Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

1. Náhodná veličina, pravděpodobnost

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

ak. rok 2024/2025

1. Náhodná veličina, pravděpodobnost

Klíčové pojmy:

- Variabilita
- Náhodný jev
- Pravděpodobnost

Příklad 1: Doba do poruchy navigačních přístrojů

i	t_i	n_i
1	50	32
2	100	25
3	150	16
4	200	6
5	250	10
6	300	8
7	350	7
8	400	7
9	450	3
10	500	2
11	1000	9

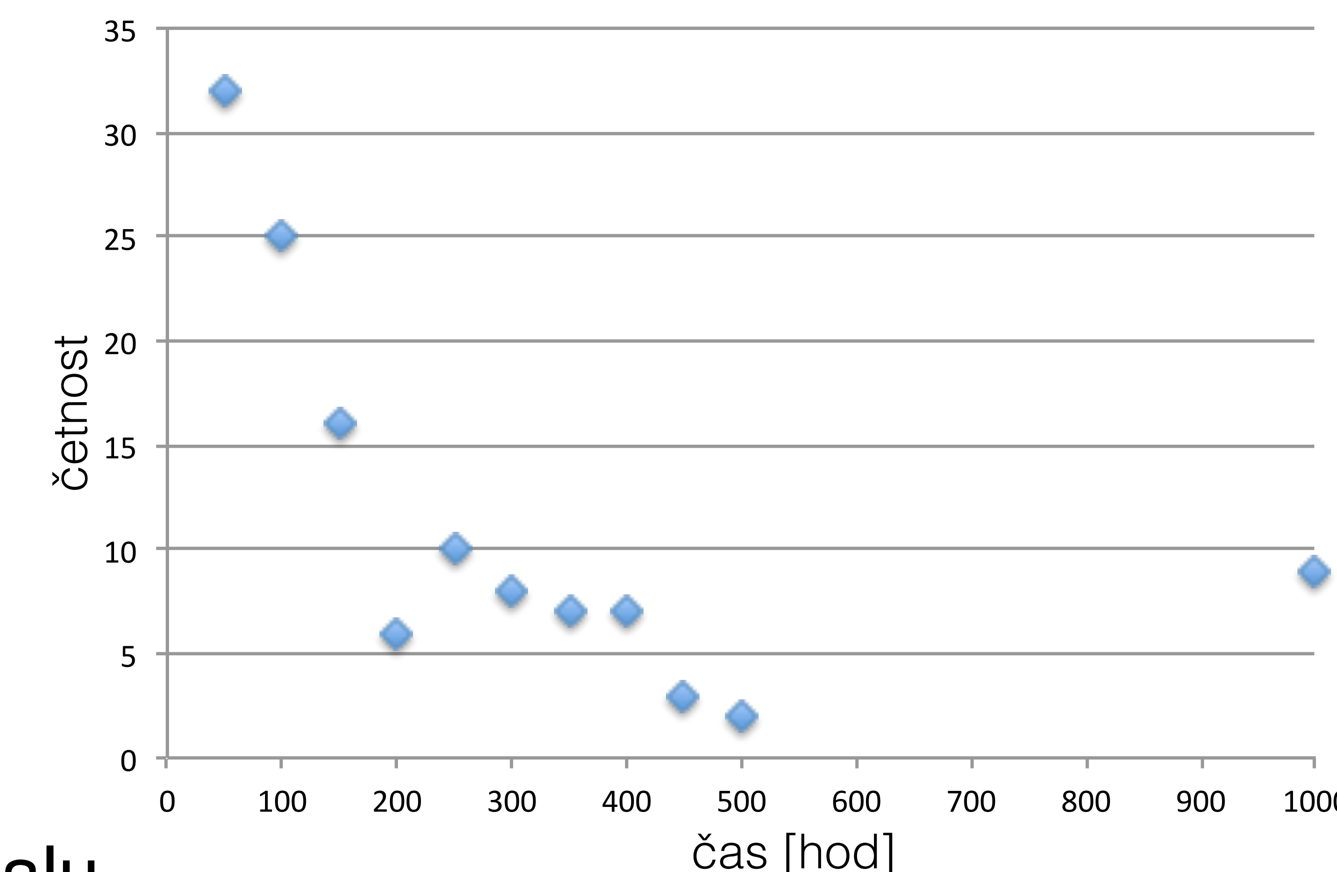
i … pořadové číslo intervalu,

t_i … horní mez intervalu i [x100 hod],

n_i … četnost poruch v intervalu i,

Příklad 1: Doba do poruchy navigačních přístrojů

i	t_i	n_i
1	50	32
2	100	25
3	150	16
4	200	6
5	250	10
6	300	8
7	350	7
8	400	7
9	450	3
10	500	2
11	1000	9



i … pořadové číslo intervalu,
t_i … horní mez intervalu i [x100 hod],
n_i … četnost poruch v intervalu i,

Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39

Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39

$Y_{min} = 0.17$

$Y_{max} = 12.64$

$Y_{med} = 3.13$

$Y_{LQ} = 1.15$

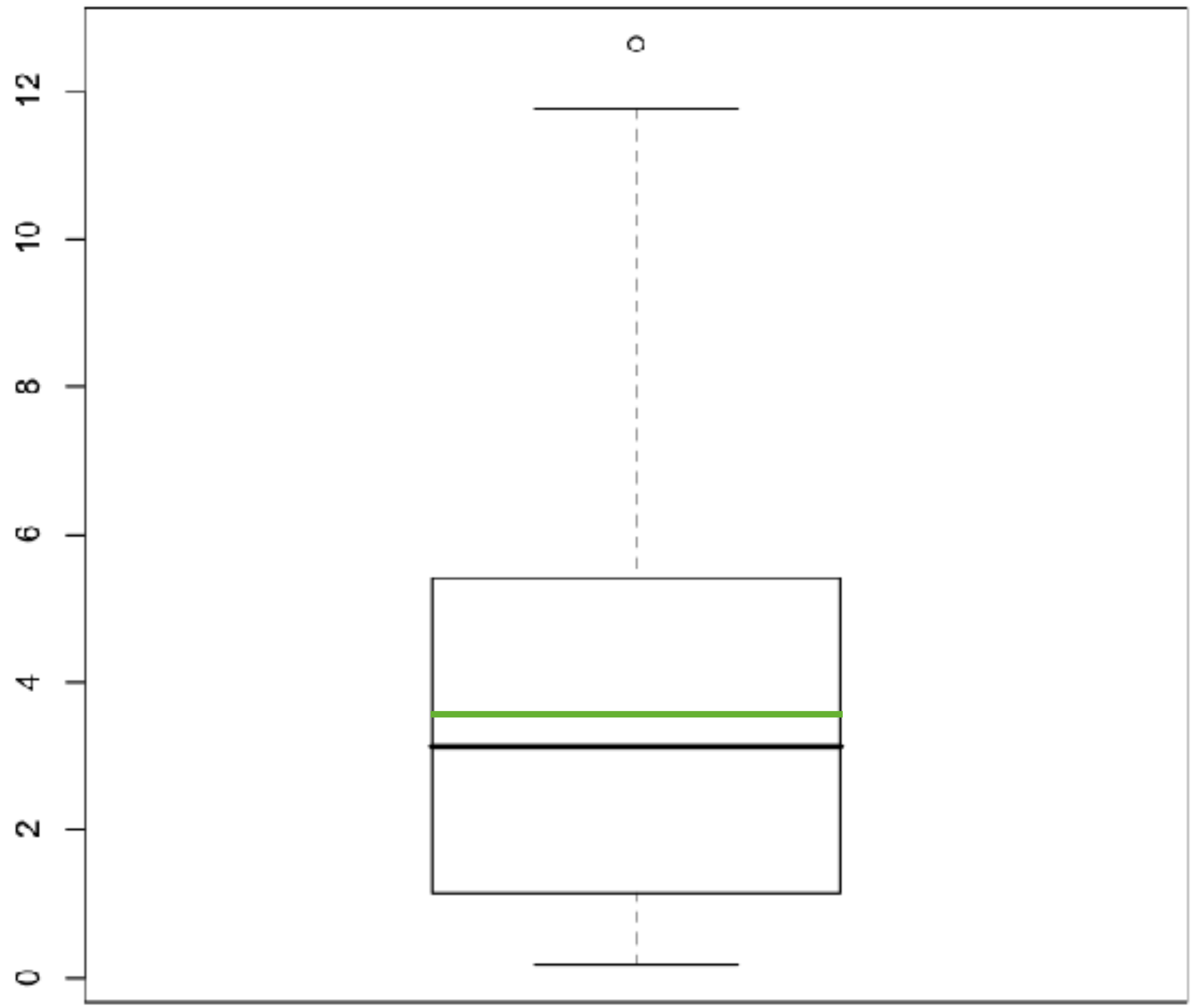
$Y_{UQ} = 5.41$

0	22333456689113 6789
2	146789123479
4	0278002468
6	012525
8	7
10	58
12	6

$\overline{Y} = 3.69$

$s^2_{n-1}(Y) = 9.0957$

Příklad 2: Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

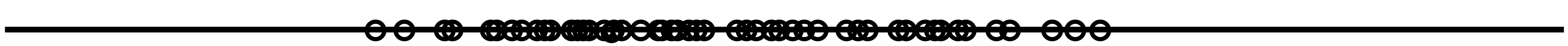


Krabicový graf (Box & Whiskers) Y

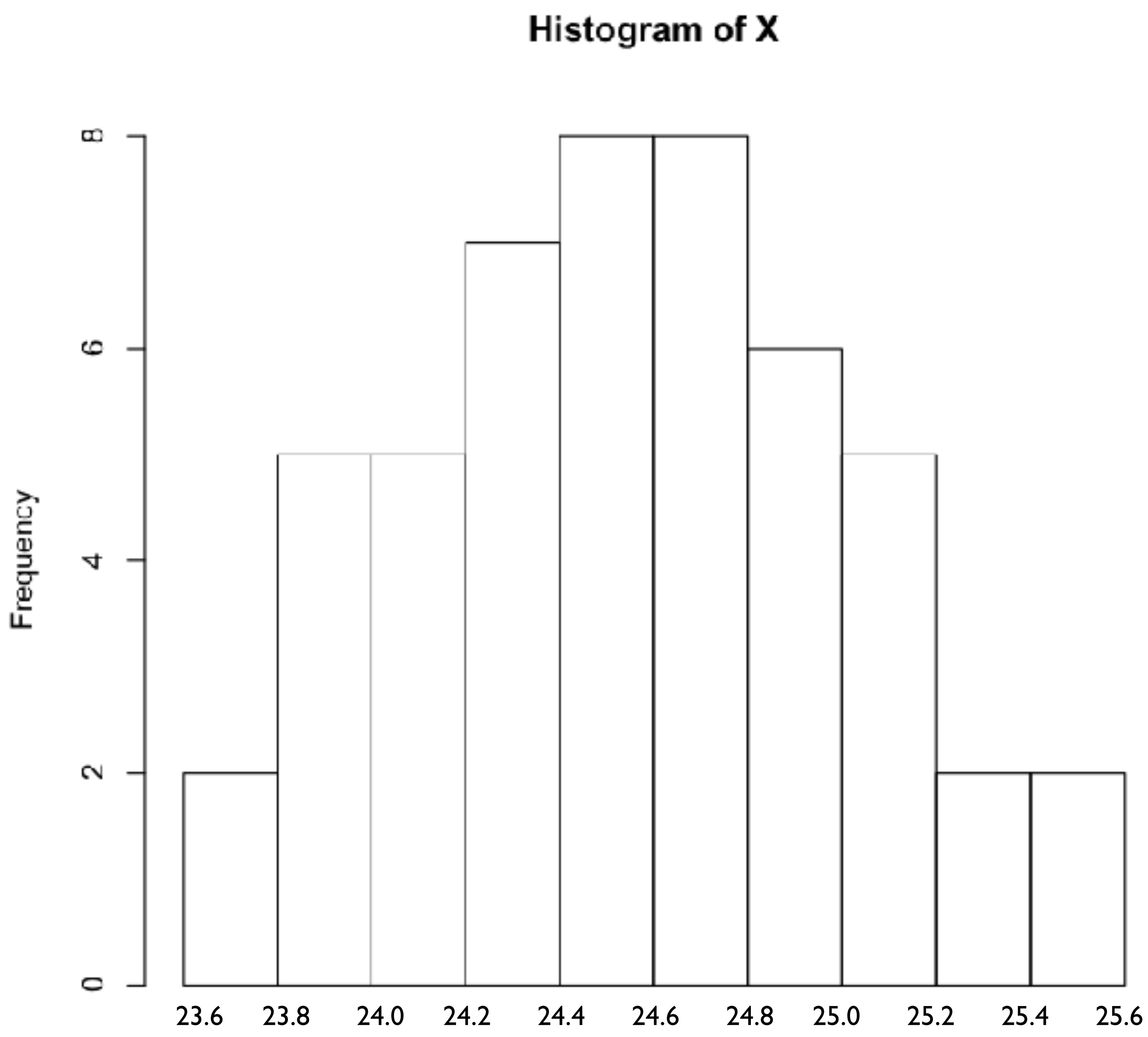
Příklad 3: Balící automat na kávu

Příklad 3: Balící automat na kávu

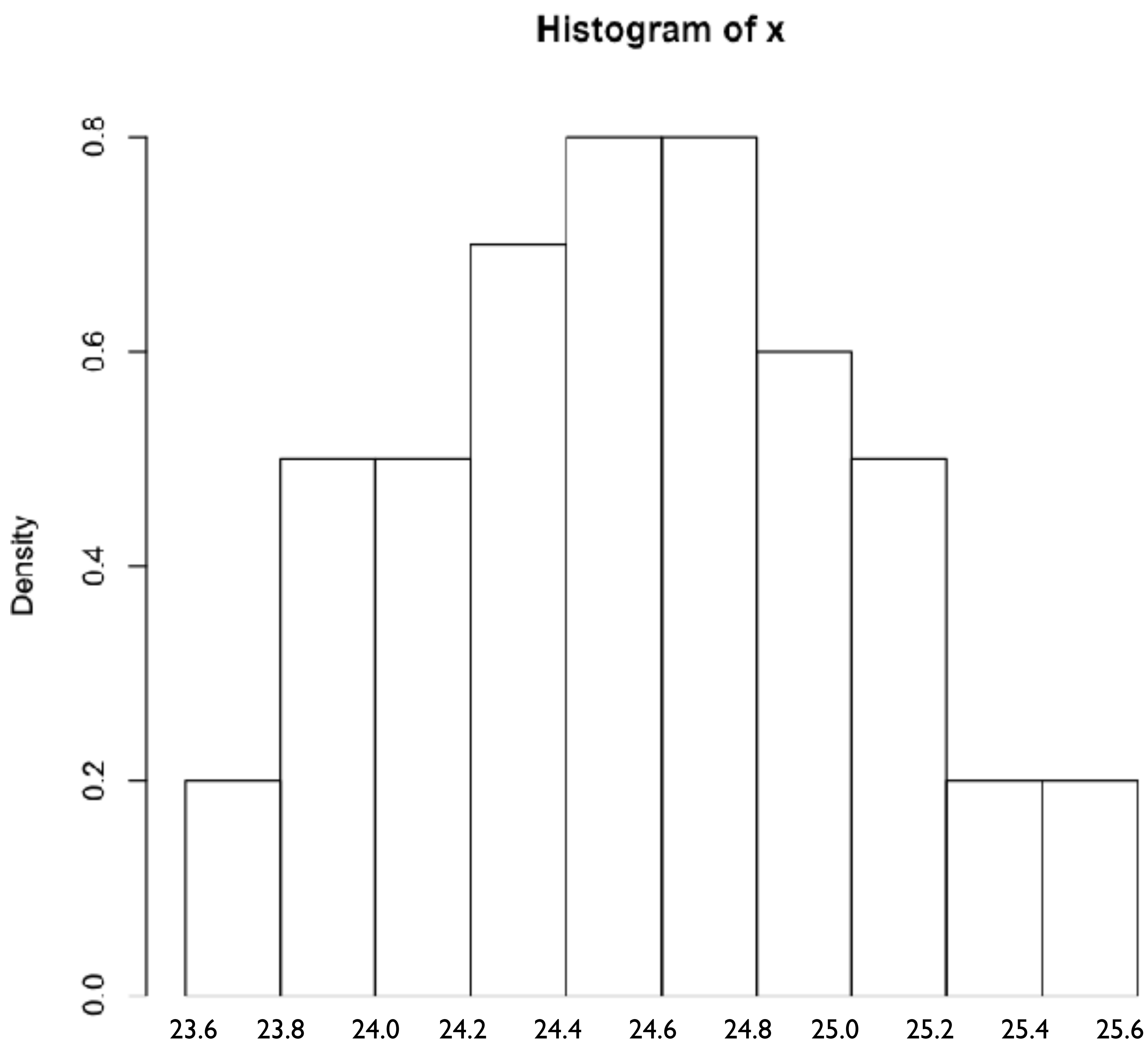
24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455
24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721
24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405
23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285
24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777
24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906



