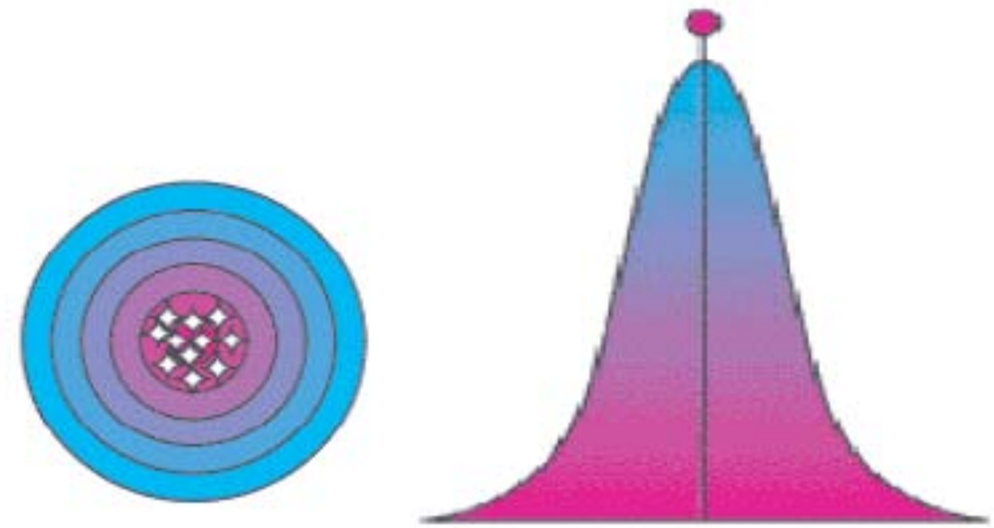
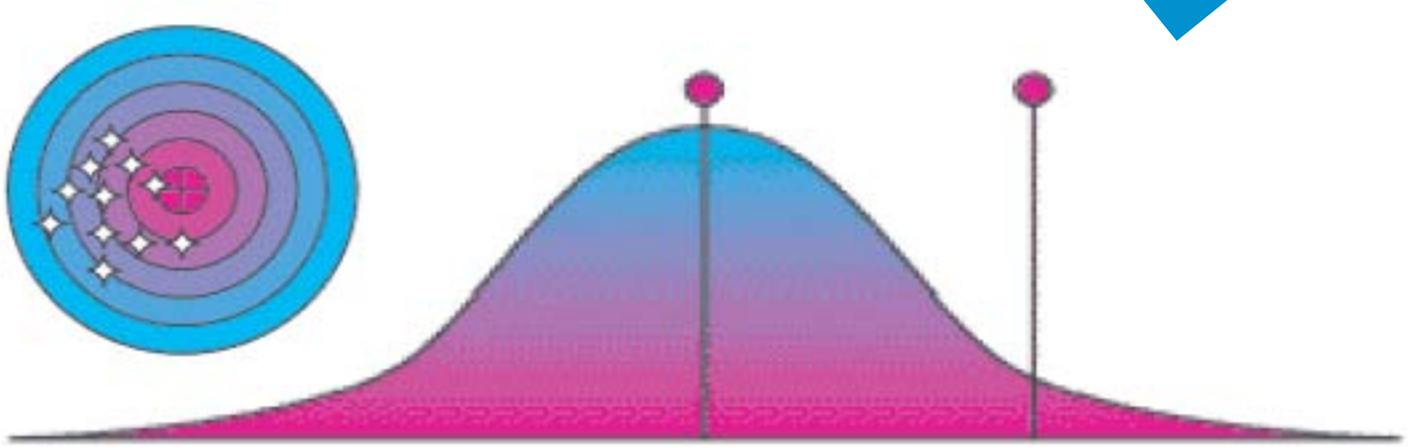
Základy navrhování průmyslových experimentů DOE

