Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

2. Podmíněná pravděpodobnost, Bayesova věta

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2024/2025

2. Podmíněná pravděpodobnost, Bayesova věta

Klíčové pojmy:

- Podmíněná pravděpodobnost
- Stochastická nezávislost

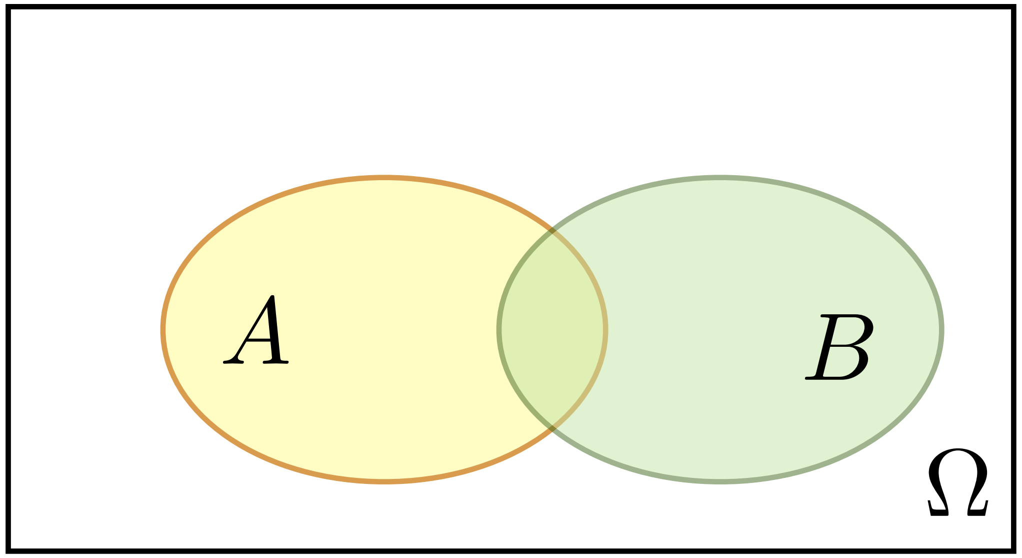
Klíčové věty:

- Věta o úplné pravděpodobnosti
- Bayesova věta

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = ?$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B|A)}$$



$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Příklad:

Je známo, že v dlouhodobém průměru je mezi 1000 dodaných komponent 3,28% vadných výrobků pocházejících od výrobce A, 1,08% vadných výrobků od výrobce B, 59,64% bezvadných výrobků od výrobce A a zbytek (36%) jsou bezvadné výrobky od výrobce B.

Jaká je pravděpodobnost, že vybraný vadný výrobek je od výrobce A?

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad:

Je známo, že v dlouhodobém průměru je mezi 1000 dodaných komponent 3,28% vadných výrobků pocházejících od výrobce A, 1,08% vadných výrobků od výrobce B, 59,64% bezvadných výrobků od výrobce A a zbytek (36%) jsou bezvadné výrobky od výrobce B.

Co je zadáno?

P(výrobek je od A a je vadný)= 0,0328 $= P(A \cap V)$

P(výrobek je od B a je vadný)= 0,0108 $= P(B \cap V)$

P(výrobek je od A a je bezvadný)= 0,5964 $= P(A \cap V^C)$

P(výrobek je od B a je bezvadný)= 0,36 $= P(B \cap V^C)$

	A	B
vada (V)	0,0328	0,0108
bez vady	0,5964	0,36

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad:

Je známo, že v dlouhodobém průměru je mezi 1000 dodaných komponent 3,28% vadných výrobků pocházejících od výrobce A, 1,08% vadných výrobků od výrobce B, 59,64% bezvadných výrobků od výrobce A a zbytek (36%) jsou bezvadné výrobky od výrobce B.

Co je zadáno?

P(výrobek je od A a je vadný)= 0,0328 $= P(A \cap V)$

P(výrobek je od B a je vadný)= 0,0108 $= P(B \cap V)$

P(výrobek je od A a je bezvadný)= 0,5964 $= P(A \cap V^C)$

P(výrobek je od B a je bezvadný)= 0,36 $= P(B \cap V^C)$

Na co se ptáme?

Jaká je pravděpodobnost, že vybraný vadný výrobek je od výrobce A?

$$P(A|V) = ? = \frac{P(A \cap V)}{P(V)}$$

$$= \frac{0,0328}{0,0436} = 0,7523$$

	A	B	celkem	
vada (V)	0,0328	0,0108	0,0436	$= P(V)$
bez vady	0,5964	0,3600	0,9564	$= P(V^C)$
celkem	0,6292	0,3708	1,0000	
	$= P(A)$	$= P(B)$		

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad:

Je známo, že v dlouhodobém průměru je mezi 1000 dodaných komponent 3,28% vadných výrobků pocházejících od výrobce A, 1,08% vadných výrobků od výrobce B, 59,64% bezvadných výrobků od výrobce A a zbytek (36%) jsou bezvadné výrobky od výrobce B.

Co je zadáno?

P(výrobek je od A a je vadný)= 0,0328 $= P(A \cap V)$

P(výrobek je od B a je vadný)= 0,0108 $= P(B \cap V)$

Na co se ptáme?

