V.4. Plošný integrál vektorové funkce

Nechť Q je jednoduchá hladká plocha orientovaná v bodech $X \in Q$ jednotkovým vektorem normály $\vec{n}^o(X)$. Nechť $\vec{f}$ je vektorová funkce omezená na Q a nechť skalární funkce $\left(\vec{f} \cdot \vec{n}^o\right)$ je integrovatelná na ploše Q. Potom říkáme, že $\vec{f}$ je integrovatelná na Q a

$$\iint_Q \vec{f}\big(X\big) \cdot d\vec{p} = \iint_Q \Big(\vec{f}\big(X\big) \cdot \vec{n}^o\big(X\big)\Big)\, dp.$$

Je-li $X = P(u,v)$ parametrizace plochy Q definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$, pak plošný integrál vektorové funkce $\vec{f}$ lze přímo spočítat dle vzorce:

$$\iint_Q \vec{f}\big(X\big) \cdot d\vec{p} = \pm \iint_B \vec{f}\big(P(u,v)\big) \cdot \Big(P_u \times P_v\Big)\, du\, dv,$$

přičemž znaménko vybíráme podle toho, zda je plocha Q orientována souhlasně, resp. nesouhlasně, s parametrizací $P(u,v)$, tzn. je-li $\big(P_u \times P_v\big) \cdot \vec{n}^o\big(X\big) \gtrless 0$.

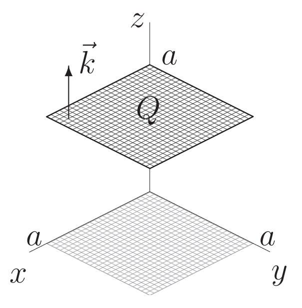
Poznámka : Někdy se používá i jiné značení : Je-li $\vec{f} = (U, V, W)$, pak plošný integrál vektorové funkce $\vec{f}$ se dá zapsat ve tvaru

$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_Q U\, dy\, dz + V\, dx\, dz + W\, dx\, dy$$

• Vypočítejte dané plošné integrály $\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p}$ na ploše $Q \subset \mathbb{E}_3$, která je orientována daným normálovým vektorem.

***Příklad* 643**. $\vec{f} = (x, y, z)$, $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x \in \langle 0,\ a\rangle,\ y \in \langle 0, a\rangle,\ z = a,\ a > 0\}$ je orientována vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$.

Řešení :



$$Q \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = a, \end{cases} \qquad \begin{matrix} u \in \langle 0,\ a\rangle \\ v \in \langle 0, a\rangle \end{matrix}$$

$P(u,v) = [u,v,a]$, $\qquad B = \langle 0,a\rangle \times \langle 0,a\rangle$
$P_u \times P_v = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1) \quad \Rightarrow \quad Q$ je orientovaná souhlasně s parametrizací

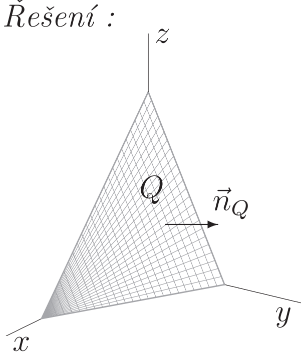
$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_Q (x,y,z) \cdot d\vec{p} = \iint_B (u,v,a) \cdot \Big(P_u \times P_v\Big)\, du\, dv =$$

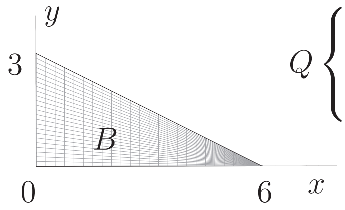
$$= \iint_B (u,v,a) \cdot (0,0,1)\, du\, dv = a \iint_B 1\, du\, dv = a \cdot a^2 = a^3.$$

■

***Příklad* 644**. $\vec{f} = (z, y, 2x)$, $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x + 2y + z = 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$, normálový vektor plochy Q svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

Řešení :





$$Q \begin{cases} x = x, & x \in \langle 0,\ 6\rangle \\ y = y, & y \in \left\langle 0, 3 - \dfrac{x}{2}\right\rangle \\ z = 6 - x - 2y, & \end{cases}$$

$P(x, y) = [x, y, 6 - x - 2y]$, $\quad B = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 3 - \frac{x}{2}\right\}$

$P_x \times P_y = (1, 0, -1) \times (0, 1, -2) = (1, 2, 1)$

vektor $(1, 2, 1)$ svírá s vektorem $\vec{k}$ ostrý úhel, tzn.$(1, 2, 1) \cdot \vec{k} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q$ je orientovaná souhlasně s parametrizací