Kontrolní otázky



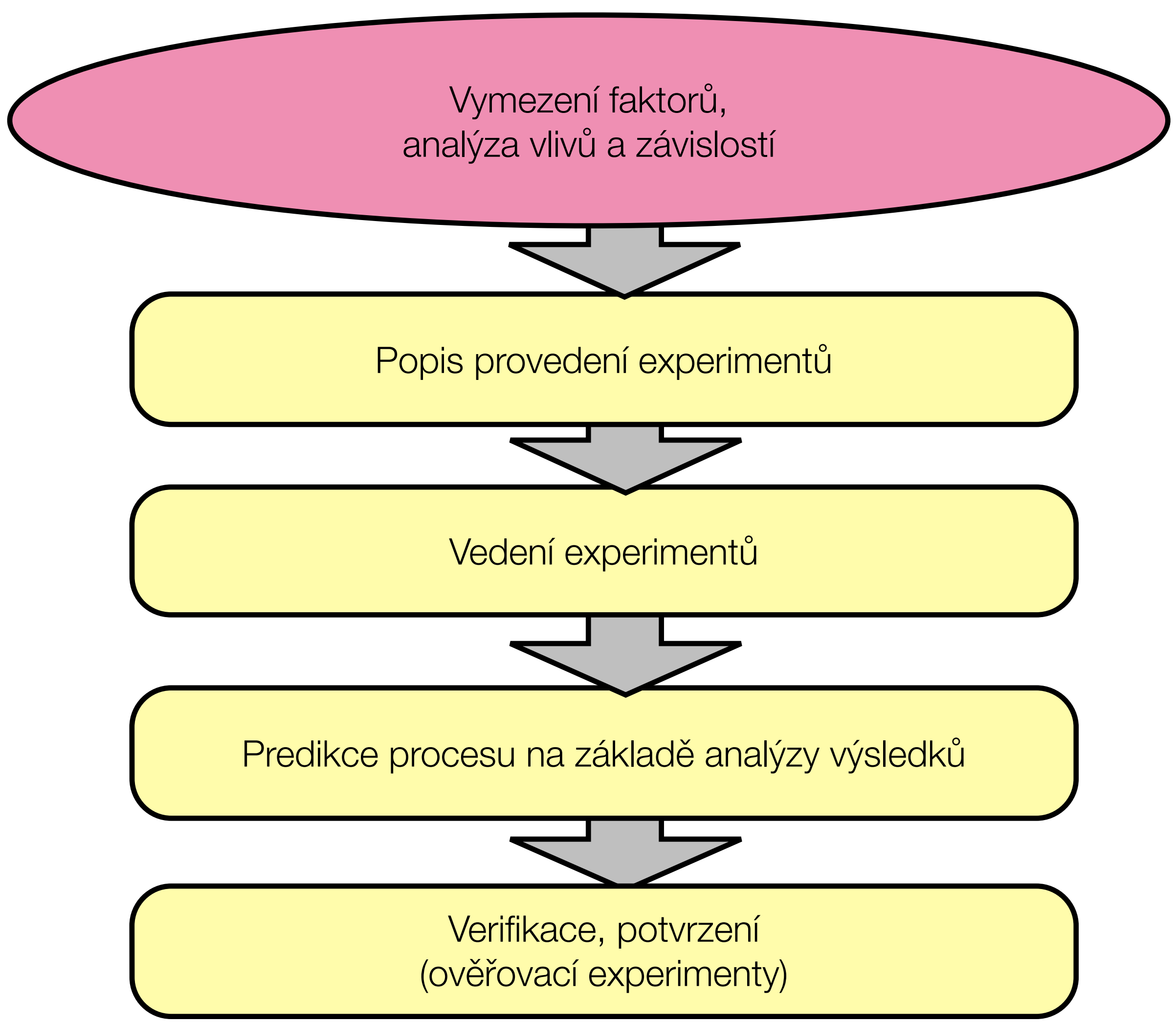


Gejza Dohnal

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

1. Kolik je základních kroků při plánování experimentů?
2. Jaké jsou základní kroky při plánování experimentů?



- **A**nalýza procesu
- **N**ávrh experimentu
- **P**rovedení zkoušek
- **A**nalýza výsledků
- **Z**ávěry

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

3. Co označujeme pojmem "odezva"?
4. Co je to "interakce"?
5. Co se rozumí pod pojmem "replikace"?
6. V jaké souvislosti se hovoří o "znáhodnění"?

- **Odezva**
  - výstupní veličina
  - měřitelná, zpravidla spojitá
- **Náhodný vliv**
  - neznáme jeho příčiny, nelze jej odstranit,
  - způsobuje variabilitu, kterou lze měřit (experimentální chyba)
  - lze jej předvídat, snaha je co nejvíce jej snížit
- **Systematický vliv**
  - je způsoben známými vlivy (vymezitelnými příčinami)
  - projevuje se například trendem, periodicitou, posunutím
  - snažíme se jej popsat a kvantifikovat jej
- **Faktory**
  - vstupní veličiny
  - kvalitativní (kategoriální), kvantitativní (diskrétní, spojité)
  - hlavní, vedlejší, blokové
- **Interakce**
  - současné působení několika (alespoň dvou) faktorů
- **Replikace**
  - opakování zkoušek za (přibližně) stejných podmínek (úrovní faktorů)
  - umožňuje měřit náhodnou variabilitu a oddělit ji od variability celkové
- **Znáhodnění**
  - stanovení pořadí zkoušek podle náhodného "zamíchání"
  - do jisté míry může eliminovat vedlejší vlivy
  - zajišťuje vyšší míru "nezávislosti" jednotlivých pokusů

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

7. Jaké jsou základní typy experimentů podle uspořádání?
8. K čemu slouží (jaké jsou cíle) experiment?
9. Proč je třeba experiment plánovat?
10. Jaký je rozdíl mezi úplným a neúplným experimentem?

Podle uspořádání:

- **Jednofaktorové experimenty**
- **Vícefaktoriální experimenty**
- **Taguchiho ortogonální návrhy** (robustní návrhy)
- **Optimální návrhy** (optimální odezvové plochy)

Podle cíle:

- **Identifikace vlivných faktorů a jejich úrovní**
- **Hledání optimální odezvy** (optimální kombinace úrovní faktorů k dosažení optimální odezvy)
- **Směsové návrhy** (slouží k nalezení optimální směsi ingrediencí, které se podílejí na tvorbě odezvy)
- **Regresní návrhy** (nalezení regresní závislosti mezi úrovněmi faktorů a odezvou)

Návrh experimentu

- zkracuje dobu pro návrh a vývoj nových produktů
- zlepšuje fungování stávajících procesů
- zvyšuje spolehlivost a zlepšuje kvalitu výrobků
- zvyšuje robustnost výrobků a procesů
- umožňuje vyhodnocení různých variant, výběr komponent, nastavení parametrů a systémových tolerancí

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

11. Kdy hovoříme o "jednofaktorovém experimentu"?
12. Jak vypadá statistický model jednofaktorového experimentu?
13. Co předpokládáme o náhodných chybách ve statistickém modelu?
14. Jaká je nulová hypotéza při jednofaktorovém experimentu?

Jednofaktorové experimenty:

- uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru
- tento faktor může mít k úrovní
- pro každou úroveň provedeme n měření (replikací)
- musíme provést kxn měření, která můžeme rozdělit do bloků podle dalšího (vedlejšího) faktoru
- provádíme znáhodnění pořadí měření (buď přes celý experiment nebo pouze uvnitř bloků)

Statistický model: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$

O náhodných chybách ε_{ij} předpokládáme, ž e jsou nezávislé, stejně rozdělené s nulovou střední hodnotou a stejným rozptylem σ^2.
Speciálně, předpokládáme rozdělení $N(0,\sigma^2)$

vliv i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k : $\mu_i = \mu + \tau_i$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ $\qquad$ $H_A : \mu_i \neq \mu_m, \quad 1 \leq i < m \leq k$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

15. Kdy použijeme k vyhodnocení výsledků dvouvýběrový t-test?
16. Kdy použijeme k vyhodnocení výsledků párový t-test?
17. V čem je hlavní rozdíl mezi dvouvýběrovým a párovým t-testem?

Dvouvýběrový t-test

Testová statistika je dána vzorcem

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{2s^2}{r}}}, \qquad \bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r} y_{ij}}{r}, \qquad s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{r-1}$$

kde průměr z rozptylů uvnitř skupin $s^2 = (s_1^2 + s_2^2)/2$

H_1	Kritická hodnota	H_0 zamítneme, když
$\mu_1 - \mu_2 > 0$	$t_{1-\alpha}$	$t > t_{1-\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 < 0$	t_{α}	$t < t_{\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$t_{1-\alpha/2}$	$\lvert t \rvert > t_{1-\alpha/2}$

Párový t-test

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{r}}} \qquad \bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{r} d_j}{r}, \qquad s_d^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r} (d_j - \bar{d})^2}{r-1}$$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

18. K čemu se používá jednofaktorová analýza rozptylu?
19. Popište sloupce tabulky ANOVA
20. Jak je definována F-statistika v jednofaktorové analýze rozptylu?
21. Co je to p-hodnota a v jaké souvislosti se používá?

