

# Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky

## 1. Náhodná veličina, pravděpodobnost



# 1. Náhodná veličina, pravděpodobnost

- Variabilita
- Náhoda
- Model
- Pravděpodobnost

# 1. Náhodná veličina, pravděpodobnost

- Variabilita
- Náhoda
- Model
- Pravděpodobnost



## Příklad 1: Balící automat na kávu





## Příklad 1: Balící automat na kávu



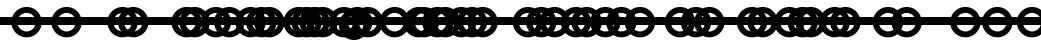
# Příklad 1: Balící automat na kávu

## Příklad 1: Balící automat na kávu

24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455
24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721
24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405
23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285
24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777
24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906

## Příklad 1: Balící automat na kávu

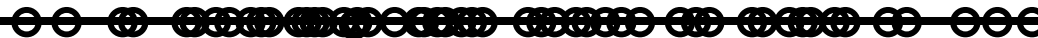
24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455
24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721
24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405
23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285
24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777
24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906



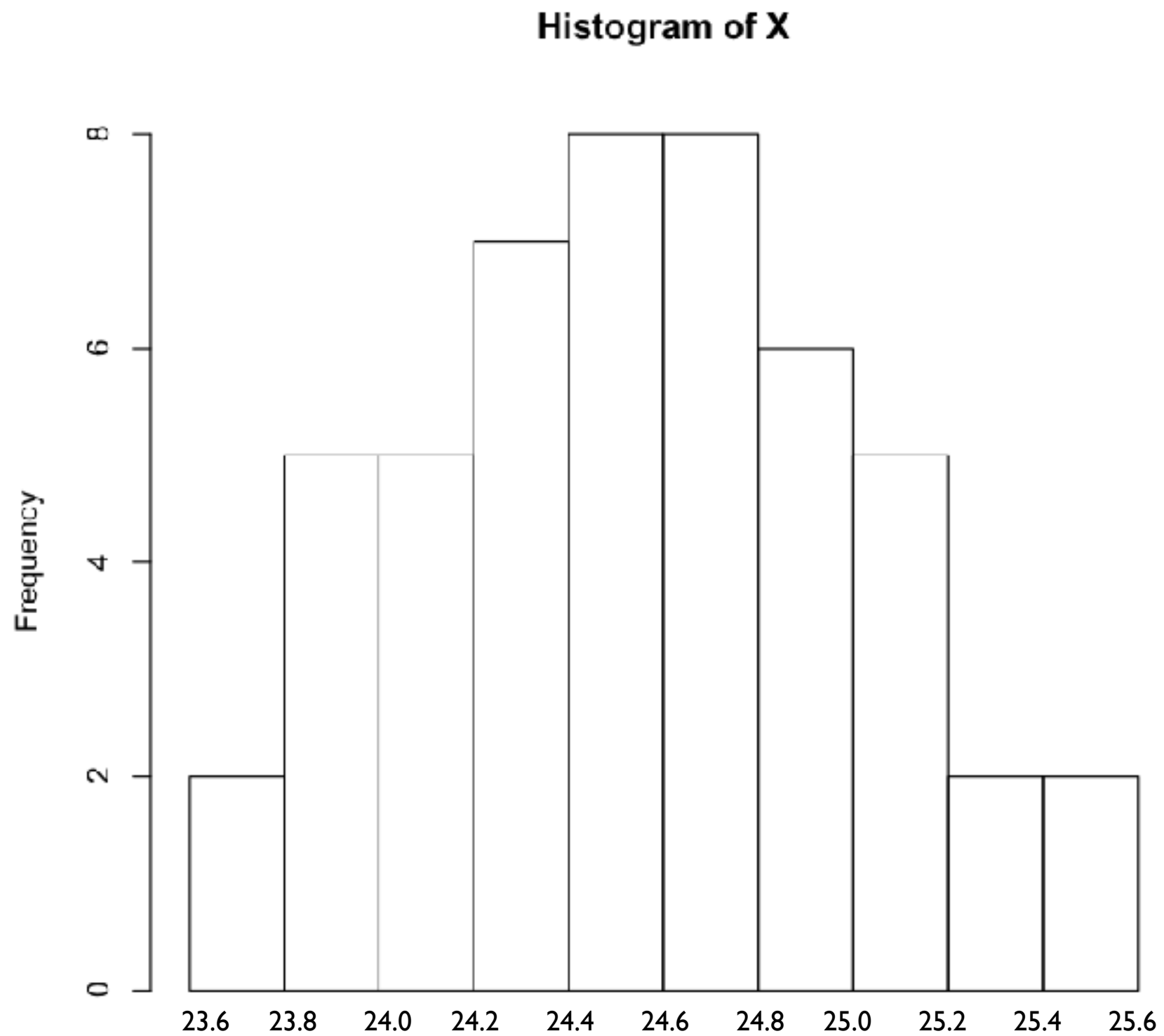


## Příklad 1: Balící automat na kávu

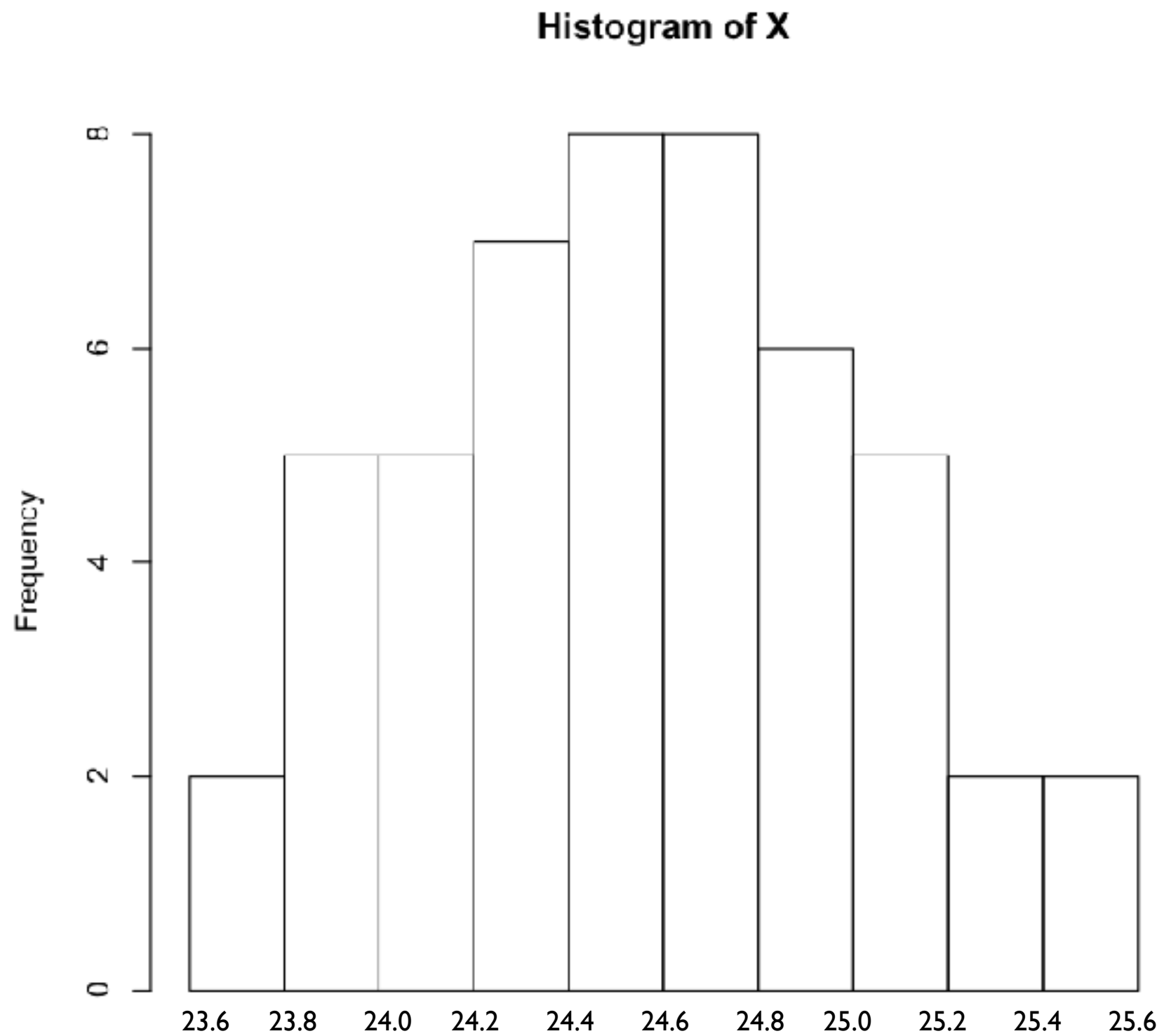
24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455
24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721
24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405
23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285
24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777
24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906



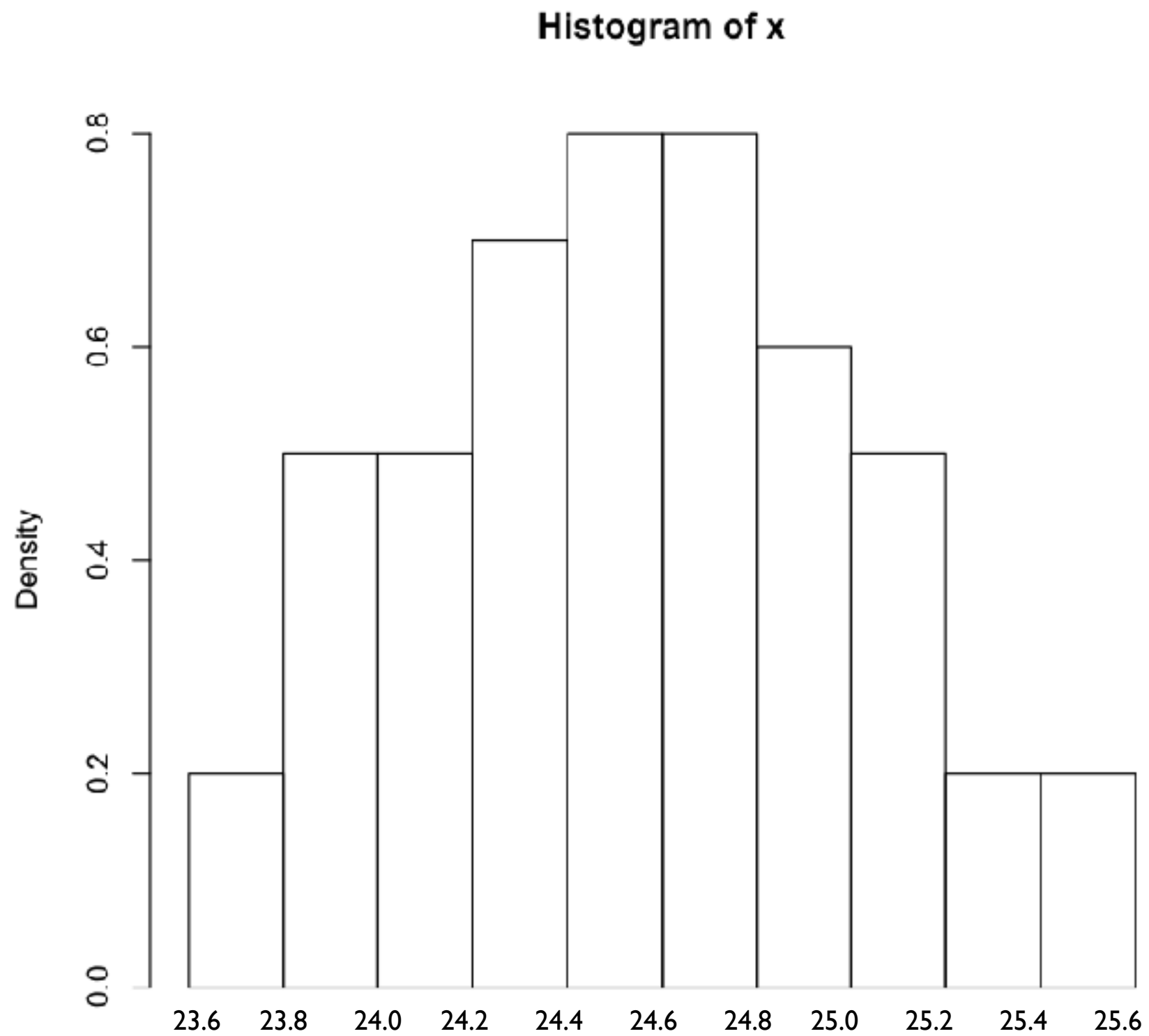
## Příklad 3: Balící automat na kávu



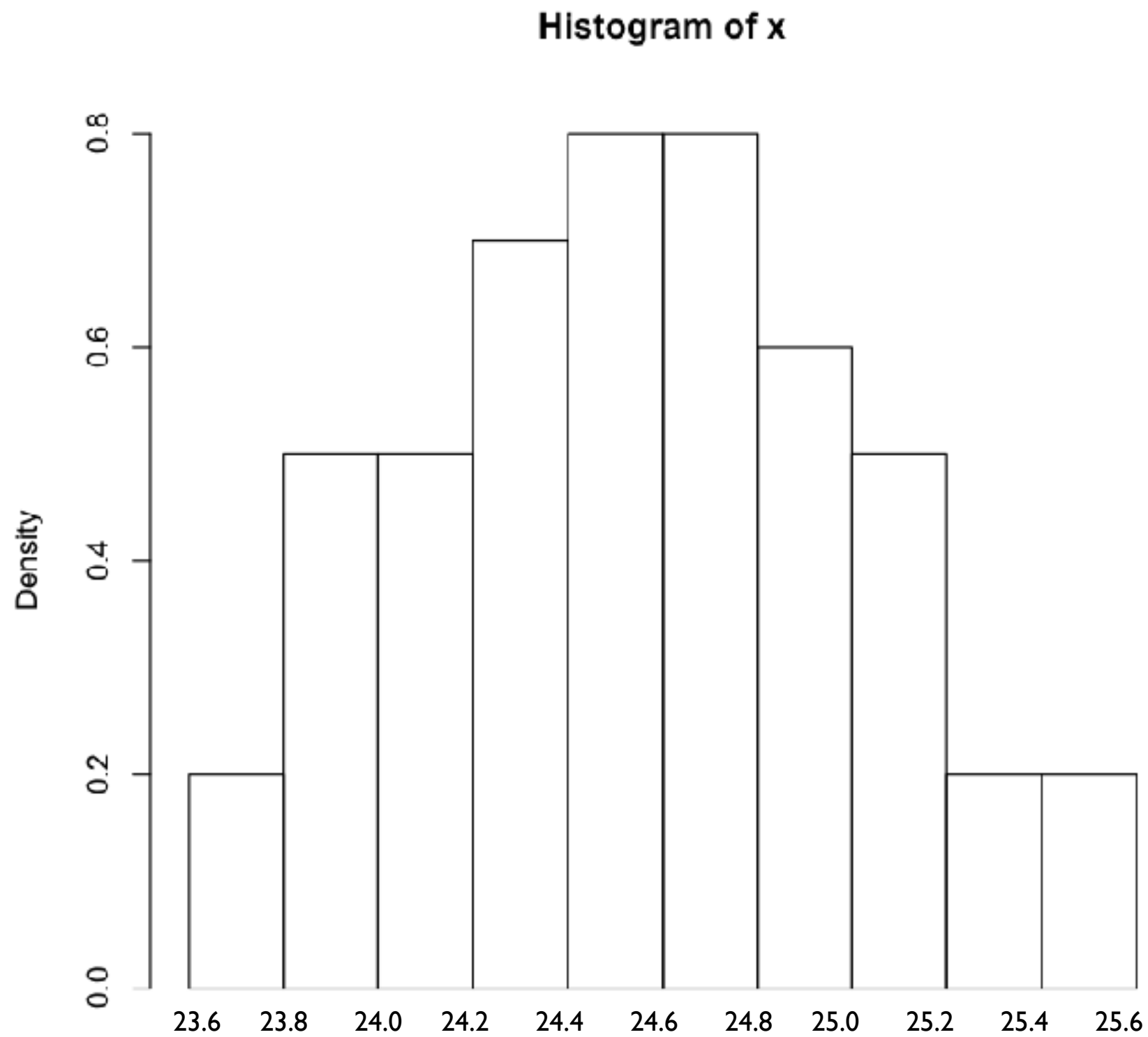
## Příklad 3: Balící automat na kávu



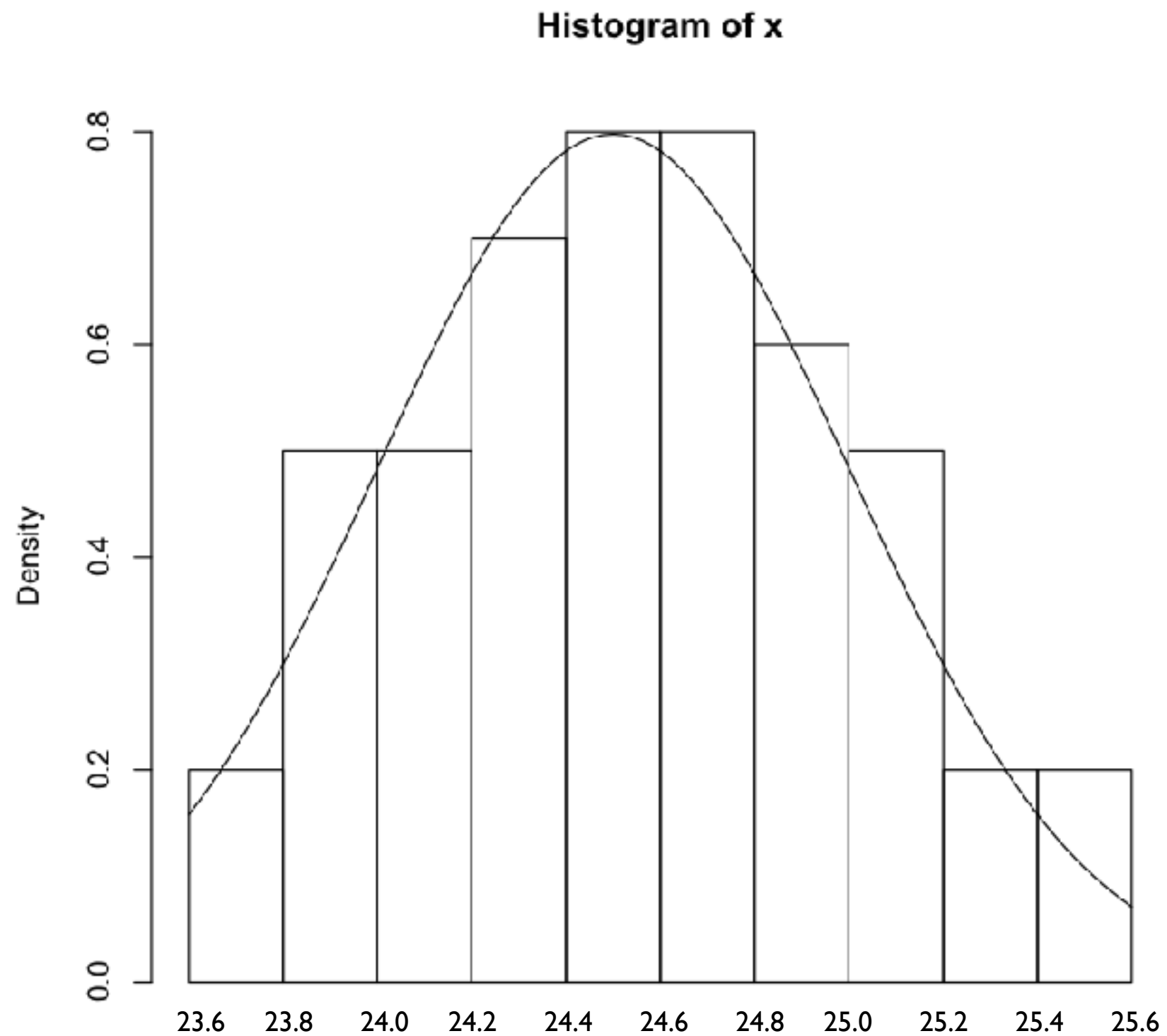
## Příklad 3: Balící automat na kávu



## Příklad 3: Balící automat na kávu

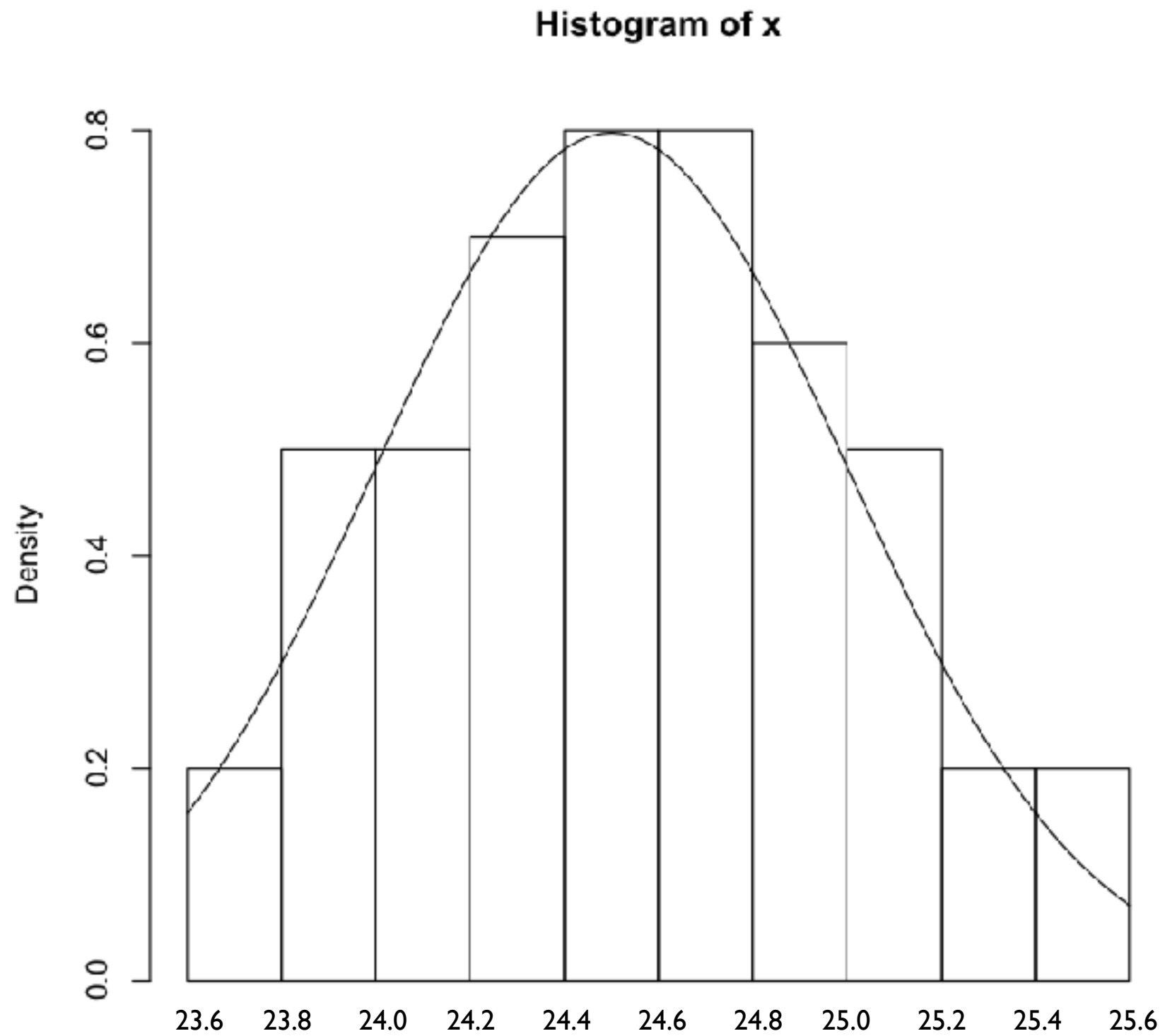


## Příklad 3: Balící automat na kávu

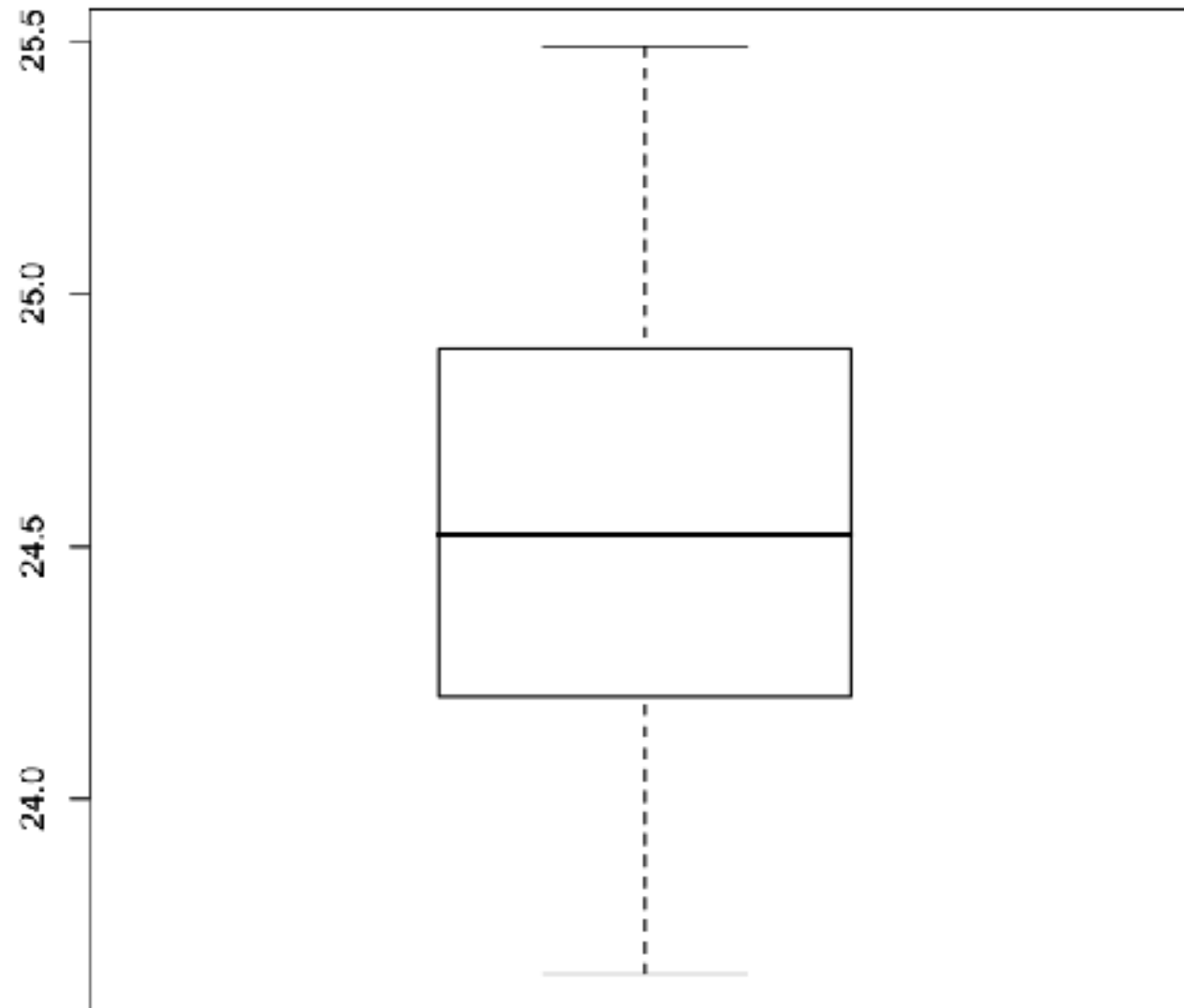




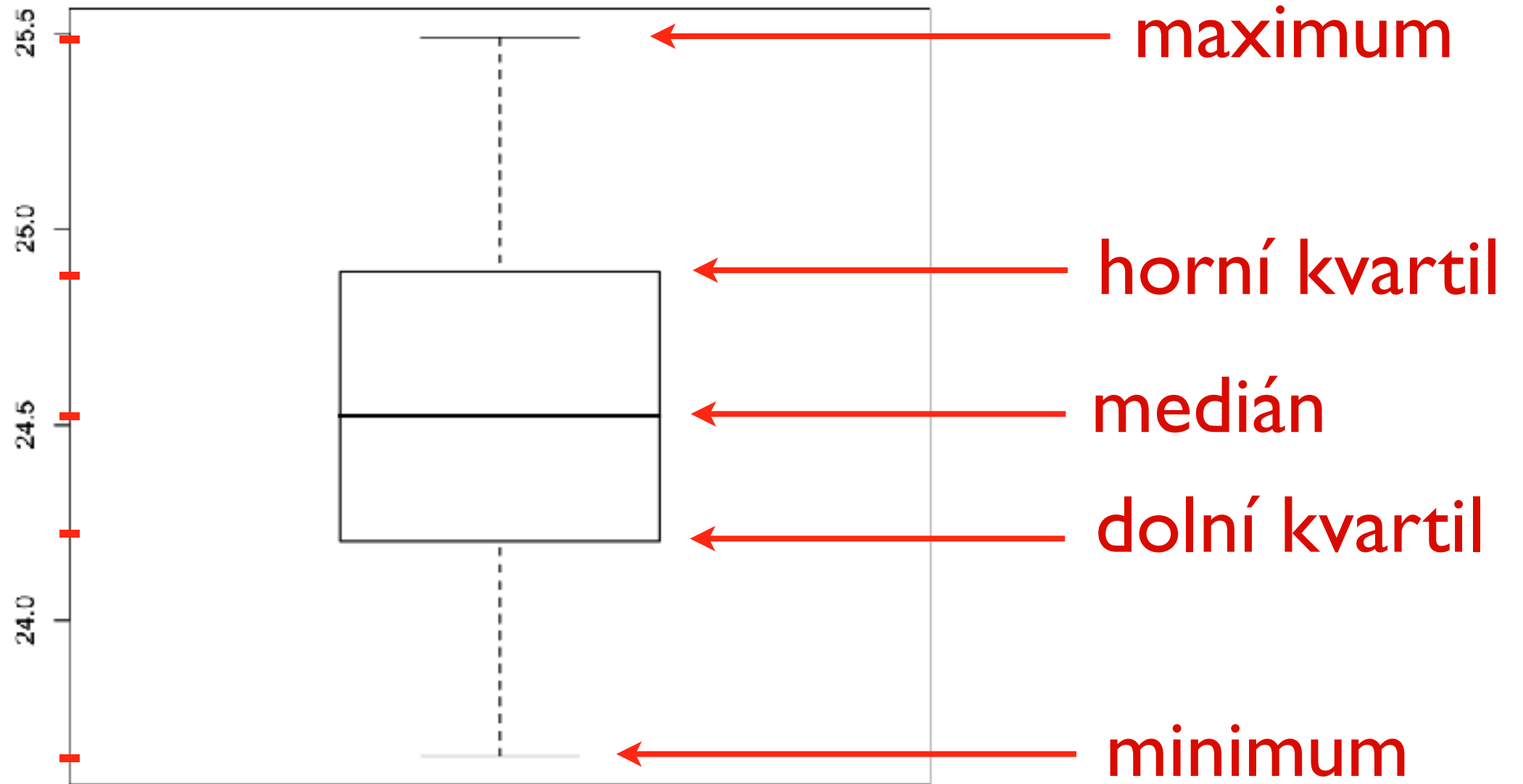
# Příklad 3: Balící automat na kávu



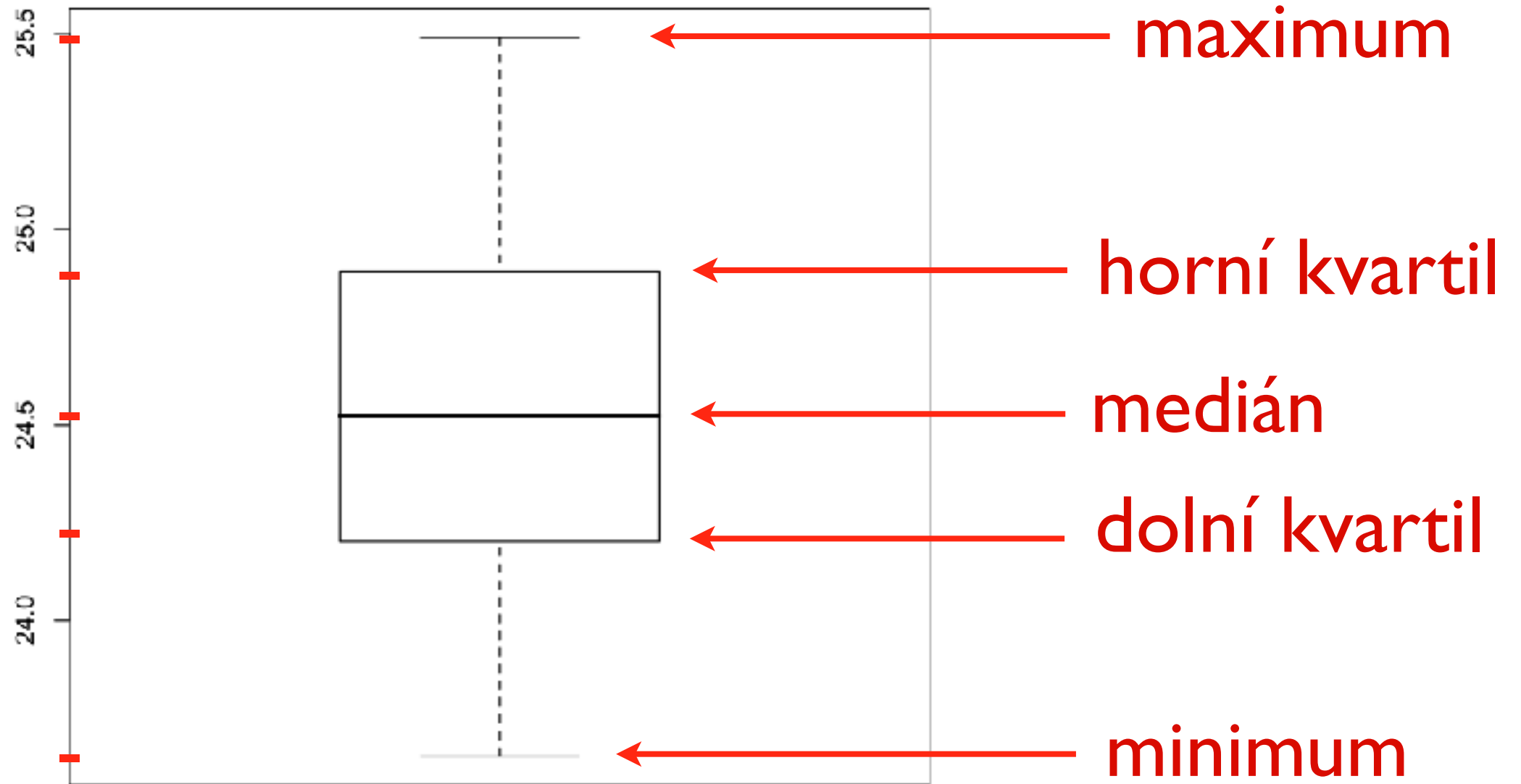
## Příklad 3: Balící automat na kávu



## Příklad 3: Balící automat na kávu



## Příklad 3: Balící automat na kávu



## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou



## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39





## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39



## **Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou**

## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39

## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39



## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39



0		223334566891136789
2		146789123479
4		0278002468
6		012525
8		7
10		58
12		6

## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39



$$Y_{\min} = 0.17$$

0	2	23334566891136789
2	1	46789123479
4	0	278002468
6	0	12525
8	7	
10	5	8
12	6	



## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39



$$Y_{\min} = 0.17$$

$$Y_{\max} = 12.64$$

0	2	23334566891136789
2		146789123479
4		0278002468
6		012525
8		7
10		58
12	6	





## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39

---

$Y_{\min} = 0.17$

$Y_{\max} = 12.64$

$Y_{\text{med}} = 3.13$

$Y_{\text{LQ}} = 1.15$

$Y_{\text{UQ}} = 5.41$

0	2	2	3	3	3	4	5	6	6	8	9	11	13	6	7	8	9
2	1	4	6	7	8	9	12	3	4	7	9						
4	0	2	7	8	0	0	2	4	6	8							
6	0	1	2	5	2	5											
8	7																
10	5	8															
12	6																