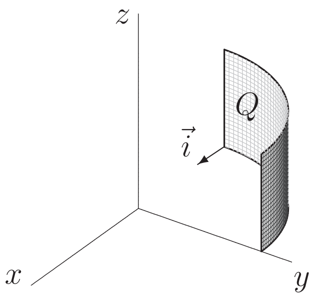
$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_Q (z, y, 2x) \cdot d\vec{p} = \iint_B (6 - x - 2y,\ y,\ 2x) \cdot (1, 2, 1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_B (6 + x)\, dx\, dy = \int_0^6 (6 + x) \Big[y\Big]_0^{3-x/2} dx = \int_0^6 \left(18 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[18x - \frac{x^3}{6}\right]_0^6 = 72$$

■

***Příklad* 645**. $\vec{f} = (y, z, x^2)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 = 16,\ 0 \le z \le 3,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$, plocha je v bodě $[-4, 0, 0]$ orientována normálovým vektorem $\vec{i} = (1, 0, 0)$.

Řešení :



Q je část válcové plochy $\Rightarrow$
použijeme cylindrické souřadnice, kde $r = 4$

$$Q \begin{cases} x = 4\cos u, & u \in \left\langle \dfrac{\pi}{2},\ \pi \right\rangle \\ y = 4 \sin u, & \\ z = v, & v \in \langle 0, 3\rangle \end{cases}$$

$P(u, v) = [4 \cos u, 4 \sin u, v]$ $\quad B = \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle \times \langle 0, 3\rangle$

$P_u \times P_v = (-4 \sin u, 4 \cos u, 0) \times (0, 0, 1) = (4 \cos u, 4 \sin u, 0)$

$\vec{n}\big([-4, 0, 0]\big) = (4 \cos \pi, 0, 0) = (-1, 0, 0) = -\vec{i} \quad \Rightarrow \quad Q$ je orientovaná nesouhlasně s parametrizací

$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = -\iint_B \left(4 \sin u, v, 16 \cos^2 u\right) \cdot \Big(P_u \times P_v\Big)\, du\, dv =$$

$$= -\iint_B \left(4 \sin u, v, 16 \cos^2 u\right) \cdot (4 \cos u, 4 \sin u, 0)\, du\, dv =$$

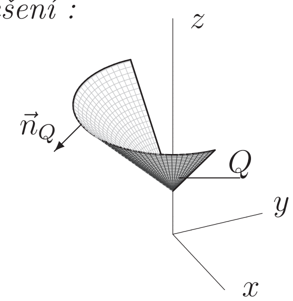
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^3 \big(-8 \sin 2u - 4v \sin u\big)\, dv\right) du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\left(-8v \sin 2u - 4\frac{v^2}{2} \sin u\right)\right]_0^3 du =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -24 \sin 2u - 18 \sin u\, du = \Big[12 \cos 2u + 18 \cos u\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 12 - 18 + 12 = 6$$

■

***Příklad* 646**. $\vec{f} = (y, x, 2)$, $\quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0,\ y \le 0,$ $1 \le z \le 3\}, \vec{n}_Q$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ tupý úhel, tzn. $\vec{n}_Q \cdot \vec{k} < 0$.

Řešení :



$$x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$$
$$z - 1 = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$$

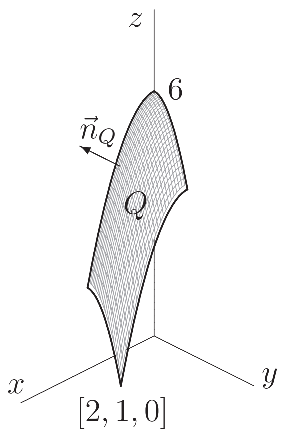
$$Q \left\{ \begin{array}{l} x = v\cos u, \\ y = v \sin u, \\ z = 1 + v, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u \in \langle \pi, 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0, 3 \rangle \end{array}$$