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	F	P-hodnota
faktor	SS_A	$a - 1$	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$F = \frac{MS_A}{MS_E}$	
reziduální	SS_E	$a(r-1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{a(r-1)}$		
celkový	SS_T	$ar - 1$			

$$SS_A = r\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_i - \bar{y})^2, \qquad SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \qquad F = \frac{\frac{SS_A}{a-1}}{\frac{SS_E}{a(r-1)}} = \frac{MS_A}{MS_E}$$

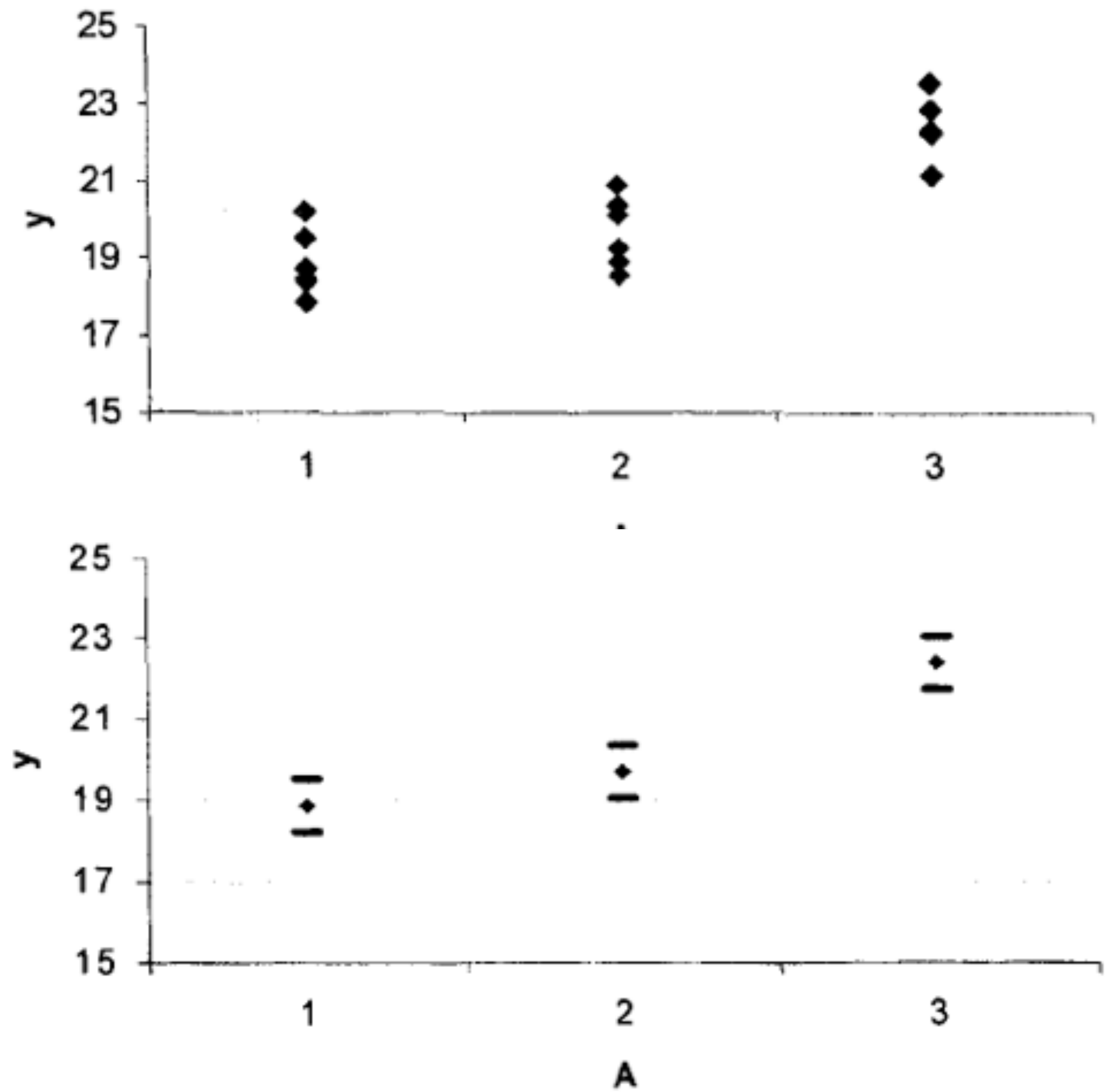
Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

22. K čemu slouží Bonferroniho metoda? V jaké souvislosti se používá?
23. Jaká je alternativa k Bonferoniho metodě mnohonásobného srovnávání?

$$\bar{y}_i \pm t_{1-\alpha/2p} \cdot \sqrt{\frac{MS_E}{2 \cdot a}}$$

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A_1	18,867	18,217	19,516
A_2	19,700	19,051	20,349
A_3	22,383	21,734	23,033



Metody mnohonásobného srovnávání:
- Bonferroni
- Schéfé
- Tukey

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

24. K čemu slouží Kruskalův-Wallisův test?
25. Jaké jsou neparametrické alternativy k testu ANOVA?
26. K čemu slouží Friedmanův test? V jakém případě byste jej použili?

Neparametrická alternativa k jednofaktorovému F-testu ANOVA je Kruskalův-Wallisův test

Je založen na testové statistice, která má chí-kvadrát rozdělení o k-1 stupních volnosti

$$KW = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{T_i^2}{n_i} \right) - 3(n+1)$$

k - počet skupin (úrovní faktoru)
n_i - je počet měření při úrovni faktoru i
N - celkový počet měření
T_i - součet pořadí měření patřících do skupiny i

$$K = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} \left(t_i^3 - t_i \right)}{n^3 - n},$$

Pokud se mezi měřeními vyskytnou shodné hodnoty, jimž se přiřazuje průměrné pořadí, je třeba KW vydělit korekčním faktorem K. Opravená testová statistika potom bude rovna $KW_{opr.}$ $KW_{opr.} = \frac{KW}{K}.$

Friedmanův test je neparametrickou obdobou ANOVA pro dva faktory.

$$Q = \frac{SS_t}{SS_e} \qquad SS_t = n \sum_{j=1}^{k} (\bar{r}_{.j} - \bar{r})^2$$

$$SS_e = \frac{1}{n(k-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (r_{ij} - \bar{r})^2$$

k - počet úrovní faktoru
n - počet bloků
r_{ij} - pořadí naměřené hodnoty odezvy y_{ij} v bloku i
$\bar{r}_{.j}$ - průměrné pořadí odezvy při úrovni j přes všechny bloky
$\bar{r}$ - průměrné pořadí přes všechny úrovně a přes všechny bloky

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

27. Popište latinský čtverec.
28. K čemu slouží latinský čtverec?

- **Latinské čtverce:**
  - uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru
  - tento faktor může mít k úrovní
  - uvažujeme další dva vedlejší faktory, každý o k úrovních
  - cílem je provést k replikací měření s maximálním vyloučením vlivů vedlejších faktorů

1. vedlejší faktor

2. vedlejší faktor

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	B	C	D	E	A
3	C	D	E	A	B
4	D	E	A	B	C
5	E	A	B	C	D

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

29. Proč se rozdělují měření do bloků?
30. Jak vypadá statistický model jednofaktorového experimentu s uspořádáním do bloků?
31. Lze pro vyhodnocení jednofaktorového experimentu použít dvoufaktorovou analýzu rozptylu? Pokud ne proč a pokud ano v jakém případě?

