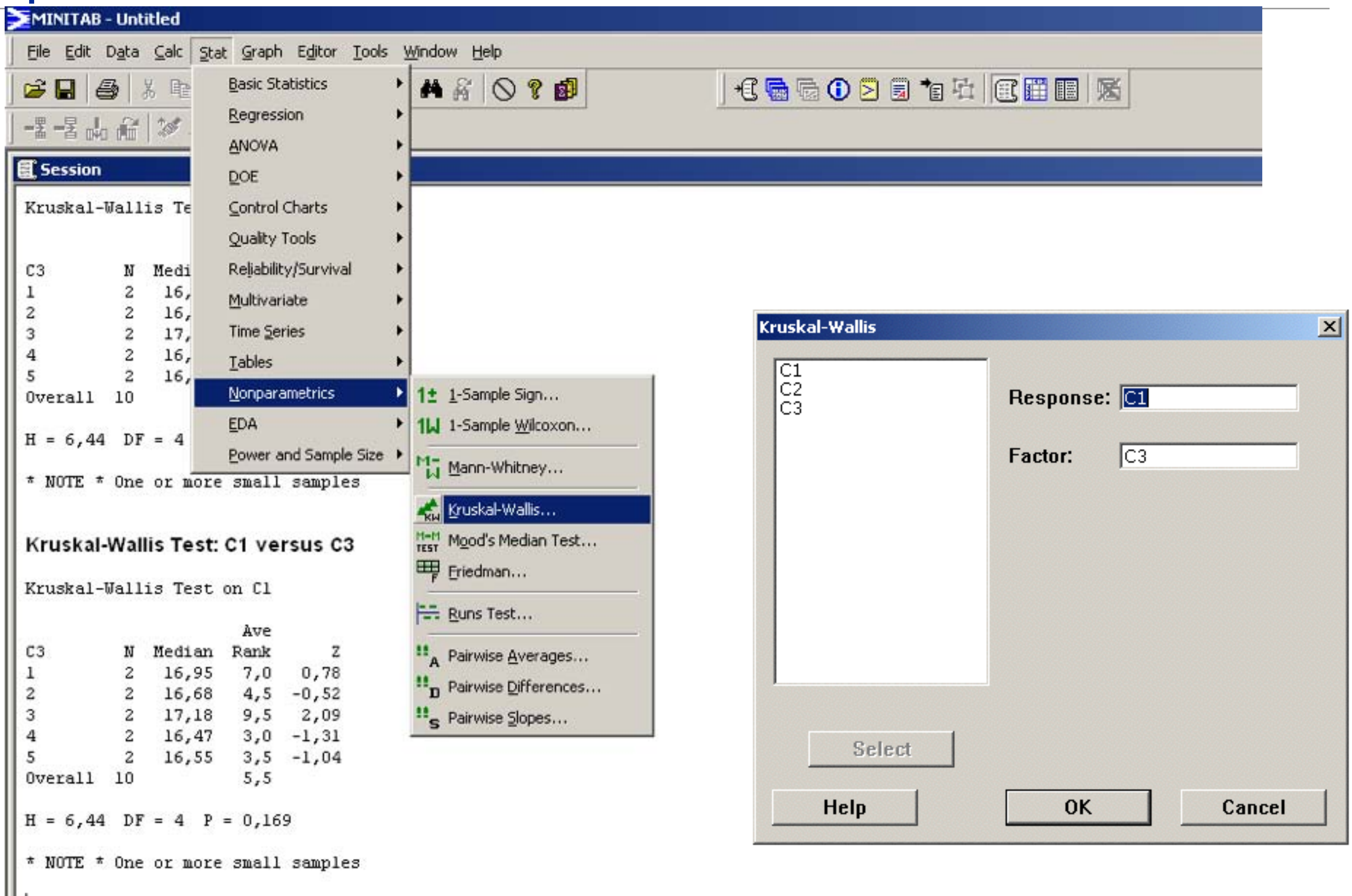
kde $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.
Statistika KW má za platnosti H_0 při $n_i \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 – rozdělení o *k-1* stupních volnosti.
Pokud $KW > \chi^2_{\alpha\,(k-1)}$, přijímáme hypotézu alternativní, podle které se hodnoty nejméně dvou porovnávaných výběrových souborů od sebe průkazně liší.