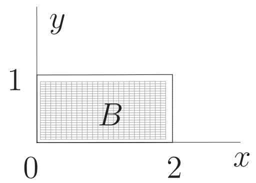
$$\left| \begin{array}{l} P(u,v) = [v\cos u, v\sin u, 1+v] \qquad B = \langle \pi, 2\pi\rangle \times \langle 0,3\rangle \\ P_u \times P_v = (-v\sin u, v\cos u, 0) \times (\cos u, \sin u, 1) = (v\cos u, v\sin u, -v) \\ (v\cos u, v\sin u, -v)\cdot(0,0,1) = -v < 0 \quad \Rightarrow \quad Q \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_B (v\sin u, v\cos u, 2)\cdot \Big(P_u \times P_v\Big)\, du\, dv =$$
$$= \iint_B (v\sin u, v\cos u, 2)\cdot(v\cos u, v\sin u, -v)\, du\, dv = \iint_B (2v^2\sin u\cos u - 2v)\, du\, dv =$$
$$= \int_\pi^{2\pi} \Big(\int_0^3 \big(v^2\sin 2u - 2v\big)\, dv\Big)\, du = \int_\pi^{2\pi} \Big[\Big(\frac{v^3}{3}\sin 2u - v^2\Big)\Big]_0^3 du =$$
$$= \int_\pi^{2\pi} \Big[9\sin 2u - 9\Big]_0^3 du = 9\Big[-\frac{\cos 2u}{2} - u\Big]_\pi^{2\pi} = -9\pi \qquad \blacksquare$$

Příklad 647. $\vec{f} = (y, x, z)$, $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ z = 6 - x^2 - 2y^2,\ 0 \le x \le 2,$ $0 \le y \le 1,\ z \ge 0\}$, $\vec{n}_Q$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

Řešení :





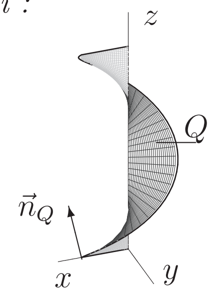
$$Q \left\{ \begin{array}{l} x = x, \\ y = y, \\ z = 6 - x^2 - 2y^2, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in \langle 0, 2 \rangle \\ y \in \langle 0, 1 \rangle \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} P(x,y) = [x, y, 6 - x^2 - 2y^2] \qquad B = \langle 0,2\rangle \times \langle 0,1\rangle \\ P_x \times P_y = (1, 0, -2x) \times (0, 1, -4y) = (2x, 4y, 1) \\ (2x, 4y, 1)\cdot(0,0,1) > 0 \quad \Rightarrow \quad Q \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_B (y, x, 6 - x^2 - 2y^2)\cdot \Big(P_x \times P_y\Big)\, dx\, dy =$$
$$= \iint_B (y, x, 6 - x^2 - 2y^2)\cdot(2x, 4y, 1)\, dx\, dy = \int_0^2 \Big(\int_0^1 \big(6xy + 6 - x^2 - 2y^2\big)\, dy\Big)\, dx =$$
$$= \int_0^2 \Big[\Big(3x\frac{y^2}{2} + 6y - yx^2 - \frac{2}{3}y^3\Big)\Big]_0^1 dx = \int_0^2 \Big(3x + 6 - x^2 - \frac{2}{3}\Big)\, dx =$$
$$= \Big[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{16}{3}x\Big]_0^2 = 14 \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 648**. $\vec{f} = \Big(xz^2, yz^2, (x^2+y^2)z\Big)$, $\quad Q : x = v\cos u,\ y = v\sin u,\ z = bu$ (**šroubová plocha**), $[u,v] \in \langle 0,a\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$ $(a>0, b>0)$, orientována normálovým vektorem $\vec{n}_Q = (n_1, n_2, n_3)$, kde $n_3 > 0$.

Řešení :



$P(u,v) = [v\cos u,\ v\sin u,\ bu]$	$B = \langle 0,a\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$
$P_u = (\cos u, \sin u, 0)$,	$P_v = (-v\sin u, v\cos u, b)$
$P_u \times P_v = (b\sin u, -b\cos u, v)$	
$v > 0 \implies$ orientace plochy je souhlasná s parametrizací	

$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_Q \Big(xz^2, yz^2, (x^2+y^2)z\Big)\cdot d\vec{p} =$$

$$= \iint_B (b^2u^2v\cos u, b^2u^2v\sin u, buv^2)\cdot(b\sin u, -b\cos u, v)\,du\,dv =$$

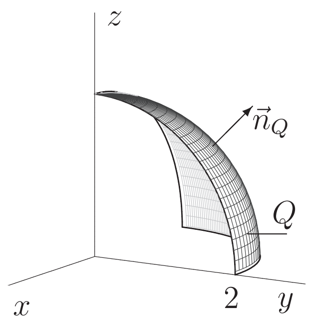
$$= \iint_B \Big(b^3vu^2\sin u\cos u - b^3vu^2\sin u\cos u + bv^3u\Big)\,du\,dv = \iint_B bv^3u\,du\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a bv^3u\,dv\Big)\,du = b\Big[\frac{u^4}{4}\Big]_0^a\cdot\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi^2a^4b.$$