Uspořádání do bloků

- slouží ke snižování náhodné variability (variability náhodné složky)
- v rámci bloku probíhají zkoušky za přibližně stejných experimentálních podmínek (ale při různých kombinacích úrovní faktorů)
- často představuje jednu repliku experimentu

Statistický model při uspořádání do bloků: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$

ANOVA

Zdroj variability	*SS*	*St.vol*	*MS*	*F*	*Hodnota P*	*F krit*
Faktor A	149	3	49,66667	49,66667	5,03E-08	3,287383
Bloky	392	5	78,4	78,4	3,28E-10	2,901295
Reziduální	15	15	1			
Celkový	556	23				

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

32. Co je to "efekt faktoru"?
33. Jak se spočítá efekt faktoru A v experimentu 2^2 ?
34. Jak se spočítá efekt interakce faktorlů A a B v experimentu 2^2 ?

Efekt faktoru = průměrná změna odezvy při změně úrovně faktoru

$$\hat{A} = \frac{y_{21} + y_{22}}{2} - \frac{y_{11} + y_{12}}{2} \qquad \hat{B} = \frac{y_{12} + y_{22}}{2} - \frac{y_{11} + y_{21}}{2}$$

$$\widehat{AB} = \bar{y}_{AB+} - \bar{y}_{AB-} \qquad \bar{y}_{AB-} = \frac{y_{21} + y_{12}}{2}$$

$$\bar{y}_{AB+} = \frac{y_{11} + y_{22}}{2}$$

	B1	B2
A1	y11	y12
A2	y21	y22

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

35. Jak vypadá statistický model úplného dvoufaktorového experimentu?
36. Co jsou to rezidua?
37. Jaké jsou předpoklady statistického modelu?

Statistický model: $$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}$$

Rezidua: $$r_{ij} = y_{ij} - \bar{y}i.$$

Předpoklady modelu:

- stejné podmínky měření
- nezávislost měření
- konstantní rozptyl
- normalita reziduí

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

38. Nakreslete matici úplného dvoufaktorového návrhu se dvěma úrovněmi faktorů a s interakcí.
39. Nakreslete matici úplného třífaktorového návrhu se dvěma úrovněmi faktorů a s interakcemi.

test	A	B	AB
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+
4	-	-	+	+	-	-	+
5	+	+	-	+	-	-	-
6	+	-	+	-	+	-	-
7	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

40. Jak se rozdělují kombinace úrovní faktorů do bloků metodou "sudá-lichá"?

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
a	+	-	-	-	-	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+
c	-	-	+	+	-	-	+
ab	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	-	+	-	+	-	-
bc	-	+	+	-	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+

	BC sudá	BD lichá
AC sudá	1 abc	b ac
AC lichá	a bc	c ab

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	0	0	-
a	+	-	-	-	1	0	+
b	-	+	-	-	0	1	+
c	-	-	+	+	1	1	+
ab	+	+	-	+	1	1	-
ac	+	-	+	-	2	1	-
bc	-	+	+	-	1	2	-
abc	+	+	+	+	2	2	+

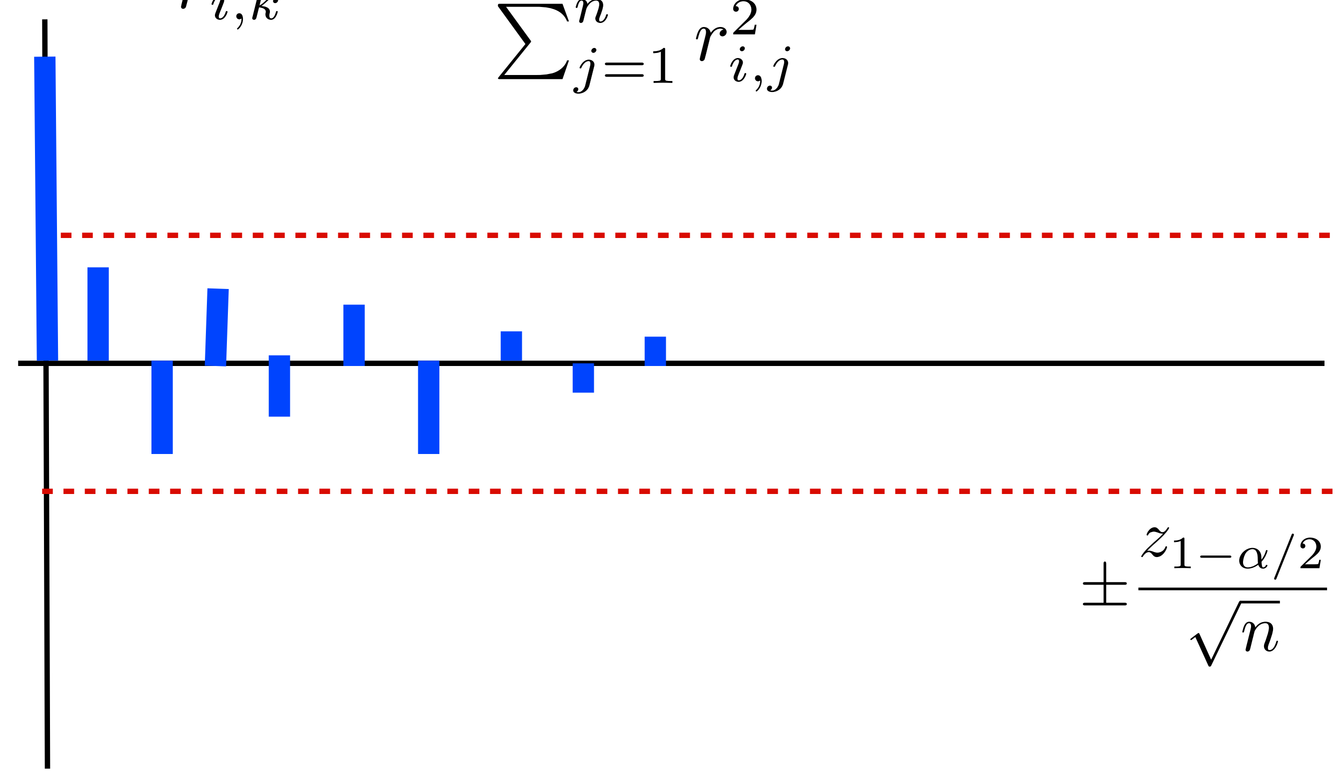
Kontrolní otázky

41. Jakými nástroji zjišťujeme korelovanost reziduí?
42. Je nekorelovanost měření totéž co nezávislost?
43. Jak se projevuje závislost měření při vyhodnocování experimentu?

Grafická analýza - graf reziduí v čase (indexový graf)

Autokorelační funkce reziduí

$$\hat{r}_{i,k} = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} r_{i,j} r_{i,j+k}}{\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}^2}$$



$$\pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

Durbin-Watsonův test:

$$DW = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (r_k - r_{k+1})^2}{\sum_{k=1}^{n-1} r_k^2}$$

- Rozptyly průměrů se stávají vychýlené (velikost vychýlení závisí na typu závislosti). To způsobí vychýlenost odhadů pro jednotlivé skupiny a pro efekty faktorů a jejich interakcí.
- Nelze určit pravděpodobnost chyby I. druhu.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

44. Jakými nástroji zjišťujeme nezávislost rozptylu měření na kombinacích úrovní faktorů?
45. Proč nám vadí nestejné rozptyly? Co je důsledkem nestejných rozptylů?