P(výrobek je od A a je bezvadný)= 0,5964 $= P(A \cap V^C)$

P(výrobek je od B a je bezvadný)= 0,36 $= P(B \cap V^C)$

Jaká je pravdě-podobnost, že vybraný vadný výrobek je od výrobce A?

$$P(A|V) =?= \frac{P(A \cap V)}{P(V)}$$

$$= \frac{0,0328}{0,0436} = \boxed{0,7523}$$

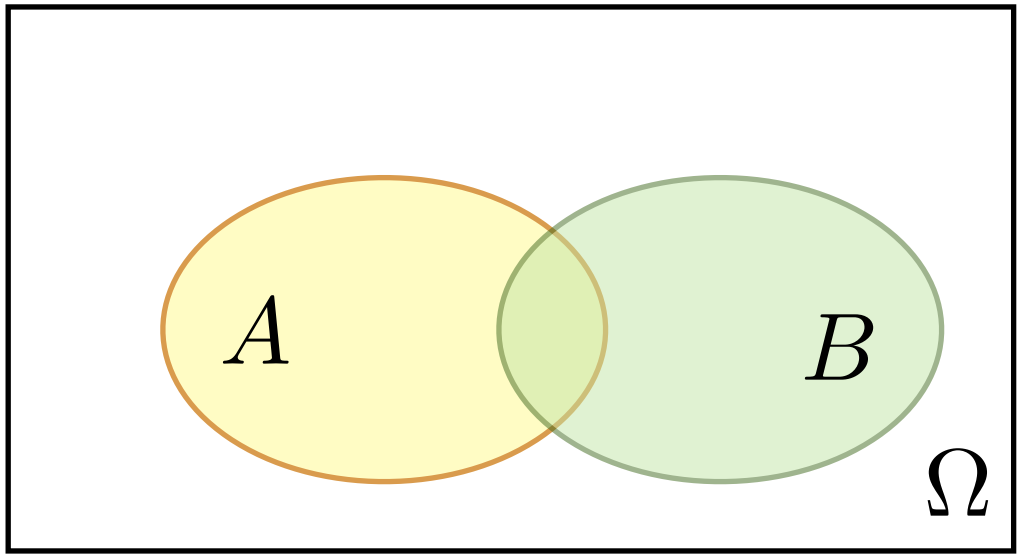
	A	B	celkem	
vada (V)	0,0328	0,0108	0,0436	$= P(V)$
bez vady	0,5964	0,3600	0,9564	$= P(V^C)$
celkem	0,6292	0,3708	1,0000	
	$= P(A)$	$= P(B)$		

Stochastická nezávislost

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Obecně je $P(A|B) \neq P(A)$ => potom říkáme, že A a B jsou **stochasticky závislé**

Pokud ale $P(A|B) = P(A)$ => potom říkáme, že A a B jsou **stochasticky nezávislé**

Jsou-li jevy A a B stochasticky nezávislé, potom platí $P(A \cap B)=P(A).P(B)$ a naopak.

Stochastická nezávislost

Příklad:

Je známo, že v dlouhodobém průměru je mezi 1000 dodaných komponent 3,28% vadných výrobků pocházejících od výrobce A, 1,08% vadných výrobků od výrobce B, 59,64% bezvadných výrobků od výrobce A a zbytek (36%) jsou bezvadné výrobky od výrobce B.

Jaká je pravděpodobnost, že vybraný vadný výrobek je od výrobce A?

$$P(A|V) = ? = \frac{P(A \cap V)}{P(V)}$$

$$= \frac{0,0328}{0,0436} = 0,7523$$

	A	B	celkem
vada (V)	0,0328	0,0108	0,0436
bez vady	0,5964	0,3600	0,9564
celkem	0,6292	0,3708	1,0000

$= P(A)$

Lze považovat výskyt vady stochasticky závislý na výrobci?

Zde je $P(A|V) \neq P(A)$ => A a V jsou stochasticky závislé.

Stochastická nezávislost

Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 336 dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 224 dotázaných absovovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 144 případech odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 96 jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

Lze považovat uplatnění se v oboru studia stochasticky závislé na absolvované univerzitě?

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	336	224	560
mimo obor	144	96	240
celkem	480	320	800

Stochastická nezávislost

Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 336 dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 224 dotázaných absovovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 144 případech odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 96 jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

Lze považovat uplatnění se v oboru studia stochasticky závislé na absolvované univerzitě?

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	0,42	0,28	0,7
mimo obor	0,18	0,12	0,3
celkem	0,6	0,4	1,0

Stochastická nezávislost

Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 336 dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 224 dotázaných absovovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 144 případech odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 96 jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

Lze považovat uplatnění se v oboru studia stochasticky závislé na absolvované univerzitě?