■

***Příklad* 649**.* Vypočítejte $\displaystyle\iint_Q z^2\,dx\,dy$, $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+y^2+z^2 = 4,$ $x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$, $\vec{n}_Q$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

Řešení :



Q je část kulové plochy $\Rightarrow$
použijeme sférické souřadnice, kde $r = 2$:

$$Q \begin{cases} x = 2\cos u\cos v & \dfrac{\pi}{2} \le u \le \pi \\ y = 2\sin u\cos v & \\ z = 2\sin v & 0 \le v \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$P(u,v) = [2\cos u\cos v,\ 2\sin u\cos v,\ 2\sin v]$	$B = \Big\langle \frac{\pi}{2}, 2\pi\Big\rangle \times \Big\langle 0, \frac{\pi}{2}\Big\rangle$
$P_u = (-2\sin u\cos v,\ 2\cos u\cos v,\ 0)$	$P_v = (-2\cos u\sin v,\ -2\sin u\sin v,\ 2\cos v)$
$P_u \times P_v = (4\cos u\cos^2 v,\ 4\sin u\cos^2 v,\ 4\sin v\cos v)$	Q je orientovaná souhlasně s parametrizací

$$\iint_Q z^2\,dx\,dy = \iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_Q (0,0,z^2)\cdot d\vec{p} =$$

$$= \iint_B (0,0,4\sin^2 v)\cdot(4\cos u\cos^2 v,\ 4\sin u\cos^2 v,\ 4\sin v\cos v) =$$

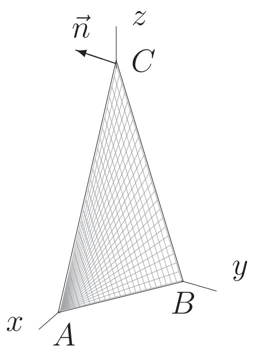
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^3 v\cos v\,du\,dv = 16\cdot\frac{\pi}{2}\Big[\frac{\sin^4 v}{4}\Big]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

■

• Určete tok vektorového pole $\vec{f}$ plochou $Q \subset \mathbb{E}_3$ orientovanou daným normálovým vektorem $\vec{n}$.

***Příklad* 650**. $\vec{f} = (x, y - z, 2z)$, $\quad Q$ je trojúhelník o vrcholech A, B, C, kde $A = [3, 0, 0]$, $B = [0, 2, 0]$, $C = [0, 0, 6]$, $\quad \vec{n} \cdot \vec{i} < 0$.

Řešení : Tok vypočteme tentokrát podle definice, tj. převedením na integrál skalární funkce.



Q je část roviny, jejíž rovnici napíšeme v úsekovém tvaru :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Longrightarrow 2x + 3y + z = 6$$

Q je rovina s normálovým vektorem $\vec{n} = \pm(2, 3, 1)$
z podmínky $\vec{n} \cdot \vec{i} < 0$ plyne, že $\vec{n} = -(2, 3, 1)$
$$\vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{-(2,3,1)}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{-(2,3,1)}{\sqrt{14}}$$

$$\iint_Q \vec{f} \cdot \, d\vec{p} = \iint_Q \vec{f} \cdot \; \vec{n}^o \, dp = \iint_Q (x, y - z, 2z) \cdot \frac{(-2, -3, -1)}{\sqrt{14}} \, dp =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_Q (-2x - 3y + 3z - 2z) \, dp = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_Q (z - 2x - 3y) \, dp =$$

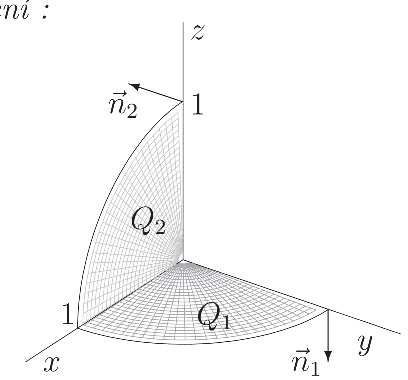
$$= \left| \begin{array}{ll} P(x,y) = [x, y, 6 - 2x - 3y] & 0 \le x \le 3, \; 0 \le y \le \frac{6-2x}{3} \\ P_x \times P_y = (1, 0, -2) \times (0, 1, -3) = (2, 3, 1) & \|P_x \times P_y\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_D (6 - 2x - 3y - 2x - 3y)\sqrt{14} \, dx \, dy = \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{6-2x}{3}} (6 - 4x - 6y) \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \Big[6y - 4xy - 3y^2 \Big]_0^{\frac{6-2x}{3}} dx = \int_0^3 \left(-4x + \frac{4}{3}x^2 \right) dx = \left[-2x^2 + \frac{4x^3}{9} \right]_0^3 = -6. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 651**. $\vec{f} = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$, $\quad Q = Q_1 \cup Q_2$, $\quad$ kde $Q_1 = \{[x, y, 0] \in \mathbb{E}_3;$ $x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}, Q_2 = \{[x, 0, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + z^2 \le 1, x \ge 0, z \ge 0\}$, jednotkovým vektorem normály plochy Q_2 je $\vec{n}_2^o = -\vec{j}$.