Jestliže se v posloupnosti zjištěných údajů vyskytnou shodné hodnoty, kterým se přiřazuje průměrné pořadí, je nutno hodnotu KW dělit korekčním faktorem
$$K = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} \left(t_i^3 - t_i\right)}{n^3 - n},$$

kde p je počet tříd se stejným pořadím a t_i počet pořadí v i-té třídě. Opravené testové kritérium se stanoví jako
$$KW_{opr.} = \frac{KW}{K}.$$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA

V případě, že zamítneme nulovou hypotézu, tvrdíme, že všechny výběry nepocházejí z téhož rozdělení.
Obvykle pak ve druhé etapě statistického zpracování řešíme otázku, které výběry se od sebe statisticky významně liší.
K tomuto lze použít postupy, které se souhrnně nazývají neparametrické metody mnohonásobného porovnávání.
Pracujeme-li s vyváženým pokusným plánem, tzn. má-li všech ***k*** výběrů stejný rozsah (platí-li $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = N$), můžeme Kruskal – Wallisův test doplnit **Neményiho metodou mnohonásobného srovnávání**.

Je-li diference $|T_i - T_j|$ větší nebo rovna kritické hodnotě D_α pro Neményiho metodu, zamítá se hypotéza o neprůkaznosti diference, tzn. že i-tý a j-tý výběr pocházejí z téhož rozdělení.
Tabulkové hodnoty se hledají pro hladinu významnosti α, pro *k* počet porovnávaných tříd a *N* opakování v každé třídě ($n_1 = n_2 = \ldots = n_k = N$).
Tímto postupem zhodnotíme $\frac{k(k-1)}{2}$ diferencí $|T_i - T_j|$.

R_i = součet pořadí měření patřících do skupiny i

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA

Pokud rozsahy jednotlivých výběrových souborů nejsou stejné (nevyvážený plán), můžeme zjistit, které výběry se od sebe statisticky významně liší, pomocí přibližné Dunnovy metody mnohonásobného srovnávání.

Jestliže

$$\left|T_i - T_j\right| > u_{\frac{2\alpha}{k(k-1)}} \cdot \sqrt{\frac{n(n-1)}{12}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)},$$

kde $u_{\frac{2\alpha}{k(k-1)}}$ je kritická hodnota rozdělení N(0; 1), zamítáme na hladině významnosti α hypotézu, že i-tý výběr (s rozsahem n_i) a j-tý výběr (s rozsahem n_j) pocházejí z téhož rozdělení.

R_i – součet pořadí měření patřících do skupiny i

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA

Příklad

V polním pokusu byly ověřovány čtyři varianty hnojení silážní kukuřice rozdílnou dávkou NPK v hnojivech, označené jako H_1 až H_4. Každá varianta byla ověřována na 8 parcelách s výnosem sklizené hmoty v tunách z parcely, uvedeným v tabulce dat. Ověřte, zda se výnosy u jednotlivých variant hnojení průkazně liší.

H_0: výnosy jednotlivých variant jsou shodné

H_1: výnosy jednotlivých variant jsou rozdílné

T_i – součet pořadí měření patřících do skupiny i

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA

Varianta	Výnos kukuřice v t z parcely číslo								Součet T_i
	1	2	3	4	5	6	7	8	
H_1	1,29	1,19	1,23	1,33	1,27	1,29	1,31	1,20	
pořadí	23,5	8,5	15	28,5	20	23,5	27	11,5	157,5
H_2	1,30	1,33	1,29	1,37	1,35	1,25	1,38	1,29	
pořadí	26	28,5	23,5	31	30	18,5	32	23,5	213
H_3	1,20	1,24	1,25	1,24	1,20	1,21	1,28	1,17	
pořadí	11,5	16,5	18,5	16,5	11,5	14	21	7	116,5
H_4	1,03	1,14	1,09	1,20	1,07	1,19	1,01	1,05	
pořadí	2	6	5	11,5	4	8,5	1	3	41

$$KW = \frac{12}{32 \cdot 33}\left(\frac{157{,}5^2}{8} + \frac{213^2}{8} + \frac{116{,}5^2}{8} + \frac{41^2}{8}\right) - 3 \cdot 33 = 22{,}3473$$

Vzhledem k výskytu stejných údajů (bylo použito průměrné pořadí) je vhodné opravit testové kritérium korekčním faktorem:

$$K = 1 - \frac{(2^3 - 2) + (4^3 - 4) + (2^3 - 2) + (2^3 - 2) + (4^3 - 4) + (2^3 - 2)}{32^3 - 32} = 0{,}9956$$

R_i – součet pořadí měření patřících do skupiny i

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA

$$KW_{opr.} = \frac{22{,}3473}{0{,}9956} = 22{,}446 \qquad \chi^2_{0{,}05\,(3)} = 7{,}815 \qquad \chi^2_{0{,}01\,(3)} = 11{,}34$$

Opravené testové kritérium KW = 22,446 > χ^2 => na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ i 0,01 přijímáme alternativní hypotézu, podle které se průkazně liší hodnoty výnosu nejméně ve 2 třídách.