$\bar{Y} = 3.69$

$s^2_{n-1}(Y) = 9.0957$

## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39

$$Y_{\min} = 0.17$$

$$Y_{\max} = 12.64$$

$$Y_{\text{med}} = 3.13$$

$$Y_{\text{LQ}} = 1.15$$

$$Y_{\text{UQ}} = 5.41$$

0	2	2	3	3	3	4	5	6	6	8	9	11	13	6	7	8	9
2	1	4	6	7	8	9	12	3	4	7	9						
4	0	2	7	8	0	0	2	4	6	8							
6	0	1	2	5	2	5											
8	7																
10	5	8															
12	6																

$$\bar{Y} = 3.69$$

$$s^2_{n-1}(Y) = 9.0957$$



## Příklad 3: Doba do poruchy navigačních přístrojů

<b>i</b>	<b>t<sub>i</sub></b>	<b>n<sub>i</sub></b>
<b>1</b>	50	32
<b>2</b>	100	25
<b>3</b>	150	16
<b>4</b>	200	6
<b>5</b>	250	10
<b>6</b>	300	8
<b>7</b>	350	7
<b>8</b>	400	7
<b>9</b>	450	3
<b>10</b>	500	2
<b>11</b>	1000	9

i ... pořadové číslo intervalu,

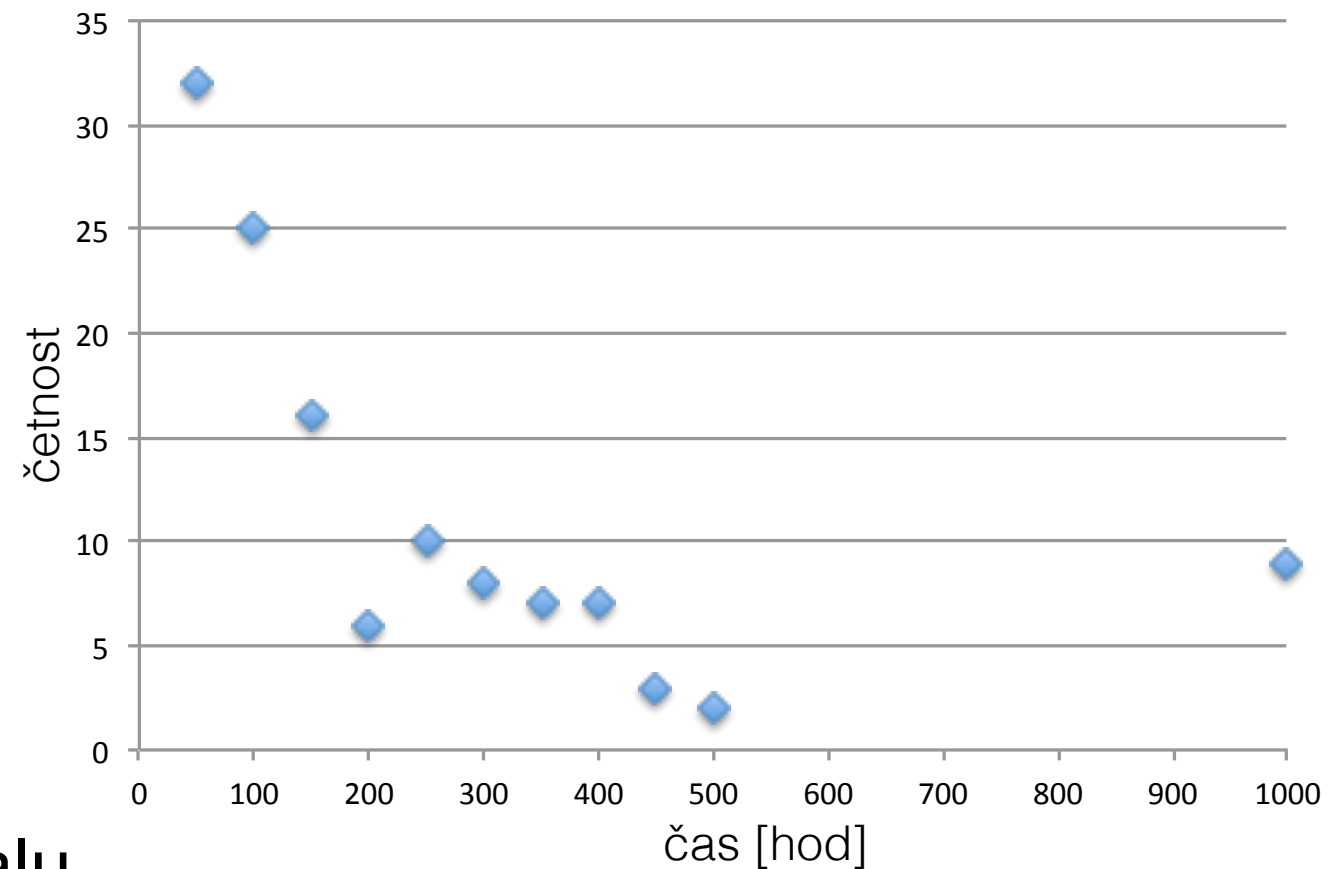
t<sub>i</sub> ... horní mez intervalu i [hod],

n<sub>i</sub> ... četnost poruch v intervalu i,



## Příklad 3: Doba do poruchy navigačních přístrojů

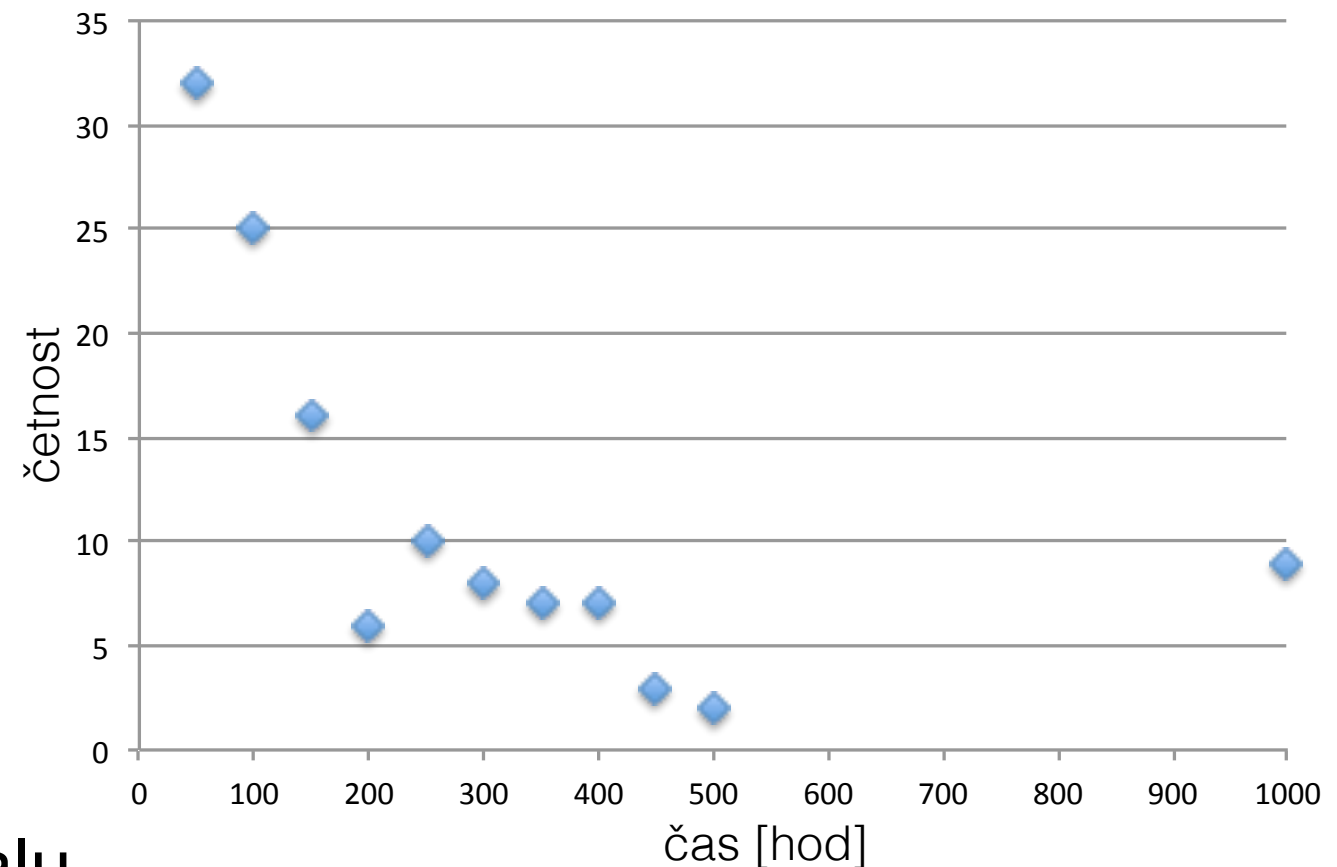
<b>i</b>	<b>t<sub>i</sub></b>	<b>n<sub>i</sub></b>
<b>1</b>	50	32
<b>2</b>	100	25
<b>3</b>	150	16
<b>4</b>	200	6
<b>5</b>	250	10
<b>6</b>	300	8
<b>7</b>	350	7
<b>8</b>	400	7
<b>9</b>	450	3
<b>10</b>	500	2
<b>11</b>	1000	9



i ... pořadové číslo intervalu,  
t<sub>i</sub> ... horní mez intervalu i [hod],  
n<sub>i</sub> ... četnost poruch v intervalu i,

## Příklad 3: Doba do poruchy navigačních přístrojů

<b>i</b>	<b>t<sub>i</sub></b>	<b>n<sub>i</sub></b>
<b>1</b>	50	32
<b>2</b>	100	25
<b>3</b>	150	16
<b>4</b>	200	6
<b>5</b>	250	10
<b>6</b>	300	8
<b>7</b>	350	7
<b>8</b>	400	7
<b>9</b>	450	3
<b>10</b>	500	2
<b>11</b>	1000	9



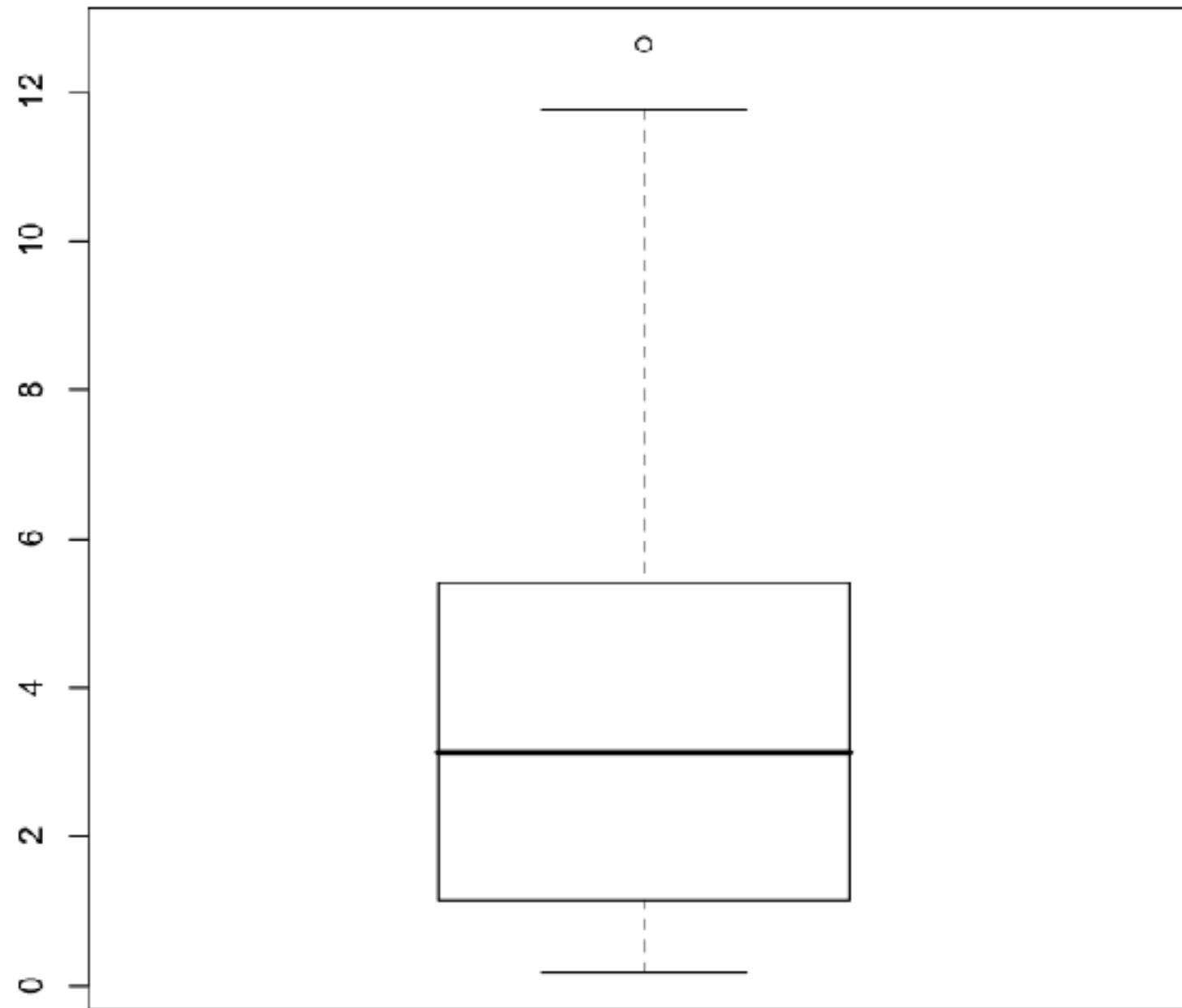
i ... pořadové číslo intervalu,  
t<sub>i</sub> ... horní mez intervalu i [hod],  
n<sub>i</sub> ... četnost poruch v intervalu i,



## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

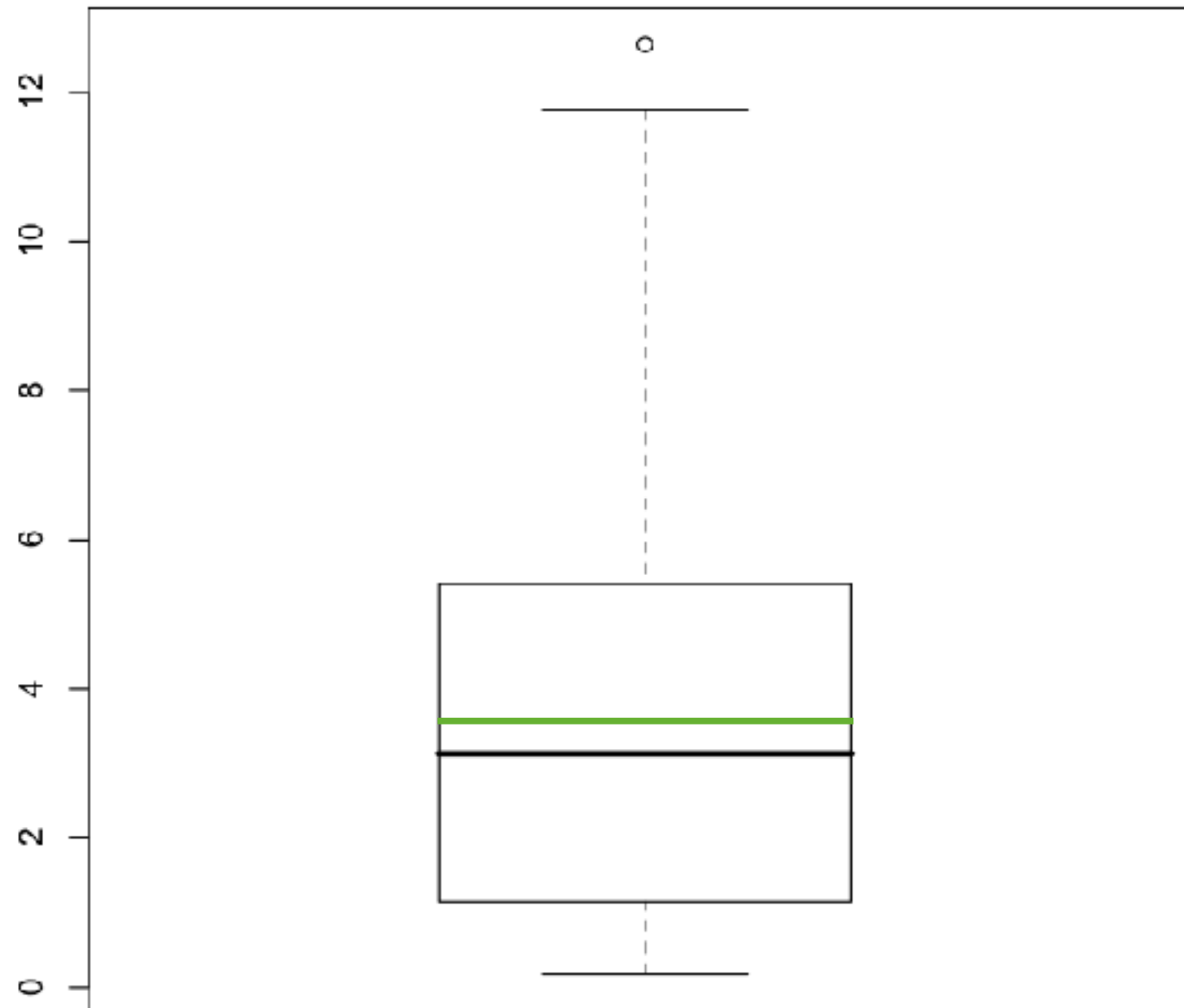
Krabicový graf (Box & Whiskers) Y

## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou



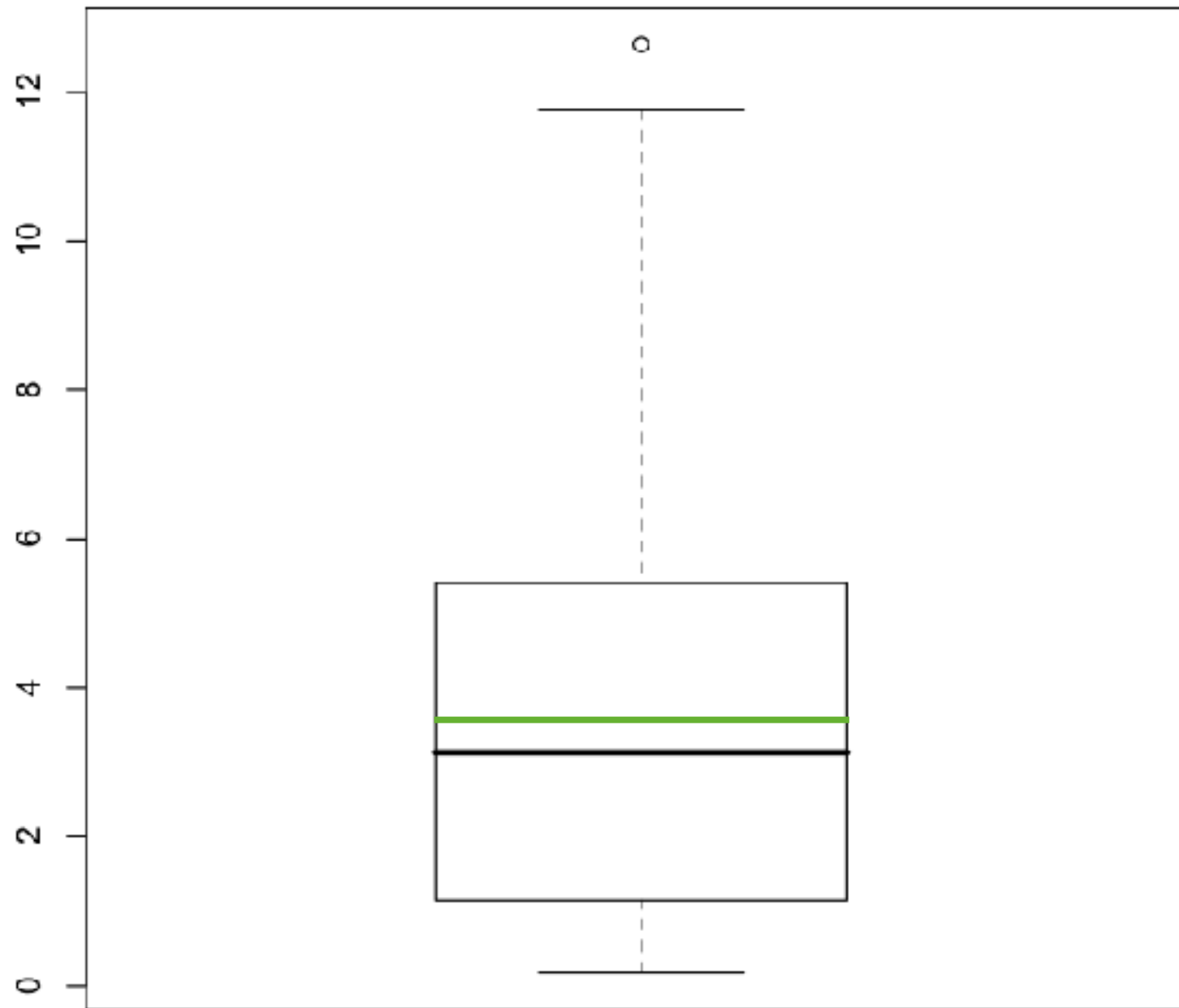
Krabicový graf (Box & Whiskers) Y

## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou



Krabicový graf (Box & Whiskers) Y

## Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou



Krabicový graf (Box & Whiskers) Y



# Variabilita

# Variabilita

**Kakuan (1100-1200)**

1.



Hledání býka



# Variabilita

1.



Hledání býka

2.



Nalezení stop

**Kakuan (1100-1200)**

# Variabilita

1.



Hledání býka

2.



Nalezení stop

3.



Spatření býka

Kakuan (1100-1200)

# Variabilita

Kakuan (1100-1200)

1.



Hledání býka

2.



Nalezení stop

3.



Spatření býka

4.



Chycení býka

# Variabilita

Kakuan (1100-1200)

1.



Hledání býka

2.



Nalezení stop

3.



Spatření býka

5.



Zkrocení býka

4.



Chycení býka



# Variabilita

Kakuan (1100-1200)

1.



Hledání býka

2.



Nalezení stop

3.



Spatření býka

6



Návrat domů

5.



Zkrocení býka

4.



Chycení býka

# Variabilita

Kakuan (1100-1200)

1.



Hledání býka

2.



Nalezení stop

3.



Spatření býka

6



Návrat domů

5.



Zkrocení býka

4.



Chycení býka

<http://www.luzs.cz/deset-obrazu-kroceni-byka.html>

# Variabilita

Kakuan (1100-1200)

1.



Hledání býka

2.



Nalezení stop

3.



Spatření býka

6



Návrat domů

5.



Zkrocení býka

4.