Řešení :



V souladu s normálovým vektorem $\vec{n}_2^o = -\vec{j}$ bude jednotkový vektor normály plochy Q_1 $\; \vec{n}_1^o = -\vec{k}$.

$$\iint_{Q_1 \cup Q_2} \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_{Q_1} \vec{f} \cdot d\vec{p} + \iint_{Q_2} \vec{f} \cdot d\vec{p}$$

$$Q_1 : \left| \begin{array}{l} P(u,v) = [v \cos u, v \sin u, 0] \qquad B_1 = \langle 0, \pi/2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \\ P_u \times P_v = (-v \sin u, v \cos u, 0) \times (\cos u, \sin u, 0) = (0, 0, -v) \\ (0, 0, -v) \cdot (0, 0, -1) = v > 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\iint_{Q_1} \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_{B_1} v^3\cos^2 u\,du\,dv = \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^1 v^3\cos^2 u\,dv\Big)\,du =$$

$$= \int_0^1 v^3\,dv\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du = \Big[\frac{v^4}{4}\Big]_0^1\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2u}{2}\,du = \frac{1}{8}\Big[u+\frac{\sin 2u}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}.$$

$$Q_2:\ \left|\begin{array}{l} P(u,v) = [v\cos u, 0, v\sin u] \qquad B_2 = \langle 0,\pi/2\rangle\times\langle 0,1\rangle \\ P_u\times P_v = (-v\sin u, 0, v\cos u)\times(\cos u, 0, \sin u) = (0,-v,0) \\ (0,-v,0)\cdot(0,-1,0) = v > 0 \quad\Rightarrow\quad Q_2 \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array}\right|$$

$$\iint_{Q_2} \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_{B_2} v^3\sin^2 u\,du\,dv = \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^1 v^3\sin^2 u\,dv\Big)\,du =$$

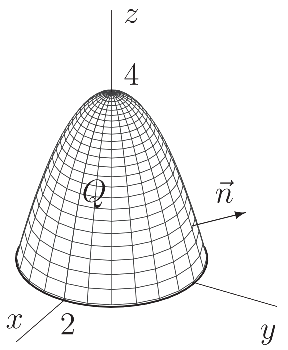
$$= \Big[\frac{v^4}{4}\Big]_0^1\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2u}{2}\,du = \frac{1}{8}\Big[u-\frac{\sin 2u}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}.$$

$$\iint_{Q_1\cup Q_2} \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_{Q_1} \vec{f}\cdot d\vec{p} + \iint_{Q_2} \vec{f}\cdot d\vec{p} = \frac{\pi}{8}.$$

■

***Příklad* 652**. $\vec{f} = (y,-x,z)$, $\quad Q = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\, z = 4-x^2-y^2,\ z\ge 0\}$, jejíž normálový vektor splňuje podmínku $\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$.

Řešení :



Q je rotační paraboloid

$$Q\left\{\begin{array}{l} x = v\cos u, \\ y = v\sin u, \\ z = 4-v^2, \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} u\in\langle 0,2\pi\rangle \\ v\in\langle 0,2\rangle \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} P(u,v) = [v\cos u, v\sin u, 4-v^2] \qquad B = \langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,2\rangle \\ P_u\times P_v = (-v\sin u, v\cos u, 0)\times(\cos u, \sin u, -2v) = (-2v^2\cos u, -2v^2\sin u, -v) \\ (2v^2\cos u, 2v^2\sin u, -v)\cdot(0,0,1) = -v < 0 \quad\Rightarrow\quad Q \text{ je orientovaná nesouhlasně s parametrizací} \end{array}\right|$$

$$\iint_{Q} \vec{f}\cdot d\vec{p} = \pm\iint_{B} \vec{f}\cdot(P_u\times P_v)\ du\,dv =$$