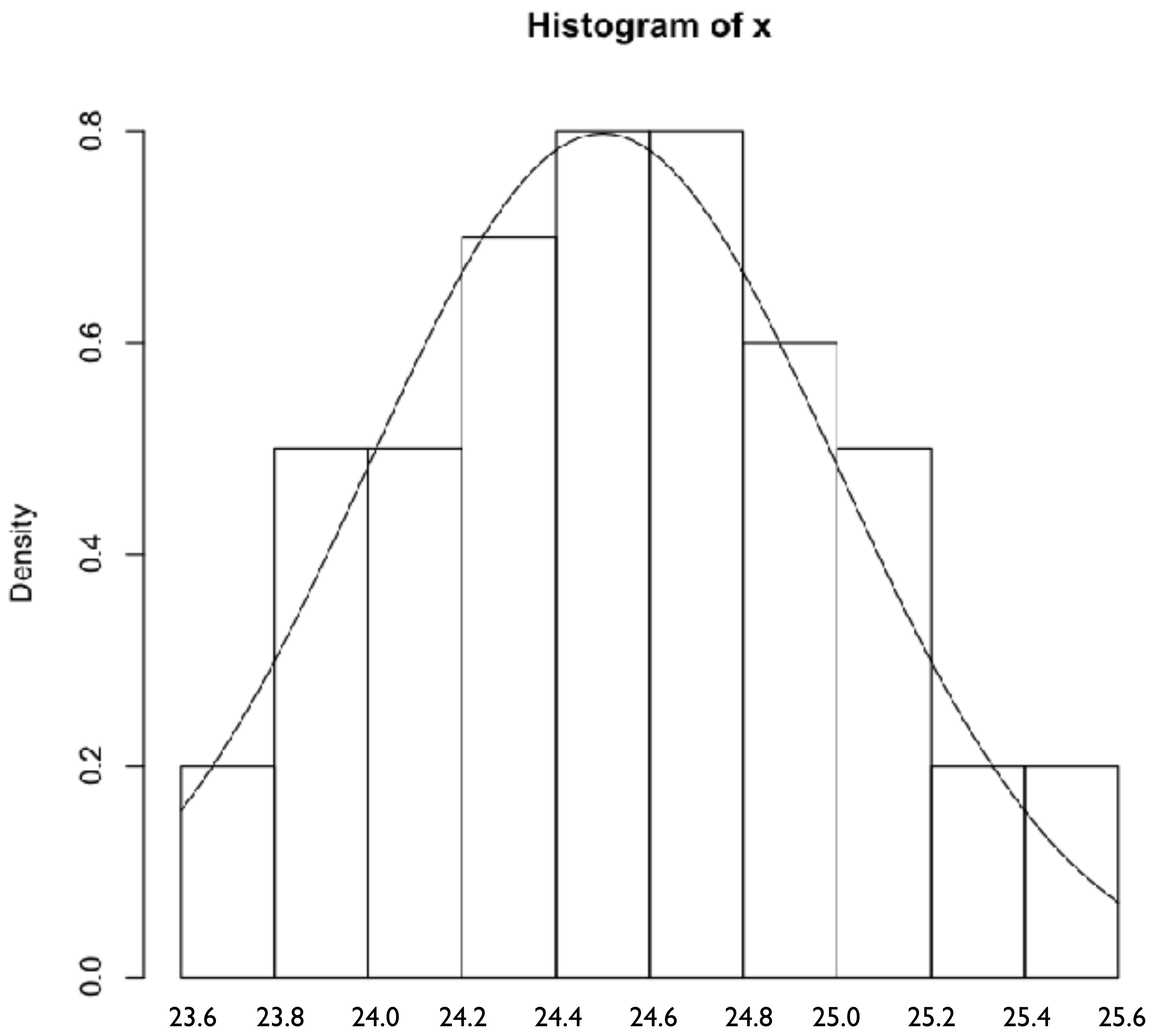
Příklad 3: Balící automat na kávu



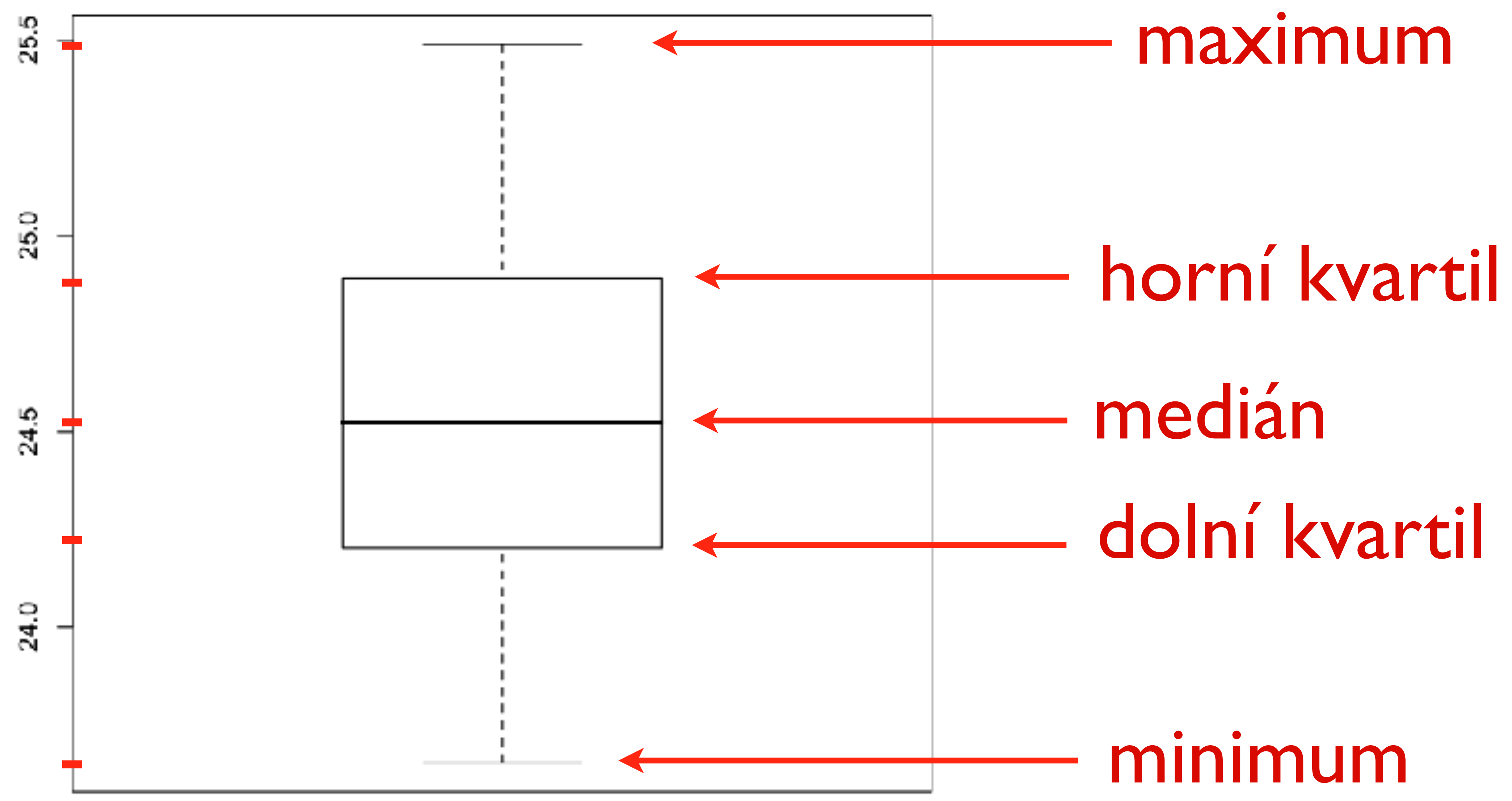
Příklad 3: Balící automat na kávu



Příklad 3: Balící automat na kávu



Příklad 3: Balící automat na kávu



Náhodné jevy

- Náhodný experiment

  vyústí v některý z různých, ale známých výsledků

- elementární náhodné jevy Ω

  Ω je množina konkrétních výsledků daného experimentu

- jevové pole $\mathcal{F}$

  je to množina všech možných výsledků (podmnožin Ω)

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1,\, A_2,\, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

- $(\Omega,\, \mathcal{F})$ …. náhodný prostor

  charakterizuje náhodný experiment

Náhodné x deterministické jevy

Kvantifikace náhody

Na počátku bylo hledání „matematické naděje“

Antoine Gombaud, Chevalier de Méré
(1607 – 1684)

Kvantifikace náhody

Na počátku bylo hledání „matematické naděje“

Antoine Gombaud, Chevalier de Méré
(1607 – 1684)

První hra:
Spočívala v hodu jednou kostkou. Chevalier de Méré přijímal sázky na to, že hodí minimálně jednu šestku ve čtyřech po sobě následujících hodech. Věděl, že pravděpodobnost padnutí šestky je v každém hodu 1/6. Domníval se, že jeho šance na padnutí šestky ve čtyřech hodech je tedy (1/6) × 4 = 2/3.