- O'Brienův test
- Brown-Forsythův tet
- Levenův test
- Bartlettův test

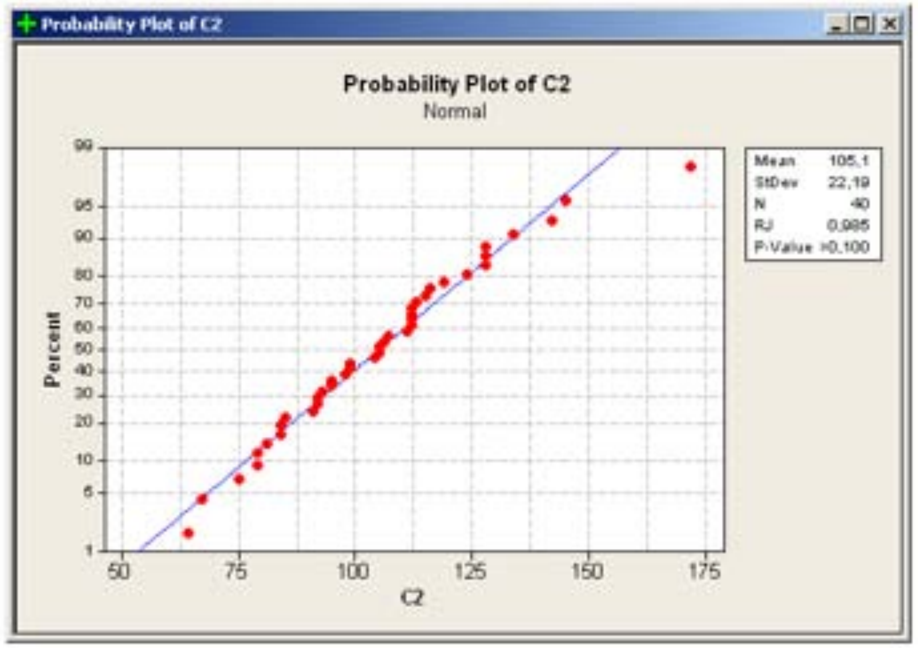
- Jsou-li stejné rozsahy skupin ($n_1, \ldots, n_g$), potom je vliv nestejných rozptylů na *p*-hodnotu F-testu relativně malý
- Při větším rozsahu skupin s větším rozptylem se p-hodnota zmenšuje oproti nominální (nadhodnocujeme odhad a dostáváme konzervativní test)
- Při větším rozsahu skupin s menším rozptylem je skutečná p-hodnota větší oproti nominální (podhodnocujeme odhad a dostáváme liberální test)

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

46. Jak se ověřuje normalita reziduí?
47. Co se stane, když jsou data nenormální?

Normální pravděpodobnostní graf (rankitový graf, Q-Q graf)



Testy normality:

- Chí-kvadrát test
- Anderson-Darling
- Shapiro-Wilk (Ryan-Joiner)
- Test normality založený na šikmosti a špičatosti

Pro nenormální data nelze použít ANOVA (F-test).
Na druhou stranu platí CLV pro průměry a ve většině případů lze normalitu předpokládat.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

48. Jak se testuje významnost efektu?
49. Co to znamená, že efekt je statisticky významný?
50. Jaké jsou grafické nástroje pro vyhodnocení efektů?

Efekt faktoru = průměrná změna odezvy při změně úrovně faktoru $\hat{A} = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-}$

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \Rightarrow \hat{A} \approx N(0, s_e^2) \qquad s_e^2 = \frac{4\sigma^2}{n}$$

Test významnosti efektu: - graficky (pravděpodobnostní papír, Paretův diagram)
- t-test
- ANOVA

t-test: testová statistika $t = \frac{\hat{A}}{s_e}$ má $t(n - m)$ rozdělení, kde n je celkový počet měření (s opakováním), m je počet pokusů bez opakování

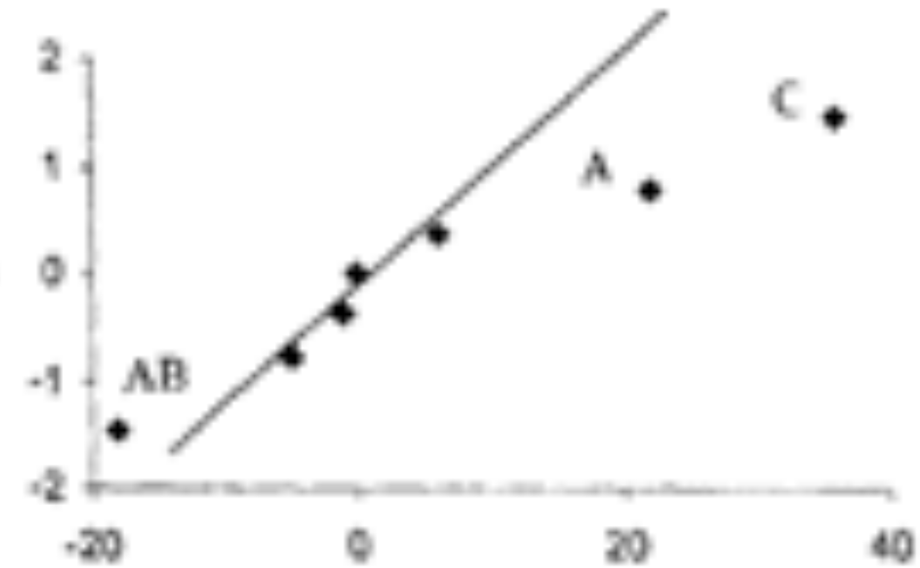
efekt faktoru A považujeme za významný na hladině významnosti α, pokud

$$|t| > t_{n-m}(\alpha)$$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

48. Jak se testuje významnost efektu?
49. Co to znamená, že efekt je statisticky významný?
50. Jaké jsou grafické nástroje pro vyhodnocení efektů?