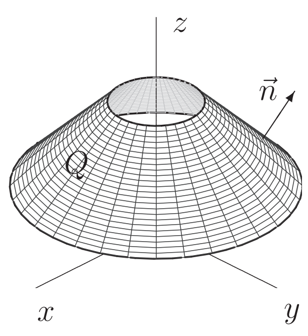
$$= -\iint_B \big(v\sin u, -v\cos u, 4-v^2\big)\cdot(-2v^2\cos u, -2v^2\sin u, -v)\,du\,dv =$$

$$= \iint_B (4v-v^3)\,du\,dv = \int_0^2 (4v-v^3)\,dv\cdot\int_0^{2\pi} 1du = 2\pi\Big[2v^2-\frac{v^4}{4}\Big]_0^2 = 8\pi$$

■

***Příklad* 653**. $\vec{f} = (-y,x,z)$, $\quad Q = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ z = 4-\sqrt{x^2+y^2},\ 1\le z\le 3\}$, normálový vektor $\vec{n} = (n_1,n_2,n_3)$ má $n_3 > 0$.

Řešení :



Q je část kuželové plochy

$$1\le z\le 3 \quad\Rightarrow$$
$$1\le 4-\sqrt{x^2+y^2}\le 3 \quad\Rightarrow$$
$$1\le x^2+y^2\le 9$$

$$\left|\begin{array}{ll} P(x,y) = [x, y, 4 - \sqrt{x^2+y^2}] & B = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\} \\ P_x \times P_y = \Big(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) \times \Big(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big), & \\ \text{třetí souřadnice je kladná} \Rightarrow \quad Q \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} & \end{array}\right|$$

$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = + \iint_B \vec{f} \cdot (P_x \times P_y)\ dx\,dy =$$

$$= \iint_B (-y, x, 4 - \sqrt{x^2+y^2}) \cdot \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big)\, dx\,dy =$$

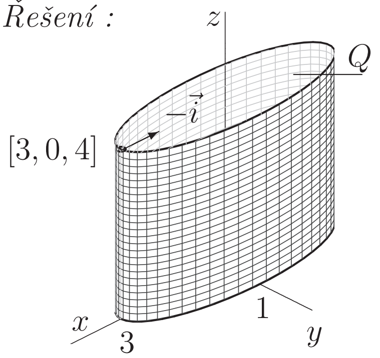
$$= \iint_B 4 - \sqrt{x^2+y^2}\ dx\,dy = \left|\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 1 \leq r \leq 3 \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J = r & & \end{array}\right| =$$

$$= \int_1^3 \Big(\int_0^{2\pi} (4-r) \cdot r\, dr\Big)\, d\varphi = 2\pi \Big[2r^2 - \frac{r^3}{3}\Big]_1^3 = \frac{44}{3}\,\pi.$$

■

***Příklad* 654**. $\vec{f} = (x, y, z)$, $\quad Q\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + 9y^2 = 9, 0 \leq z \leq 4\}$, plocha je v bodě $[3,0,4]$ orientována normálovým vektorem $\vec{n} = -\vec{i} = (-1, 0, 0)$.

Řešení :



Q je eliptická válcová plocha $\Rightarrow$ použijeme zobecněné cylindrické souřadnice

$$Q \begin{cases} x = 3\cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq 4 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ll} P(u,v) = [3\cos u, \sin u, v] & B = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 4\rangle \\ P_u \times P_v = (-3\sin u, \cos u, 0) \times (0,0,1) = (\cos u, 3\sin u, 0) & \\ \vec{n}\big([3,0,4]\big) = \vec{n}(u=0, v=4) = (1,0,0) \Rightarrow \text{orientace plochy není souhlasná s parametrizací} & \end{array}\right|$$

$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = \pm \iint_B \vec{f} \cdot (P_u \times P_v)\ du\,dv =$$

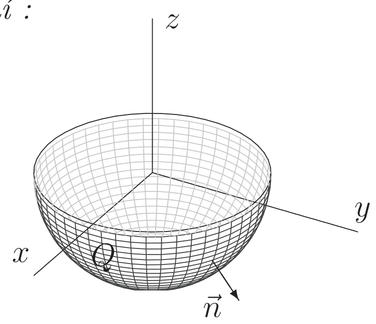
$$= -\int_0^4 \Big(\int_0^{2\pi} (3\cos u, \sin u, v) \cdot (\cos u, 3\sin u, 0)\, du\Big)\, dv =$$

$$= -\int_0^4 \Big(\int_0^{2\pi} (3\cos^2 u + 3\sin^2 u)\, du\Big)\, dv = -3 \cdot 2\pi \cdot 4 = -24\pi.$$

■

***Příklad* 655**. $\vec{f} = (-y, x, x^2y^2z)$, $\quad Q = \{[x,y] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z \leq 0,\ a > 0\}$, normálový vektor $\vec{n}$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ tupý úhel.