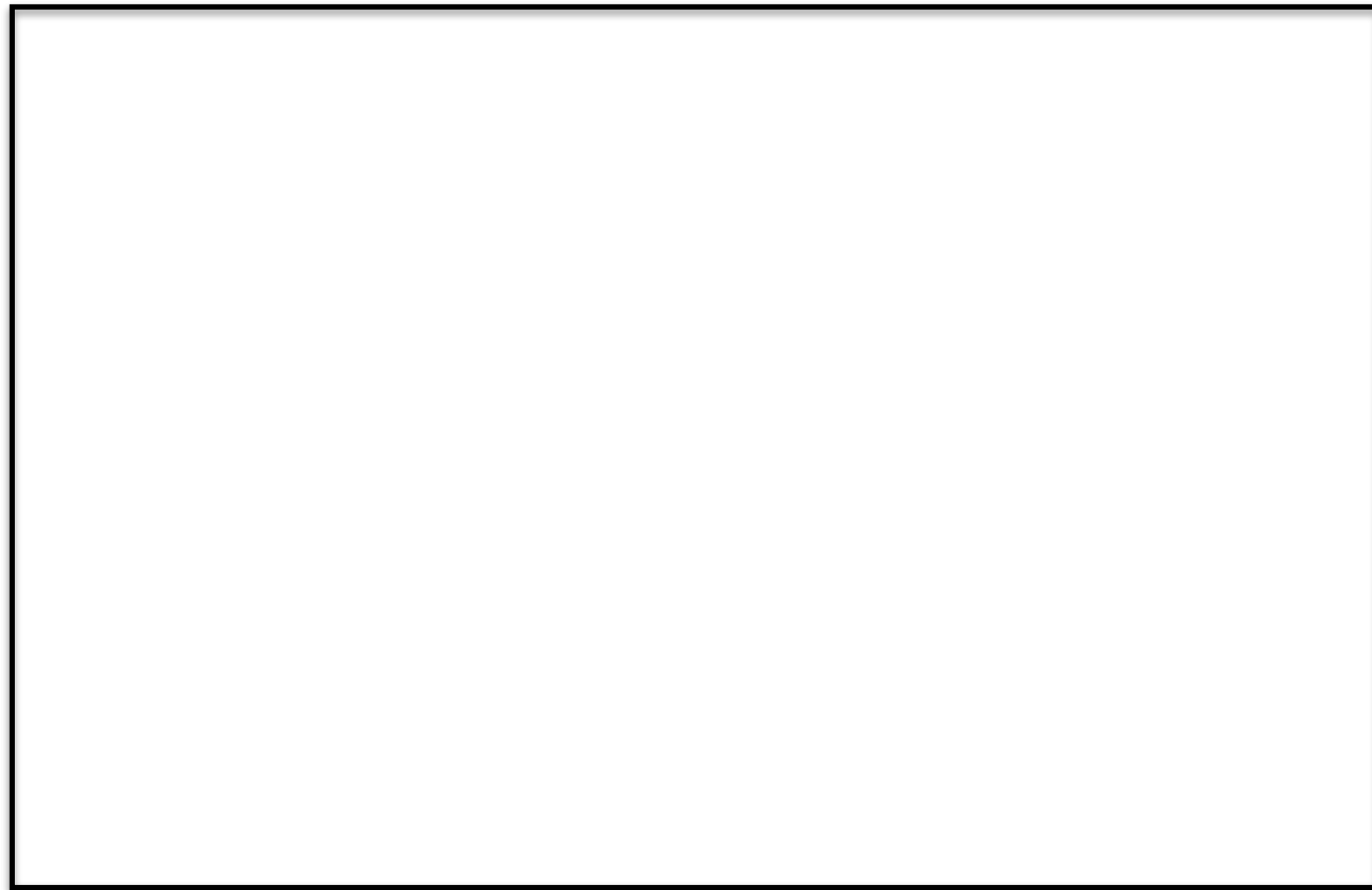
Chycení býka

<http://www.luzs.cz/deset-obrazu-kroceni-byka.html>



**Model**

**Problém**





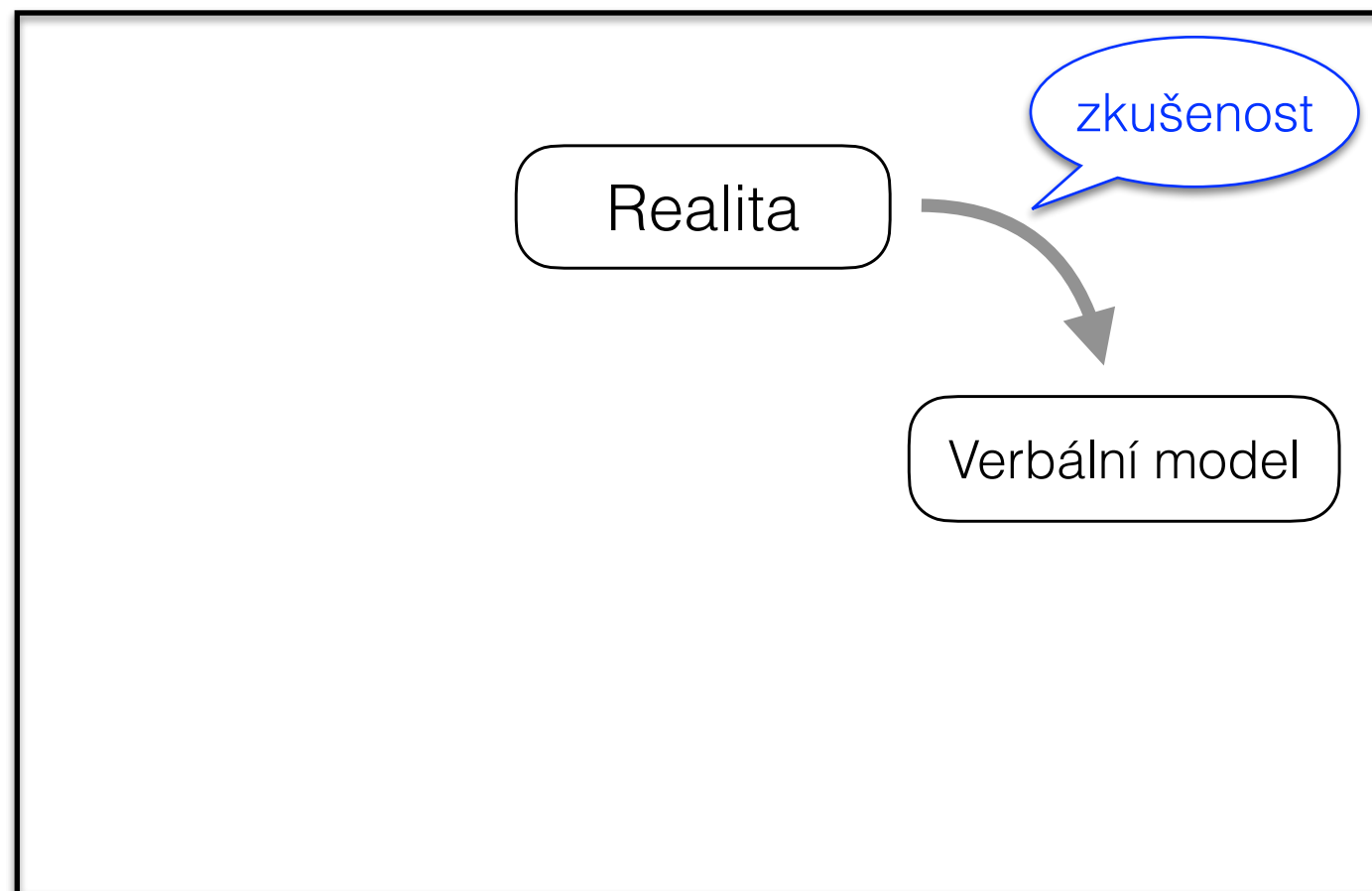
# Model

Problém



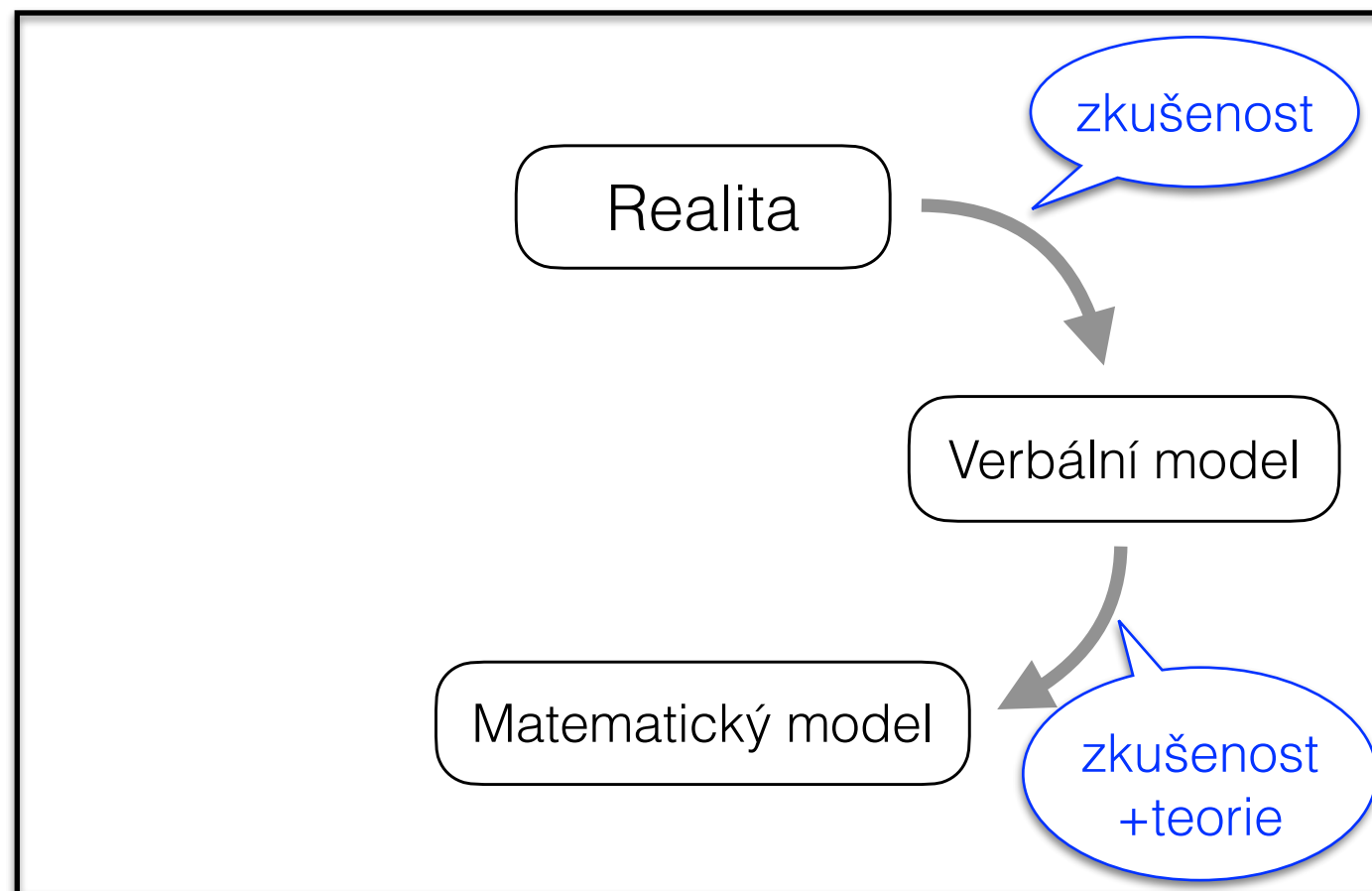
# Model

## Problém



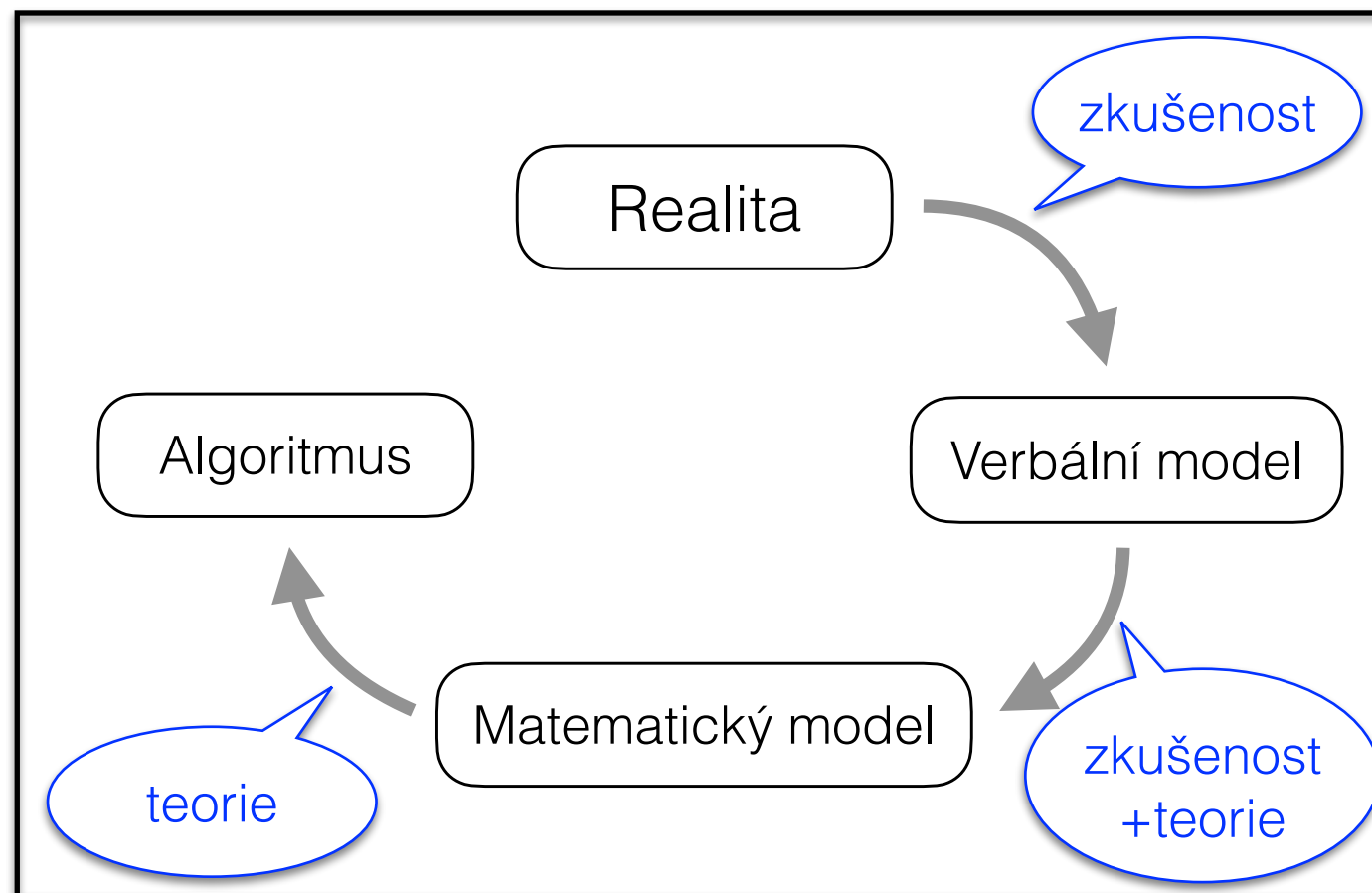
# Model

## Problém



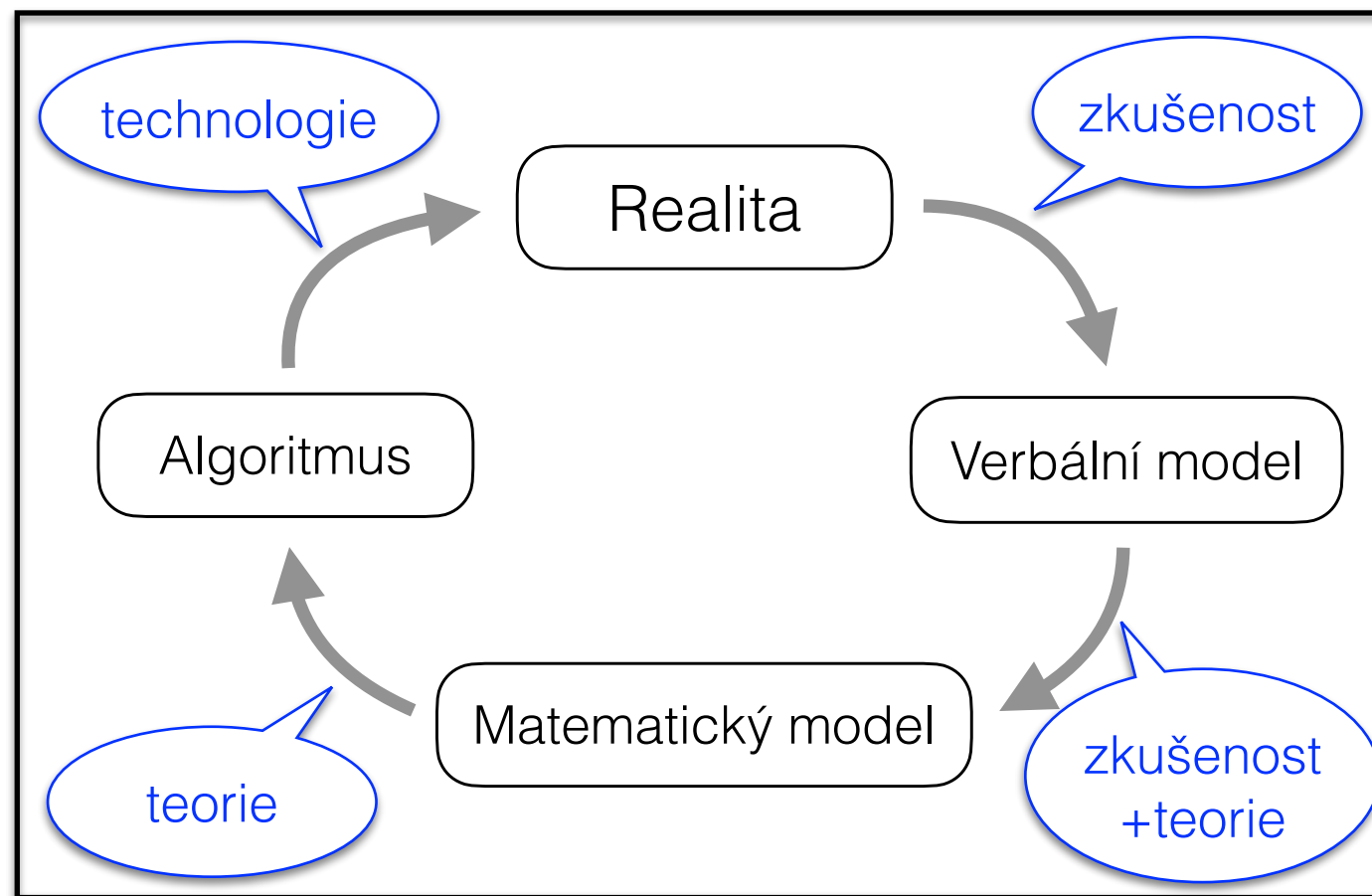
# Model

## Problém



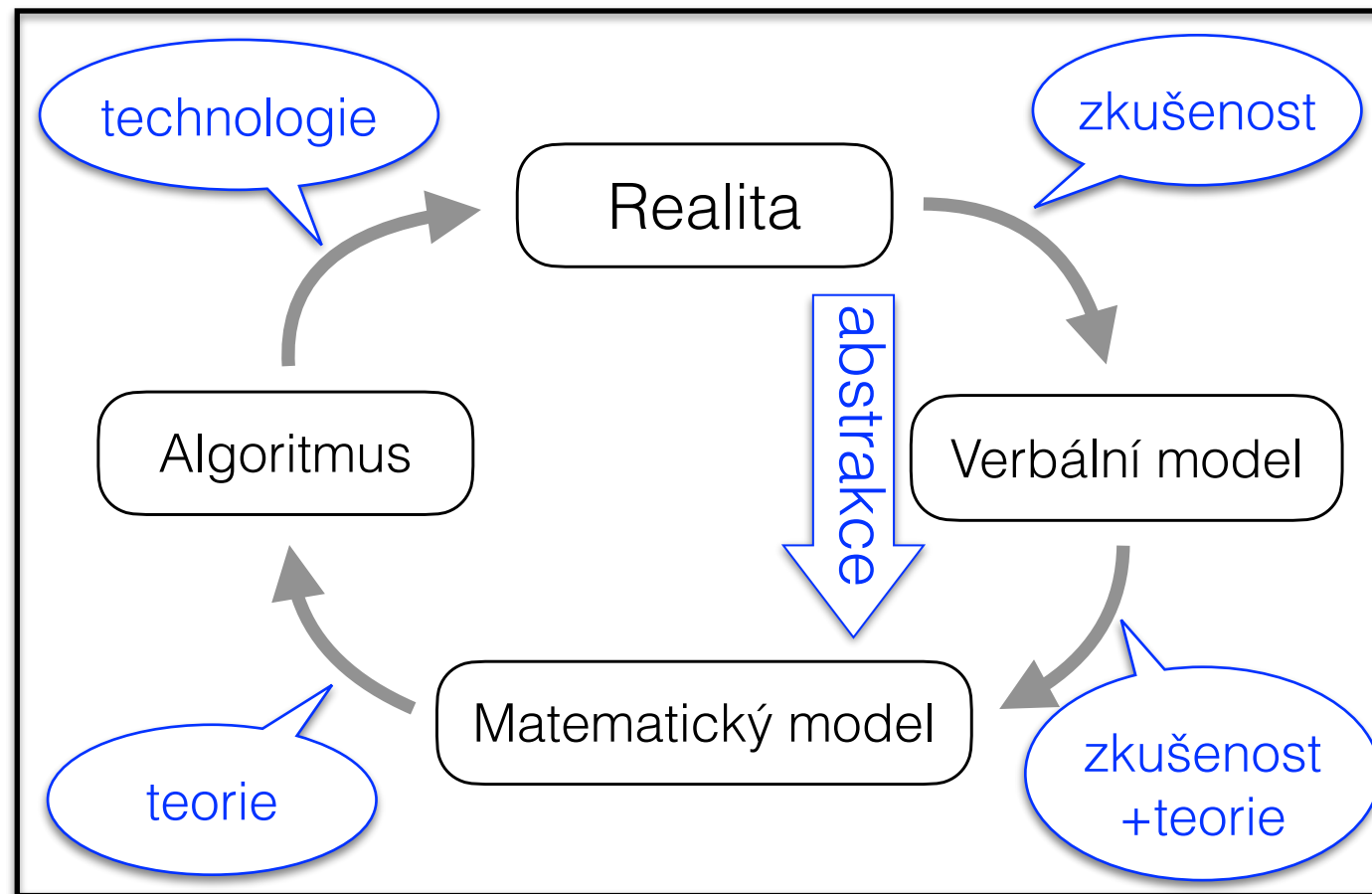
# Model

## Problém



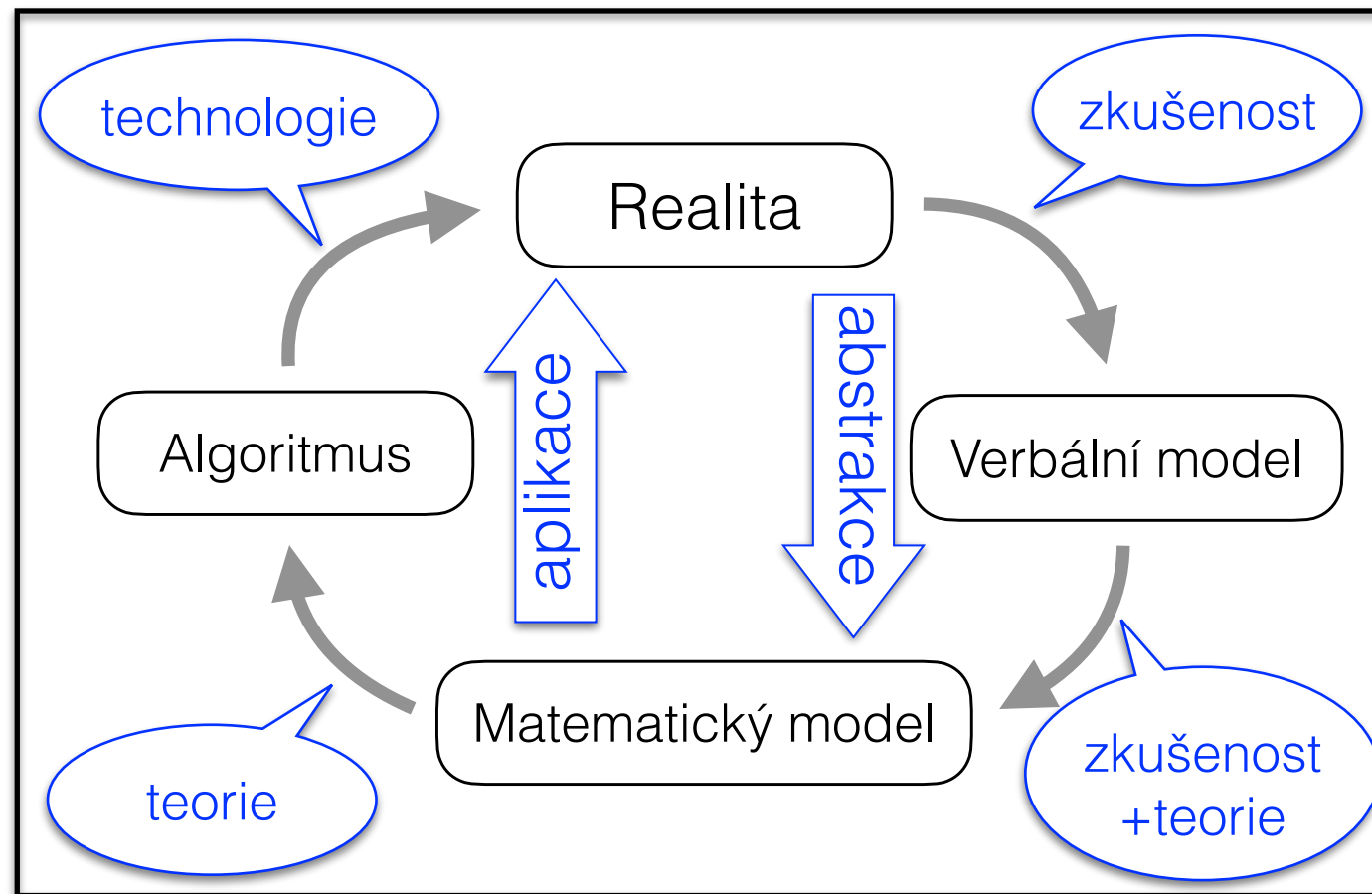
# Model

## Problém



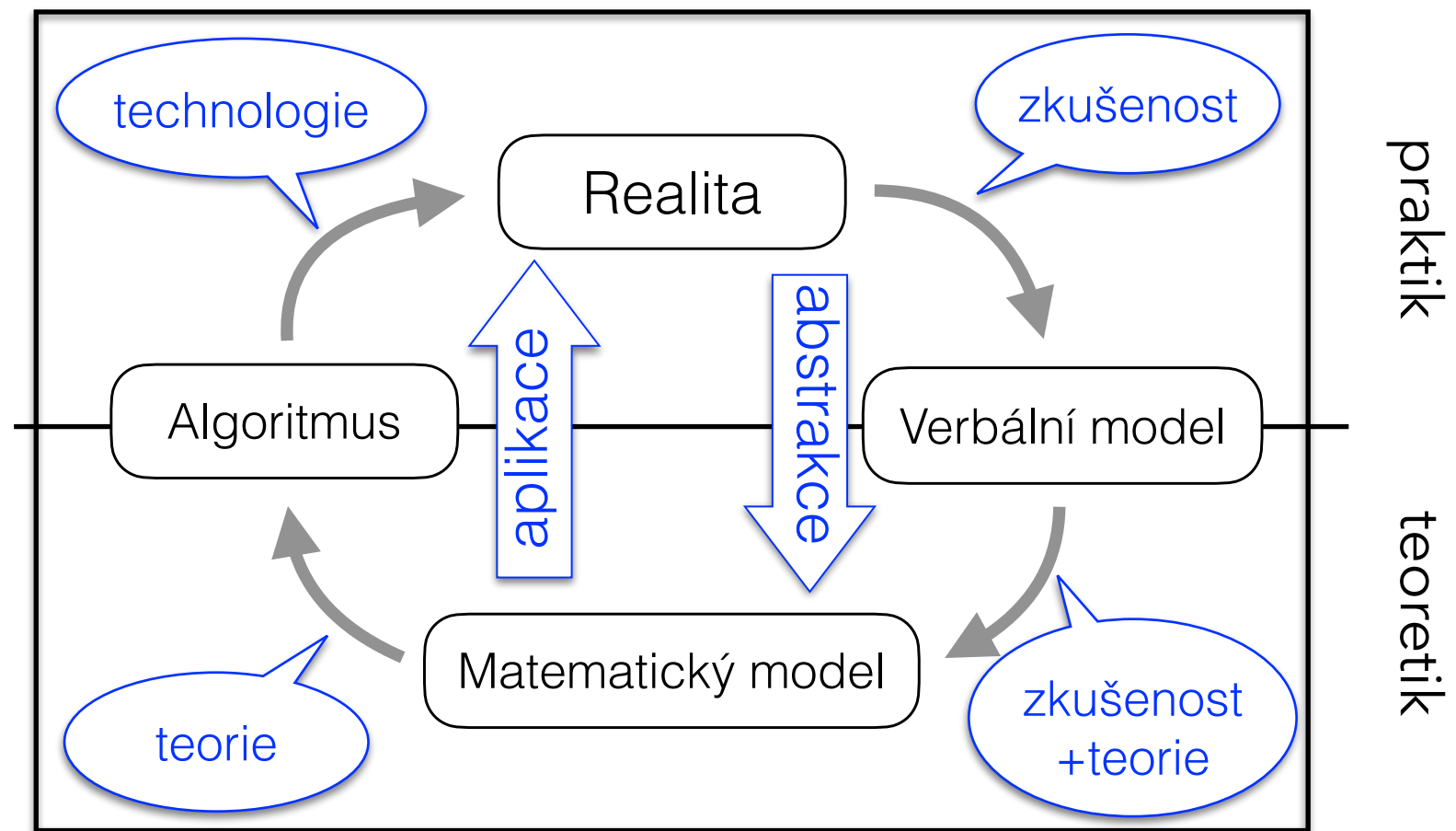
# Model

## Problém



# Model

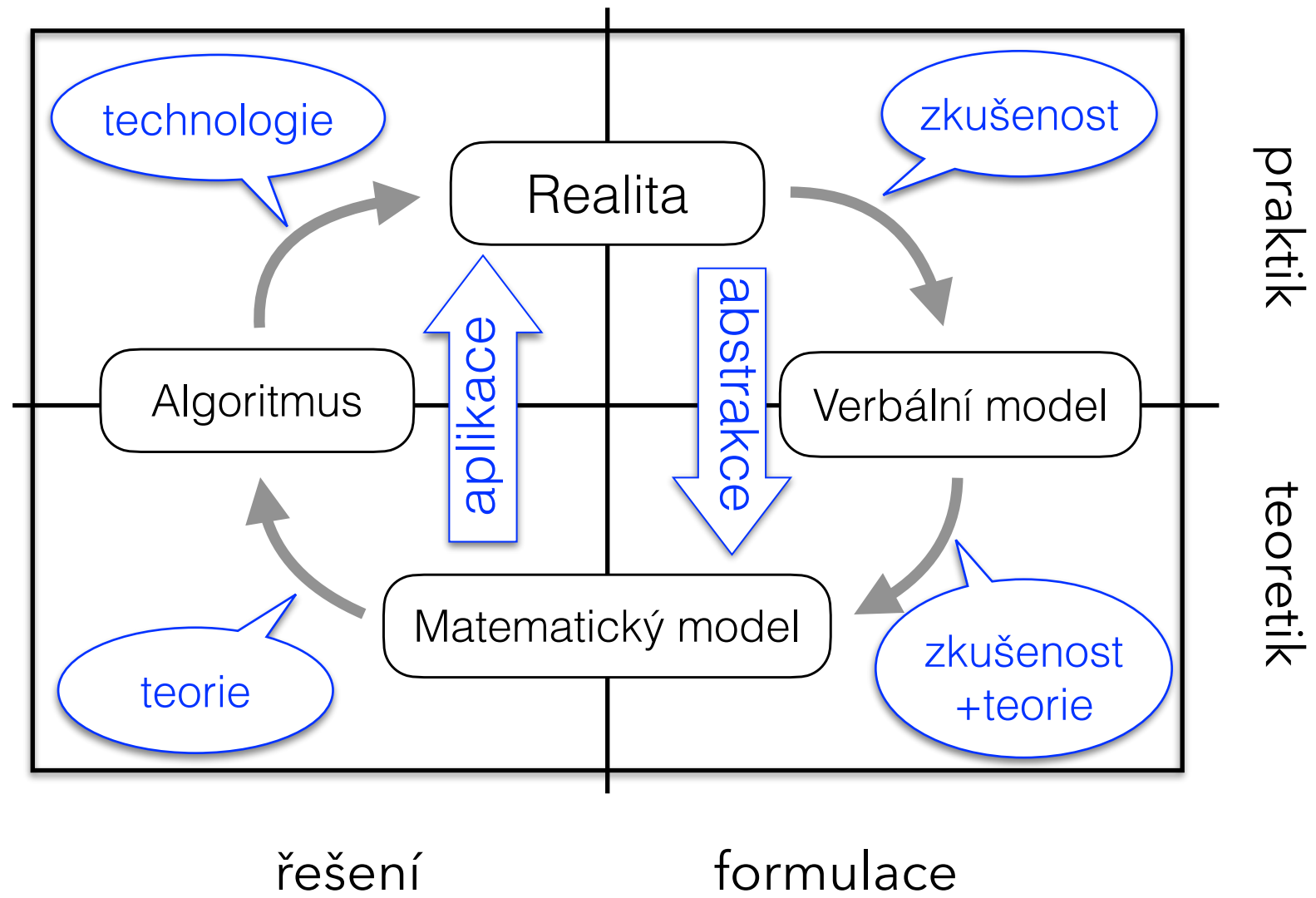
## Problém



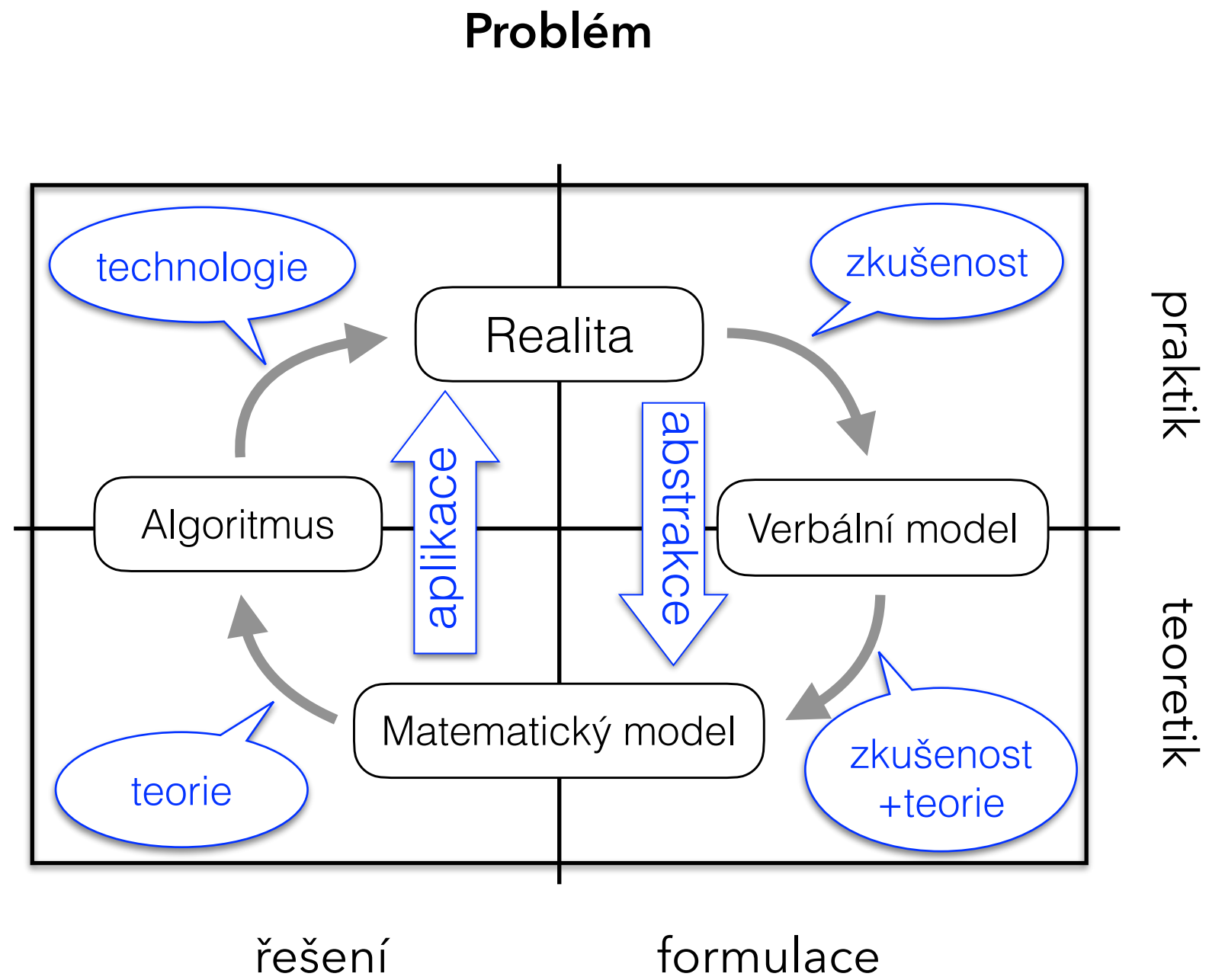


# Model

## Problém



# Model



# Model

...all models are approximations. Essentially, all models are wrong, but some are useful. However, the approximate nature of the model must always be borne in mind...