$$P(T \cap O) = 0,42 = 0,6 \cdot 0,7 = P(T) \cdot P(O)$$

$$P(T^C \cap O) = 0,28 = 0,4 \cdot 0,7 = P(T^C) \cdot P(O)$$

$$P(T \cap O^C) = 0,18 = 0,6 \cdot 0,3 = P(T) \cdot P(O^C)$$

$$P(T^C \cap O^C) = 0,12 = 0,4 \cdot 0,3 = P(T^C) \cdot P(O^C)$$

=> Jevy T a O jsou stochasticky nezávislé

	T	T^C	celkem
O	0,42	0,28	0,7
O^C	0,18	0,12	0,3
celkem	0,6	0,4	1,0

Věta o úplné pravděpodobnosti

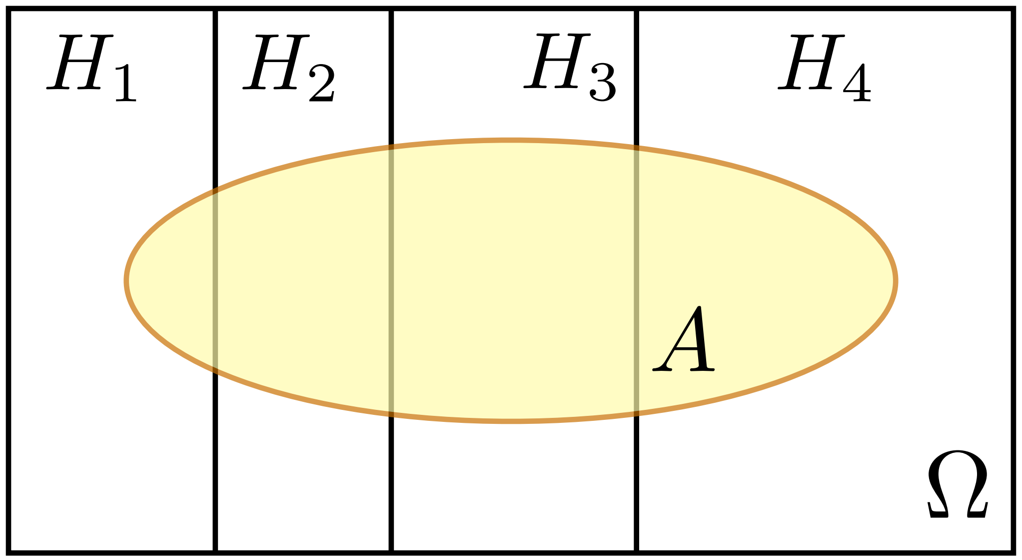
Úplné pokrytí Ω: $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$: $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

Předpokládejme, že známe

$P(H_1),\ P(H_2),\ P(H_3),\ P(H_4)$

Musí být

$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = 1$

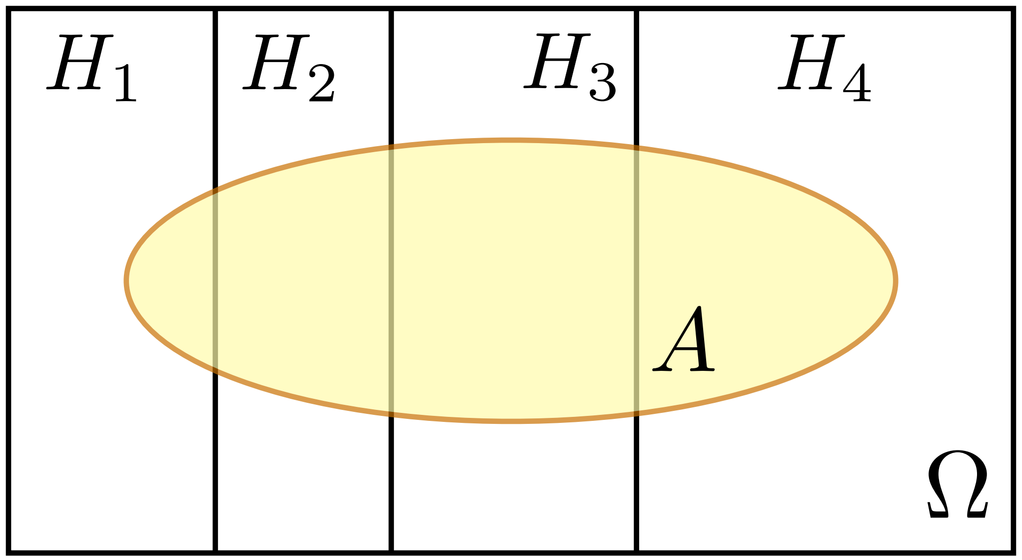


Obecně: Úplným pokrytím množiny elementárních jevů Ω rozumíme takovou množinu $\{H_i\}_{i=1}^n$ jevů z jevového pole $\mathcal{F}$, které jsou vzájemně po dvou disjunktní, tedy je $H_i \cap H_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$ a platí $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Dále předpokládejme, že máme náhodný jev $A \in \mathcal{F}$, jehož pravděpodobnost nás zajímá.

Věta o úplné pravděpodobnosti

Úplné pokrytí Ω: $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}: \; H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$



Předpokládejme, že známe

$P(H_1),\; P(H_2),\; P(H_3),\; P(H_4)$

Musí být

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = 1$$

Jev A lze rozložit na několik disjunktních jevů:

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup (A \cap H_3) \cup (A \cap H_4)$$

a tedy platí $P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + P(A \cap H_3) + P(A \cap H_4) = \bigcup_{i=1}^{4} P(A \cap H_i)$

Předpokládejme dále, že známe $P(A|H_1),\; P(A|H_2),\; P(A|H_3),\; P(A|H_4)$

a víme, že je $P(A \cap H_i) = P(A|H_i) \cdot P(H_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$ Potom dostáváme

$$\boxed{P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) + P(A|H_4)P(H_4) = \sum_{i=1}^{4} P(A|H_i)P(H_i)}$$

Věta o úplné pravděpodobnosti

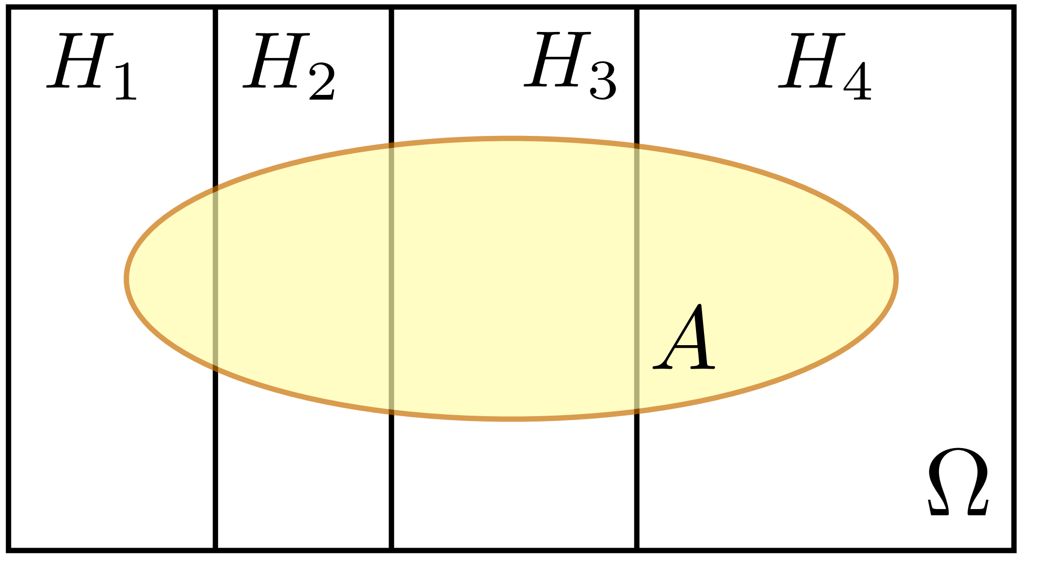
Úplné pokrytí Ω: $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$: $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