Řešení :



Q je část kulové plochy

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \leq 0 \Rightarrow$

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$P(x,y) = [x, y, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}]$ $\qquad B = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \le a^2\}$

$P_x = \Big(1, 0, \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\Big)$ $\quad P_y = \Big(0, 1, \dfrac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\Big)$

$P_x \times P_y = \Big(\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1\Big)$

z podmínky $\vec{n}_Q \cdot (0,0,1) < 0 \Rightarrow$ orientace plochy není souhlasná s parametrizací

$$\iint_Q (-y, x, x^2y^2z) \cdot d\vec{p} =$$

$$= -\iint_B \Big(-y, x, -x^2y^2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\Big) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_B x^2y^2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \left| \begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^a r^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi(1 - \sin^2\varphi)\,d\varphi \int_0^a r^4\sqrt{a^2 - r^2}\;r\,dr = \left| \begin{array}{l} a^2 - r^2 = t^2 \\ -r\,dr = t\,dt \end{array} \right| =$$

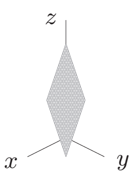
$$= 4\int_0^{\pi/2} (\sin^2\varphi - \sin^4\varphi)\,d\varphi \cdot \int_a^0 (a^2 - t^2)^2 t \cdot (-t)\,dt = (\text{ viz př. 21}) =$$

$$= 4\Big(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}\Big) \cdot \int_0^a (a^4 - 2a^2t^2 + t^4)t^2\,dt = \frac{\pi}{4}\Big[a^4\frac{t^3}{3} - 2a^2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\Big]_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{4}\Big(\frac{a^7}{3} - \frac{2a^7}{5} + \frac{a^7}{7}\Big) = \frac{2\pi}{105}\,a^7. \qquad \blacksquare$$

- Je dána vektorová funkce $\vec{f}$ a plocha Q.
  - a) Načrtněte danou plochu. Navrhněte její parametrizaci a k ní napište vektor kolmý k ploše Q.
  - b) Vypočítejte tok zadaného vektorového pole $\vec{f}$ plochou Q při orientaci daným normálovým vektorem $\vec{n}$.

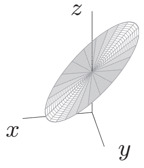
656. $\vec{f} = (3x, 2y, z)$, $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\; 2x + 2y + z = 4,\; 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1\}$, $\vec{n}$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.



a) $P(x,y) = [x, y, 4 - 2x - 2y]$,
$B = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1\}$,
$P_x \times P_y = (2, 2, 1)$

b) 7

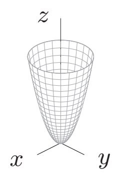
657. $\vec{f} = (z, x, y)$, $\quad Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,; x + z = 2,\; x^2 + y^2 \le 4\}$, $\vec{n}^o = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$



a) $P(u,v) = [v\cos u, v\sin u, 2 - v\cos u]$,
$B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2; \}, 0 \le u \le 2\pi,\; 0 \le v \le 2$
$P_u \times P_v = (v,\,0,\,v)$

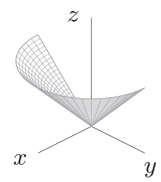
b) 8π

658. $\vec{f} = (x, 0, 2z)$, $\quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ z = x^2 + y^2,\ z \le 9\}$, normálový vektor svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ úhel tupý.



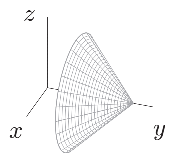
$$\left[\begin{array}{l} a_1)\ P(x,y) = [x, y, x^2+y^2], \\ \quad B = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2+y^2 \le 9\}, \\ \quad P_x \times P_y = (-2x, -2y, 1) \\ a_2)\ P(u,v) = [v\cos u, v\sin u, v^2], \\ \quad B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2; 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 3\}, \\ \quad P_u \times P_v = (2v^2\cos u,\ 2v^2 \sin u,\ -v) \\ b)\ -\dfrac{81\pi}{2} \end{array}\right]$$

659. $\vec{f} = (-y, x, z)$, $\quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \le 3,\ x \ge 0\}$, normálový vektor svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.