Druhá hra:
Druhá hra spočívala v hodu dvěma kostkami. Chevaliera de Méré byl úspěšný, pokud se mu alespoň jedenkrát podařilo hodit 2 šestky ve 24 hodech. Opět věděl, že pravděpodobnost vrhnutí dvou šestek v jednom hodu je 1/36 (pouze jedna možnost z 6 × 6 možných případů). Předpokládal, že jeho šance je tedy (1/36) × 24 a tudíž opět 2/3.

Přesto při druhé hře v kostky utrpěl Chevalier de Méré značné finanční ztráty. Jsou šance na výhru v obou kostkových hrách skutečně stejné? V čem byl jeho předpoklad chybný?

První formulace pravděpodobnosti a jejích vlastností

Blaise Pascal (1623 - 1662)

Rozdělení sázky:

Dva hráči hrají sérii lichého počtu N her a vyhraje ten, který dosáhne vícekrát vítězství. Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu m:n a je třeba sázku rozdělit mezi oba hráče.

Jaký je nejspravedlivější poměr rozdělení sázky?

Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Úloha o rozdělení sázky je jednou z nejstarších dokumentovaných úloh pravděpodobnosti a je připisována Blaise Pascalovi a Piere de Fermatovi z roku 1654. Ve skutečnosti je však mnohem starší a jsou známy její verze z konce XV. století. [Informační bulletin ČStS 2009 (2)]

Dva hráči hrají sérii 9 her a vyhraje ten, kdo první dosáhne 5 vítězství. Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu 4:2 a je třeba spravedlivě rozdělit sázku mezi oba hráče. Jak?

Další slavná úloha teorie pravděpodobnosti:

Úloha o ruinování hráče

Dva hráči A a B hrají sérii her. Při každé hře hráči vsadí jednu korunu. Hráč A vyhraje s pravděpodobností p a prohraje s pravděpodobností 1-p. Na počátku má hráč celkem x korun, hráč B má y korun. Hry jsou vzájemně nezávislé. Hra se hraje tak dlouho, dokud mají oba co vsadit. Tedy hra končí v okamžiku, kdy je jeden z hráčů zruinován. Jakou mají hráči A a B pravděpodobnost zruinování?

Další z nejznámějších pravděpodobnostních úloh, kterou lze nalézt například v učebnici teorie pravděpodobnosti W. Fellera z roku 1957.

http://www.statspol.cz/oldstat/bulletiny/ib-93-4.pdf

Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich … pravděpodobnost tohoto náhodného jevu

Situace 1:

- počet N elementárních výsledků je konečný,
- všechny elementární výsledky jsou stejně možné
- sledovaný náhodný jev A nastává při realizaci některého z N_A elementárních výsledků

potom $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\text{počet „příznivých“ výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}} = \dfrac{N_A}{N}$

Příklad 1: Provádíme experiment, který může skončit jedním ze tří stejně možných výsledků. Označme je A, B a C. Jaká je pravděpodobnost, že při n nezávislých opakováních tohoto experimentu nastane k výsledků typu A?

$$P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(AA) = \frac{1}{3.3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \qquad \dots \qquad P(A^k) = \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A}^{n-k}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

$(\underbrace{\bullet\bullet\ldots\bullet}_{k}\underbrace{\circ\circ\ldots\circ}_{n\text{-}k})$ celkem je $\binom{n}{k}$ možností jak výsledky uspořádat

$$P(k\text{-krát nastane } A \text{ a zároveň } (n-k)\text{-krát } a \text{ nenastane}) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich … pravděpodobnost tohoto náhodného jevu

Situace 2:

- množina všech elementárních výsledků Ω je nekonečná,
- všechny elementární výsledky jsou stejně možné
- sledovaný náhodný jev A nastává při realizaci nějaké podmnožiny Ω_A
- pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení Ω na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře $\mu(\Omega)$, potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklad 2: Přepravní společnost vám oznámí, že někdy mezi 12. a 13. hodinou bude doručovat balíček. Protože se jedná o velkou zásilku, řidič bude počká až 15 minut a potom odjíždí. Vy se dostavíte na místo doručení také někdy mezi 12. a 13. hodinou a můžete počkat také maximálně 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že zásilku od řidiče převezmete?

$$\mu(\Omega) = 1, \quad \mu(\Omega_A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(A) = \frac{7}{16} = 0,4375$$

Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich … pravděpodobnost tohoto náhodného jevu

Situace 2:

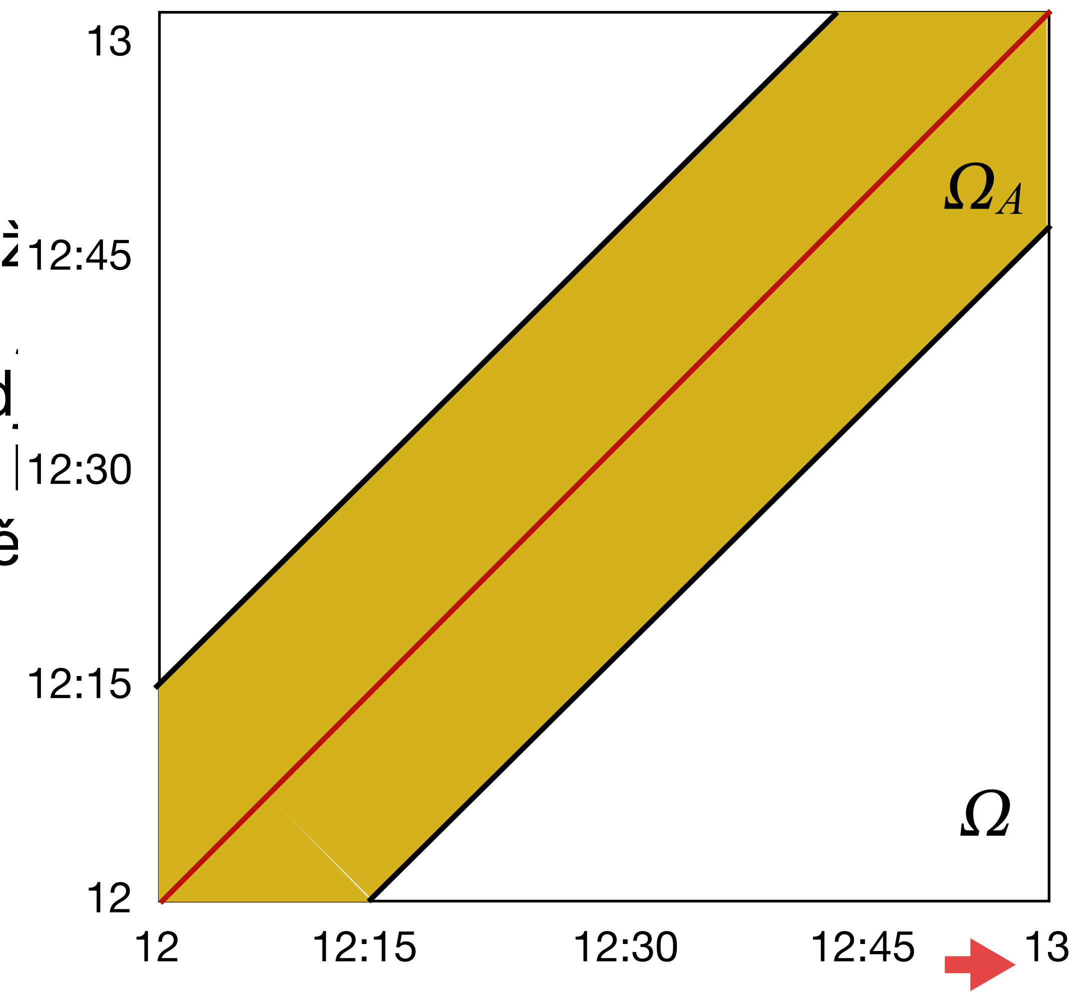
- množina všech elementárních výsledků Ω je nekonečná,
- všechny elementární výsledky jsou stejně možné
- sledovaný náhodný jev A nastává při realizaci nějaké podmnožiny Ω_A
- pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení Ω na nějakou měřitelnou geometrickou množinu o míře $\mu(\Omega)$, potom lze definovat

$$P(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklad 2: Přepravní společnost vám oznámí, ž
bude doručovat balíček. Protože se
bude počká až 15 minut a potom od
doručení také někdy mezi 12. a 13.
maximálně 15 minut. Jaká je pravdě
převezmete?

$$\mu(\Omega) = 1, \quad \mu(\Omega_A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(A) = \frac{7}{16} = 0,4375$$



Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich … pravděpodobnost tohoto náhodného jevu

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A) =$ počet elementárních jevů v jevu A

$\mu(A) =$ "míra" jevu A

2. Statistická definice pravděpodobnosti: $$P(A) = \lim_{j \to \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$$

Příklad 3: Jaká je pravděpodobnost výroby neshodného výrobku?