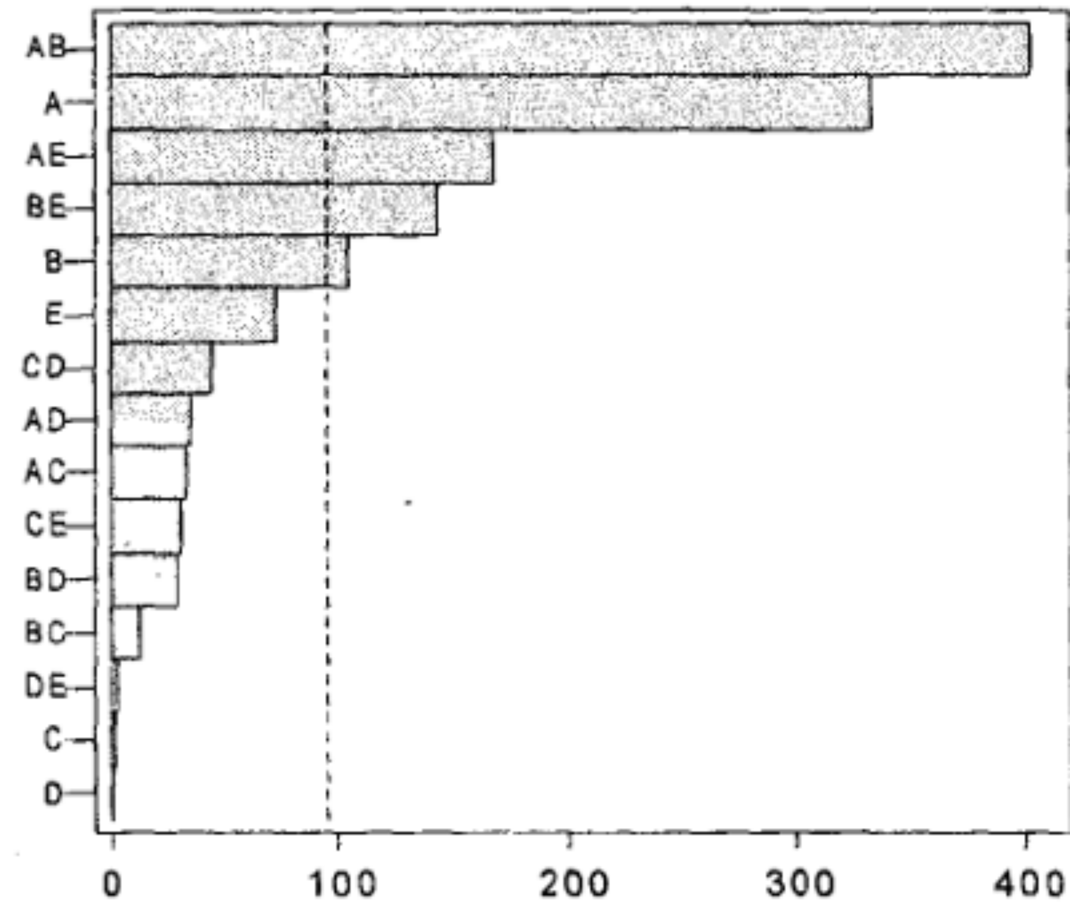
pravděpodobnostní normální papír:
Hodnoty efektů zakreslíme do normálního pravděpodobnostního papíru:

$$u_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i - 0.5}{2^n - 1}\right)$$

polonormální pravděpodobnostní papír:
Do normálního pravděpodobnostního papíru zakreslíme absolutní hodnoty efektů:

$$u_i^* = \Phi^{-1}\left(0.5 + 0.5\frac{i - 0.5}{2^n - 1}\right)$$

Paretův diagram:



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

51. V jakém případě nastává směšování faktorů a jejich interakcí?
52. Co to znamená, když je efekt faktoru A nerozlišitelný od interakce BC?
53. Které efekty a jejich interakce jsou nerozlišitelné, platí-li v návrhu vztah ABC=I?
54. Co je to generátor plánu?
55. Jak vznikne dílčí faktoriální experiment 2^{3-1}?

generáto
r plánu

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	I
1	-	-	-	+	+	+	-	+
a	+	-	-	-	-	+	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+	+
c	-	-	+	+	-	-	+	+
ab	+	+	-	+	-	-	-	+
ac	+	-	+	-	+	-	-	+
bc	-	+	+	-	-	+	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

ABC=I => BC=A, AC=B, AB=C

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\left[a + abc - b - c\right] \qquad \hat{BC} = \frac{1}{2}\left[a + abc - b - c\right]$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2}\left[b + abc - a - c\right] \qquad \hat{AC} = \frac{1}{2}\left[b + abc - a - c\right]$$

$$\hat{C} = \frac{1}{2}\left[c + abc - a - b\right] \qquad \hat{AB} = \frac{1}{2}\left[c + abc - a - b\right]$$

ABC=-I => BC=-A, AC=-B, AB=-C

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

56. Co je to rozlišení dílčího faktoriálního návrhu?
57. V čem se liší jednotlivé typy rozlišení dílčích faktoriálních návrhů?
58. Jaké rozlišení má dílčí faktoriální návrh 2^{3-1} s generátorem ABC?

rozlišení III: Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních efektů.
Některé interakce druhého řádu jsou smíchány s hlavními faktory (předpokládáme, že jsou zanedbatelné)

rozlišení IV: Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních efektů nezávisle na interakcích druhého řádu.
Některé interakce druhého řádu jsou smíchány dohromady a nelze je odhadnout (předp., že jsou zanedb.)

rozlišení V: Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních faktorů i interakcí druhého řádu.
Tyto efekty jsou smíchány s interakcemi třetího a vyššího řádu

rozlišení VI: Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních faktorů i interakcí druhého řádu, které jsou smíchány s interakcemi čtvrtého a vyššího řádu. Některé interakce druhého řádu mohou být smíchány dohromady.

rozlišení VII: Návrh tohoto typu umožňuje odhady hlavních faktorů, interakcí druhého řádu, i interakcí třetího řádu.
O vyšších interakcích se předpokládá, že jsou zanedbatelné.

test	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	I
1	-	-	-	+	+	+	-	+
ab	+	+	-	+	-	-	-	+
ac	+	-	+	-	+	-	-	+
bc	-	+	+	-	-	+	-	+

ABC = I =>
A = BC, B = AC, C = AB =>
Neúplný návrh 2^{3-1} má rozlišení III.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

59. Která ze dvou voleb generátorů: I=ABE, I=ABCDE, v návrhu 2^5 s faktory ABCDE je lepší a proč?
60. Definiční rovnice v dílčím plánu jsou:
    a) I = ABCDE = ABCF = BCDG = DEF = AEG = ADFG = BCEFG,
    b) I = ABCE = BCDF = ACDG = ADEF = BDEG = CEFG = ABFG.
    Která volba je lepší a proč?