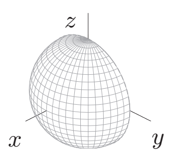
$$\left[\begin{array}{l} a_1)\ P(x,y) = \left[x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right], \\ \quad B = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2+y^2 \le 9\}, \\ \quad P_x \times P_y = \left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+yc^2}}, 1\right) \\ a_2)\ P(u,v) = [v\cos u, v\sin u, v], \\ \quad B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2; 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 3\}, \\ \quad P_u \times P_v = (v\cos u,\ v \sin u,\ -v) \\ b)\ 9\pi \end{array}\right]$$

660. $\vec{f} = (x, y, -2z)$, $\quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; y = 9 - \sqrt{x^2 + z^2},\ y \ge 3\},\ \vec{n} \cdot \vec{j} < 0$



$$\left[\begin{array}{l} a_1)\ P(x,z) = \left[x, 9-\sqrt{x^2+z^2}, z\right], \\ \quad B = \{[x,z] \in \mathbb{E}_2; x^2+z^2 \le 9\}, \\ \quad P_x \times P_z = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, 1, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) \\ a_2)\ P(u,v) = [v\cos u, 9-v, v\sin u], \\ \quad B = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2; 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\}, \\ \quad P_u \times P_v = (v\cos u,\ -v,\ v \sin u) \\ b)\ -108\pi \end{array}\right]$$

661. $\vec{f} = (x, y, -z)$, $\quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x \ge 0\},\ \vec{n}^o([2, 0, 0]) = -\vec{i}$



$$\left[\begin{array}{l} a_1)\ P(y,z) = \left[\sqrt{4-y^2-z^2}, y, z\right], \\ \quad B = \{[y,z] \in \mathbb{E}_2; y^2+y^2 \le 4\}, \\ \quad P_y \times P_z = \left(1, \dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) \\ a_2)\ P(u,v) = [2\cos u\cos v, 2\sin u \cos v, 2\sin v], \\ \quad B = \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle \times \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle, \\ \quad P_u \times P_v = (4\cos u\cos^2 v,\ 4\sin u \cos^2 v,\ 4\cos^2 v \sin v) \\ b)\ -\dfrac{16\pi}{3} \end{array}\right]$$

- Určete tok vektorového pole $\vec{f}$ plochou $Q \subset \mathbb{E}_3$ orientovanou normálou $\vec{n}$:

662. $\vec{f} = (0, 0, 2)$, $\quad Q$ je trojúhelník o vrcholech $A = [0, 0, 0],\ B = [5, 0, 0],\ C = [0, 4, 1]$, normálový vektor svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. [20]

663. $\vec{f} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$, $\quad Q$ je rovnoběžník s vrcholy $A = [0, 0, 0],\ B = [0, 3, 3]$, $C = [-1, 4, 5],\ D = [-1, 1, 2]$ orientován normálou $\vec{n} = (1, -1, 1)$. [12]

664. $\vec{f} = (x, y, 0)$, $\quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; z = 9 - x^2 - y^2, z \ge 0\}$, normálový vektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ má třetí souřadnici kladnou. [81π]

665. $\vec{f} = (y, -x, z)$, $\quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; z = x^2 + \dfrac{y^2}{9} - 4,\ y \ge 0,\ z \le 0\},\ \vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ [12π]

666. $\vec{f} = (x, y, z), \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; x^2 + y^2 = 9,\ 0 \le z \le 4\},\ \vec{n}^o([3, 0, 0]) = -\vec{i}.$ $[-72\pi]$

667. $\vec{f} = (z, x^2 + y^2, 1), \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le h\},\ \vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ $[-h^2\pi]$

668. $\vec{f} = (x, y, x^2 + y^2), \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; x^2 + y^2 = b^2,\ 0 \le z \le h,\ y \ge 0\}$
$\vec{n}^o([b, 0, 0]) = \vec{i}.$ $[b^2h\pi]$

669. $\vec{f} = (y, -x, z), \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; z = 4 - x^2 - \dfrac{y^2}{9},\ y \ge 0,\ z \ge 0\},\ \vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ $[12\pi]$

670. $\vec{f} = (x^2, y^2, z^2), \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 2\},\ \vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ $[8\pi]$

671. $\vec{f} = (x, y, 3z), \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ z = x^2 + y^2 + 1,\ 1 \le z \le 2,\ x \ge 0, y \ge 0\},$
$\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ $\left[\frac{7}{8}\pi\right]$

672. $\vec{f} = (x^2, y^2, z^2), \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1,\ z \ge 0,\ 0 \le x \le 3\},$
$\vec{n}^o([1, 0, 2]) = -\vec{k}.$ $[-64]$

673. Vypočítejte plošný integrál $\displaystyle\iint_Q x^2\, dy\, dz + z^2\, dx\, dy, \quad Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;$
$x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \le z \le 1\}, \vec{n}$ svírá tupý úhel s vektorem $\vec{k}$. $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$