**George E. P. Box** (1919 - 2013)

# Model

... všechny modely jsou přibližné. V podstatě všechny modely jsou špatné, ale některé z nich jsou užitečné. Nicméně, přibližný charakter modelu musíme mít vždy na paměti, ...



**George E. P. Box** (1919 - 2013)

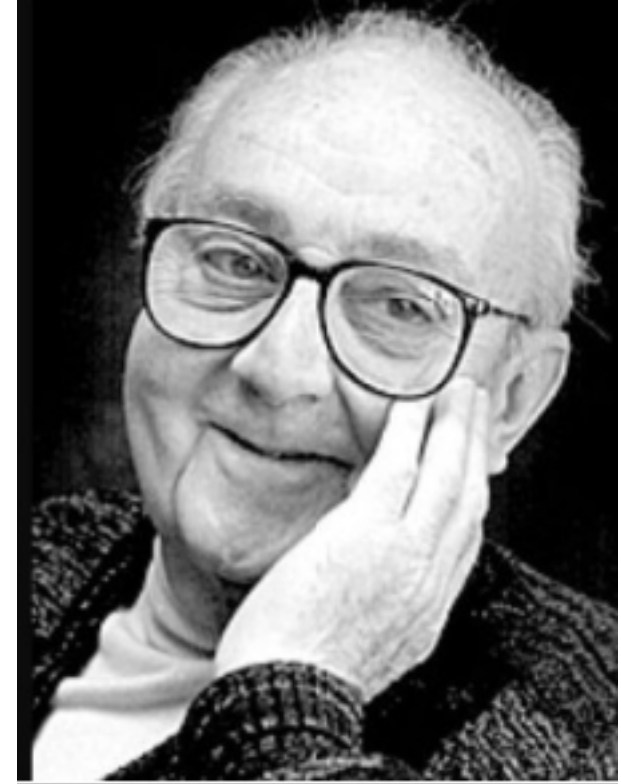
# Model

... všechny modely jsou přibližné. V podstatě všechny modely jsou špatné, ale některé z nich jsou užitečné. Nicméně, přibližný charakter modelu musíme mít vždy na paměti, ...



Norbert Wiener (1894 – 1964)

The best material model of a cat is another, or preferably the same, cat.



George E. P. Box (1919 - 2013)

# Model

... všechny modely jsou přibližné. V podstatě všechny modely jsou špatné, ale některé z nich jsou užitečné. Nicméně, přibližný charakter modelu musíme mít vždy na paměti, ...



Norbert Wiener (1894 – 1964)

Nejlepším modelem kočky je kočka, nejlépe ta samá.



George E. P. Box (1919 - 2013)



# Model

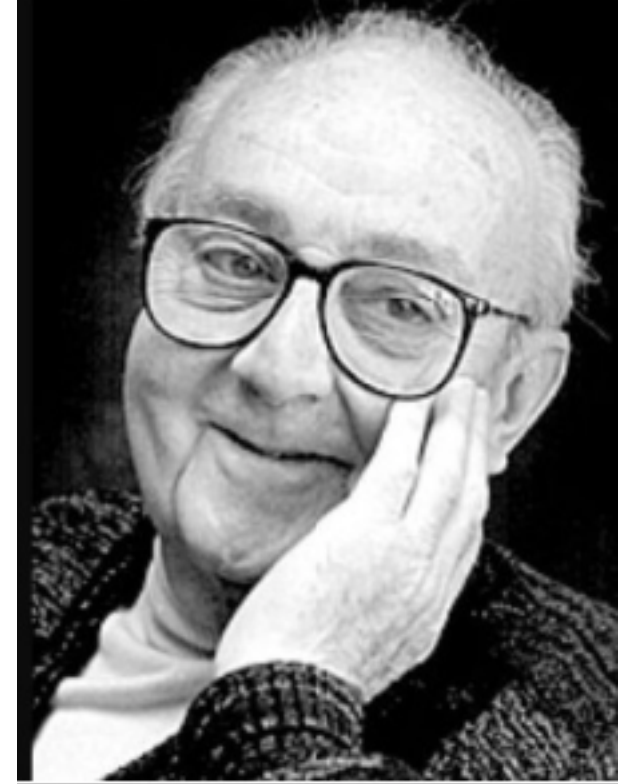
... všechny modely jsou přibližné. V podstatě všechny modely jsou špatné, ale některé z nich jsou užitečné. Nicméně, přibližný charakter modelu musíme mít vždy na paměti, ...



Norbert Wiener (1894 – 1964)

Nejlepším modelem kočky je kočka, nejlépe ta samá.

When you have two competing models that make exactly the same predictions, the simpler one is the better.



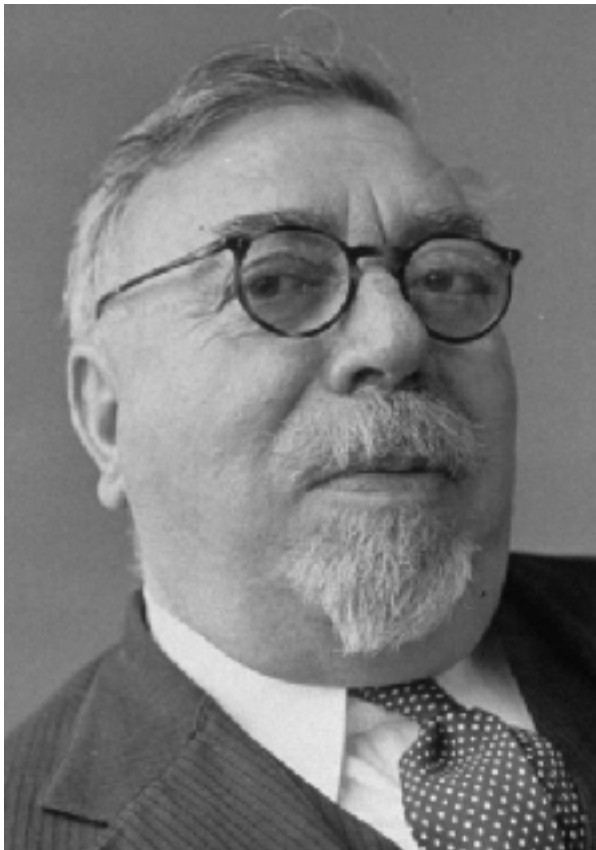
George E. P. Box (1919 - 2013)



William Ockham (1287 – 1347)

# Model

... všechny modely jsou přibližné. V podstatě všechny modely jsou špatné, ale některé z nich jsou užitečné. Nicméně, přibližný charakter modelu musíme mít vždy na paměti, ...



Norbert Wiener (1894 – 1964)

Nejlepším modelem kočky je kočka, nejlépe ta samá.

Máte-li dva konkurenční modely, které vám dávají přesně stejné předpovědi, potom lepší je ten jednodušší.



George E. P. Box (1919 - 2013)



William Ockham (1287 – 1347)



# Model

... všechny modely jsou přibližné. V podstatě všechny modely jsou špatné, ale některé z nich jsou užitečné. Nicméně, přibližný charakter modelu musíme mít vždy na paměti, ...



Norbert Wiener (1894 – 1964)

Nejlepším modelem kočky je kočka, nejlépe ta samá.

Máte-li dva konkurenční modely, které vám dávají přesně stejné předpovědi, potom lepší je ten jednodušší.



George E. P. Box (1919 - 2013)



William Ockham (1287 – 1347) →

# Náhodné jevy

# Náhodné jevy

- Náhodný experiment  
vyústí v některý z různých, ale známých výsledků

# Náhodné jevy

- Náhodný experiment  
vyústí v některý z různých, ale známých výsledků
- elementární náhodné jevy  $\Omega$   
 $\Omega$  je množina konkrétních výsledků daného experimentu

# Náhodné jevy

- Náhodný experiment  
vyústí v některý z různých, ale známých výsledků
- elementární náhodné jevy  $\Omega$   
 $\Omega$  je množina konkrétních výsledků daného experimentu
- jevové pole  $\mathcal{F}$   
je to množina všech možných výsledků (podmnožin  $\Omega$ )

# Náhodné jevy

- Náhodný experiment  
vyústí v některý z různých, ale známých výsledků
- elementární náhodné jevy  $\Omega$   
 $\Omega$  je množina konkrétních výsledků daného experimentu
- jevové pole  $\mathcal{F}$

je to množina všech možných výsledků (podmnožin  $\Omega$ )

$$(1) \quad \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$(2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$$

$$(3) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

# Náhodné jevy

- Náhodný experiment  
vyústí v některý z různých, ale známých výsledků
- elementární náhodné jevy  $\Omega$   
 $\Omega$  je množina konkrétních výsledků daného experimentu
- jevové pole  $\mathcal{F}$

je to množina všech možných výsledků (podmnožin  $\Omega$ )

$$(1) \quad \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$(2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$$

$$(3) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

- $(\Omega, \mathcal{F})$  .... náhodný prostor  
charakterizuje náhodný experiment

# Náhodné jevy

- Náhodný experiment  
vyústí v některý z různých, ale známých výsledků
- elementární náhodné jevy  $\Omega$   
 $\Omega$  je množina konkrétních výsledků daného experimentu
- jevové pole  $\mathcal{F}$

je to množina všech možných výsledků (podmnožin  $\Omega$ )

$$(1) \quad \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$(2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$$

$$(3) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

- $(\Omega, \mathcal{F})$  .... náhodný prostor

charakterizuje náhodný experiment

**Náhodné x deterministické jevy**



# Náhodné jevy

- Náhodný experiment  
vyústí v některý z různých, ale známých výsledků
- elementární náhodné jevy  $\Omega$   
 $\Omega$  je množina konkrétních výsledků daného experimentu
- jevové pole  $\mathcal{F}$

je to množina všech možných výsledků (podmnožin  $\Omega$ )

$$(1) \quad \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$(2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$$

$$(3) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

- $(\Omega, \mathcal{F})$  .... náhodný prostor

charakterizuje náhodný experiment

**Náhodné x deterministické jevy**



# Kvantifikace náhody

# Kvantifikace náhody

Na počátku bylo hledání „matematické naděje“

# Kvantifikace náhody

Na počátku bylo hledání „matematické naděje“



Antoine Gombaud, Chevalier de Méré  
(1607 – 1684)



# Kvantifikace náhody

Na počátku bylo hledání „matematické naděje“



Antoine Gombaud, Chevalier de Méré  
(1607 – 1684)



# Kvantifikace náhody

Na počátku bylo hledání „matematické naděje“

## První hra:

Spočívala v hodu jednou kostkou. Chevalier de Méré přijímal sázky na to, že hodí minimálně jednu šestku ve čtyřech po sobě následujících hodech. Věděl, že pravděpodobnost padnutí šestky je v každém hodu  $1/6$ . Domníval se, že jeho šance na padnutí šestky ve čtyřech hodech je tedy  $(1/6) \times 4 = 2/3$ .



Antoine Gombaud, Chevalier de Méré  
(1607 – 1684)



# Kvantifikace náhody

Na počátku bylo hledání „matematické naděje“

## První hra:

Spočívala v hodu jednou kostkou. Chevalier de Méré přijímal sázky na to, že hodí minimálně jednu šestku ve čtyřech po sobě následujících hodech. Věděl, že pravděpodobnost padnutí šestky je v každém hodu  $1/6$ . Domníval se, že jeho šance na padnutí šestky ve čtyřech hodech je tedy  $(1/6) \times 4 = 2/3$ .

## Druhá hra:

Druhá hra spočívala v hodu dvěma kostkami. Chevaliera de Méré byl úspěšný, pokud se mu alespoň jedenkrát podařilo hodit 2 šestky ve 24 hodech. Opět věděl, že pravděpodobnost vrhnutí dvou šestek v jednom hodu je  $1/36$  (pouze jedna možnost z  $6 \times 6$  možných případů). Předpokládal, že jeho šance je tedy  $(1/36) \times 24$  a tudíž opět  $2/3$ .



Antoine Gombaud, Chevalier de Méré  
(1607 – 1684)

# Kvantifikace náhody

Na počátku bylo hledání „matematické naděje“

## První hra:

Spočívala v hodů jedinou kostkou. Chevalier de Méré přijímal sázky na to, že hodí minimálně jednu šestku ve čtyřech po sobě následujících hodech. Věděl, že pravděpodobnost padnutí šestky je v každém hodu  $1/6$ . Domníval se, že jeho šance na padnutí šestky ve čtyřech hodech je tedy  $(1/6) \times 4 = 2/3$ .

## Druhá hra:

Druhá hra spočívala v hodů dvěma kostkami. Chevaliera de Méré byl úspěšný, pokud se mu alespoň jedenkrát podařilo hodit 2 šestky ve 24 hodech. Opět věděl, že pravděpodobnost vrhnutí dvou šestek v jednom hodu je  $1/36$  (pouze jedna možnost z  $6 \times 6$  možných případů). Předpokládal, že jeho šance je tedy  $(1/36) \times 24$  a tudíž opět  $2/3$ .

Přesto při druhé hře v kostky utrpěl Chevalier de Méré značné finanční ztráty. Jsou šance na výhru v obou kostkových hrách skutečně stejné? V čem byl jeho předpoklad chybný?



Antoine Gombaud, Chevalier de Méré  
(1607 – 1684)



# Kvantifikace náhody

Na počátku bylo hledání „matematické naděje“

## První hra:

Spočívala v hodu jednou kostkou. Chevalier de Méré přijímal sázky na to, že hodí minimálně jednu šestku ve čtyřech po sobě následujících hodech. Věděl, že pravděpodobnost padnutí šestky je v každém hodu  $1/6$ . Domníval se, že jeho šance na padnutí šestky ve čtyřech hodech je tedy  $(1/6) \times 4 = 2/3$ .

## Druhá hra:

Druhá hra spočívala v hodu dvěma kostkami. Chevaliera de Méré byl úspěšný, pokud se mu alespoň jedenkrát podařilo hodit 2 šestky ve 24 hodech. Opět věděl, že pravděpodobnost vrhnutí dvou šestek v jednom hodu je  $1/36$  (pouze jedna možnost z  $6 \times 6$  možných případů). Předpokládal, že jeho šance je tedy  $(1/36) \times 24$  a tudíž opět  $2/3$ .

Přesto při druhé hře v kostky utrpěl Chevalier de Méré značné finanční ztráty. Jsou šance na výhru v obou kostkových hrách skutečně stejné? V čem byl jeho předpoklad chybný?



Antoine Gombaud, Chevalier de Méré  
(1607 – 1684)

# První formulace pravděpodobnosti a jejích vlastností



Blaise Pascal (1623 - 1662)



Pierre de Fermat (1601 - 1665)

# První formulace pravděpodobnosti a jejích vlastností



Blaise Pascal (1623 - 1662)

## Rozdělení sázky:

Dva hráči hrají sérii lichého počtu  $N$  her a vyhraje ten, který dosáhne vícekrát vítězství. Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu  $m:n$  a je třeba sázku rozdělit mezi oba hráče.

Jaký je nejspravedlivější poměr rozdělení sázky?



Pierre de Fermat (1601 - 1665)

*Úloha o rozdělení sázky je jednou z nejstarších dokumentovaných úloh pravděpodobnosti a je připisována Blaise Pascalovi a Piere de Fermatovi z roku 1654. Ve skutečnosti je však mnohem starší a jsou známy její verze z konce XV. století. [[Informační bulletin ČStS 2009 \(2\)](#)]*



# První formulace pravděpodobnosti a jejích vlastností



Blaise Pascal (1623 - 1662)

## Rozdělení sázky:

Dva hráči hrají sérii lichého počtu  $N$  her a vyhraje ten, který dosáhne vícekrát vítězství. Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu  $m:n$  a je třeba sázku rozdělit mezi oba hráče.

Jaký je nejspravedlivější poměr rozdělení sázky?



Pierre de Fermat (1601 - 1665)

*Úloha o rozdělení sázky je jednou z nejstarších dokumentovaných úloh pravděpodobnosti a je připisována Blaise Pascalovi a Pierre de Fermatovi z roku 1654. Ve skutečnosti je však mnohem starší a jsou známy její verze z konce XV. století. [[Informační bulletin ČStS 2009 \(2\)](#)]*

Dva hráči hrají sérii 9 her a vyhraje ten, kdo první dosáhne 5 vítězství. Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu 4:2 a je třeba spravedlivě rozdělit sázku mezi oba hráče. Jak?

# První formulace pravděpodobnosti a jejích vlastností



Blaise Pascal (1623 - 1662)

## Rozdělení sázky:

Dva hráči hrají sérii lichého počtu  $N$  her a vyhraje ten, který dosáhne vícekrát vítězství. Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu  $m:n$  a je třeba sázku rozdělit mezi oba hráče.

Jaký je nejspravedlivější poměr rozdělení sázky?



Pierre de Fermat (1601 - 1665)

*Úloha o rozdělení sázky je jednou z nejstarších dokumentovaných úloh pravděpodobnosti a je připisována Blaise Pascalovi a Pierre de Fermatovi z roku 1654. Ve skutečnosti je však mnohem starší a jsou známy její verze z konce XV. století. [[Informační bulletin ČStS 2009 \(2\)](#)]*

Dva hráči hrají sérii 9 her a vyhraje ten, kdo první dosáhne 5 vítězství. Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu 4:2 a je třeba spravedlivě rozdělit sázku mezi oba hráče. Jak?





# Další slavná úloha teorie pravděpodobnosti:

## Úloha o ruinování hráče

Dva hráči A a B hrají sérii her. Při každé hře hráči vsadí jednu korunu. Hráč A vyhraje s pravděpodobností  $p$  a prohraje s pravděpodobností  $1-p$ . Na počátku má hráč celkem  $x$  korun, hráč B má  $y$  korun. Hry jsou vzájemně nezávislé. Hra se hraje tak dlouho, dokud mají oba co vsadit. Tedy hra končí v okamžiku, kdy je jeden z hráčů zruinován. Jakou mají hráči A a B pravděpodobnost zruinování?

*Další z nejznámějších pravděpodobnostních úloh, kterou lze nalézt například v učebnici teorie pravděpodobnosti W. Feller z roku 1957.*

<http://www.statpol.cz/oldstat/bulletiny/ib-93-4.pdf>



# Další slavná úloha teorie pravděpodobnosti:

## Úloha o ruinování hráče

Dva hráči A a B hrají sérii her. Při každé hře hráči vsadí jednu korunu. Hráč A vyhraje s pravděpodobností  $p$  a prohraje s pravděpodobností  $1-p$ . Na počátku má hráč celkem  $x$  korun, hráč B má  $y$  korun. Hry jsou vzájemně nezávislé. Hra se hraje tak dlouho, dokud mají oba co vsadit. Tedy hra končí v okamžiku, kdy je jeden z hráčů zruinován. Jakou mají hráči A a B pravděpodobnost zruinování?

*Další z nejznámějších pravděpodobnostních úloh, kterou lze nalézt například v učebnici teorie pravděpodobnosti W. Feller z roku 1957.*

<http://www.statpol.cz/oldstat/bulletiny/ib-93-4.pdf>



# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

- Situace 1:
- počet  $N$  elementárních výsledků je konečný,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci některého z  $N_A$  elementárních výsledků

$$\text{potom } P(A) = \frac{\text{počet „příznivých“ výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}} = \frac{N_A}{N}$$

Příklad 1: Provádíme experiment, který může skončit jedním ze tří stejně možných výsledků. Označme je  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Jaká je pravděpodobnost, že při  $n$  nezávislých opakováních tohoto experimentu nastane  $k$  výsledků typu  $A$ ?

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(AA) = \frac{1}{3 \cdot 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \dots \quad P(A^k) = \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A}^{n-k}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

$(\underbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}_k \underbrace{\circ \circ \dots \circ}_{n-k})$  celkem je  $\binom{n}{k}$  možností jak výsledky uspořádat

$$P(k\text{-krát nastane } A \text{ a zároveň } (n-k)\text{-krát } a \text{ nenastane}) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$



# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

- Situace 1:
- počet  $N$  elementárních výsledků je konečný,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci některého z  $N_A$  elementárních výsledků

$$\text{potom } P(A) = \frac{\text{počet „příznivých“ výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}} = \frac{N_A}{N}$$

Příklad 1: Provádíme experiment, který může skončit jedním ze tří stejně možných výsledků. Označme je  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Jaká je pravděpodobnost, že při  $n$  nezávislých opakováních tohoto experimentu nastane  $k$  výsledků typu  $A$ ?

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(AA) = \frac{1}{3 \cdot 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \dots \quad P(A^k) = \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A}^{n-k}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

$(\underbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}_k \underbrace{\circ \circ \dots \circ}_{n-k})$  celkem je  $\binom{n}{k}$  možností jak výsledky uspořádat

$$P(k\text{-krát nastane } A \text{ a zároveň } (n-k)\text{-krát } a \text{ nenastane}) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$



# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

Situace 2:

# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

Situace 2: 

- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,

# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné

# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$

# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$
  - pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $\Omega$  na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře  $\mu(\Omega)$ , potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$
  - pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $\Omega$  na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře  $\mu(\Omega)$ , potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklad 2: Přepřavní společnost vám oznámí, že někdy mezi 12. a 13. hodinou bude doručovat balíček. Protože se jedná o velkou zásilku, řidič bude počká až 15 minut a potom odjíždí. Vy se dostavíte na místo doručení také někdy mezi 12. a 13. hodinou a můžete počkat také maximálně 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že zásilku od řidiče převezmete?

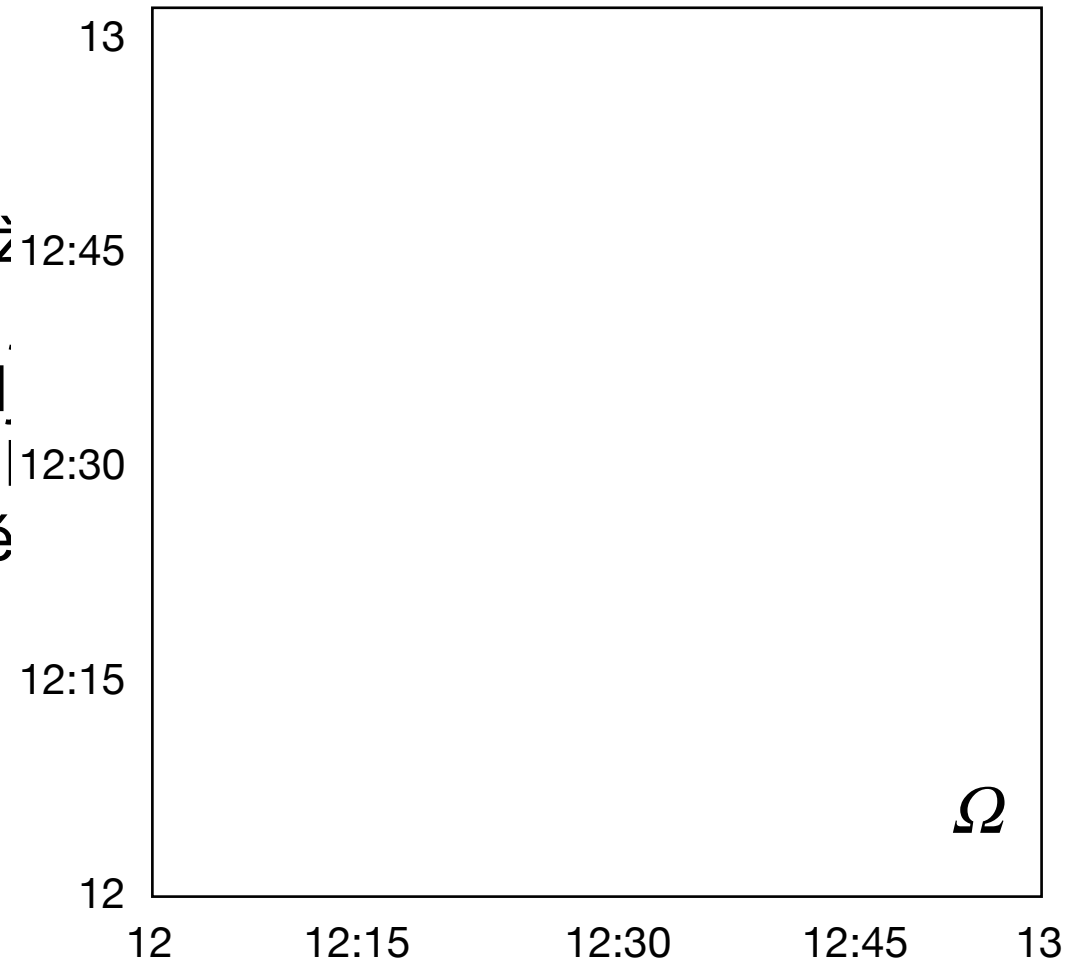
# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

- Situace 2:**
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$
  - pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $\Omega$  na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře  $\mu(\Omega)$ , potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

- Příklad 2:** Převážní společnost vám oznámí, že 12:45 bude doručovat balíček. Protože se bude počká až 15 minut a potom od doručení také někdy mezi 12. a 13. maximálně 15 minut. Jaká je pravdě převeďte?





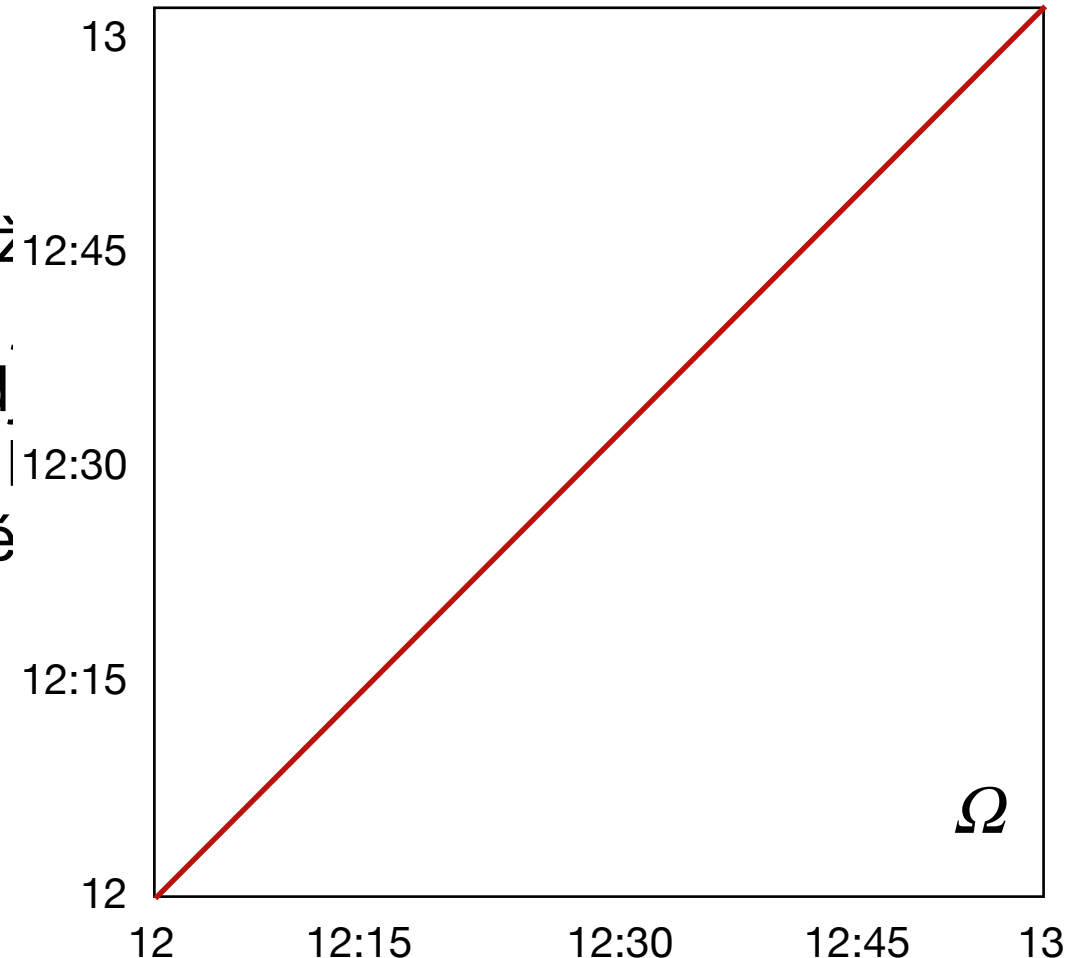
# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$
  - pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $\Omega$  na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře  $\mu(\Omega)$ , potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

- Příklad 2: Převážní společnost vám oznámí, že 12:45 bude doručovat balíček. Protože se bude počká až 15 minut a potom od doručení také někdy mezi 12. a 13. maximálně 15 minut. Jaká je pravdě převeďte?



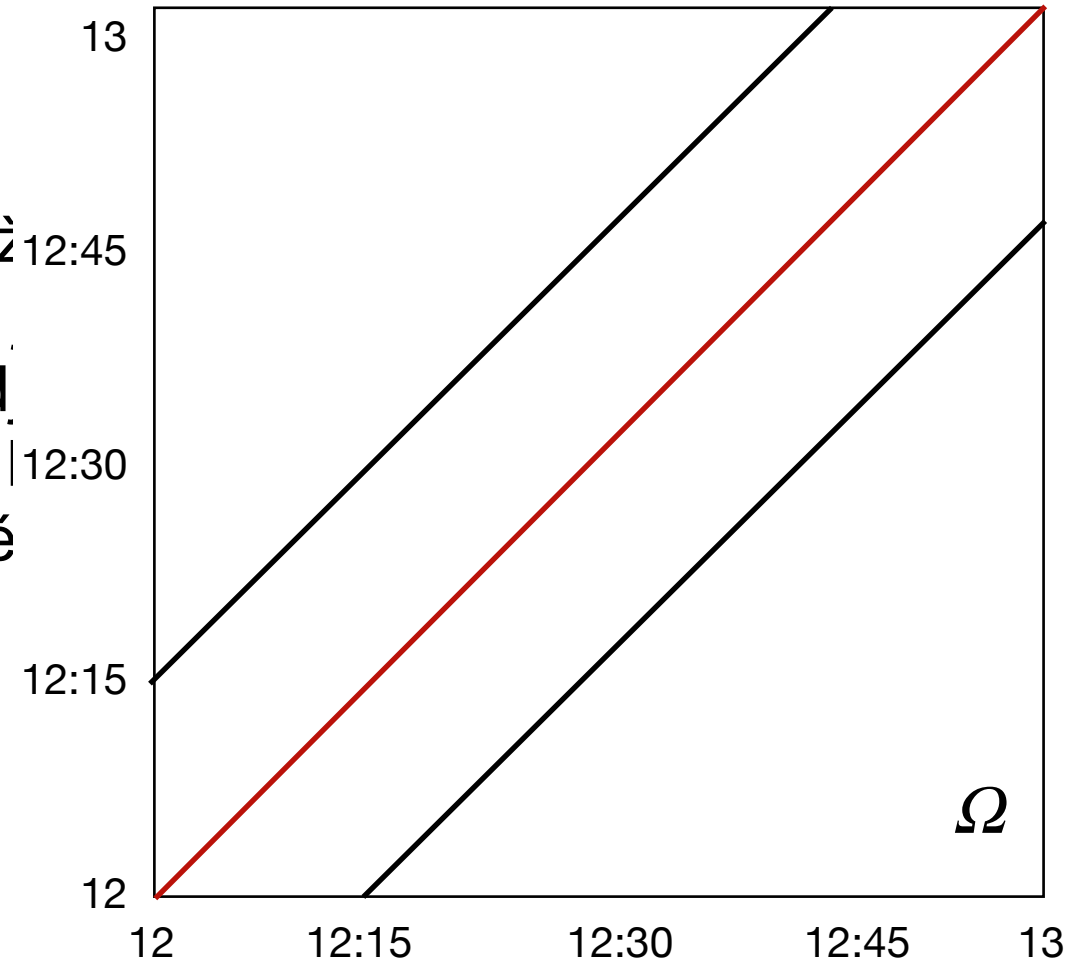
# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$
  - pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $\Omega$  na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře  $\mu(\Omega)$ , potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

- Příklad 2: Převážní společnost vám oznámí, že 12:45 bude doručovat balíček. Protože se bude počká až 15 minut a potom od doručení také někdy mezi 12. a 13. maximálně 15 minut. Jaká je pravdě převeďte?