Předpokládejme, že známe

$P(H_1),\ P(H_2),\ P(H_3),\ P(H_4)$

Musí být

$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = 1$



Obecně: Mějme náhodný jev $A \in \mathcal{F}$. Je-li $\{H_i\}_{i=1}^n$ úplné pokrytí množiny Ω ,

potom platí $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$.

Věta o úplné pravděpodobnosti

Příklad:

Na trhu jsou výrobky od čtyř výrobců v pořadí A, B, C a D v poměru 1:2:4:5. Zmetkovitost je u těchto výrobců po řadě 0,5%, 0,8%, 0,3% a 0,3%. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek na trhu bude vadný?

- Experiment spočívá v tom, že náhodně vybereme jeden výrobek na trhu.
- Trh lze rozdělit na 12 dílů: 1 od výrobce A, 2 díly od výrobce B, 4 díly od C a 5 dílů od D.
- Nikdo jiný na trh nedodává a výrobek má vždy pouze jednoho výrobce. Tím dostáváme úplné pokrytí trhu: $H_1=A$, $H_2=B$, $H_3=C$, $H_4=D$.
- Z poměru výrobců na trhu odhadneme pravděpodobnosti toho, že náhodně vybraný výrobek je od daného výrobce:
  $P(H_1)=1/12,\quad P(H_2)=1/6,\quad P(H_3)=1/3,\quad P(H_5)=5/12.$
- Ze zadání známe i pravděpodobnosti výroby vadného výrobku u jednotlivých výrobců:
  $P(A|H_1)=0{,}005,\quad P(A|H_2)=0{,}008,\quad P(A|H_3)=0{,}003,\quad P(A|H_5)=0{,}003.$
- Tedy podle věty o úplné pravděpodobnosti je
  $P(A)= 0{,}005.1/12 + 0{,}008.2/12 + 0{,}003.\ 4/12 + 0{,}003.5/12 = 0{,}004.$

Vybrali jsme vadný výrobek. Nyní se ptáme: jaká je pravděpodobnost, že je od výrobce A?

Bayesova věta

Příklad:

Na trhu jsou výrobky od čtyř výrobců v pořadí A, B, C a D v poměru 1:2:4:5. Zmetkovitost je u těchto výrobců po řadě 0,5%, 0,8%, 0,3% a 0,3%. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný vadný výrobek na trhu byl vyroben výrobcem A?

- Otázka zní: Jaká je pravděpodobnost $P(H_1|A)=$?
- Známe $P(H_1)=1/12$ (= pravděpodobnost toho, že vybereme výrobek od výrobce A před provedením experimentu – tzv. „*apriorní pravděpodobnost*“)
- Víme, s jakou pravděpodobností výrobce A vyrábí zmetky: $P(A|H_1)=0{,}005$.
- Tedy jsme schopni vyjádřit pradvěpodobnost, s jakou se na trhu vyskytuje vadný výrobek od výrobce A: $P(A \cap H_1)=P(A|H_1).P(H_1)=0{,}005.1/12$
- Podle věty o úplné pravděpodobnosti jsme spočetli $P(A)=0{,}004$.
- Dosazením do vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost dostaneme výsledek:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A \cap H_1)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,005}{12 \cdot 0,004} = \boxed{0,1042}$$

(= pravděpodobnost toho, že jsme vybrali výrobek od výrobce A poté, co známe výsledek experimentu – tzv. „*aposteriorní pravděpodobnost*“)

Bayesova věta

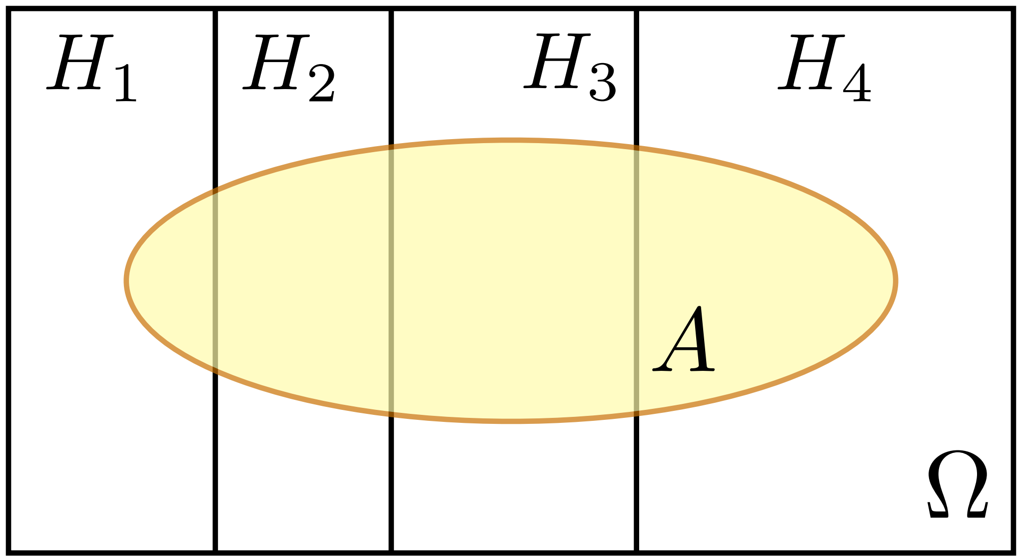
Úplné pokrytí Ω: $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$: $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