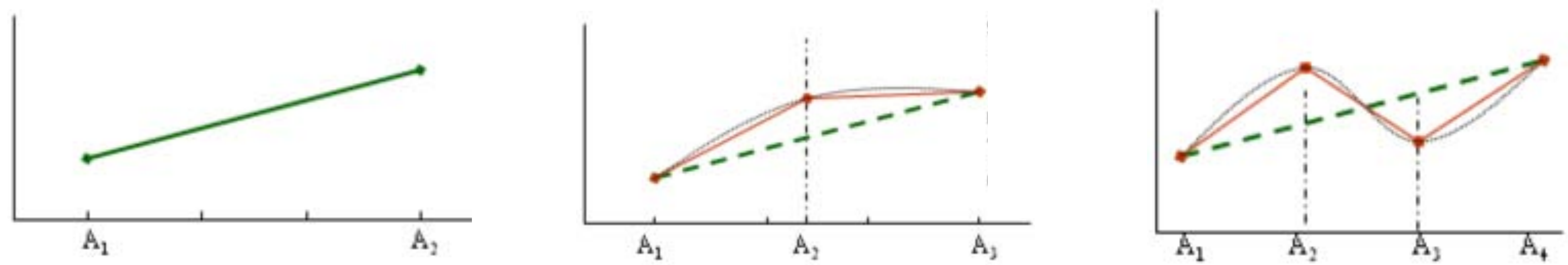
ad 59: při volbě a) je A = BE, B = AE, E = AB => rozlišení je III. (dílčí návrh 2_{III}^{5-1})
b) je A = BCDE, ... => rozlišení je V. (dílčí návrh 2_{V}^{5-1})
Tedy b) je lepší (má vyšší rozlišení).

ad 60: a) návrh dílčího plánu je v tomto případě s rozlišením III (2_{III}^{7-3}),
b) návrh dílčího plánu je v tomto případě s lepším rozlišením IV (2_{IV}^{7-3}).
Tedy b) je lepší (má vyšší rozlišení).

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

61. Kolik úrovní faktoru je třeba volit, abychom zachytili kvadratickou závislost odezvy a faktoru?
62. Kolik úrovní faktoru je třeba volit, abychom zachytili kubickou závislost odezvy a faktoru?
63. Popište lineární/úplný kvadratický/neúplný kvadratický model experimentu.



lineární model: $Y = b_0 + b_1 X_A + b_2 X_B + \epsilon$

koeficienty lze nalézt jako poloviční odhady příslušných efektů, b_0 je celkový průměr, nebo odhadem metodou nejmenších čtverců

neúplný kvadratický model: $Y = b_0 + b_1 X_A + b_2 X_B + b_{12} X_A X_B + \epsilon$

koeficienty lze nalézt jako poloviční odhady příslušných efektů, b_0 je celkový průměr nebo odhadem metodou nejmenších čtverců

úplný kvadratický model: $Y = b_0 + b_1 X_A + b_2 X_B + b_{11} X_A^2 + b_{22} X_B^2 + b_{12} X_A X_B + \epsilon$

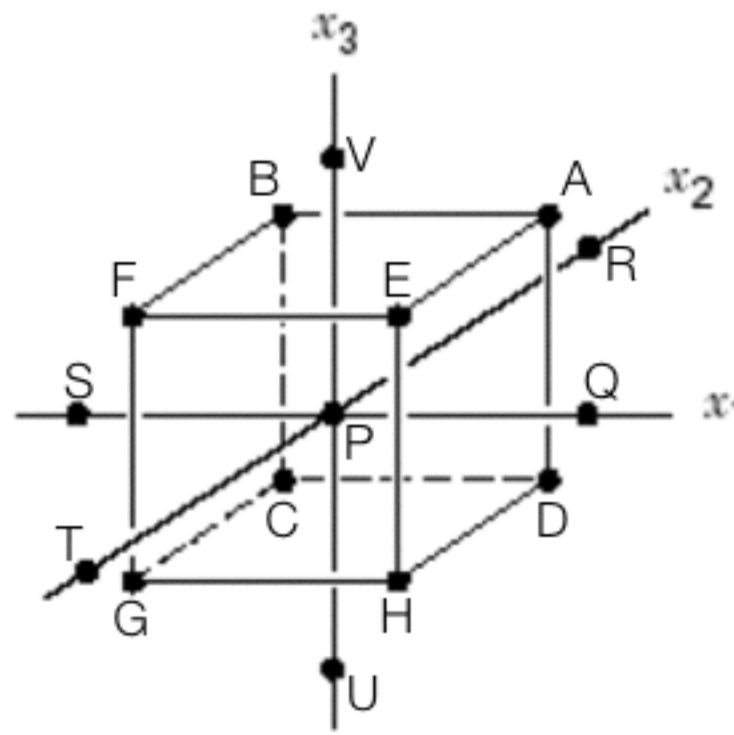
koeficienty nelze nalézt pomocí efektů nebo metodou nejmenších čtverců. Je třeba použít složitější schémata plánů (kombinovaný, víceúrovňový, ...)
Slouží k výpočtu optimálních hodnot faktoru nebo k výpočtu hodnot Y pro libovolnou úroveň faktoru,

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

64. Jaké jsou významné body návrhu?
65. Co jsou to krychlové body v návrhu a kolik jich je (například v plánu 2^{k-p}?
66. K čemu slouží centrální body v experimentu? Jak se pomocí nich počítají efekty faktorů?

Významné body návrhu: krychlové body (A, B, C, D, ...)
centrální body (P)
hvězdicové body (Q, R, S, T, ...)