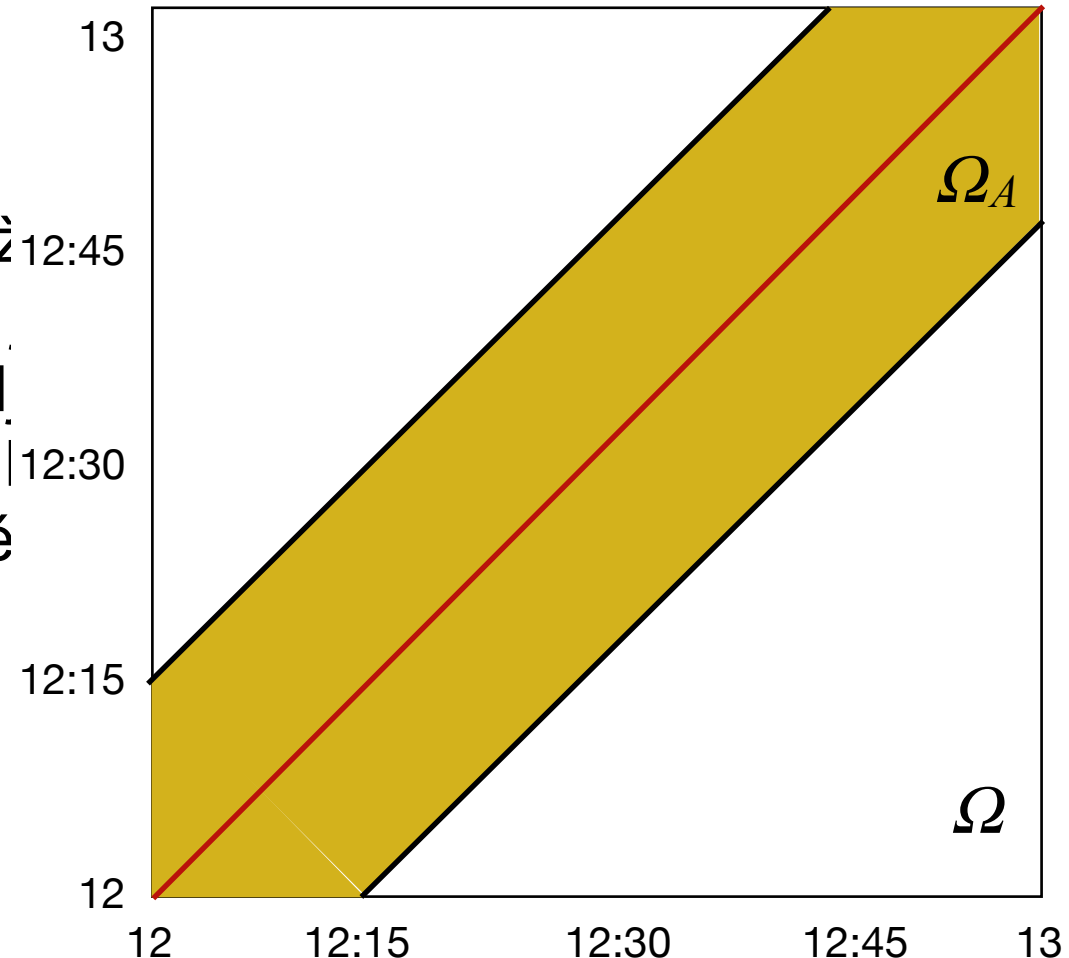
# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$
  - pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $\Omega$  na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře  $\mu(\Omega)$ , potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

- Příklad 2: Převážní společnost vám oznámí, že 12:45 bude doručovat balíček. Protože se bude počká až 15 minut a potom od doručení také někdy mezi 12. a 13. maximálně 15 minut. Jaká je pravdě převeďte?



# Pravděpodobnost

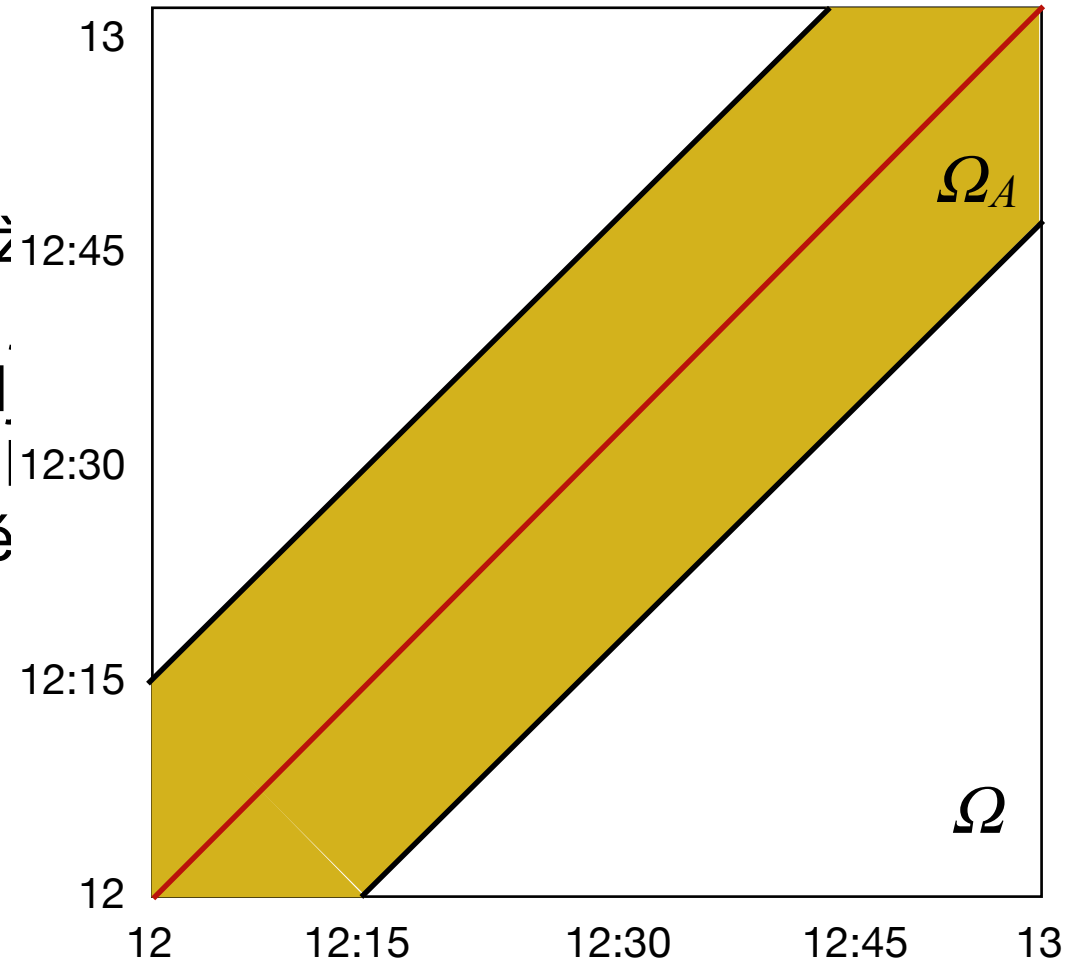
Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$
  - pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $\Omega$  na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře  $\mu(\Omega)$ , potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

- Příklad 2: Převážní společnost vám oznámí, že 12:45 bude doručovat balíček. Protože se bude počká až 15 minut a potom od doručení také někdy mezi 12. a 13. maximálně 15 minut. Jaká je pravdě převeďte?

$$\mu(\Omega) = 1, \quad \mu(\Omega_A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$



# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

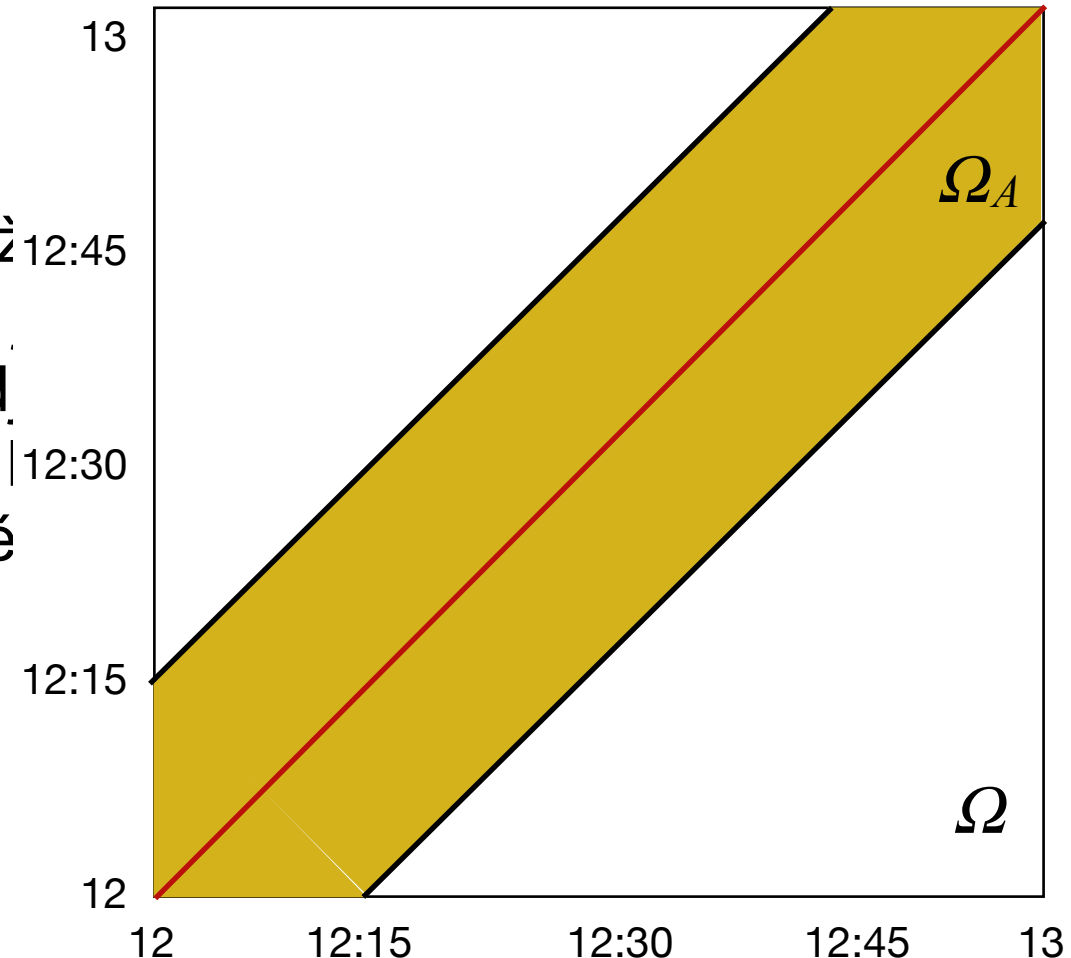
- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$
  - pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $\Omega$  na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře  $\mu(\Omega)$ , potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklad 2: Přepravní společnost vám oznámí, že 12:45 bude doručovat balíček. Protože se bude počká až 15 minut a potom od doručení také někdy mezi 12. a 13. maximálně 15 minut. Jaká je pravdě převezmete?

$$\mu(\Omega) = 1, \quad \mu(\Omega_A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(A) = \frac{7}{16} = 0,4375$$



# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... [pravděpodobnost tohoto náhodného jevu](#)

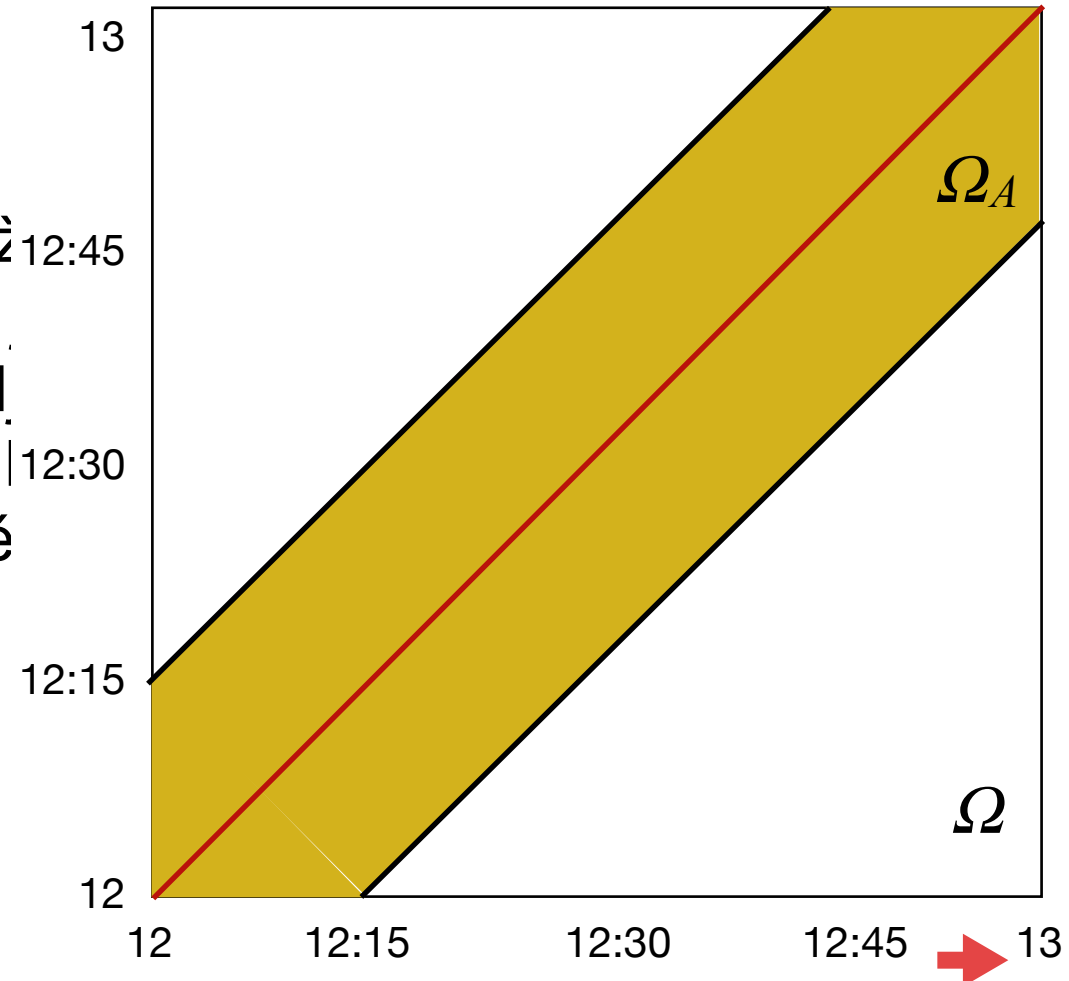
- Situace 2:
- množina všech elementárních výsledků  $\Omega$  je nekonečná,
  - všechny elementární výsledky jsou stejně možné
  - sledovaný náhodný jev  $A$  nastává při realizaci nějaké podmnožiny  $\Omega_A$
  - pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení  $\Omega$  na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře  $\mu(\Omega)$ , potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklad 2: Přepravní společnost vám oznámí, že 12:45 bude doručovat balíček. Protože se bude počká až 15 minut a potom od doručení také někdy mezi 12. a 13. maximálně 15 minut. Jaká je pravdě převezmete?

$$\mu(\Omega) = 1, \quad \mu(\Omega_A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(A) = \frac{7}{16} = 0,4375$$



# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A)$  = počet elementárních jevů v jevu  $A$

$\mu(A)$  = “míra” jevu  $A$

# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A)$  = počet elementárních jevů v jevu  $A$

$\mu(A)$  = “míra” jevu  $A$





# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A)$  = počet elementárních jevů v jevu  $A$

$\mu(A)$  = “míra” jevu  $A$

2. Statistická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$$



# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A)$  = počet elementárních jevů v jevu  $A$

$\mu(A)$  = “míra” jevu  $A$

2. Statistická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$$

**Příklad 3:** Jaká je pravděpodobnost výroby neshodného výrobku?



# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A)$  = počet elementárních jevů v jevu  $A$

$\mu(A)$  = “míra” jevu  $A$

2. Statistická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$$

**Příklad 3:** Jaká je pravděpodobnost výroby neshodného výrobku?

Po určitou (dlouhou) dobu budeme sledovat výrobu a kontrolovat kvalitu výrobků. Relativní četnost zjištěných neshod  $n^A$  při kontrole  $n$  výrobků potom považujeme za odhad pravděpodobnosti neshody při výrobě.



# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A)$  = počet elementárních jevů v jevu  $A$

$\mu(A)$  = “míra” jevu  $A$

2. Statistická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$$

3. Axiomatická definice pravděpodobnosti

# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A)$  = počet elementárních jevů v jevu  $A$

$\mu(A)$  = “míra” jevu  $A$

2. Statistická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$$

3. Axiomatická definice pravděpodobnosti

(a)  $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

(b)  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

# Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich ... **pravděpodobnost tohoto náhodného jevu**

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A)$  = počet elementárních jevů v jevu  $A$

$\mu(A)$  = “míra” jevu  $A$

2. Statistická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$$

3. Axiomatická definice pravděpodobnosti

(a)  $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

(b)  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



# Pravděpodobnost

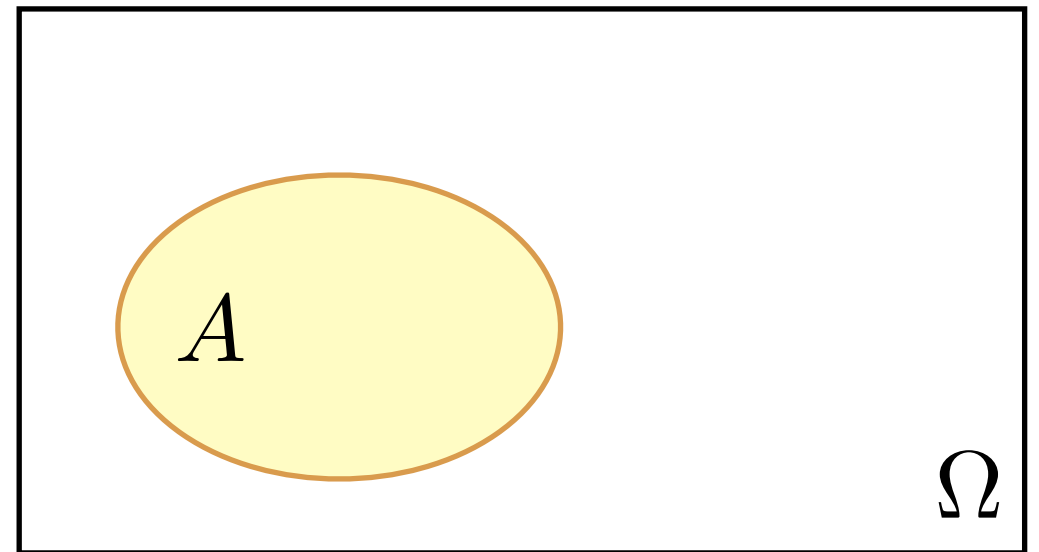
## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) =$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) =$



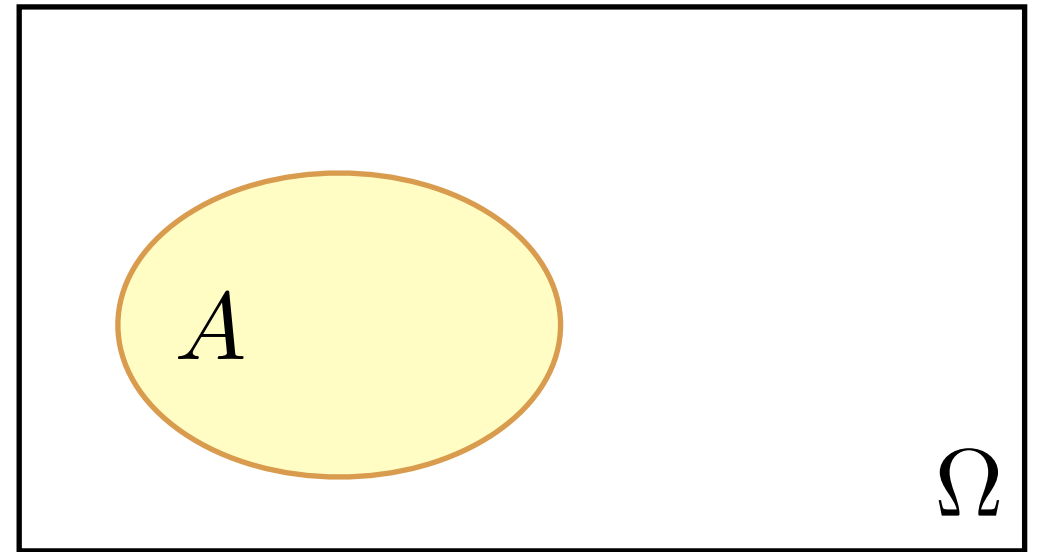
- $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega - A$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) =$

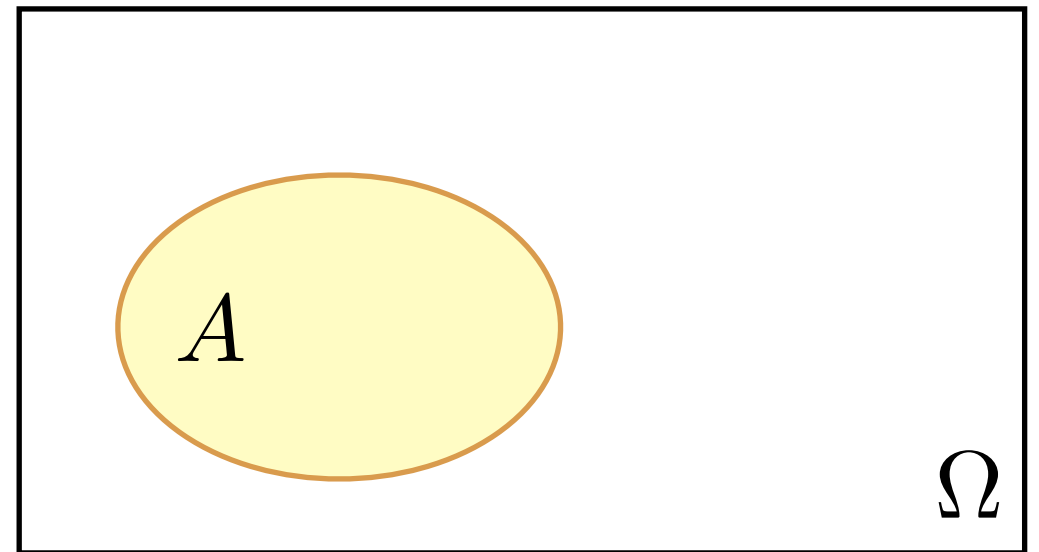


- $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega - A$
- tedy  $A^C$  a  $A$  jsou disjunktní,  $A^C \cap A = \emptyset$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) =$

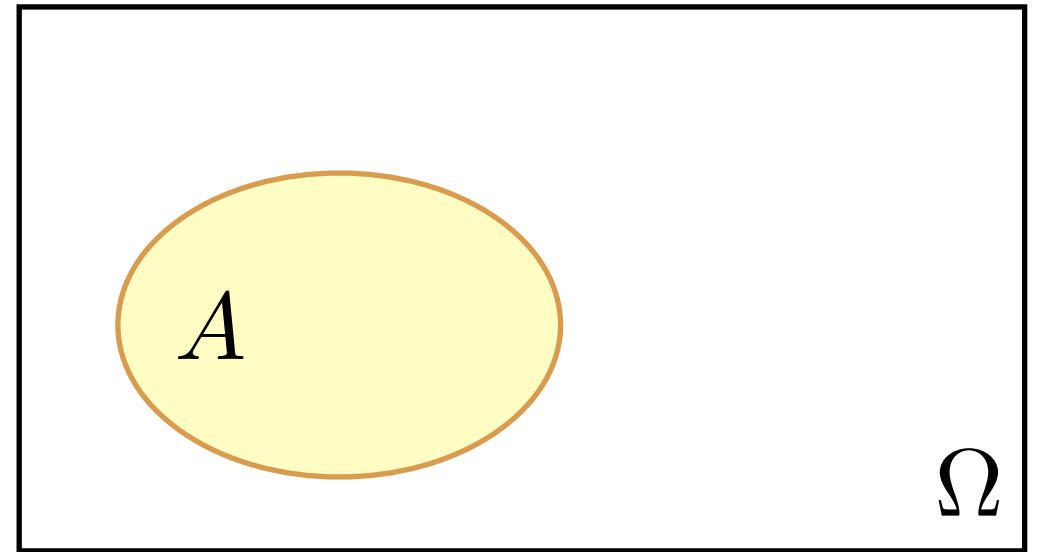


- $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega - A$
- tedy  $A^C$  a  $A$  jsou disjunktní,  $A^C \cap A = \emptyset$
- zároveň je  $A^C \cup A = \Omega$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) =$

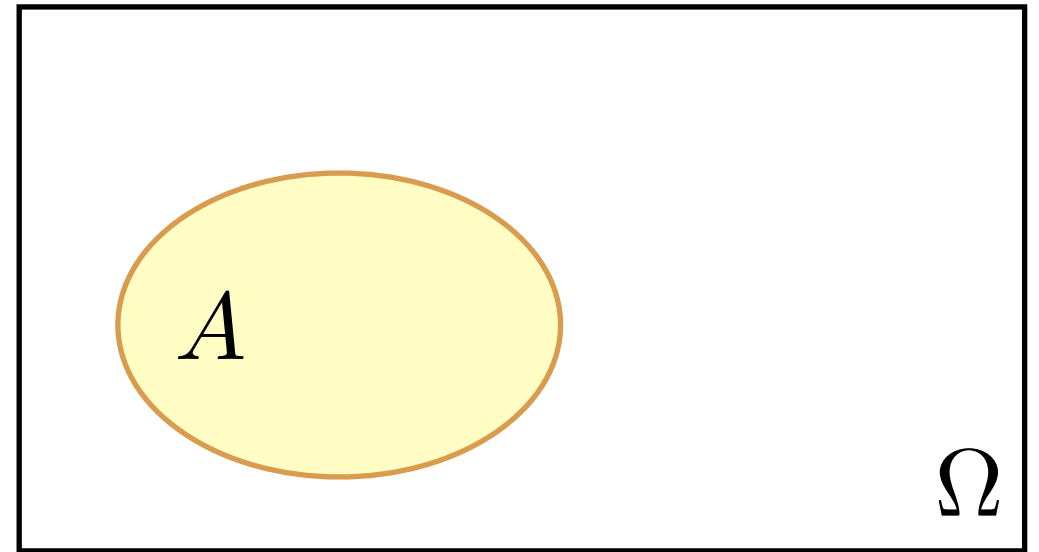


- $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega - A$
- tedy  $A^C$  a  $A$  jsou disjunktní,  $A^C \cap A = \emptyset$
- zároveň je  $A^C \cup A = \Omega$
- podle axiomů b), c) tedy platí  
$$P(A^C \cup A) = P(A^C) + P(A) = P(\Omega) = 1$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) =$

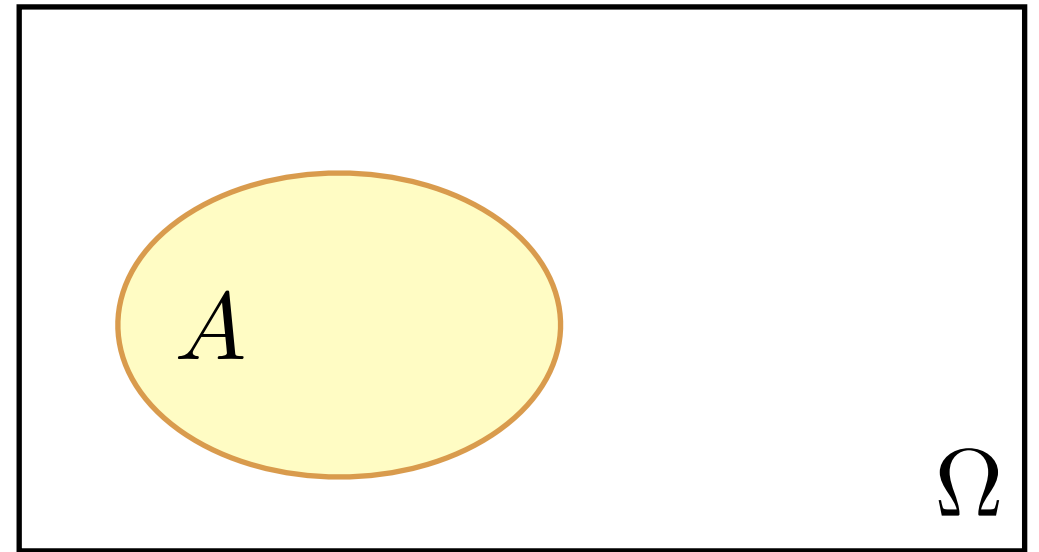


- $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega - A$
- tedy  $A^C$  a  $A$  jsou disjunktní,  $A^C \cap A = \emptyset$
- zároveň je  $A^C \cup A = \Omega$
- podle axiomů b), c) tedy platí  
$$P(A^C \cup A) = P(A^C) + P(A) = P(\Omega) = 1$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

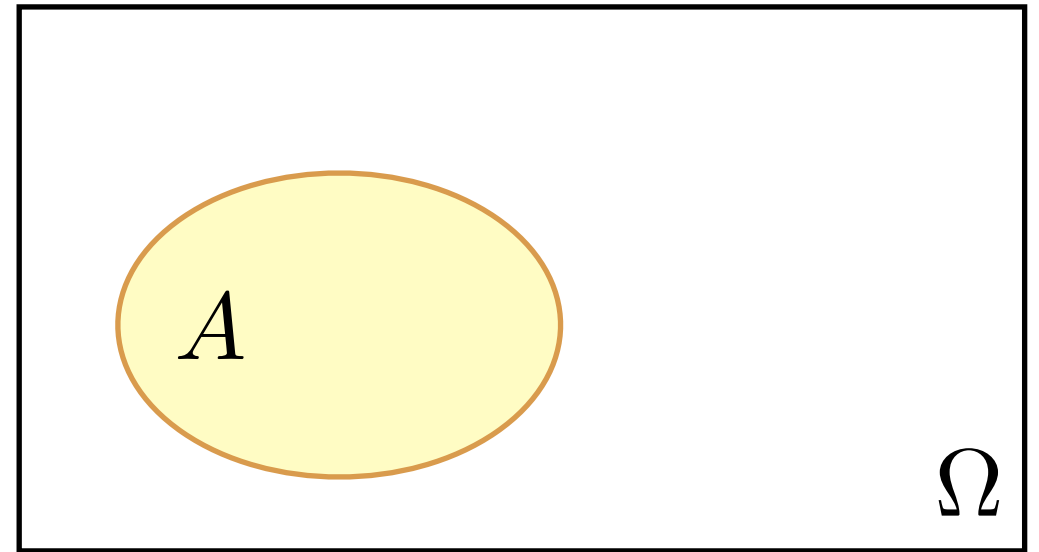


- $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega - A$
- tedy  $A^C$  a  $A$  jsou disjunktní,  $A^C \cap A = \emptyset$
- zároveň je  $A^C \cup A = \Omega$
- podle axiomů b), c) tedy platí
$$P(A^C \cup A) = P(A^C) + P(A) = P(\Omega) = 1$$
- a tedy  $P(A^C) = 1 - P(A)$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$



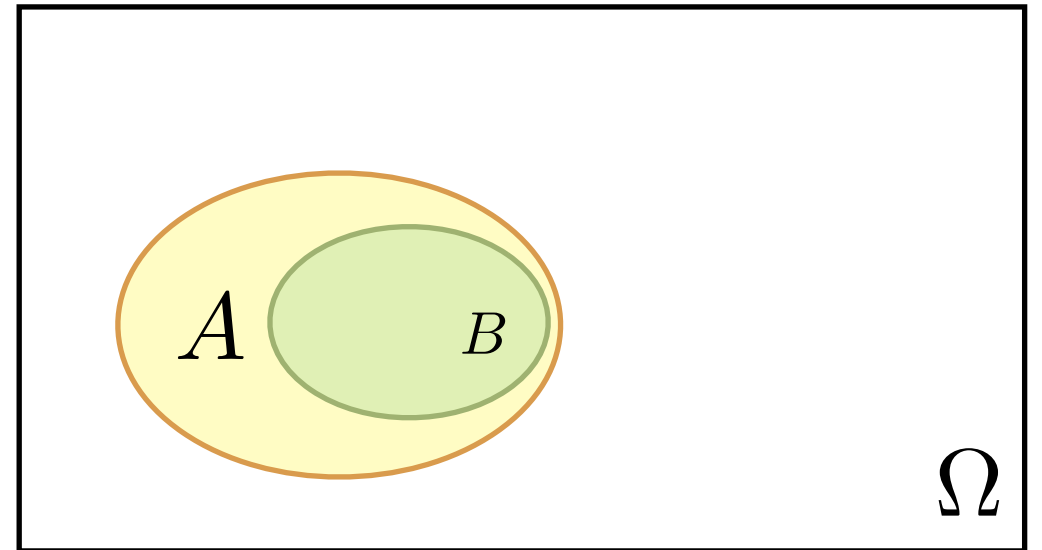
- $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega - A$
- tedy  $A^C$  a  $A$  jsou disjunktní,  $A^C \cap A = \emptyset$
- zároveň je  $A^C \cup A = \Omega$
- podle axiomů b), c) tedy platí  
$$P(A^C \cup A) = P(A^C) + P(A) = P(\Omega) = 1$$
- a tedy  $P(A^C) = 1 - P(A)$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