Předpokládejme, že známe

$P(H_1),\ P(H_2),\ P(H_3),\ P(H_4)$

Musí být

$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = 1$



Věta o úplné pravděpodobnosti: Mějme náhodný jev $A \in \mathcal{F}$. Je-li $\{H_i\}_{i=1}^n$ úplné pokrytí množiny Ω, potom platí $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$.

Bayesova věta: Mějme náhodný jev $A \in \mathcal{F}$ takový, že $P(A) \neq 0$. Je-li $\{H_i\}_{i=1}^n$ úplné pokrytí množiny Ω, potom pro libovolné $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)P(H_j)}$$

.

Bayesova věta

Uvažujme sledovaný výsledek Z (výskyt určité vlastnosti, stavu)

Provedeme experiment, test, který skončí výsledkem E.

$$\boxed{\text{aposteriorní pravděpodobnost Z}} = \frac{\boxed{\text{věrohodnost E při Z}}\,\boxed{\text{apriorní pravděpodobnost Z}}}{\boxed{\text{evidence E}}}$$

Příklad:

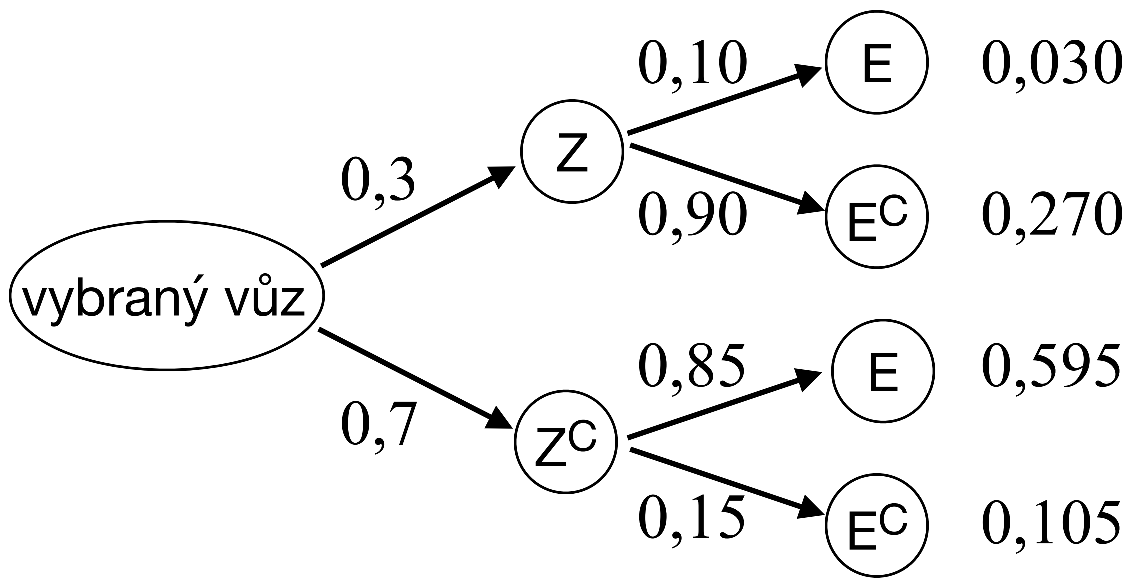
Chcete koupit ojetý vůz určité značky a cca 5 let starý. Je známo, že takovéto vozy mají vadnou převodovku přibližně ve 30 % případů. Ke koupi přizvete kamaráda automechanika, který vybraný vůz projede a řekne svůj názor. Kamarád však není dokonalý a zhruba v 10 % případů označí jako bezvadný vůz, který má vadu. Na druhou stranu, v 85 % pozná bezvadný vůz. Jakou máte šanci, pokud dáte na radu kamaráda, že koupíte vůz s vadou?

Uvažujme sledovaný výsledek Z = vada (Z, Z^C tvoří úplné pokrytí)

Provedeme diagnostický test, který skončí výsledkem E pokud není diagnostikována vada, E^C pokud vada diagnostikována je.

$$P(Z|E) = \frac{P(E|Z)P(Z)}{P(E)}$$

Bayesova věta



$$P(Z|E) = \frac{0{,}03}{0{,}03+0{,}595} = 0{,}048$$

Příklad:

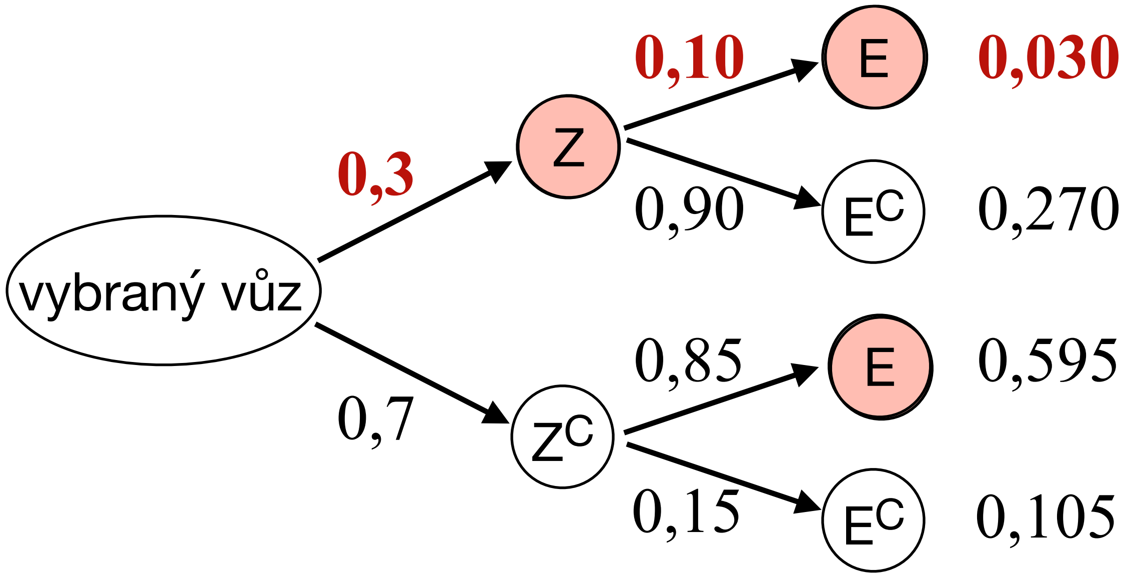
Chcete koupit ojetý vůz určité značky a cca 5 let starý. Je známo, že takovéto vozy mají vadnou převodovku přibližně ve 30 % případů. Ke koupi přizvete kamaráda automechanika, který vybraný vůz projede a řekne svůj názor. Kamarád však není dokonalý a zhruba v 10 % případů označí jako bezvadný vůz, který má vadu. Na druhou stranu, v 85 % pozná bezvadný vůz. Jakou máte šanci, pokud dáte na radu kamaráda, že koupíte vůz s vadou?

Uvažujme sledovaný výsledek Z = vada (Z, Z^C tvoří úplné pokrytí)

Provedeme diagnostický test, který skončí výsledkem E pokud není diagnostikována vada, E^C pokud vada diagnostikována je.

$$P(Z|E) = \frac{P(E|Z)P(Z)}{P(E)}$$

Bayesova věta



$$P(Z|E) = \frac{0{,}03}{0{,}03+0{,}595} = 0{,}048$$

Příklad:

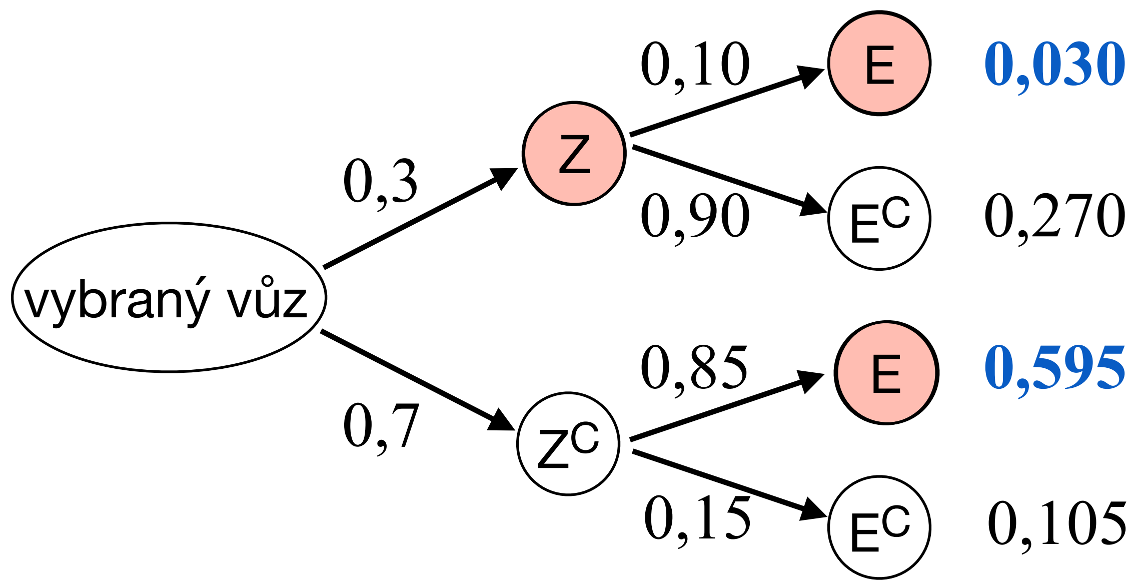
Chcete koupit ojetý vůz určité značky a cca 5 let starý. Je známo, že takovéto vozy mají vadnou převodovku přibližně ve 30 % případů. Ke koupi přizvete kamaráda automechanika, který vybraný vůz projede a řekne svůj názor. Kamarád však není dokonalý a zhruba v 10 % případů označí jako bezvadný vůz, který má vadu. Na druhou stranu, v 85 % pozná bezvadný vůz. Jakou máte šanci, pokud dáte na radu kamaráda, že koupíte vůz s vadou?

Uvažujme sledovaný výsledek Z = vada (Z, Z^C tvoří úplné pokrytí)

Provedeme diagnostický test, který skončí výsledkem E pokud není diagnostikována vada, E^C pokud vada diagnostikována je.

$$P(Z|E) = \frac{P(E|Z)P(Z)}{P(E)}$$

Bayesova věta



$$P(Z|E) = \frac{0{,}03}{0{,}03+0{,}595} = \boxed{0{,}048}$$

Příklad:

Chcete koupit ojetý vůz určité značky a cca 5 let starý. Je známo, že takovéto vozy mají vadnou převodovku přibližně ve 30 % případů. Ke koupi přizvete kamaráda automechanika, který vybraný vůz projede a řekne svůj názor. Kamarád však není dokonalý a zhruba v 10 % případů označí jako bezvadný vůz, který má vadu. Na druhou stranu, v 85 % pozná bezvadný vůz. Jakou máte šanci, pokud dáte na radu kamaráda, že koupíte vůz s vadou?