Po určitou (dlouhou) dobu budeme sledovat výrobu a kontrolovat kvalitu výrobků. Relativní četnost zjištěných neshod n^{A} při kontrole n výrobků potom považujeme za odhad pravděpodobnosti neshody při výrobě.

Pravděpodobnost

Může-li experiment skončit více výsledky, zajímá nás míra očekávání toho, že nastane některý z nich … pravděpodobnost tohoto náhodného jevu

1. Klasická definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$\mu(A) =$ počet elementárních jevů v jevu A

$\mu(A) =$ "míra" jevu A

2. Statistická definice pravděpodobnosti: $P(A) = \lim_{j \to \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$

3. Axiomatická definice pravděpodobnosti

(a) $\forall A \in \mathcal{F}: \quad P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

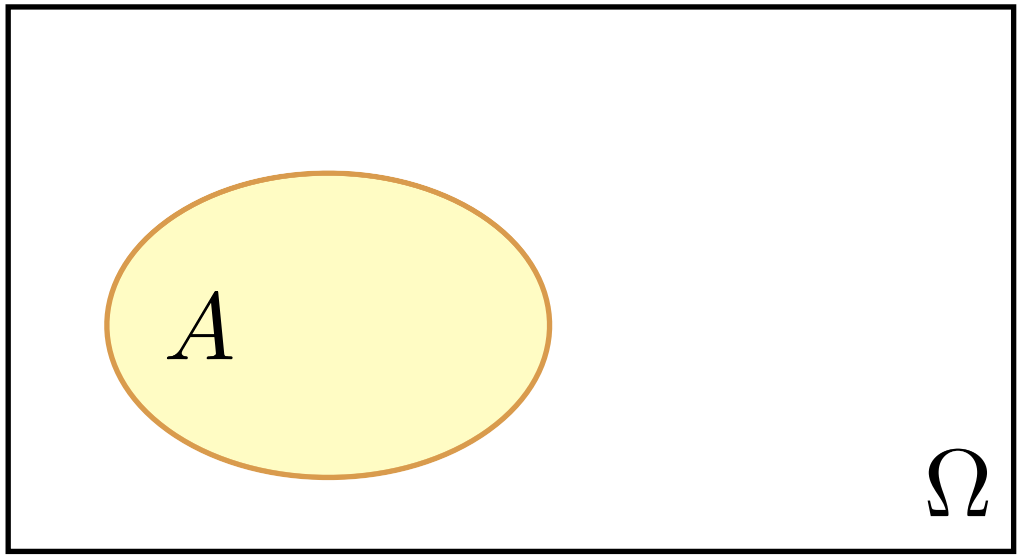
(b) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Pravděpodobnost

Některé důsledky axiomatické definice

1) $P(A^C) = 1 - P(A)$

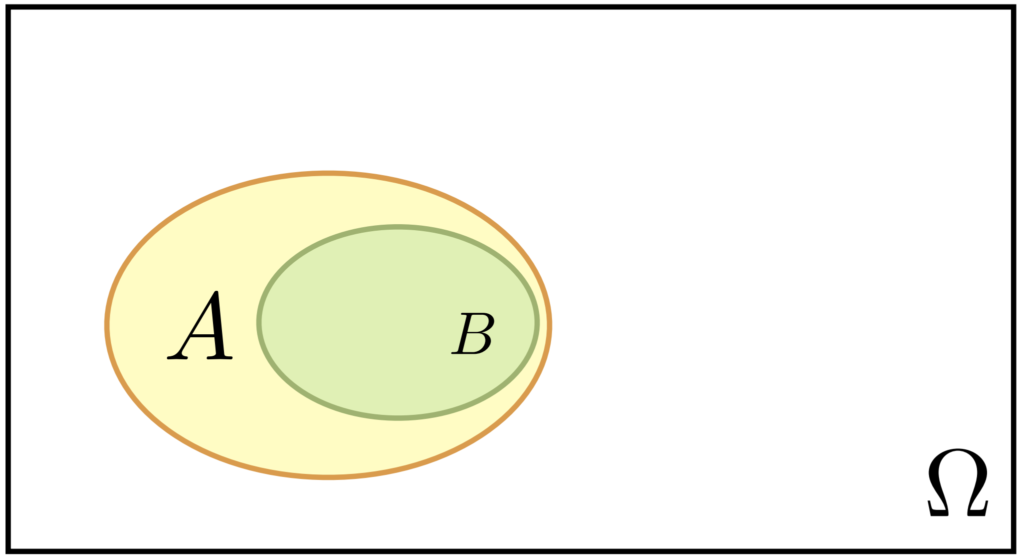


- $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega - A$
- tedy A^C a A jsou disjunktní, $A^C \cap A = \emptyset$
- zároveň je $A^C \cup A = \Omega$
- podle axiomů b), c) tedy platí
  $P(A^C \cup A) = P(A^C) + P(A) = P(\Omega) = 1$
- a tedy $P(A^C) = 1 - P(A)$

Pravděpodobnost

Některé důsledky axiomatické definice

1) $P(A^C) = 1 - P(A)$
2) $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
3) monotónie: $B \subset A \;\Rightarrow\; P(B) \leq P(A)$



- označme $B^{C(A)} = \{\omega \in A : \omega \notin B\} = A - B$
- a dále podobně jako v předchozím