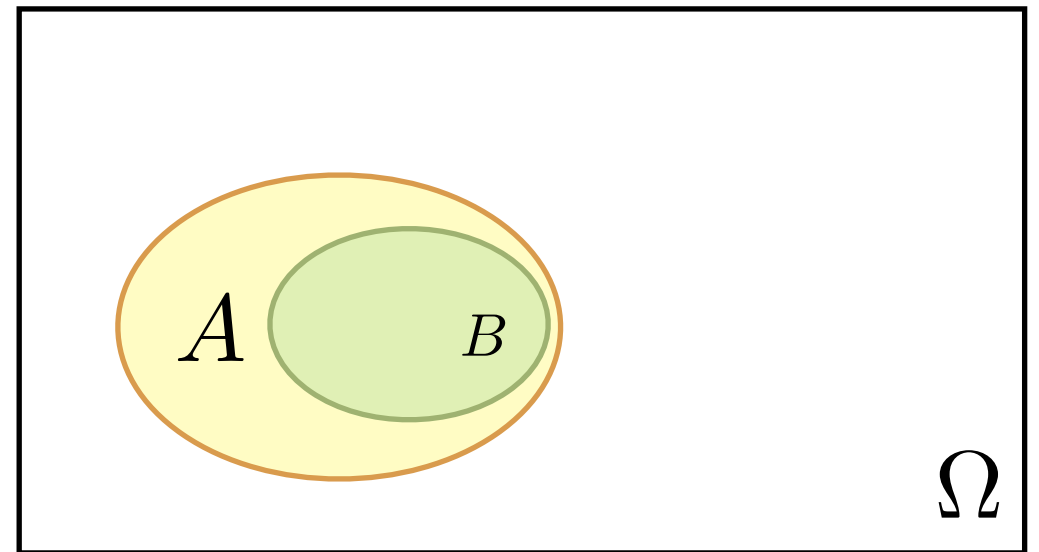
- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$



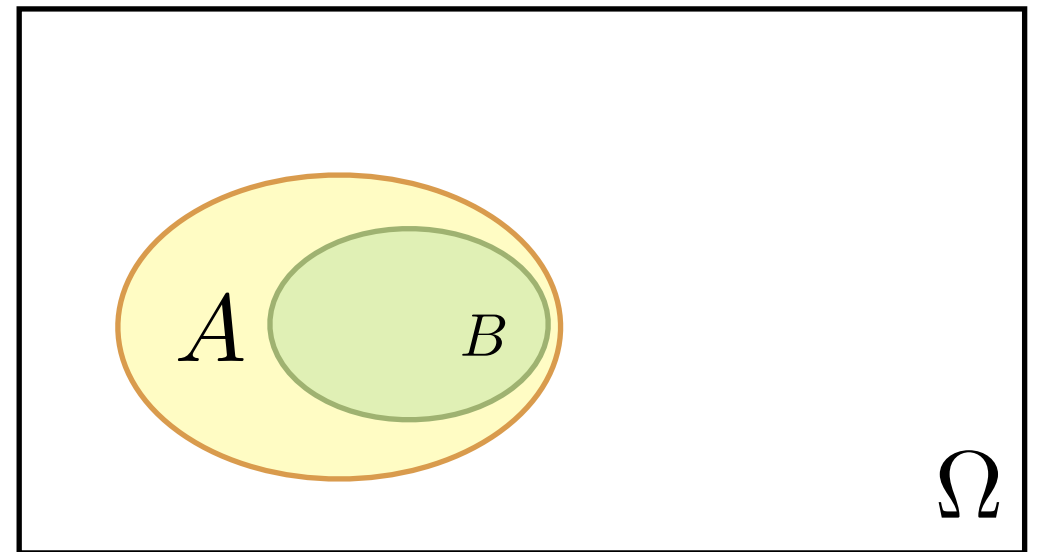
- označme  $B^{C(A)} = \{\omega \in A : \omega \notin B\} = A - B$
- a dále podobně jako v předchozím



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$



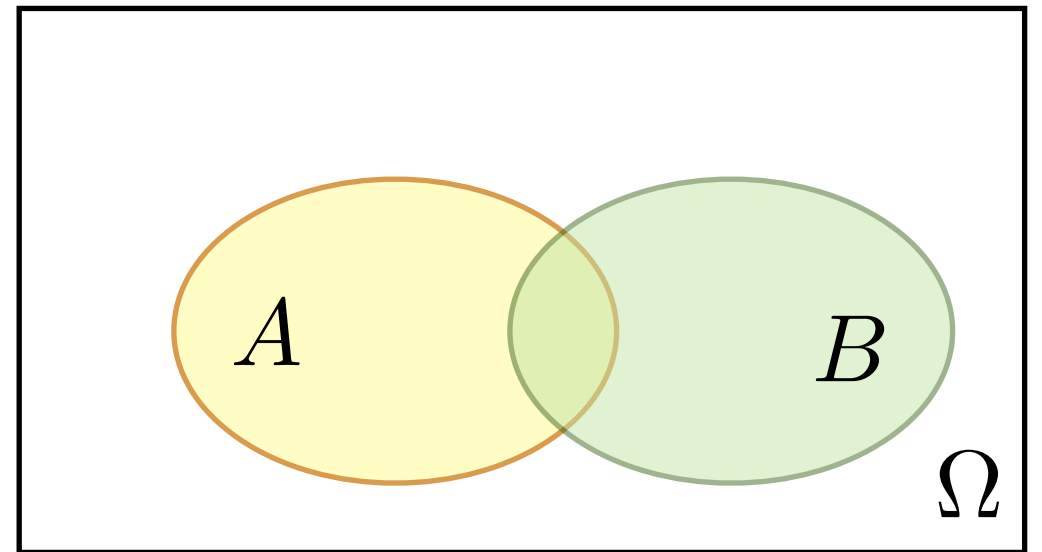
- označme  $B^{C(A)} = \{\omega \in A : \omega \notin B\} = A - B$
- a dále podobně jako v předchozím



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

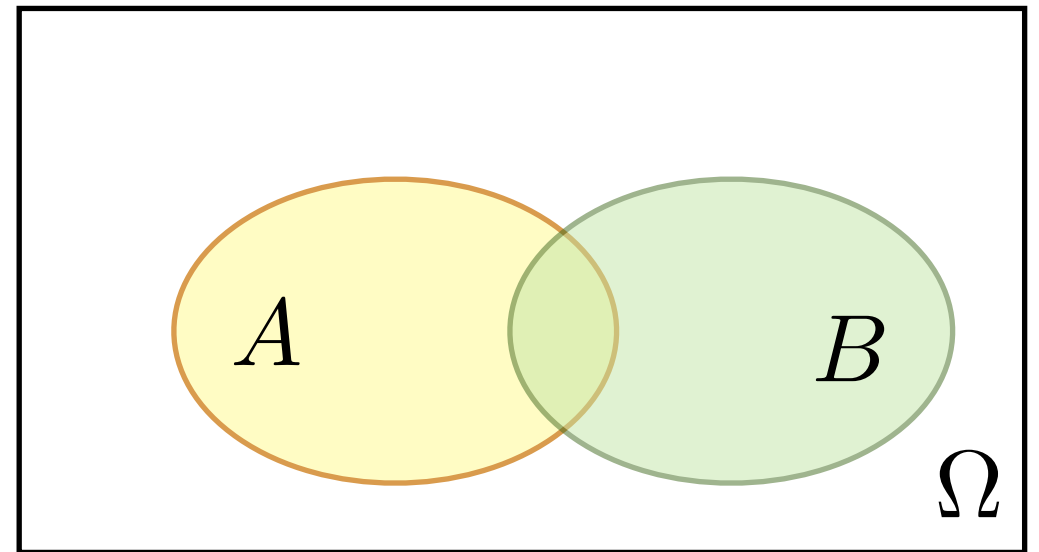
- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

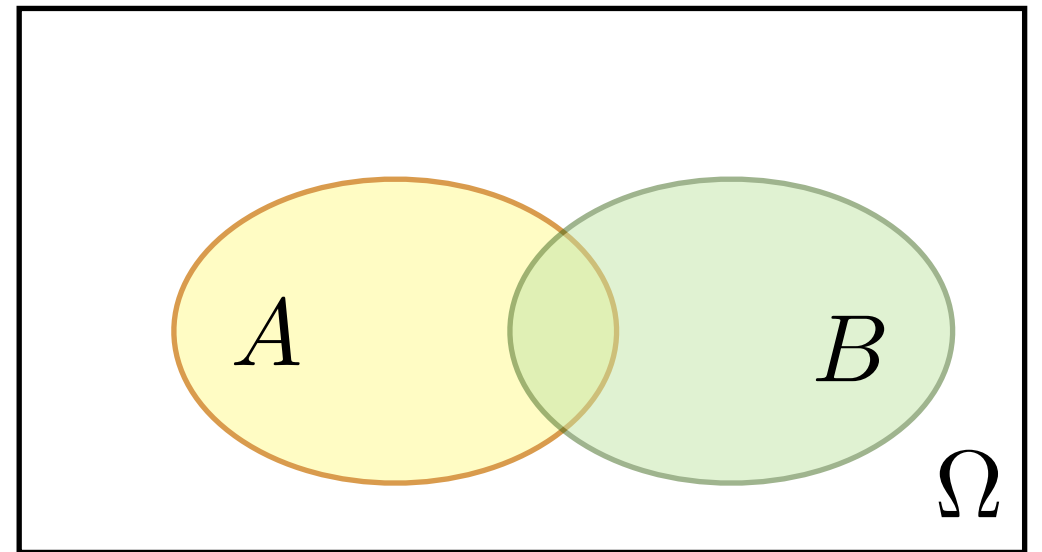


- $A = (A - B) \cup (A \cap B), (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset,$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

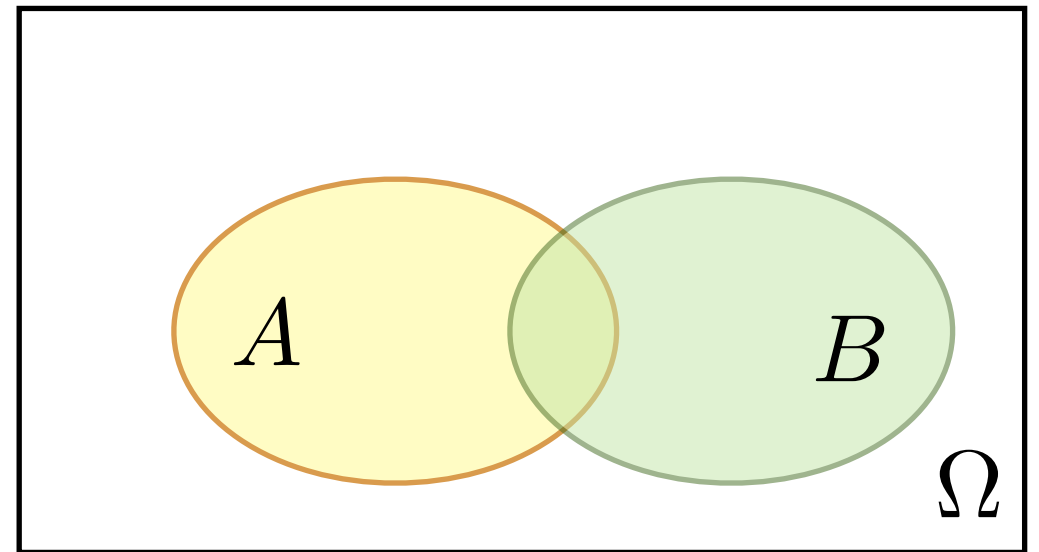


- $A = (A - B) \cup (A \cap B), (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset,$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

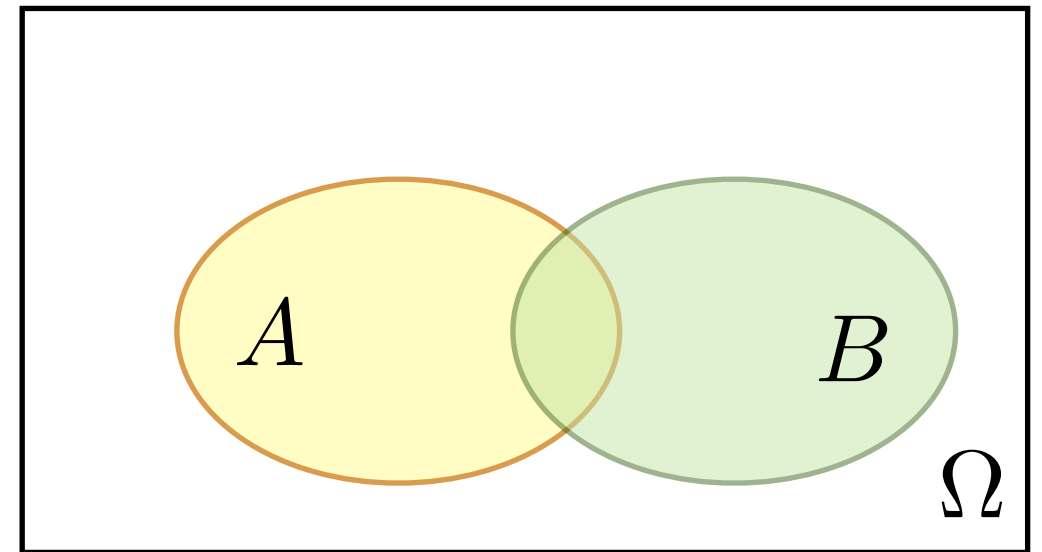


- $A = (A - B) \cup (A \cap B), (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset,$
- $A \cup B = A \cup (B - A), A \cap (B - A) = \emptyset$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

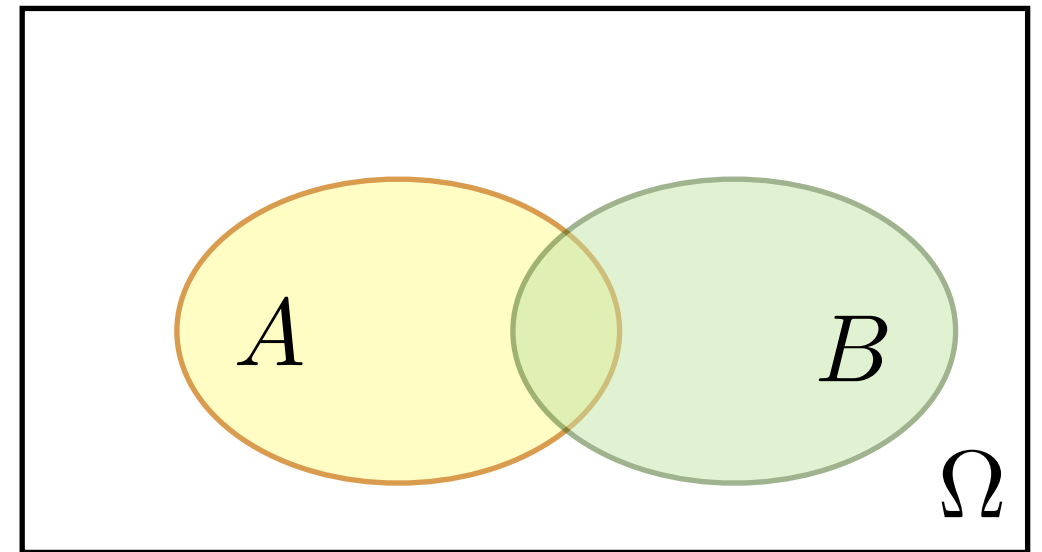


- $A = (A - B) \cup (A \cap B), (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset,$
- $A \cup B = A \cup (B - A), A \cap (B - A) = \emptyset$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



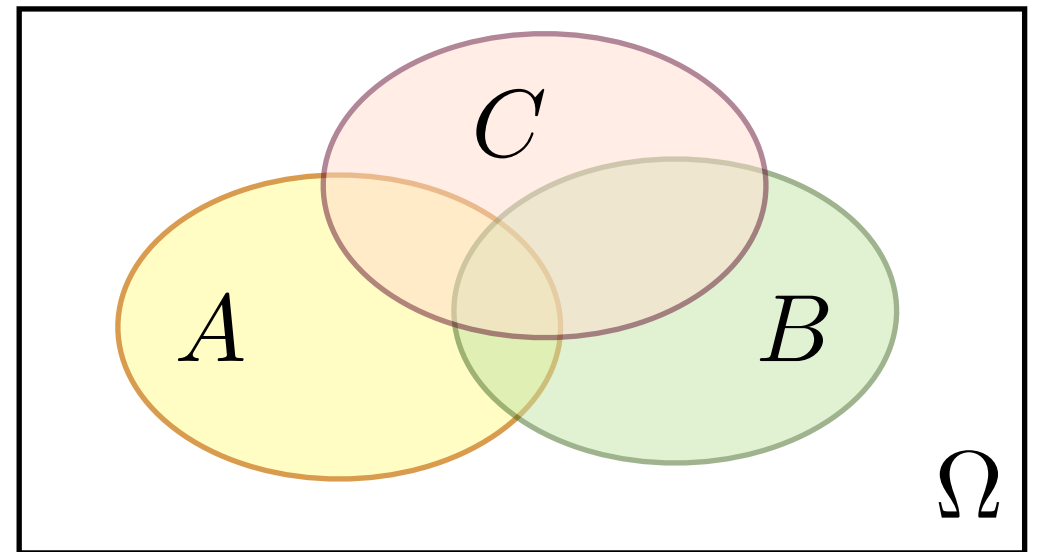
- $A = (A - B) \cup (A \cap B), (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset,$
- $A \cup B = A \cup (B - A), A \cap (B - A) = \emptyset$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 6)  $P(A \cup B \cup C) =$

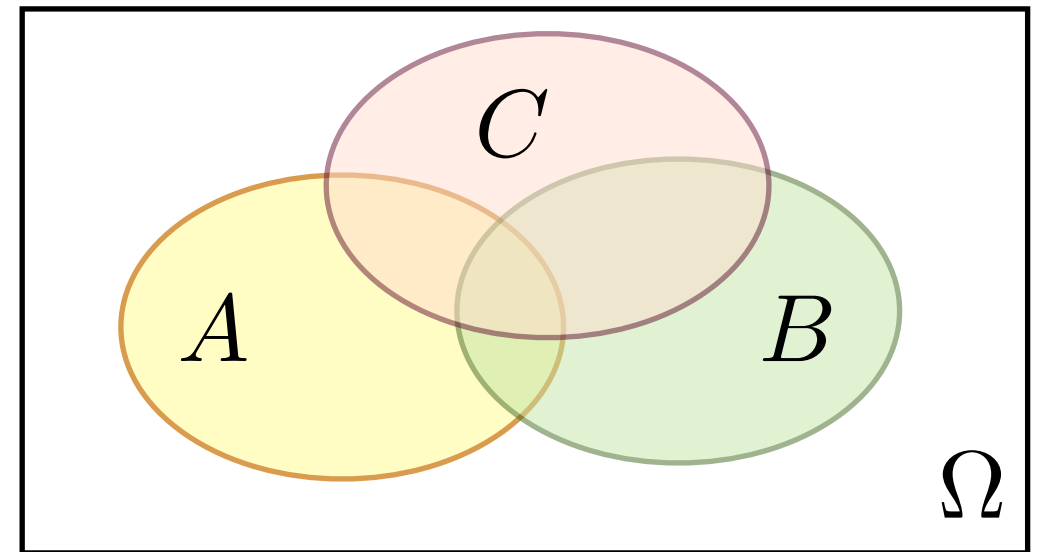




# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 6)  $P(A \cup B \cup C) =$

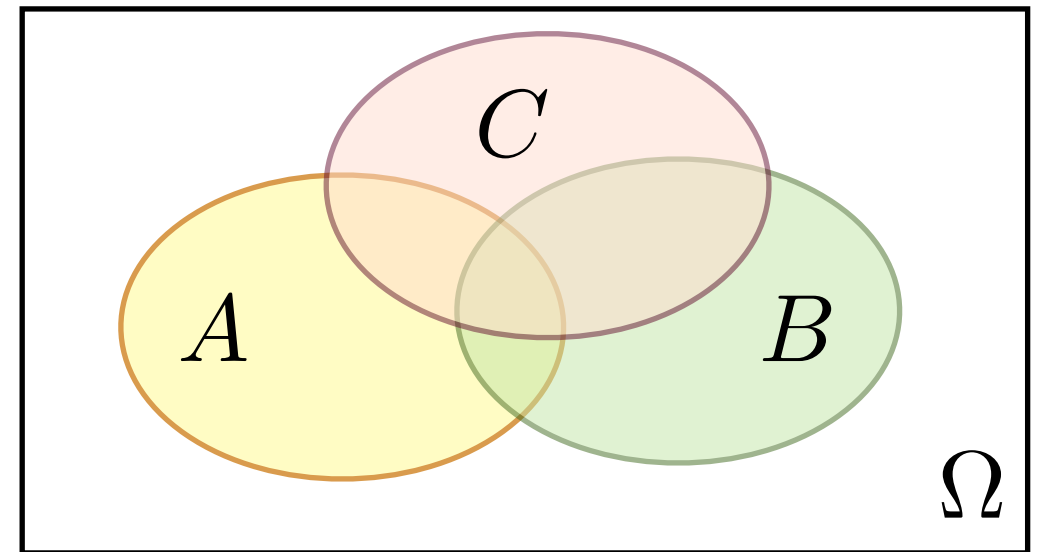


$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 6)  $P(A \cup B \cup C) =$

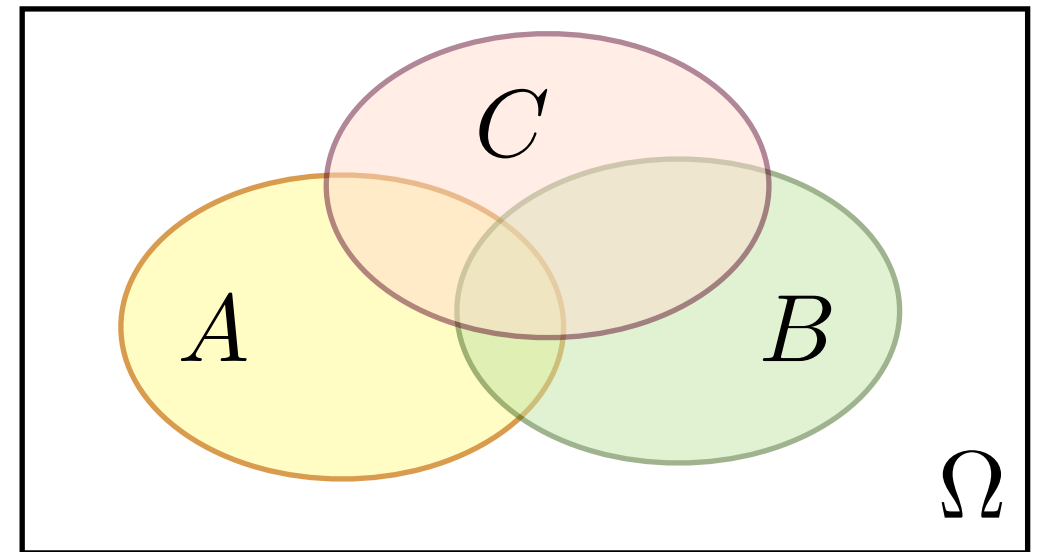


$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) + (P(B) + P(C) - P(B \cap C)) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \end{aligned}$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 6)  $P(A \cup B \cup C) =$



$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) + (P(B) + P(C) - P(B \cap C)) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)) \end{aligned}$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

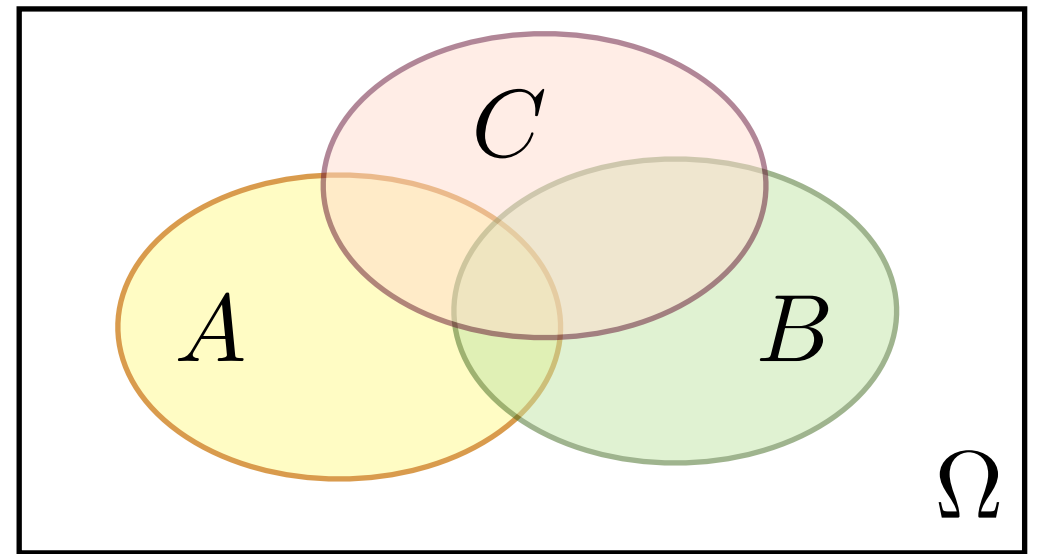
2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$



$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) + \left( P(B) + P(C) - P(B \cap C) \right) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - \left( P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \right) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

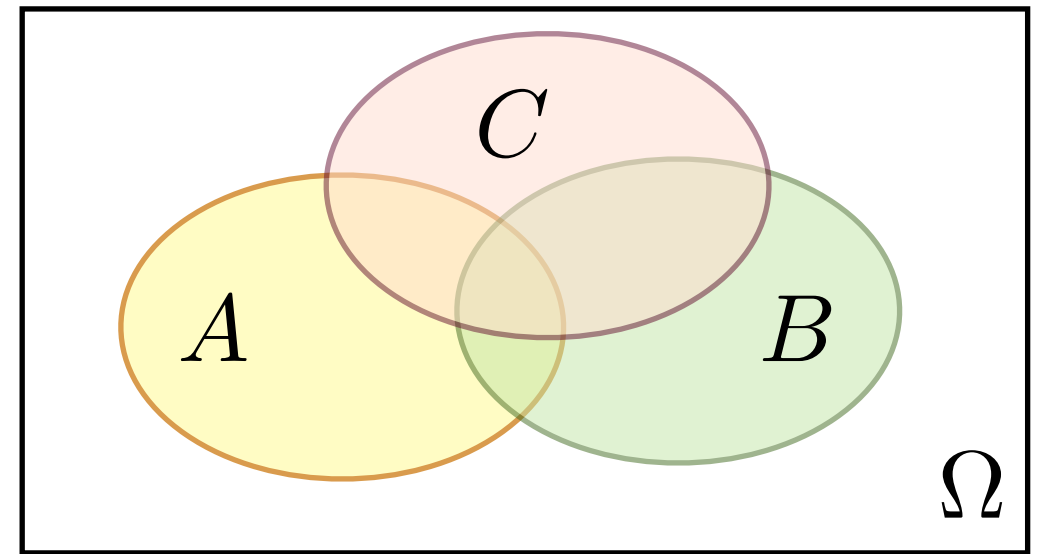
2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$



$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) + (P(B) + P(C) - P(B \cap C)) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

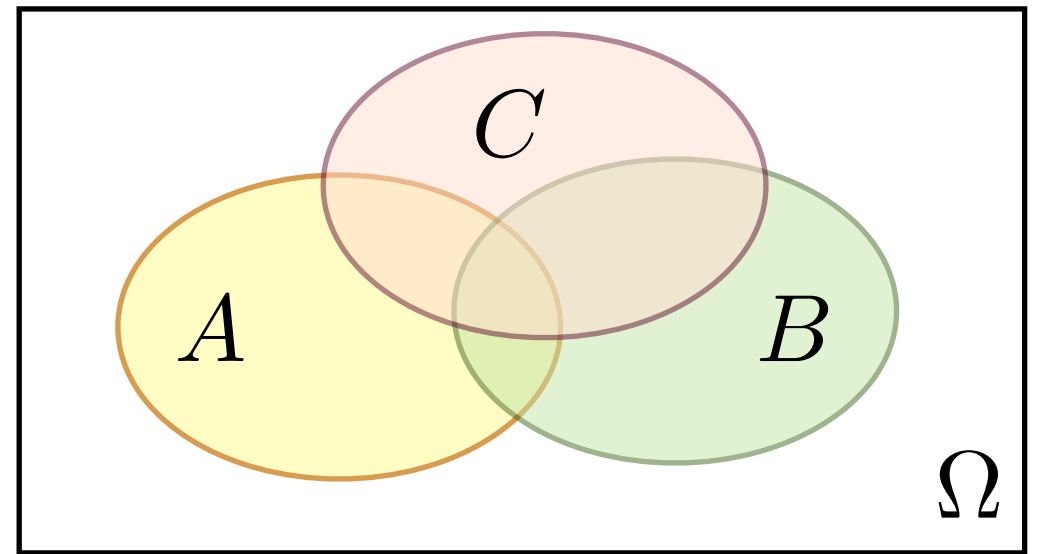
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

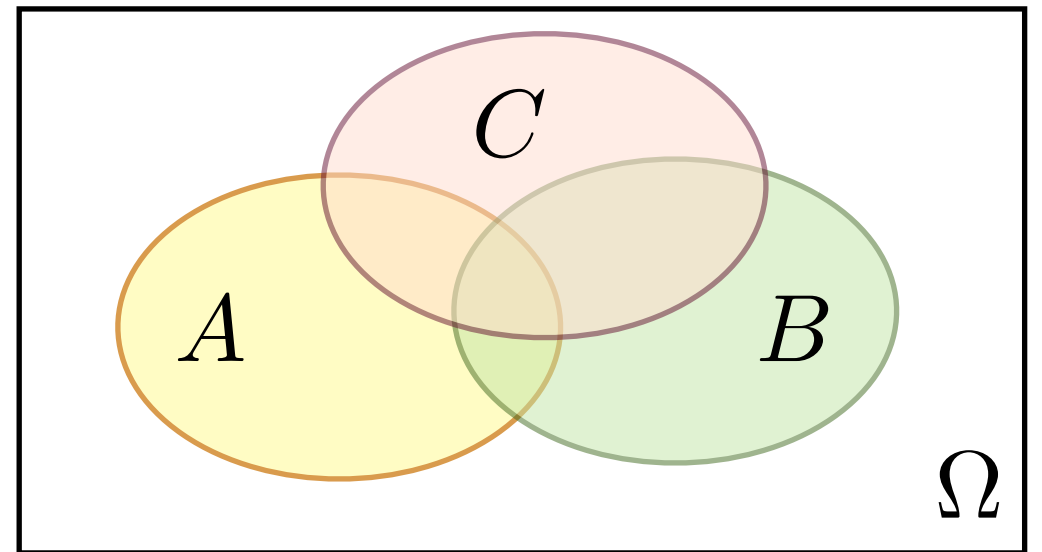
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



Důkaz úplnou matematickou indukcí:

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

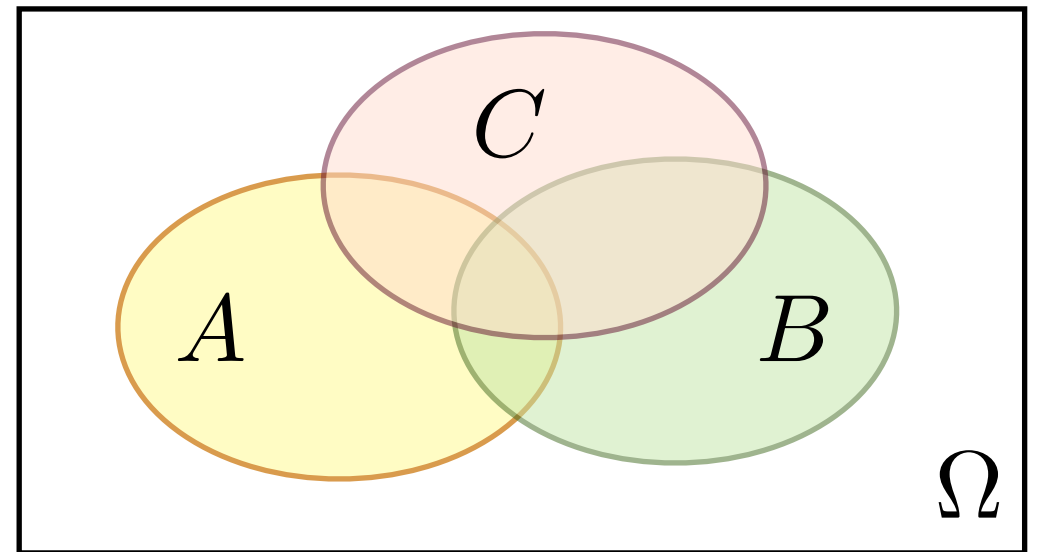
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



Důkaz úplnou matematickou indukcí: i) z 5) plyne, že platí  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$  pro  $n = 2$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

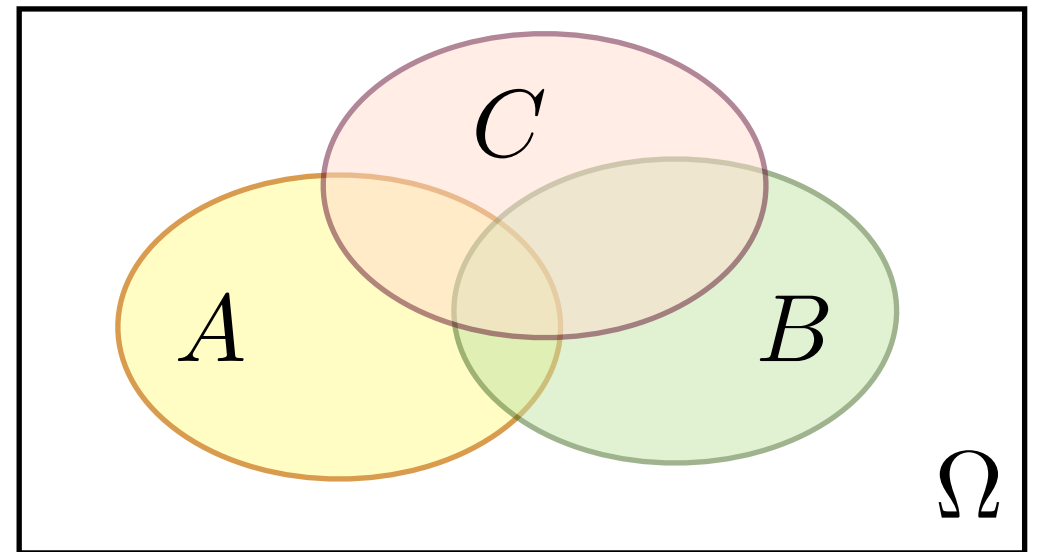
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



Důkaz úplnou matematickou indukcí: i) z 5) plyne, že platí  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$  pro  $n = 2$

ii) předpokládejme, že vztah platí i pro nějaké  $n > 2$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

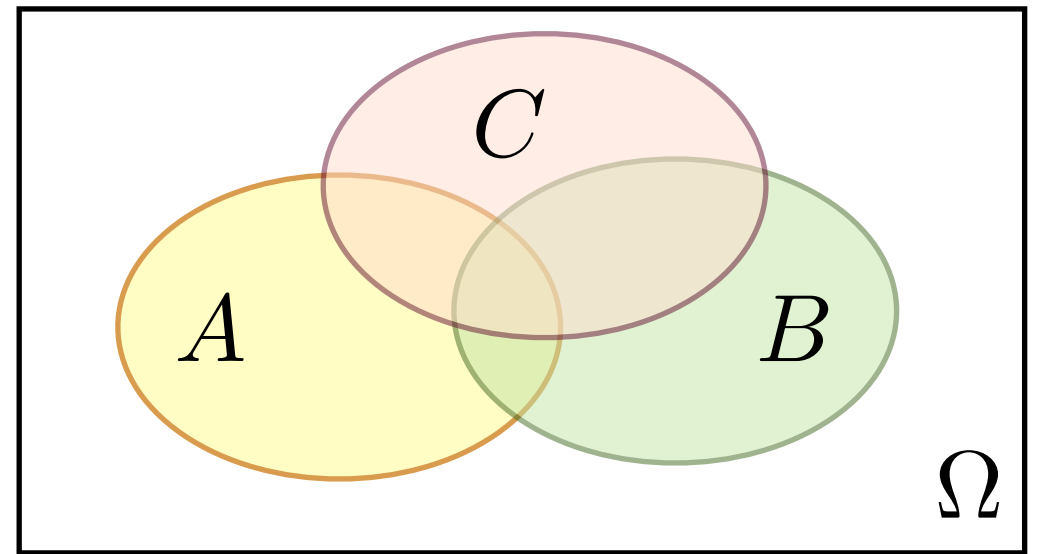
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



Důkaz úplnou matematickou indukcí: i) z 5) plyne, že platí  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$  pro  $n = 2$

ii) předpokládejme, že vztah platí i pro nějaké  $n > 2$

iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro  $n + 1$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

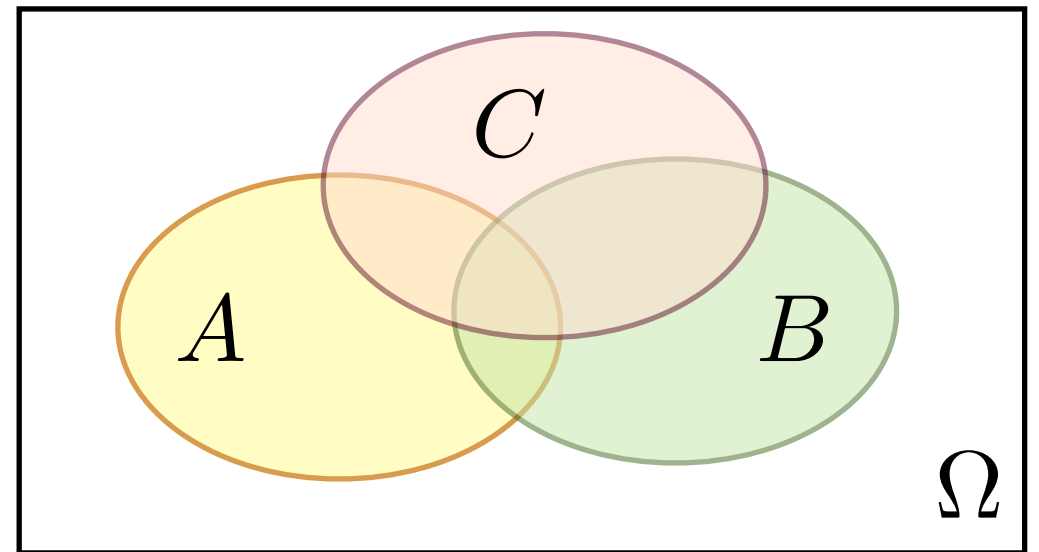
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



Důkaz úplnou matematickou indukcí: i) z 5) plyne, že platí  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$  pro  $n = 2$

ii) předpokládejme, že vztah platí i pro nějaké  $n > 2$

iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro  $n + 1$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

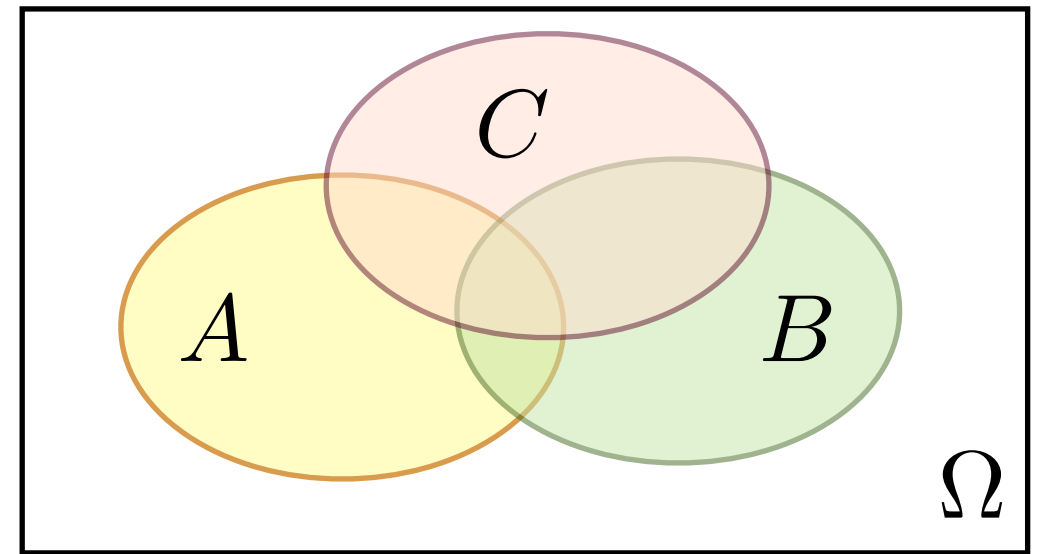
4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro  $n + 1$ : 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

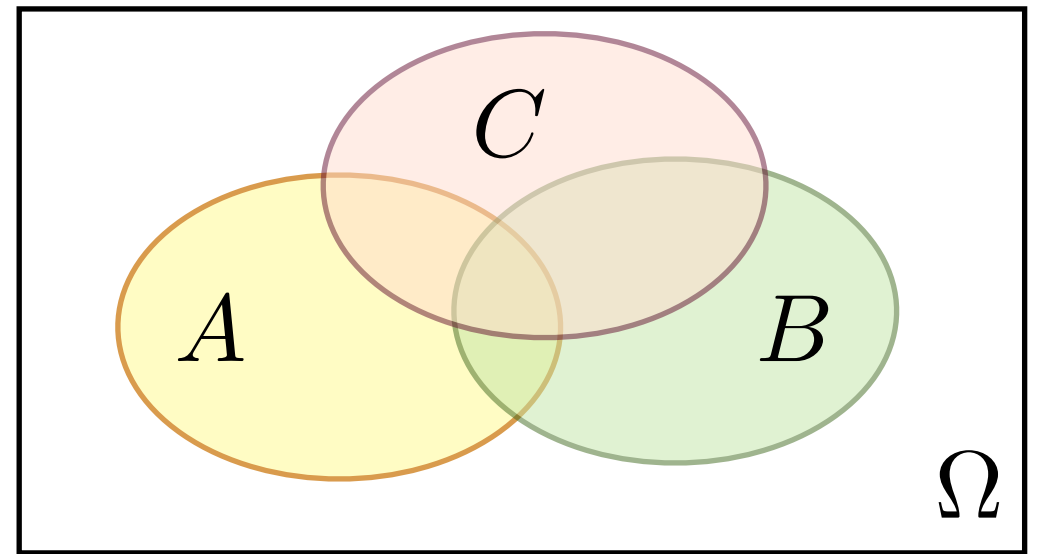
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro  $n + 1$ :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

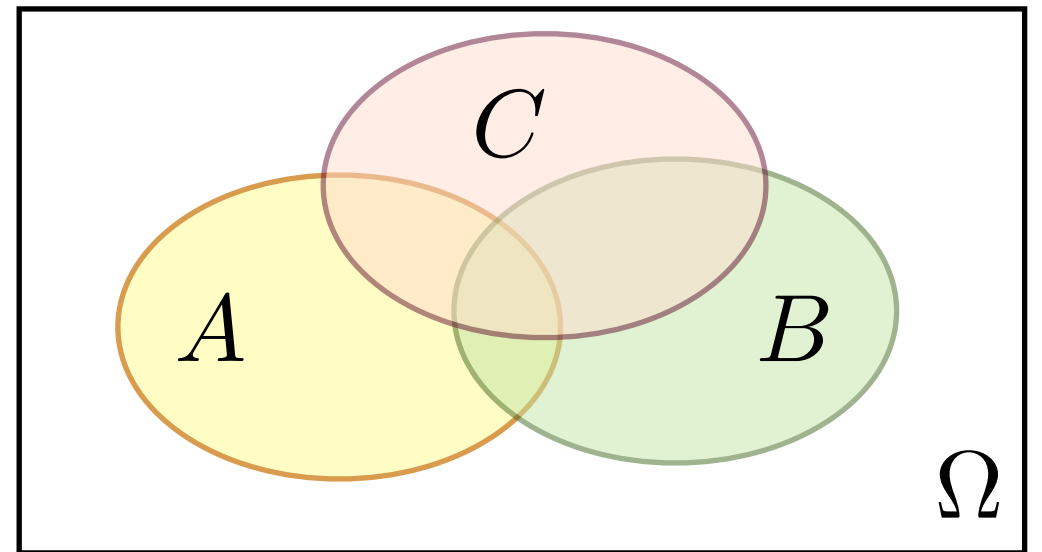
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro  $n + 1$ :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

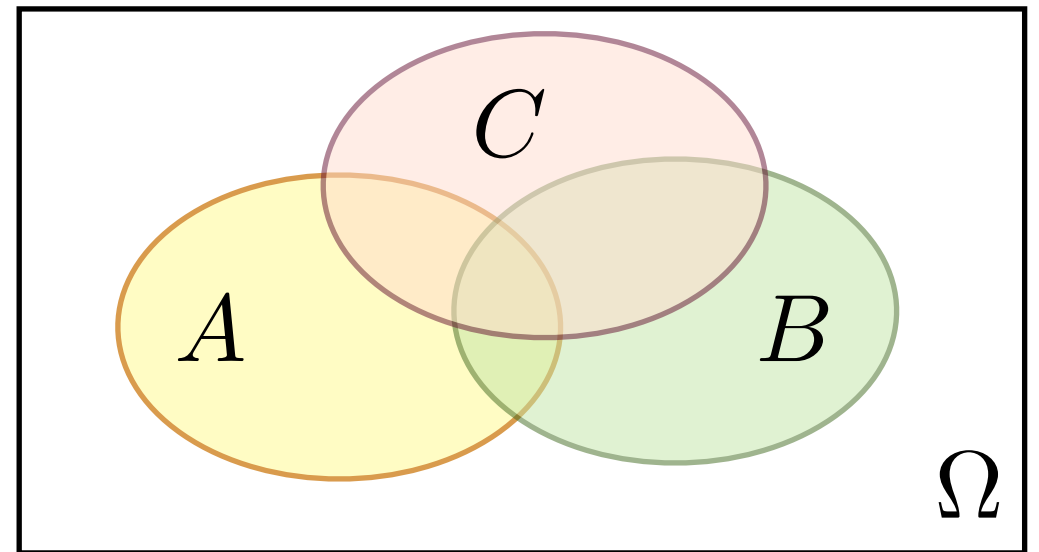
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



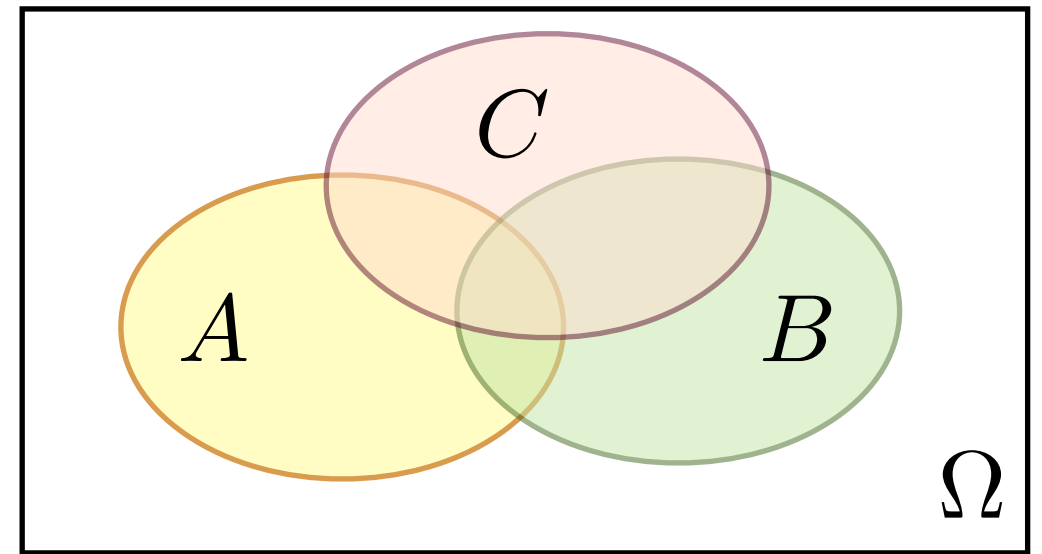
iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \end{aligned}$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro  $n + 1$ :

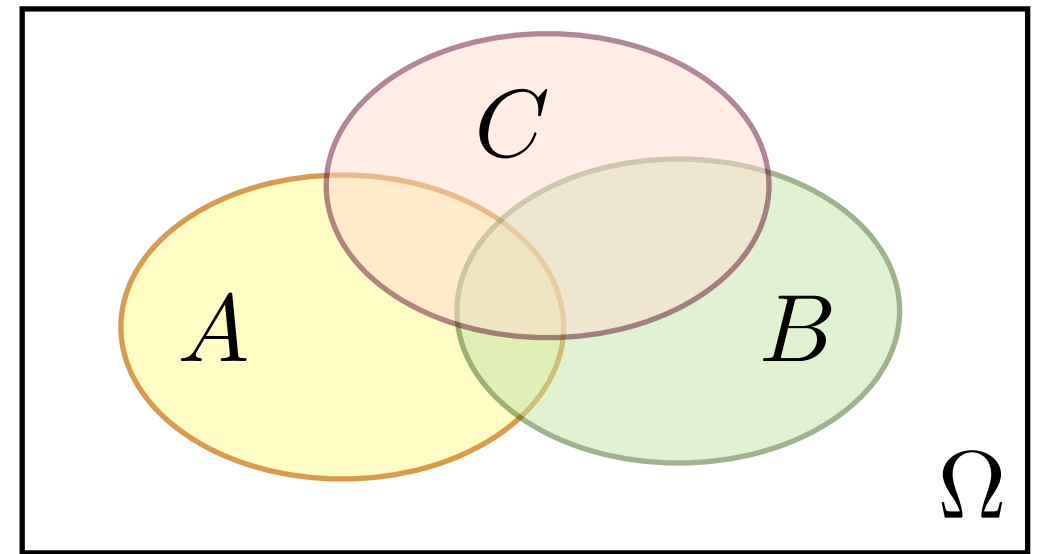
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \quad \text{a tedy platí i pro } n+2, n+3, \dots \infty$$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

- 1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
- 3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
- 4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro  $n + 1$ :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \quad \text{a tedy platí i pro } n+2, n+3, \dots \infty$$



# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

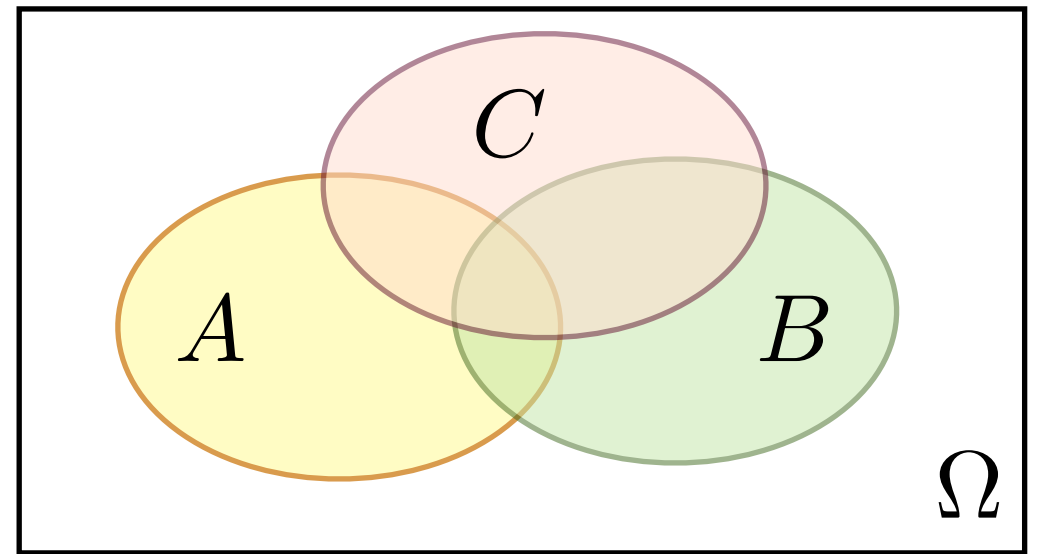
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



$$P(A \cap B) = ?$$

# Pravděpodobnost

## Některé důsledky axiomatické definice

1)  $P(A^C) = 1 - P(A)$

2)  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

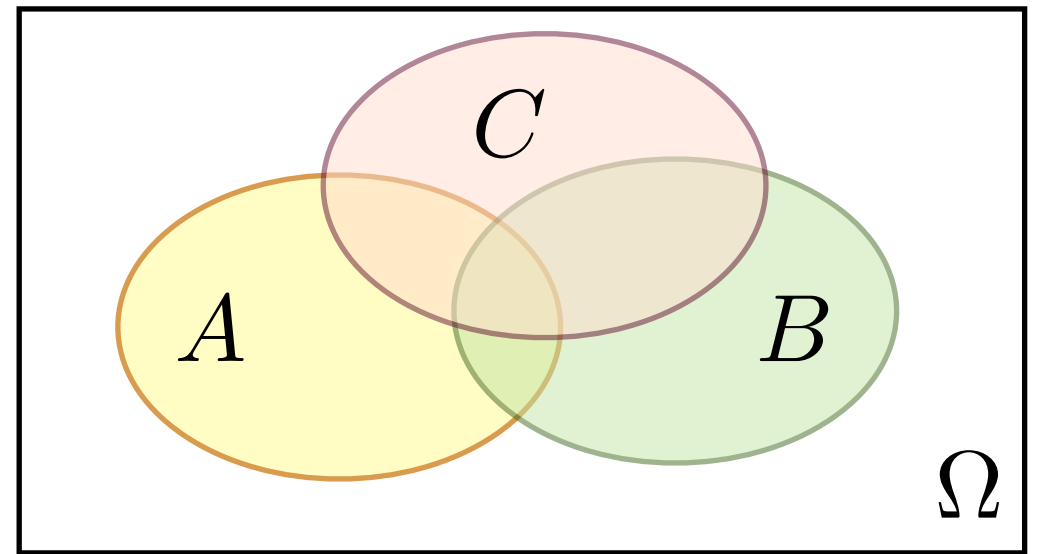
3) monotónie:  $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

4)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) 
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



$$P(A \cap B) = ?$$



# Pravděpodobnost

**Příklad 4:** Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

$$P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cap B) = ?$$

# Pravděpodobnost

**Příklad 4:** Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady?

$$P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cap B) = ?$$

# Pravděpodobnost

**Příklad 4:** Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady?

Zajímá nás tedy  $P(A \cap B \cap C)$ .

$$P(A \cap B) = ?$$

# Pravděpodobnost

**Příklad 4:** Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady?

Zajímá nás tedy  $P(A \cap B \cap C)$ .

$$P(A \cap B) = ?$$



# Pravděpodobnost

**Příklad 4:** Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady?

Zajímá nás tedy  $P(A \cap B \cap C)$ .

Jsou-li vady nezávislé, jsou „rovnoměrně“ rozdělené mezi výrobky v produkci.



# Pravděpodobnost

**Příklad 4:** Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady?

Zajímá nás tedy  $P(A \cap B \cap C)$ .

Jsou-li vady nezávislé, jsou „rovnoměrně“ rozdělené mezi výrobky v produkci.

Tedy ve 20 % výrobků s vadou A bude zhruba 15 % výrobků s vadou B a mezi těmito s oběma vadami ještě cca 5 % výrobků s vadou C.

# Pravděpodobnost

**Příklad 4:** Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady?

Zajímá nás tedy  $P(A \cap B \cap C)$ .

Jsou-li vady nezávislé, jsou „rovnoměrně“ rozdělené mezi výrobky v produkci.

Tedy ve 20 % výrobků s vadou A bude zhruba 15 % výrobků s vadou B a mezi těmito s oběma vadami ještě cca 5 % výrobků s vadou C.

To jest mezi  $n$  výrobky bude

$$n_A = 0,2n \text{ výrobků s vadou A}$$
$$n_{AB} = 0,15n_A = 0,03n \text{ výrobků s vadami A i B}$$
$$n_{ABC} = 0,05n_{AB} = 0,0015n \text{ výrobků s vadami A, B i C}$$

# Pravděpodobnost

**Příklad 4:** Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady?

Zajímá nás tedy  $P(A \cap B \cap C)$ .

Jsou-li vady nezávislé, jsou „rovnoměrně“ rozdělené mezi výrobky v produkci.

Tedy ve 20 % výrobků s vadou A bude zhruba 15 % výrobků s vadou B a mezi těmito s oběma vadami ještě cca 5 % výrobků s vadou C.

To jest mezi  $n$  výrobky bude

$$n_A = 0,2n \text{ výrobků s vadou A}$$
$$n_{AB} = 0,15n_A = 0,03n \text{ výrobků s vadami A i B}$$
$$n_{ABC} = 0,05n_{AB} = 0,0015n \text{ výrobků s vadami A, B i C}$$

Označíme-li  $P(A) = 0,2$ ,  $P(B) = 0,15$  a  $P(C) = 0,05$ , potom bude

$$P(ABC) = P(A).P(B).P(C) = 0,2.0,15.0,05 = 0,0015$$

# Pravděpodobnost

**Příklad 4:** Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady?

Zajímá nás tedy  $P(A \cap B \cap C)$ .

Jsou-li vady nezávislé, jsou „rovnoměrně“ rozdělené mezi výrobky v produkci.

Tedy ve 20 % výrobků s vadou A bude zhruba 15 % výrobků s vadou B a mezi těmito s oběma vadami ještě cca 5 % výrobků s vadou C.

To jest mezi  $n$  výrobky bude

$$n_A = 0,2n \text{ výrobků s vadou A}$$
$$n_{AB} = 0,15n_A = 0,03n \text{ výrobků s vadami A i B}$$
$$n_{ABC} = 0,05n_{AB} = 0,0015n \text{ výrobků s vadami A, B i C}$$

Označíme-li  $P(A) = 0,2$ ,  $P(B) = 0,15$  a  $P(C) = 0,05$ , potom bude

$$P(ABC) = P(A).P(B).P(C) = 0,2.0,15.0,05 = 0,0015$$



# Pravděpodobnost

Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

# Pravděpodobnost

Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pro množinu nezávislých jevů  $\{A_i\}_{i=1}^n$  z  $\mathcal{F}$  platí  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

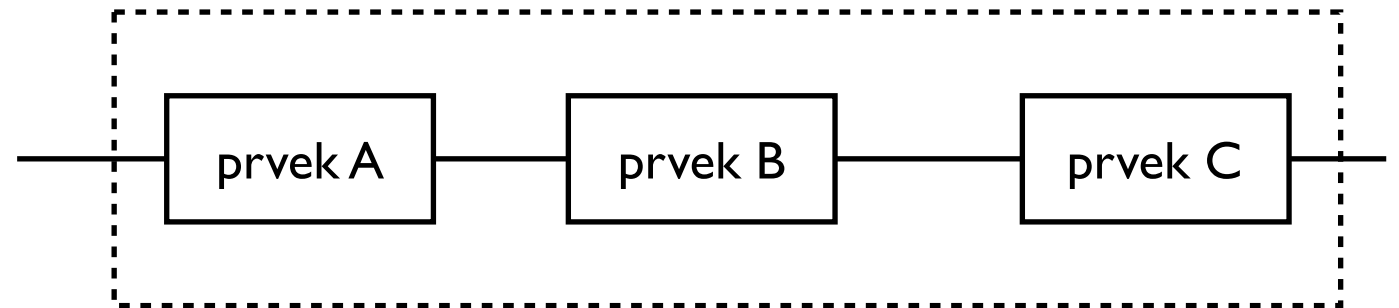
# Pravděpodobnost

Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pro množinu nezávislých jevů  $\{A_i\}_{i=1}^n$  z  $\mathcal{F}$  platí  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

Příklad 5: Sériový systém.



# Pravděpodobnost

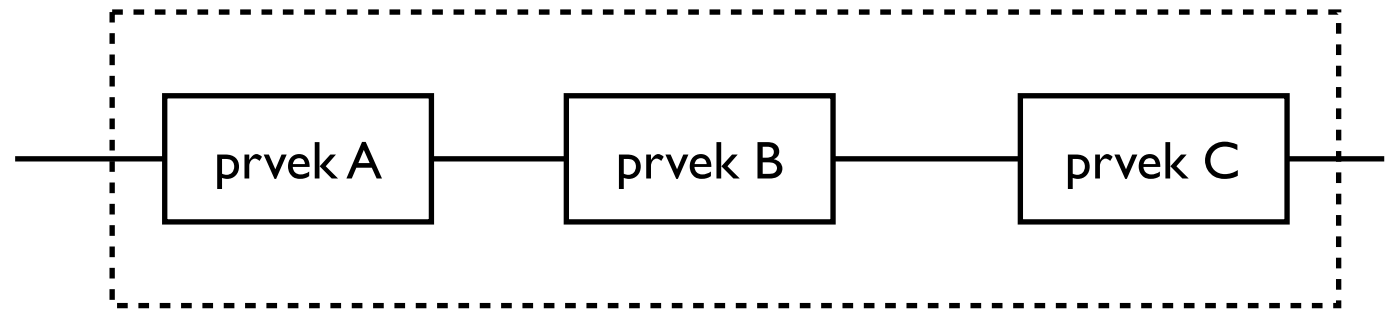
Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pro množinu nezávislých jevů  $\{A_i\}_{i=1}^n$  z  $\mathcal{F}$  platí  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

Příklad 5: Sériový systém.