Uvažujme sledovaný výsledek Z = vada (Z, Z^C tvoří úplné pokrytí)

Provedeme diagnostický test, který skončí výsledkem E pokud není diagnostikována vada, E^C pokud vada diagnostikována je.

$$P(Z|E) = \frac{P(E|Z)P(Z)}{P(E)}$$

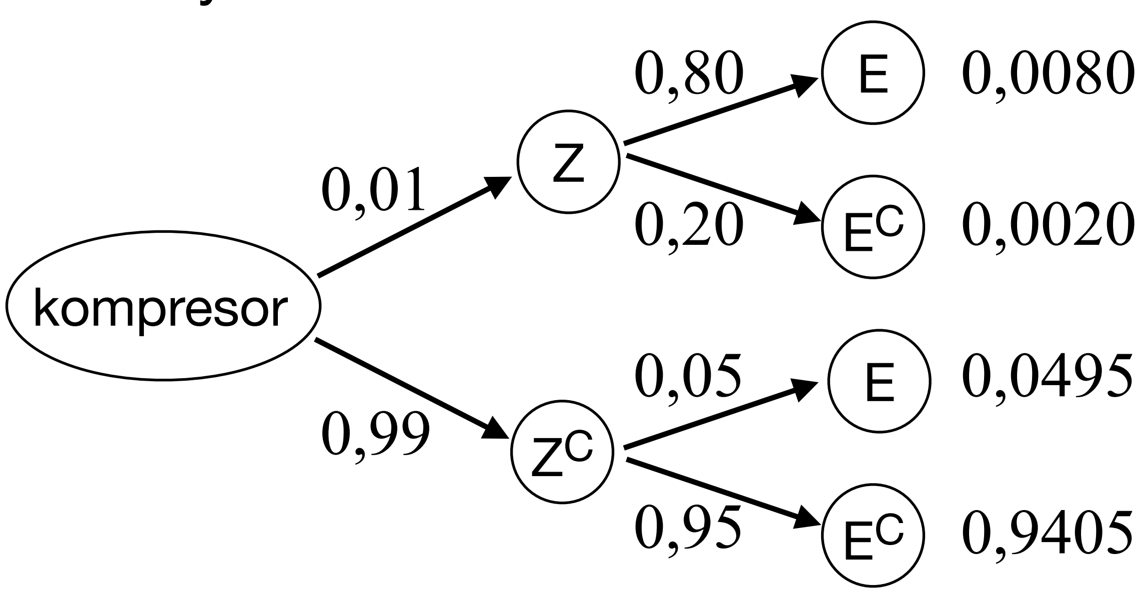
Tedy dáme-li na radu kamaráda automechanika, naše riziko koupě vadného vozu se sníží ze 30 % na 4,8 %.

Bayesova věta

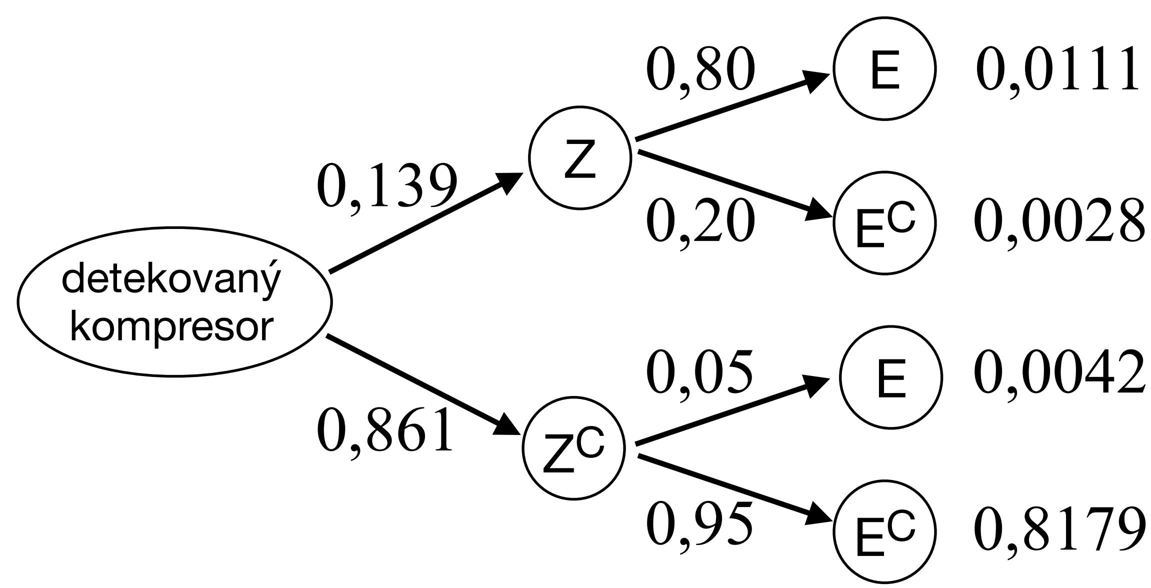
Příklad:

Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí chybně jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?