Pravděpodobnost

Některé důsledky axiomatické definice

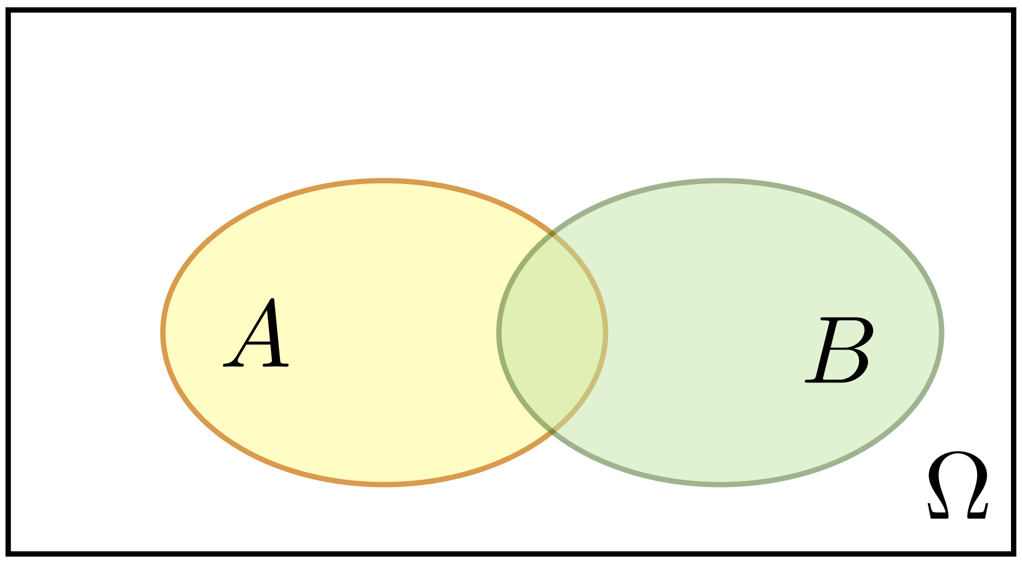
1) $P(A^C) = 1 - P(A)$

2) $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

3) monotónie: $B \subset A \;\Rightarrow\; P(B) \leq P(A)$

4) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

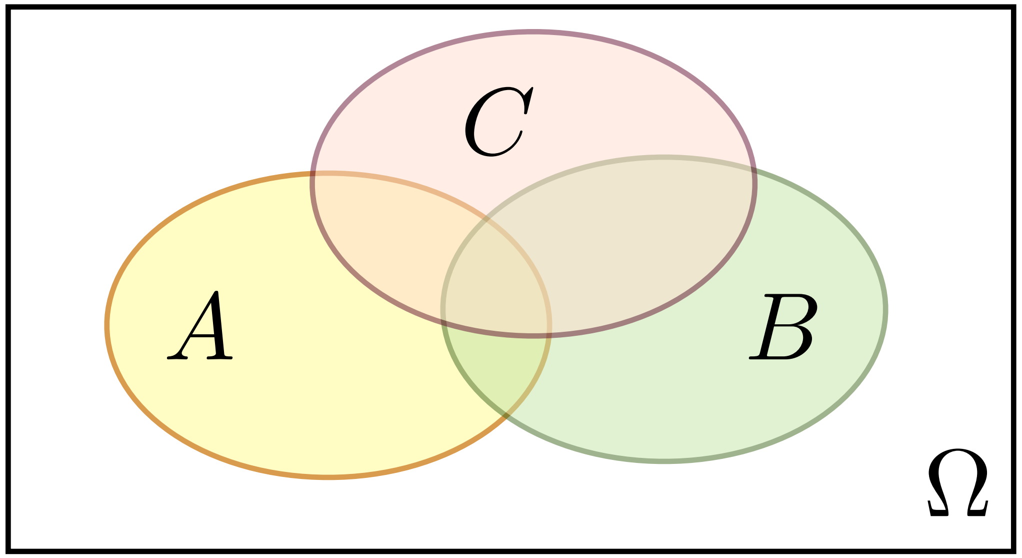
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



- $A = (A - B) \cup (A \cap B), \quad (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset,$
- $A \cup B = A \cup (B - A), A \cap (B - A) = \emptyset$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Pravděpodobnost

Některé důsledky axiomatické definice



1) $P(A^C) = 1 - P(A)$

2) $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

3) monotónie: $B \subset A \;\Rightarrow\; P(B) \leq P(A)$

4) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\
&= P(A) + \Big(P(B) + P(C) - P(B \cap C)\Big) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - \Big(P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)\Big) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost

Některé důsledky axiomatické definice

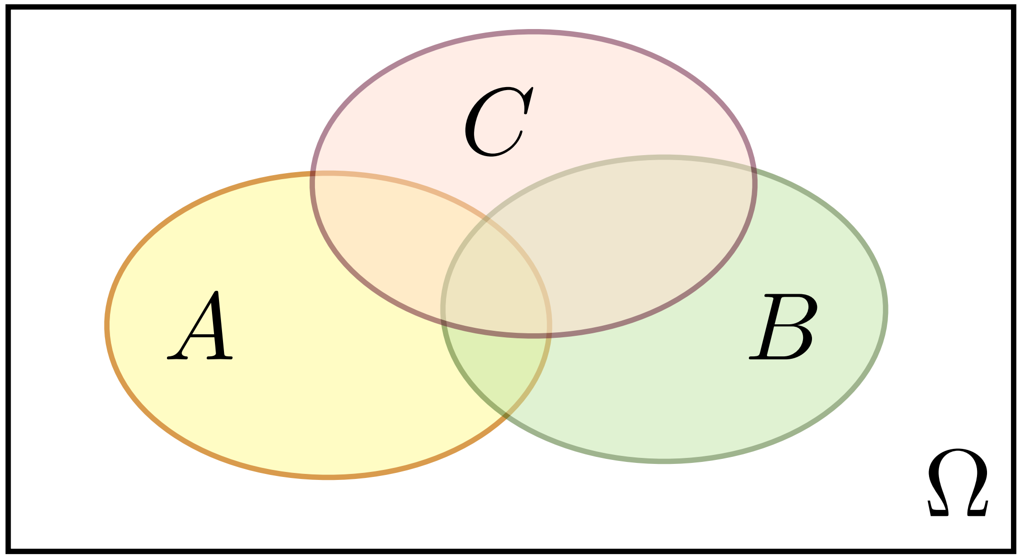
1) $P(A^C) = 1 - P(A)$

2) $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

3) monotónie: $B \subset A \;\Rightarrow\; P(B) \leq P(A)$

4) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



6) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Důkaz úplnou matematickou indukcí: i) z 5) plyne, že platí $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ pro $n = 2$

ii) předpokládejme, že vztah platí i pro nějaké $n > 2$

iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro $n + 1$

Pravděpodobnost

Některé důsledky axiomatické definice

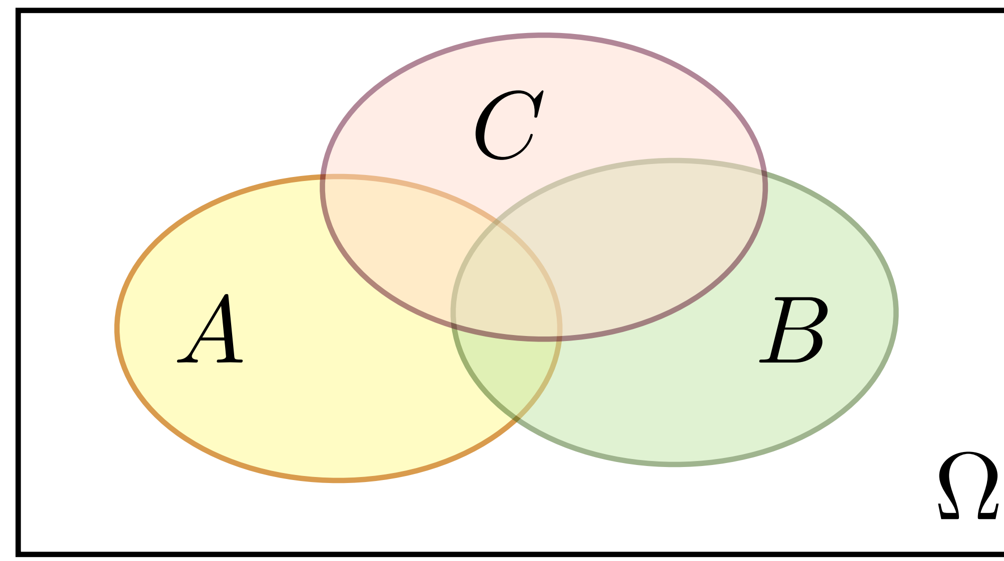
1) $P(A^C) = 1 - P(A)$

2) $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

3) monotónie: $B \subset A \;\Rightarrow\; P(B) \leq P(A)$

4) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



6) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) $$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

iii) ukážeme, že vztah potom platí i pro $n + 1$: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$$ a tedy platí i pro n+2, n+3, … ∞

Pravděpodobnost

Některé důsledky axiomatické definice

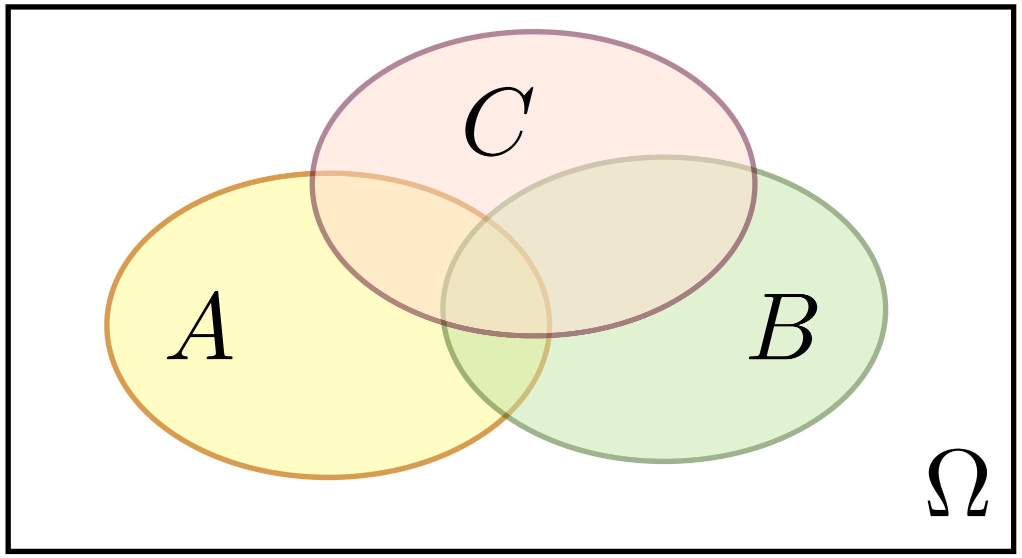
1) $P(A^C) = 1 - P(A)$

2) $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$

3) monotónie: $B \subset A \;\Rightarrow\; P(B) \leq P(A)$

4) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



6) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$

7) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$$\boxed{P(A \cap B) =?}$$

Pravděpodobnost

Příklad 4: Představme si výrobek, na němž může být několik různých vad (vada A, B a C, například). Vada A se vyskytuje ve 20 % případů, vada B v 15 % a vada C vzácně v 5 % případů. Vady vznikají nezávisle na sobě vlivem materiálu, vlivem výroby a díky vadné komponentě od externího dodavatele.