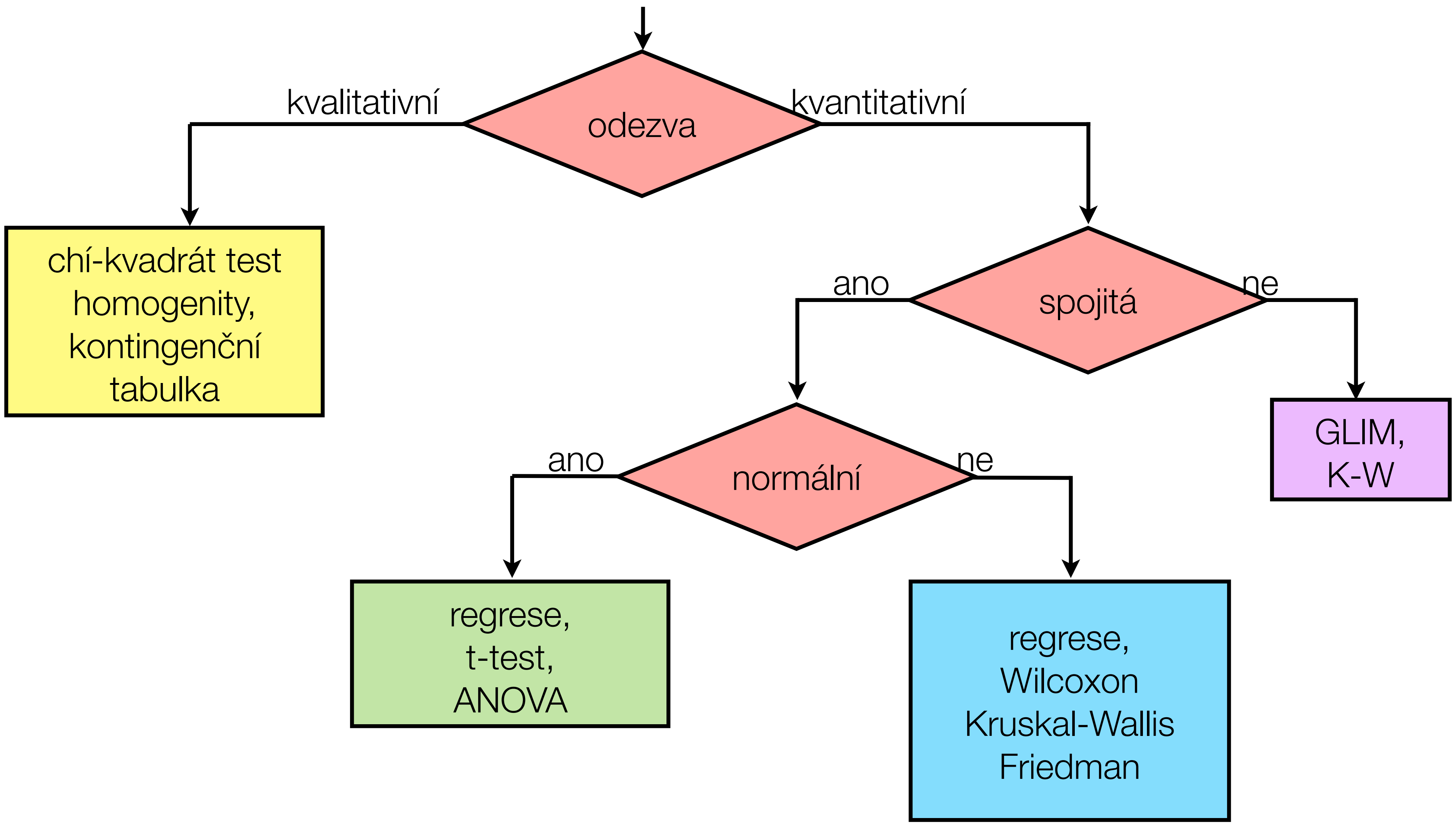
Krychlové body: jsou v plánu vždy a je jich 2^{k-p}.
Mají souřadnice ±1 (např. pro 3 faktory jsou jejich souřadnice (±1, ±1, ±1)).
Slouží k výpočtu efektů faktorů nebo koeficientů v lineárním modelu.

Centrální body: doplňují se do experimentu (doporučený počet je 3-5).
Mají nulové souřadnice (pro 3 faktory je centrální bod (0, 0, 0)).
Slouží k odhadu rozptylu σ^2 jako náhrada za odhad z opakovaných pokusů.
Z reziduí v centrálních bodech se počítá čistá chyba měření. Nepoužívají se k výpočtu efektů faktorů.

Hvězdicové body: leží na průsečících kulové plochy se středem v centrálním bodu, procházející krychlovými body a souřadných os. Jejich počet je 2k. Souřadnice pro 3 faktory jsou (±α, 0, 0), (0, ±α, 0), (0, 0, ±α).
Umožňují výpočet koeficientů v úplném kvadratickém modelu. Zpřesňují odhady regresních koeficientů.

Kontrolní otázky

67. Jakými metodami analyzujeme výsledky experimentu s kvalitativní odezvou?
68. Jak se provádí test homogenity v kontingenční tabulce? Jaké rozdělení má testová statistika v tomto testu? Jaké pro něj platí omezení?



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

67. Jakými metodami analyzujeme výsledky experimentu s kvalitativní odezvou?
68. Jak se provádí test homogenity v kontingenční tabulce? Jaké rozdělení má testová statistika v tomto testu? Jaké pro něj platí omezení?

Chí-kvadrát test homogenity v kontingenční tabulce:

$$\text{testová statistika} = \frac{\sum(\text{pozorované - očekávané})^2}{\text{očekávané}}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(n_{ij}-m_{ij})^2}{m_{ij}}$$

testová statistika má chí-kvadrát rozdělení o (k-1)x(m-1) stupňů volnosti

Omezení: buňky tabulky musejí být větší než 5!

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

69. Popište význam symbolů, použitých pro Taguchiho návrhy.
70. Jaké jsou základní typy designových matic v Taguchiho přístupu?
71. Co jsou to řízené a neřízené faktory? Jak se v Taguchiho návrhu projevují?
72. Co je vnitřní a vnější sestava v Taguchiho přístupu?

$L_n(X^y)$

n = počet řádek v návrhu = počet měření pro jednu replikaci
X = počet úrovní faktorů
Y = počet sloupců v návrhu = počet faktorů

Základní typy designových matic v Taguchiho přístupu:

2-úrovňové návrhy:
- $L_4\,(2^3)$ (pro 2-3 faktory o dvou úrovních)
- $L_8\,(2^7)$ (pro 3-7 faktorů o dvou úrovních)
- $L_{12}\,(2^{11})$ (pro 4-11 faktorů o dvou úrovních)
- $L_{16}\,(2^{15})$ (pro 4-15 faktorů o dvou úrovních)

3-úrovňové návrhy:
- $L_9\,(3^4)$
- $L_{18}\,(2^1 3^7)$

4-úrovňové návrhy:
- $L_{16}\,(4^5)$

Sledované faktory:
- řiditelné (řízené, lze nastavit jejich úrovně)
- neřízené, šumové (lze je pouze měřit)

- řízené faktory tvoří tzv. vnitřní ortogonální sestavu
- neřízené faktory tvoří vnější ortogonální sestavu
- provádí se tolik replikací, kolik je kombinací úrovní ve vnější sestavě

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontrolní otázky

73. Co je to a k čemu slouží poměr signál/šum v Taguchiho přístupu?
74. Jaké míry se používají k vyhodnocování Taguchiho návrhu?
75. Kdy platí, že "menší je lepší" ("nominální hodnota je nejlepší", "větší je lepší")?

Podíl signál/šum je míra, kterou Taguchi použil k vyhodnocování výsledků pokusů. Je dána vztahem

$$S/N = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$$

$$S/N = \frac{\text{síla signálu}}{\text{síla šumu}} = \frac{(\text{citlivost})^2}{(\text{variabilita})^2}$$

odhady střední hodnoty a rozptylu získáme z dat:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_i = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\bar{y}_{ij} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}y_{ijk}\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = S_i^2 = \frac{1}{Mp}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{p}\left(y_{ijk} - \bar{y}_i\right)^2$$

Míry založené na poměru S/N:

- "menší je lepší" (jsou-li hodnoty responzní veličiny kladné a cílová hodnota je nula):

$$z_i = -10\log_{10}\frac{1}{Mp}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{p}y_{ijk}^2$$

- "nominální hodnota je nejlepší" (hodnoty responzní veličiny mohou být kladné i záporné):

$$z_i = 10\log_{10}\frac{\bar{y}_i^2}{S_i^2}$$

- "větší je lepší" (hodnoty responzní veličiny musejí být kladné):

$$z_i = -10\log_{10}\frac{1}{Mp}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{y_{ijk}^2}$$