Podrobnější vyhodnocení Neményiho metodou:

Tabulka diferencí mezi součty pořadí pro jednotlivé varianty hnojení (výnosy kukuřice) $T_i - T_j$

Třída T_i \ Třída T_j	Diference $T_i - T_j$		
	H_2	H_3	H_4
H_1	55,5	41	116,5 ^{x}
H_2		96,5 ^{x}	172 ^{xx}
H_3			75,5

$D_{0{,}05} = 96{,}4 \quad (N = 8,\ K = 4)$
$D_{0{,}01} = 116{,}8 \quad (N = 8,\ K = 4)$

Statisticky významně se liší hodnoty výnosů kukuřice mezi variantami hnojení $H_2 - H_4$ a to na hladině významnosti $\alpha = 0{,}01$ (diference $T_i - T_j$ jsou označeny ^{xx}). Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ se dále statisticky významně liší hodnoty výnosů kukuřice mezi variantami hnojení $H_1 - H_4$ a $H_2 - H_3$.

R_i – součet pořadí měření patřících do skupiny i

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Test extrémních odchylek hodnot znaku

V řadě pozorovaných hodnot se někdy objeví hodnota extrémně se lišící od ostatních, tzn. výrazně vybočuje z rozpětí ostatních naměřených hodnot.
Je třeba posoudit, zda je tato odchylka pouze náhodná nebo zda je uvedená hodnota zatížena „hrubou chybou“.
Pro objektivní posouzení této otázky existuje skupina testů, které se nazývají testy extrémních odchylek.

Dixonův test

Pozorovaná hodnota, která se extrémně liší od ostatních, je zřejmě buď nejmenší hodnotou (x_1) nebo největší hodnotou (x_n).

Nulová hypotéza H_0 tvrdí, že (x_1), resp. (x_n), je vybrána ze stejného normálně rozděleného základního souboru jako ostatní hodnoty.
Pro posouzení, zda hodnota (x_1) nebo hodnota (x_n) je zatížena hrubou chybou, užíváme testovacího kritéria

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Test extrémních odchylek hodnot znaku

$$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1} \quad \text{nebo} \quad Q_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1},$$

kde x_2 je druhá nejmenší pozorovaná hodnota a x_{n-1} je předposlední hodnota v řadě pozorování, uspořádaných vzestupně podle velikosti.

Jestliže vypočtená hodnota Q_1, resp. Q_n, překročí kritickou hodnotu $Q_{1\alpha} = Q_{n\alpha}$ (nalezenou v tabulkách pro Dixonův test, hladinu významnosti α a n rozsah souboru), zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti α a hodnotu (x_1), resp. (x_n), jako údaj zkreslený hrubou chybou, ze souboru vyloučíme.

Tzn. že nulová hypotéza se zamítá, pokud platí Q_1 (Q_n) > $Q_{\alpha(n)}$.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Test extrémních odchylek hodnot znaku

Příklad

Bylo provedeno 5 měření vlhkosti zrna jarního ječmene s těmito výsledky (v %): 18,0 18,2 19,6 18,3 18,4.

Hodnota 19,6 vyvolává v této ř adě údajů podezření, že je ovlivněna nějakou hrubou chybou. Dixonovým testem budeme testovat hypotézu, že hodnota 19,6 není zatížena hrubou chybou.

$$Q_5 = \frac{19{,}6 - 18{,}4}{19{,}6 - 18{,}0} = 0{,}75$$

Protože $Q_5 = 0{,}75 > Q_{\alpha(5)} = 0{,}642$, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05 a hodnotu 19,6 ze souboru vyloučíme.

R_i - součet pořadí měření patřících do skupiny i

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA

Friedmanův test (neparametrická obdoba ANOVA pro dva faktory)

Předpokládejme, že máme měření y_{ij}, kde i je označení bloku, j je označení úrovně faktoru (ošetření). Pro každou dvojici ij máme jedno měření. Označme

k - počet úrovní faktoru

n - počet bloků

r_{ij} - pořadí naměřené hodnoty odezvy y_{ij} v bloku i

$\bar{r}_{\cdot j}$ - průměrné pořadí odezvy při úrovni j přes všechny bloky $\quad \bar{r}_{\cdot j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ij}$

$\bar{r}$ - průměrné pořadí přes všechny úrovně a přes všechny bloky $\quad \bar{r} = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} r_{ij}$

Položme $SS_t = n\sum_{j=1}^{k}(\bar{r}_{\cdot j} - \bar{r})^2$ a $SS_e = \frac{1}{n(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(r_{ij} - \bar{r})^2$

Testová statistika má tvar $Q = \frac{SS_t}{SS_e}$

(Pro velká n a k (n>15, k>4) má přibližně chí-kvadrát rozdělení o k-1 stupních volnosti)

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Neparametrická alternativa k ANOVA