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mít všechny tři vady?

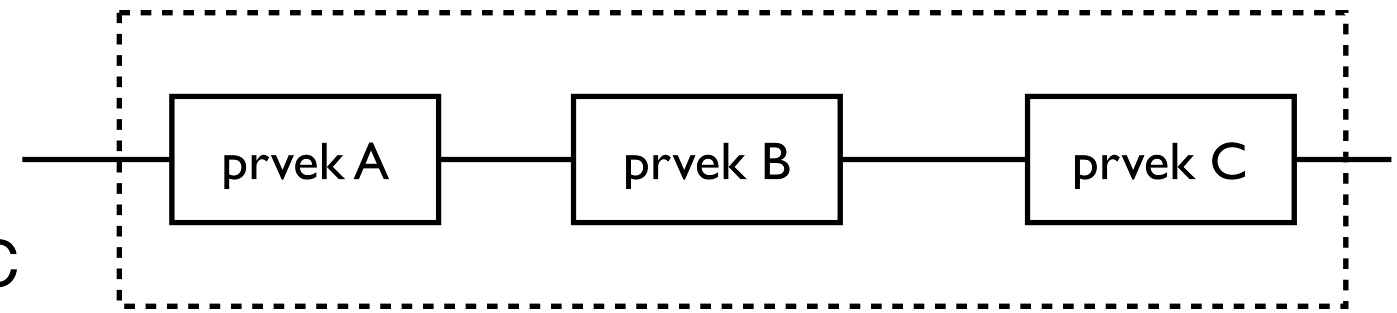
Zajímá nás tedy $P(A \cap B \cap C)$ …. ?

$$\boxed{P(A \cap B) = ?}$$

Pravděpodobnost

Příklad 4: Sériový systém.

Nezávislé prvky A, B, C



Označme: jev A={prvek A bude ve stavu „porucha“}
jev B={prvek B bude ve stavu „porucha“}
jev C={prvek C bude ve stavu „porucha“}
jev D_S={systém bude v e stavu „porucha“} = $A \cup B \cup C$

$$P(D_S) = P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

nebo také:

$$P(D_S) = 1 - P(D_S^C) = 1 - P(A^C \cap B^C \cap C^C)$$
$$= 1 - P(A^C)P(B^C)P(C^C) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C))$$

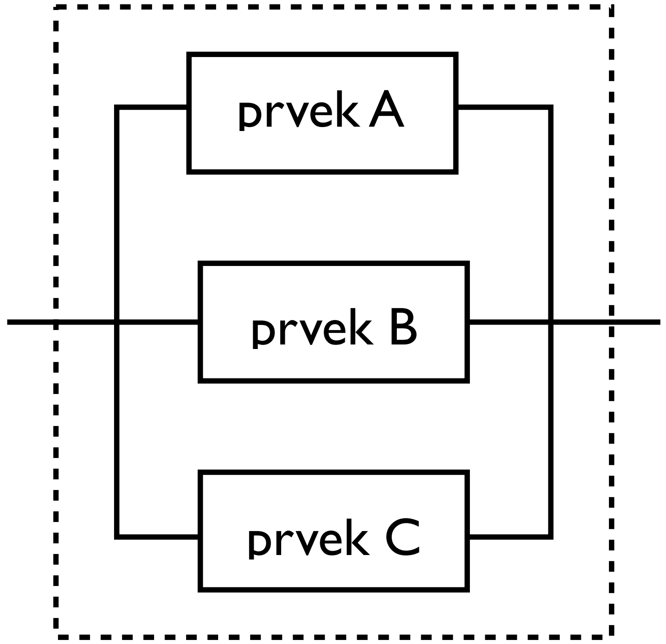
Při pozorování n prvků A, B a C se v určitém časovém intervalu porouchá

$n_A = 0{,}2n$ prvků A
$n_B = 0{,}03n$ prvků B
$n_C = 0{,}05n$ prvků C

z toho odhadneme: P(A) = 0,2; P(B) = 0,03; P(C) = 0,05 => a tedy odhadem

pravděpodobnosti selhání tohoto systému je $P(D_S)$ = 1 - 0,8.0,97.0,95 = 0,2628 ≐ 26 %

Pravděpodobnost



Příklad 5: Paralelní systém.

Nezávislé prvky A, B, C

Označme: jev A={prvek A bude ve stavu „porucha“}
jev B={prvek B bude ve stavu „porucha“}
jev C={prvek C bude ve stavu „porucha“}
jev D_P={systém bude ve stavu „porucha“} = $A \cap B \cap C$

$$P(D_P) = P(A \cap B \cap C)$$

Pozorováním n prvků A, B a C dostaneme stejné výsledky jako v předchozím příkladě.

Z nezávislosti prvků:
$n_A = 0{,}2$ z n případů, tedy $0{,}2n$ případů
$n_{AB} = 0{,}03$ z n_A případů, kdy se porouchal prvek A, tedy $0{,}006n$ případů
$n_C = 0{,}05$ z n_{AB} případů, kdy se porouchaly současně prvky A a B, tedy $3.10^{-5}n$ případů

=> z toho odhadneme, $P(D_P)=3.10^{-5}$ neboli $P(D_P)=P(A).P(B).P(C) = 0{,}2.0{,}03.0{,}05$

Pokud jsou jevy A, B a C nezávislé, potom můžeme počítat

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Pravděpodobnost

Jsou-li jevy A a B nezávislé, potom platí $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

Pro množinu nezávislých jevů $\{A_i\}_{i-1}^{n}$ z $\mathcal{F}$ platí $P(\bigcap_{i-1}^{n} A_i) = \prod_{i-1}^{n} P(A_i)$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$

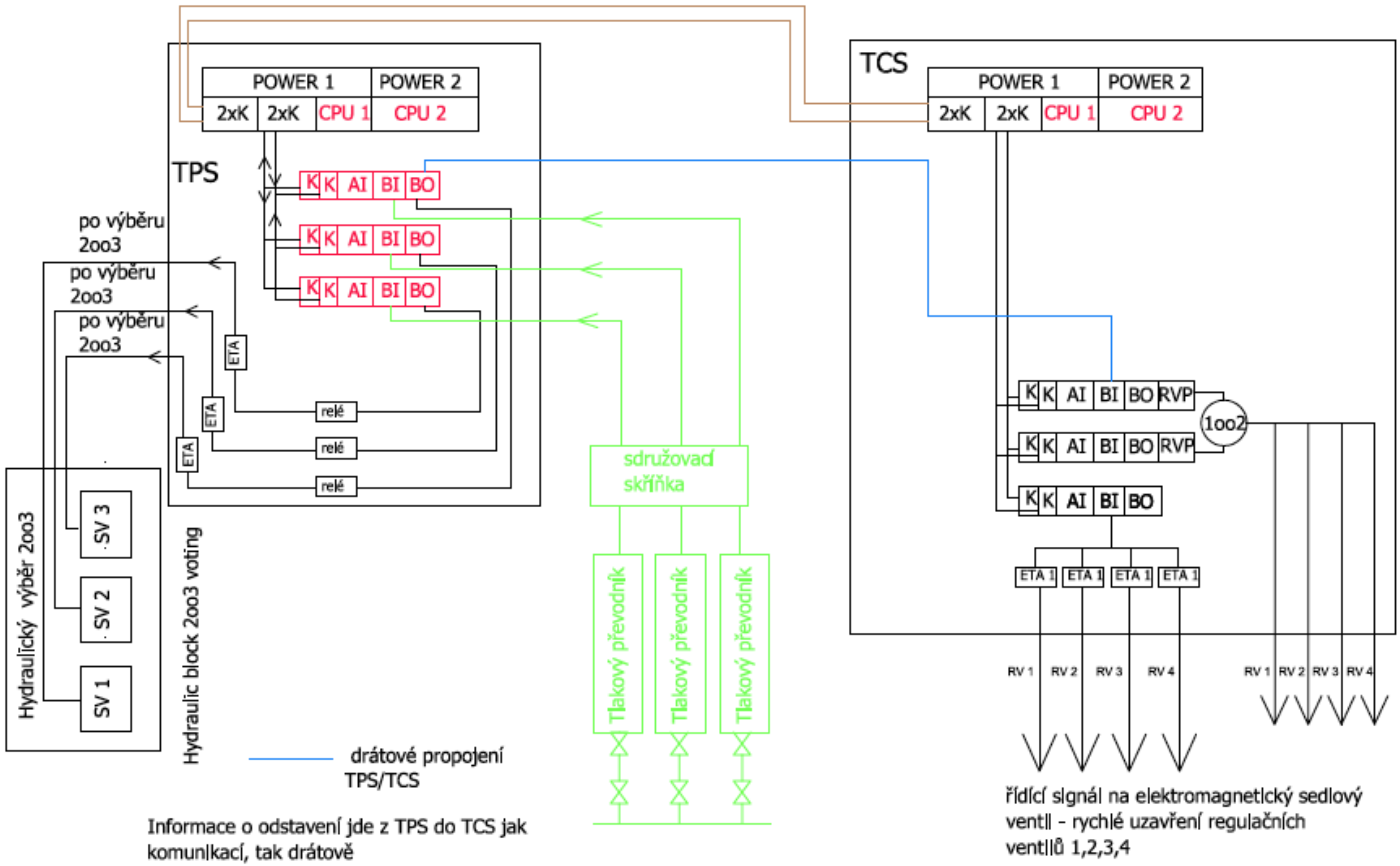
$$P(D_P) = 1 - \prod_{i-1}^{n}(1 - P(A_i))$$