běžný test na lince:



test ve zkušebně:



$$P(Z|E) = \frac{0{,}0080}{0{,}0080 + 0{,}0495} = \boxed{0{,}1391}$$

$$P(Z|E) = \frac{0{,}0111}{0{,}0111 + 0{,}0042} = \boxed{0{,}7255}$$

konfirmačí test ve zkušebně: $P(Z|E) = \boxed{0{,}9769}$

Diagnostické testy

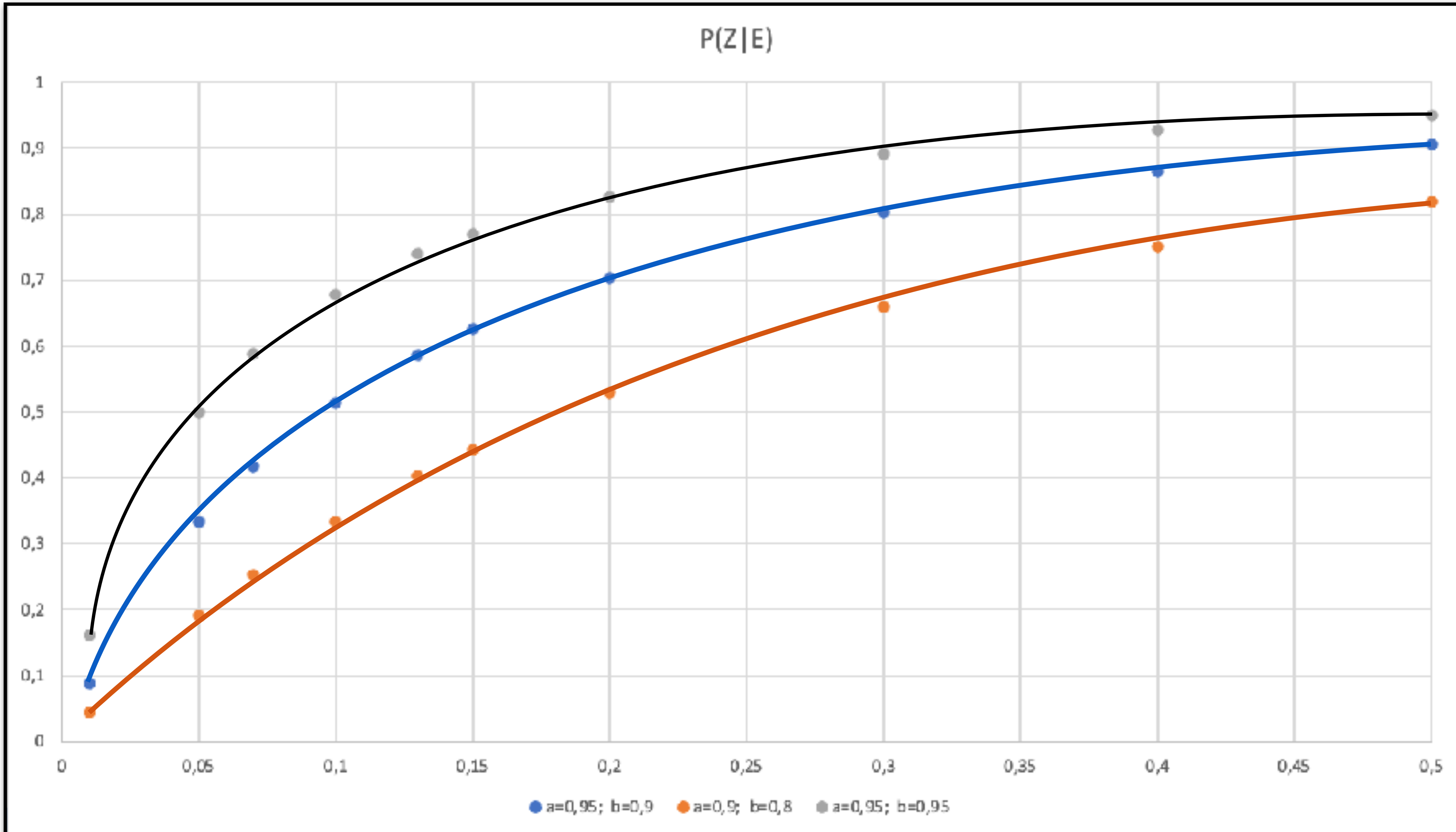
Snažíme se detekovat nějaký jev Z (vadu, nemoc) pomocí diagnostického testu E

- Předpokládáme, že apriorní pravděpodobnost (= prevalence jevu Z) je známa a je rovna p.
- $P(E \mid Z) = a$ = pravděpodobnost toho, že test správně detekuje jev Z (=senzitivita testu)
- $P(E^C \mid Z^C) = b$ = pravděpodobnost toho, že test správně detekuje nepřítomnost jevu Z (=specifita testu)
- $P(E) = P(E|Z).P(Z) + P(E|Z^C).P(Z^C) = a.p + (1-b).(1-p)$ = pravděpodobnost pozitivního testu (=evidence)
- $P(E \mid Z^C)$ = pravděpodobnost falešně pozitivního výsledku je $(1-b)$
- $P(E^C \mid Z)$ = pravděpodobnost falešně negativního výsledku je $(1-a)$
- $P(Z|E) = \dfrac{P(E|Z)P(Z)}{P(E)}$ = pravděpodobnost toho, že pozitivně testovaný člověk bude skutečně nemocný.

Příklad:

Prevalence nemoci v populaci je 10 %. Testy použité k její detekci mají vysokou senzitivitu 95 % a specifitu 90 %. Přesto pravděpodobnost, že pozitivně testovaný člověk tuto nemoc opravdu má, je pouhých 51,4 %

Diagnostické testy



Prevalence nemoci v populaci je 20 %. Testy použité k její detekci mají vysokou senzitivitu 95 % a specifitu 90 %. Přesto pravděpodobnost, že pozitivně testovaný člověk tuto nemoc opravdu má, je 70 %