Nezávislé prvky A, B, C



$D = \{\text{system bude funkční}\} = A \cap B \cap C$

$$P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$



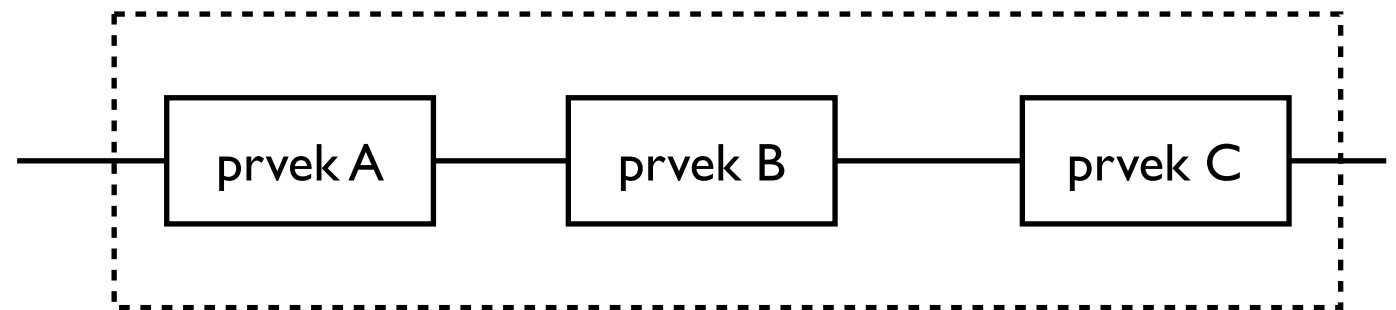
# Pravděpodobnost

Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pro množinu nezávislých jevů  $\{A_i\}_{i=1}^n$  z  $\mathcal{F}$  platí  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

**Příklad 5:** Sériový systém.

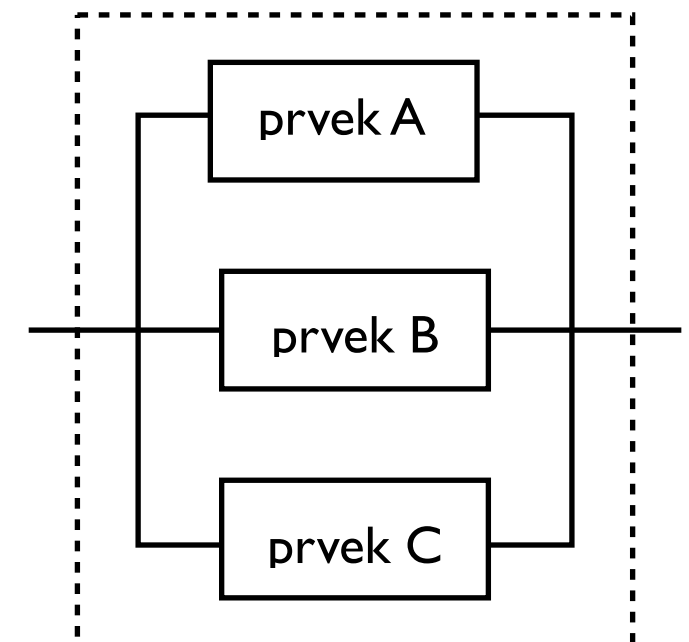


Nezávislé prvky A, B, C

$D = \{\text{system bude funkční}\} = A \cap B \cap C$

$$P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

**Příklad 6:** Paralelní systém.



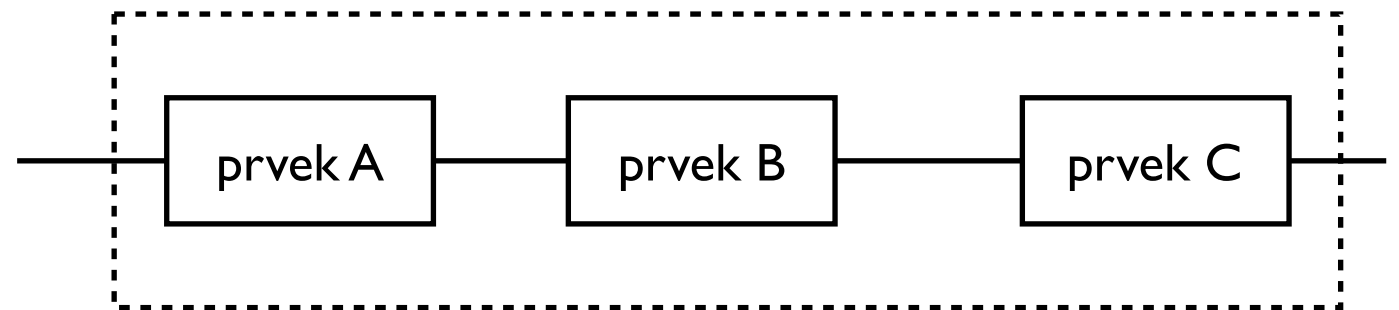
# Pravděpodobnost

Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pro množinu nezávislých jevů  $\{A_i\}_{i=1}^n$  z  $\mathcal{F}$  platí  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

**Příklad 5:** Sériový systém.



Nezávislé prvky A, B, C

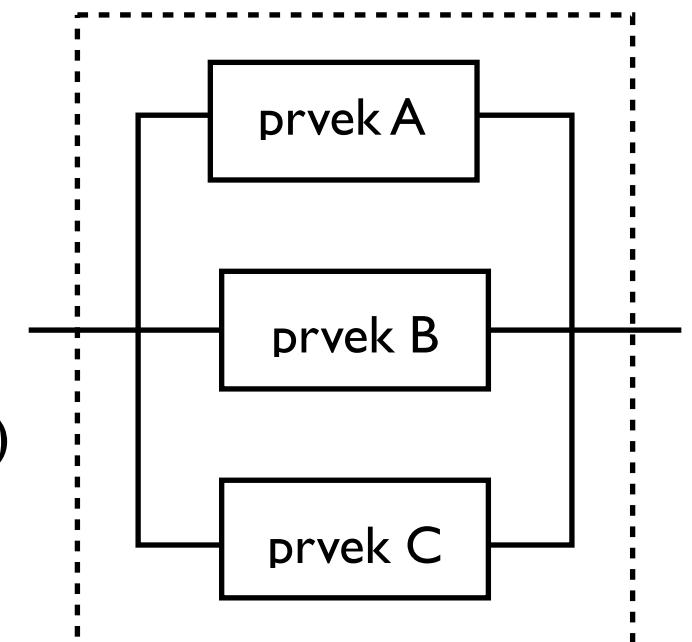
$D = \{\text{system bude funkční}\} = A \cap B \cap C$

$$P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

**Příklad 6:** Paralelní systém.

$D = \{\text{system bude funkční}\} = A \cup B \cup C$

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$



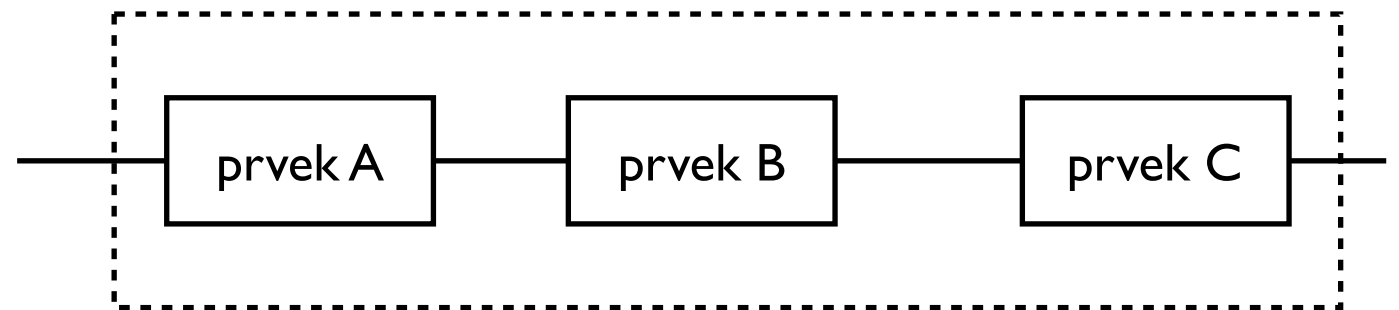
# Pravděpodobnost

Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pro množinu nezávislých jevů  $\{A_i\}_{i=1}^n$  z  $\mathcal{F}$  platí  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

**Příklad 5:** Sériový systém.



Nezávislé prvky A, B, C

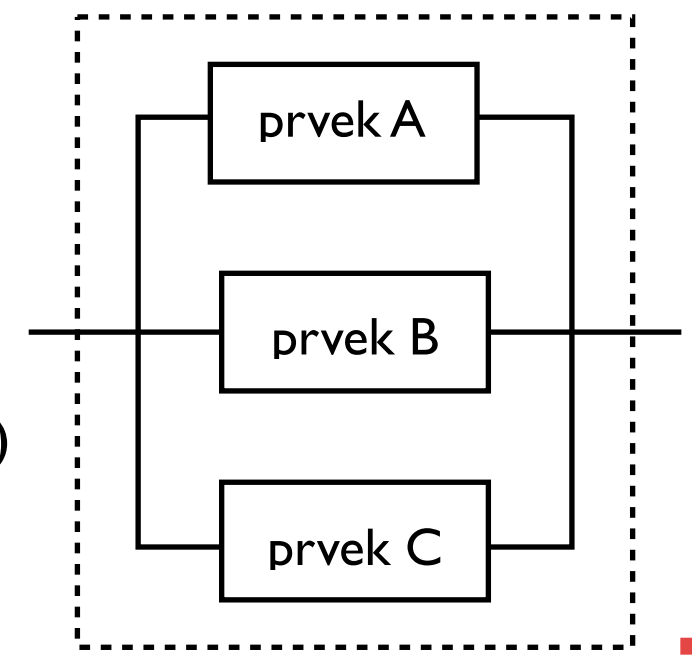
$D = \{\text{system bude funkční}\} = A \cap B \cap C$

$$P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

**Příklad 6:** Paralelní systém.

$D = \{\text{system bude funkční}\} = A \cup B \cup C$

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$



# Pravděpodobnost

Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pro množinu nezávislých jevů  $\{A_i\}_{i=1}^n$  z  $\mathcal{F}$  platí  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

$A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P(D_P) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

Paralelní systém.

$$P(D_S) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Sériový systém.

# Pravděpodobnost

Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pro množinu nezávislých jevů  $\{A_i\}_{i=1}^n$  z  $\mathcal{F}$  platí  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

$A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P(D_P) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

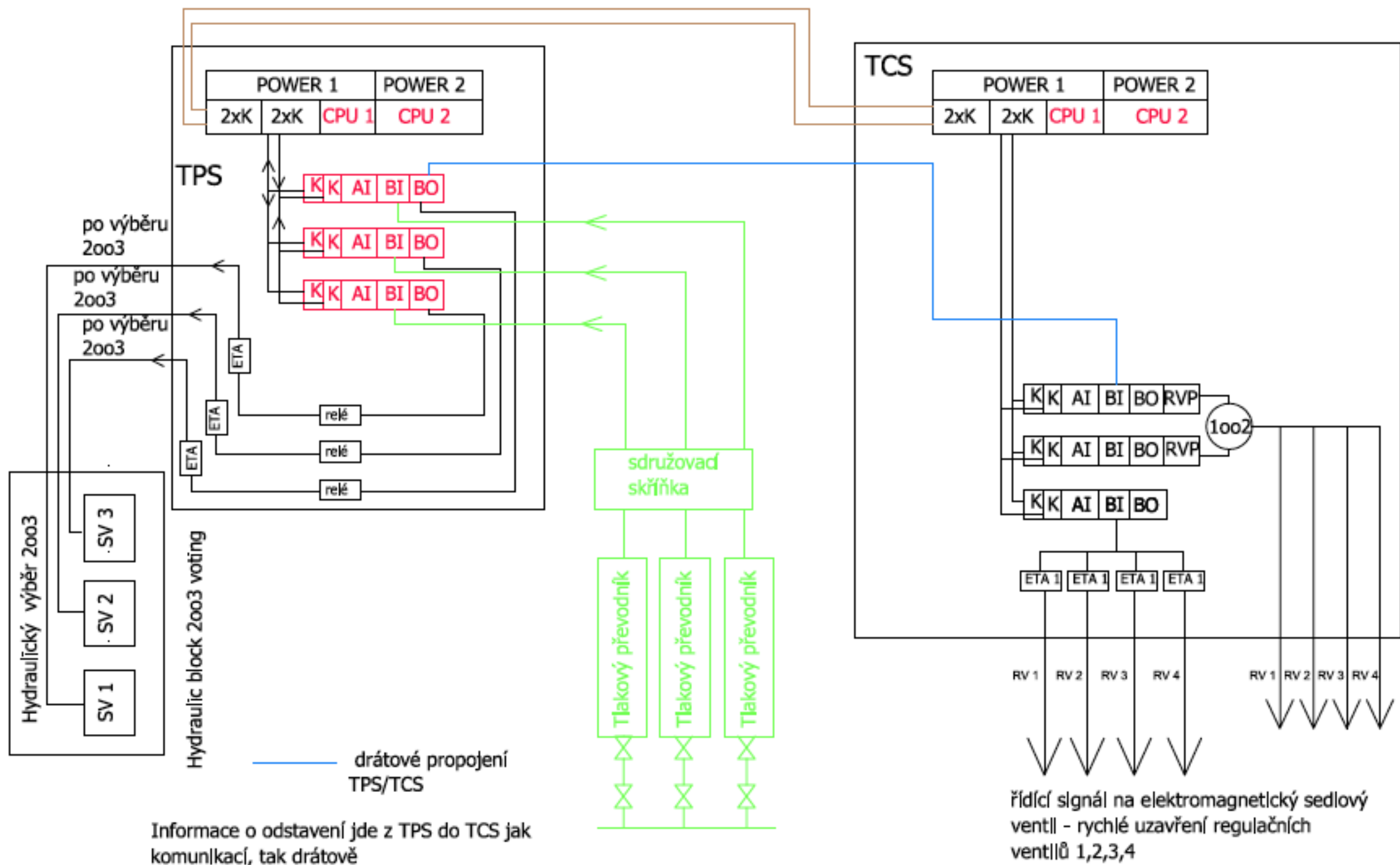
Paralelní systém.

$$P(D_S) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

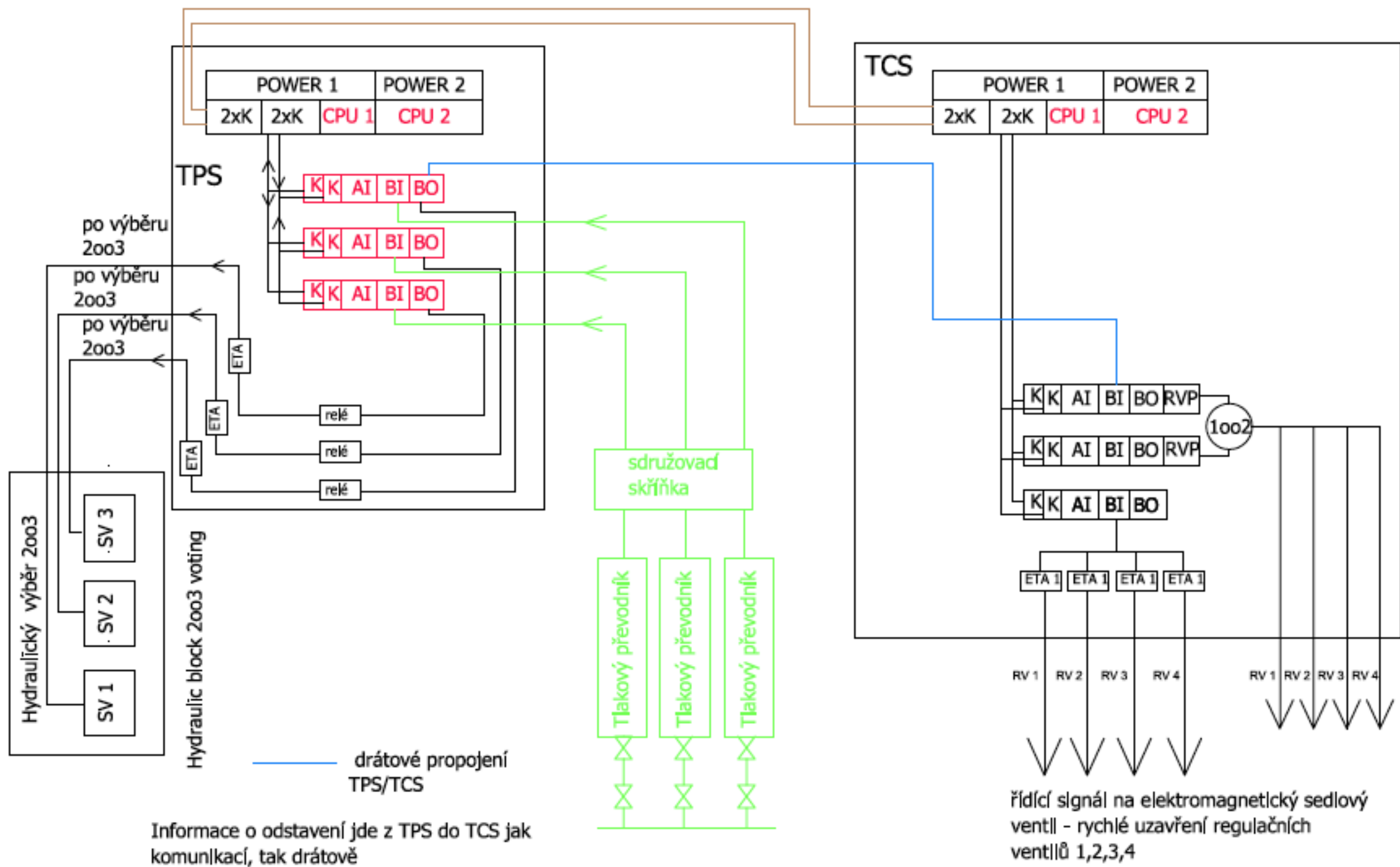
Sériový systém.



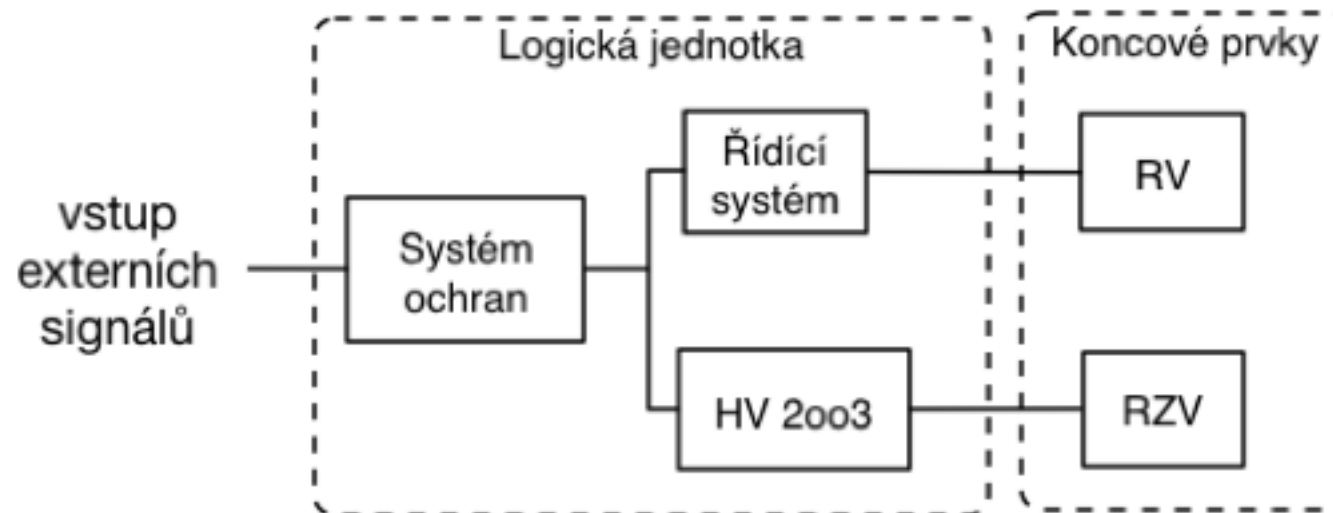
# Příklad 6: Řídící a ochranný systém parní turbíny



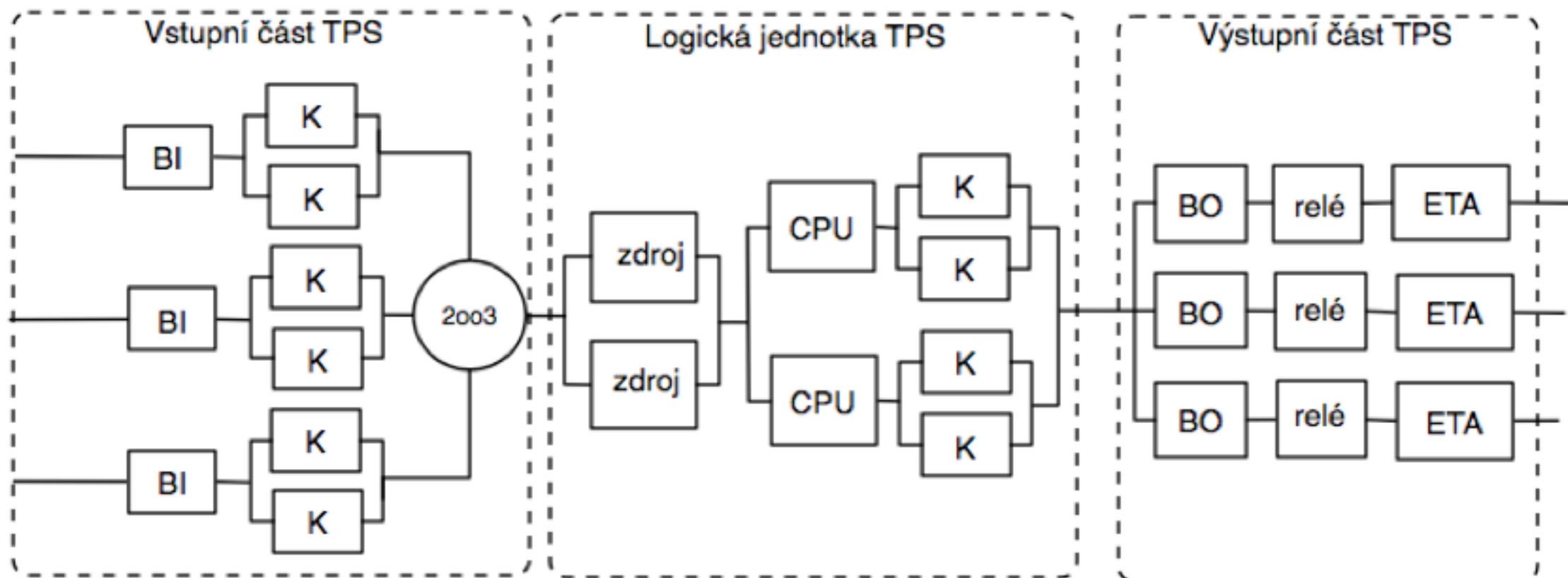
# Příklad 6: Řídicí a ochranný systém parní turbíny



## Příklad 6: Řídící a ochranný systém parní turbíny

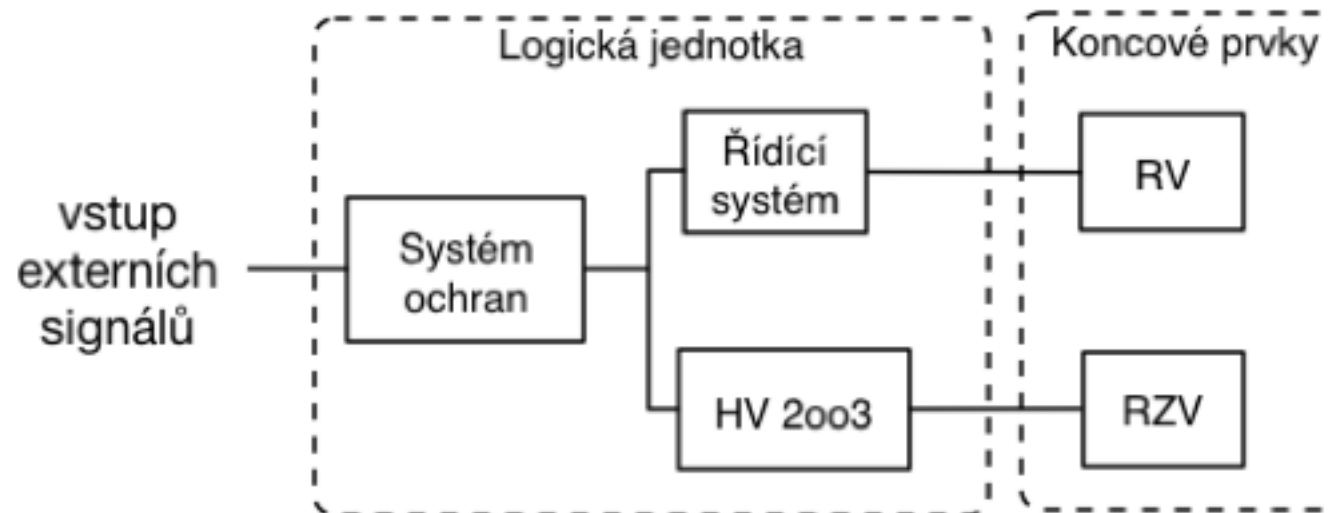


System ochran:

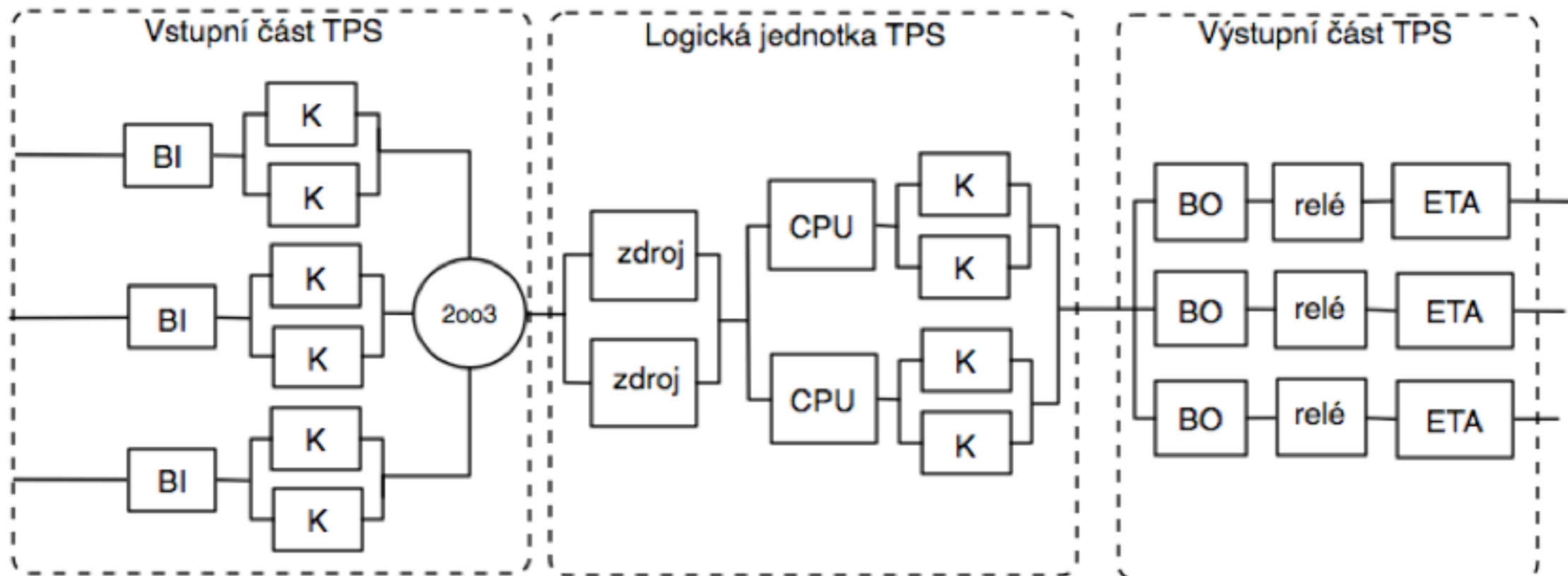




## Příklad 6: Řídicí a ochranný systém parní turbíny



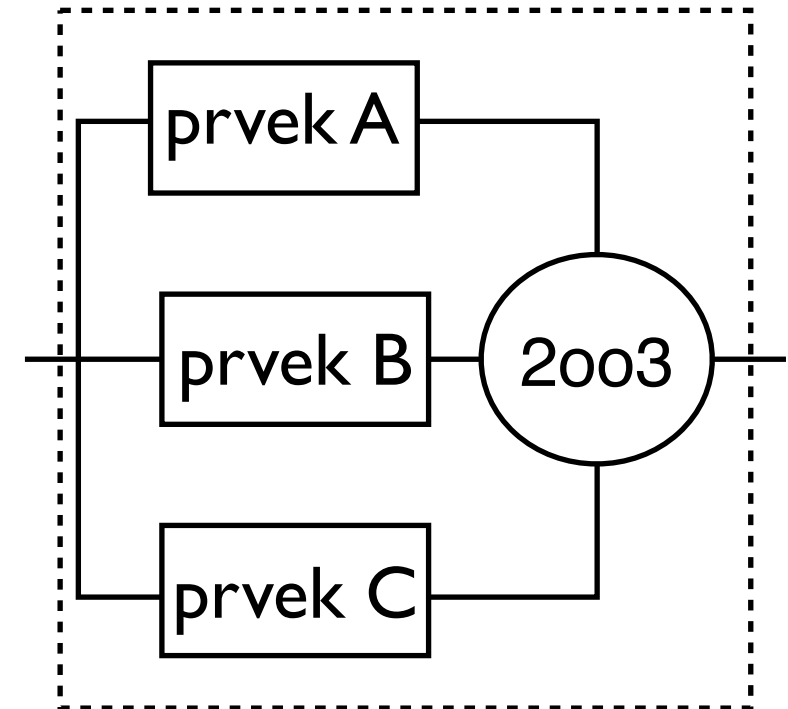
System ochran:



Příklad 7: Systém KooN (K out of N)

Nezávislé prvky A, B, C

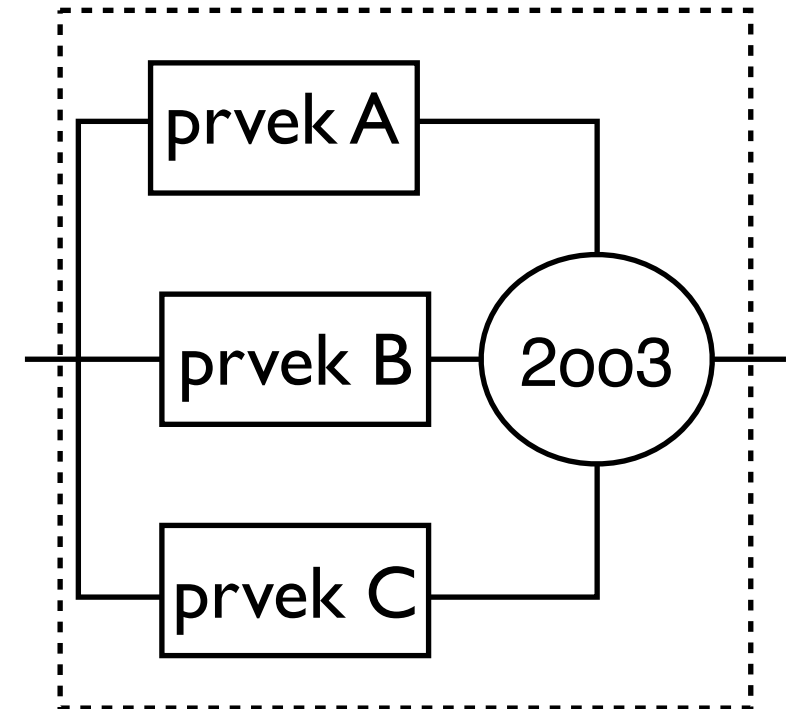
$P(D) = ???$



## Příklad 7: Systém KooN (K out of N)

Nezávislé prvky A, B, C

$P(D) = ???$



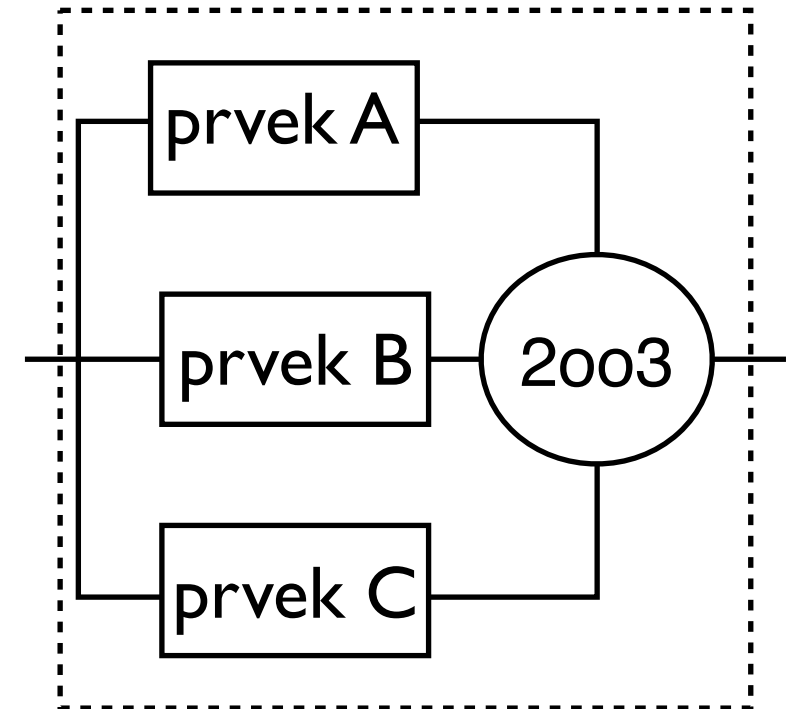
$$\begin{aligned} P(D) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &\quad - P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= P(A)P(B) + P(A)P(C) + P(A)P(C) - 2P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

Pokud  $P(A) = P(B) = P(C) = p$ , potom je  $P(D) = p^2(3 - 2p)$

## Příklad 7: Systém KooN (K out of N)

Nezávislé prvky A, B, C

$P(D) = ???$



$$\begin{aligned} P(D) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &\quad - P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= P(A)P(B) + P(A)P(C) + P(A)P(C) - 2P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

Pokud  $P(A) = P(B) = P(C) = p$ , potom je  $P(D) = p^2(3 - 2p)$



$$P(A \cap B) = ?$$

**Podmíněná pravděpodobnost**

$$P(A \cap B) = ?$$

**Podmíněná pravděpodobnost**