$$P(D_S) = \prod_{i-1}^{n} P(A_i)$$

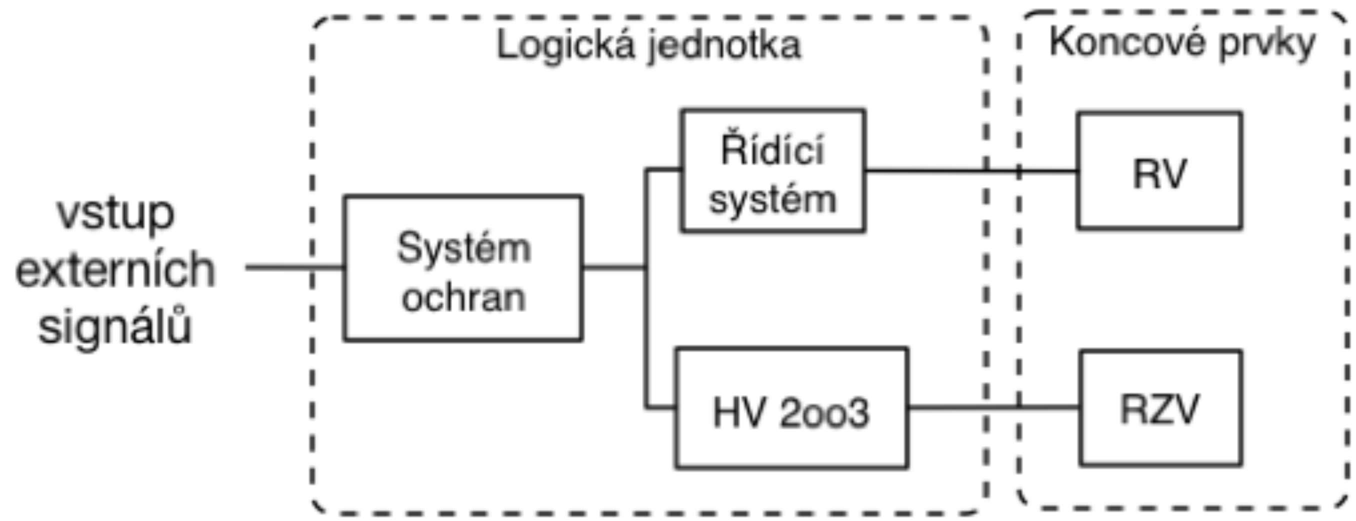
Paralelní systém.

Sériový systém.

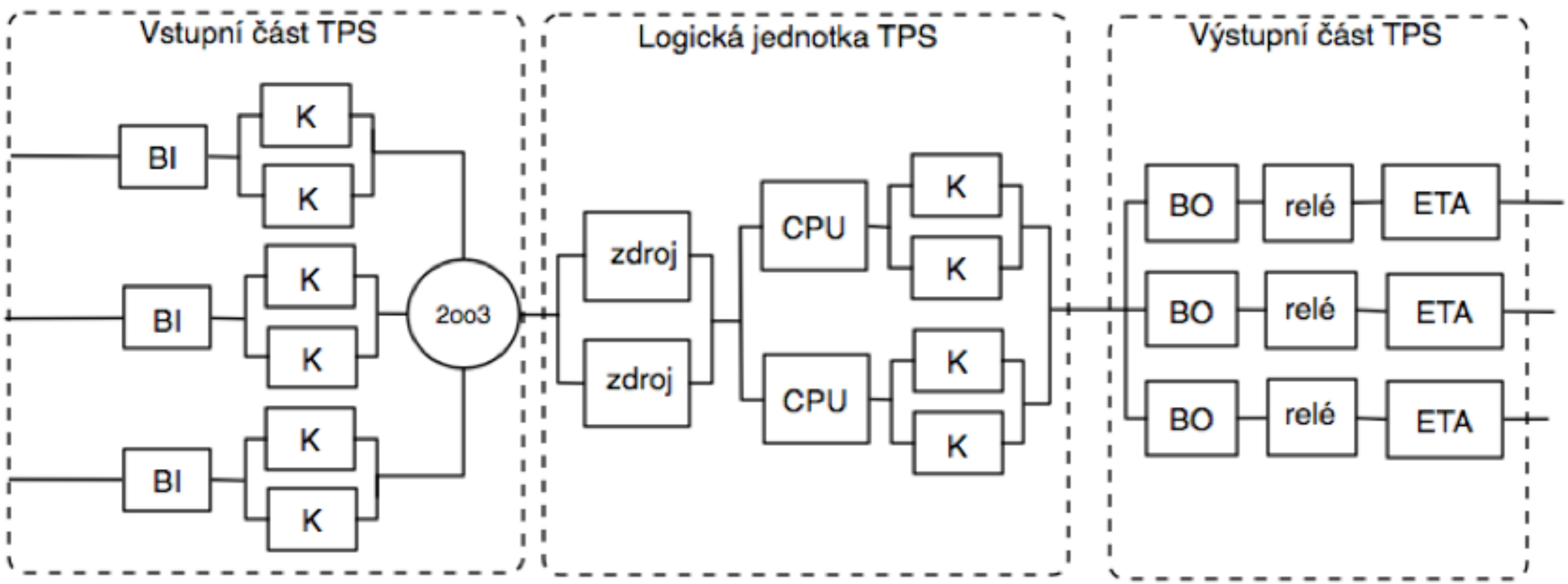
Příklad 6: Řídící a ochranný systém parní turbíny



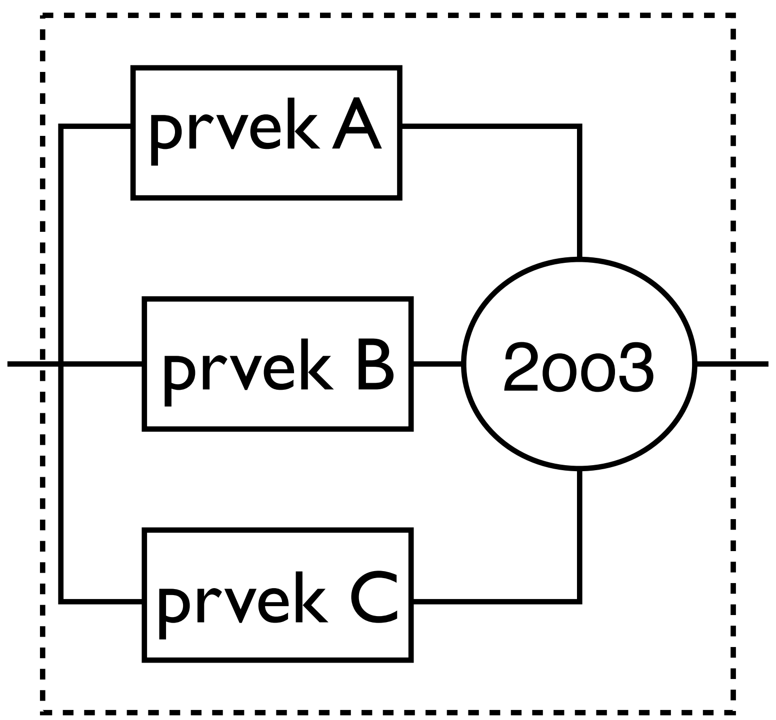
Příklad 6: Řídící a ochranný systém parní turbíny



Systém ochran:



Příklad 7: Systém KooN (K out of N)



Nezávislé prvky A, B, C

P(D) = ???

$$\boxed{P(A \cap B) = ?}$$

Podmíněná pravděpodobnost