# Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

## 4. Spojité pravděpodobnostní modely

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2024/2025

# 4. Spojité pravděpodobnostní modely

**Klíčové pojmy:**

- Rovnoměrné spojité rozdělení;
- Beta rozdělení;
- Normální rozdělení - obecné, standardní, symetrie;
- Chí-kvadrát rozdělení,
- t-rozdělení;
- F-rozdělení;

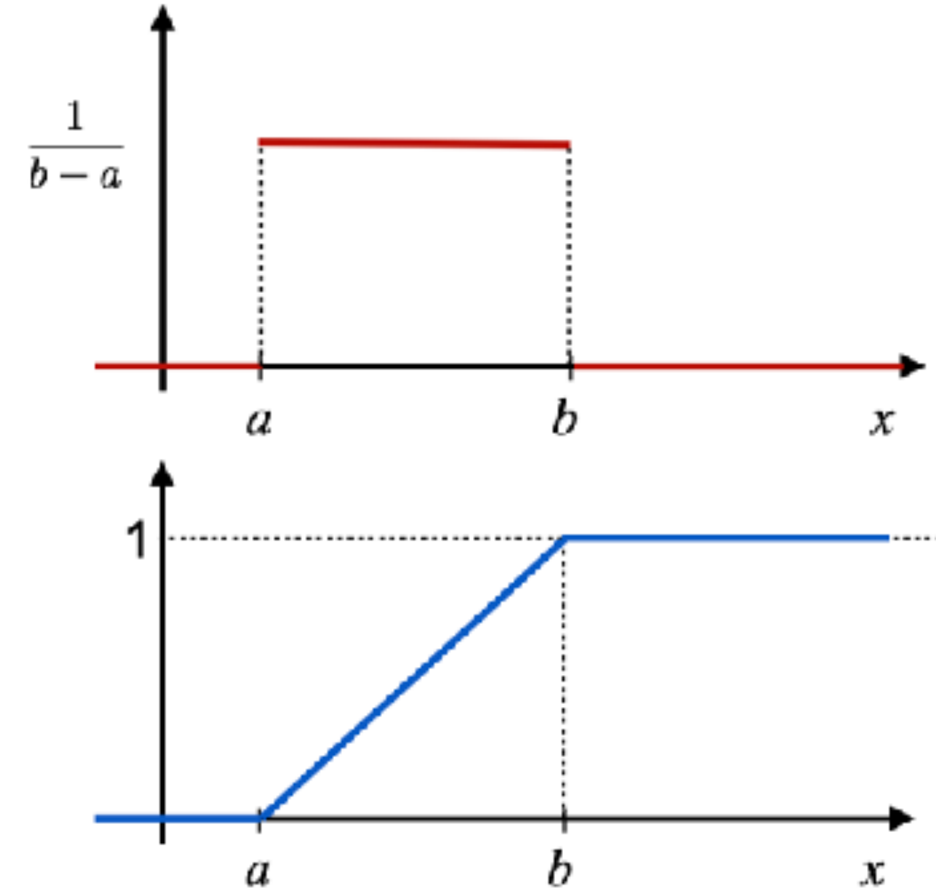
# Spojité pravděpodobnostní modely

## 1. Model rovnoměrného rozdělení na intervalu

Model experimentu, při němž mohou výsledky nastat kdekoli v nějakém reálném omezeném intervalu a my nemáme důvod preferovat některou jeho část.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{1}{b-a} & x \in \langle a; b \rangle, \\ 0 & x > b. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in \langle a; b \rangle, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$




$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\left[x^2\right]_a^b}{2(b-a)} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} \mathrm{d}x = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

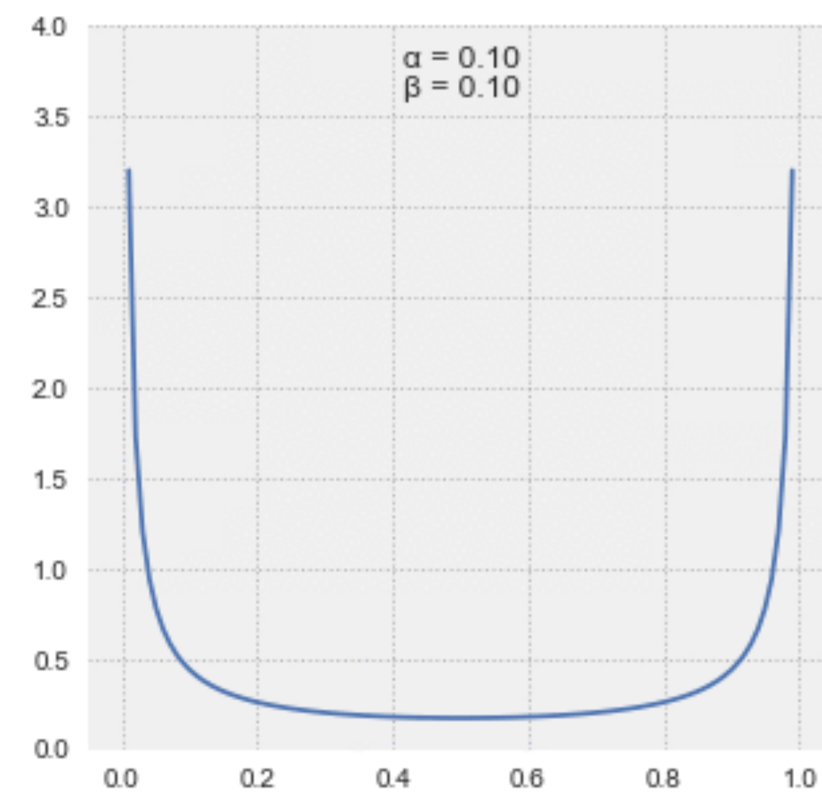
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

# Spojité pravděpodobnostní modely

### 2. Model náhodného chování na omezeném intervalu

Model experimentu, při němž mohou výsledky nastat kdekoli v nějakém reálném omezeném intervalu, přičemž máme důvod preferovat některou jeho část.

- Zpravidla se uvádí pro interval ⟨0,1⟩. Chceme-li jej použít pro jiný interval, musíme nejprve provést transformaci.
- Používá se často pro modelování náhodného chování procent a podílů.




$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, x^{\alpha-}(1-x)^{\beta-1} & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

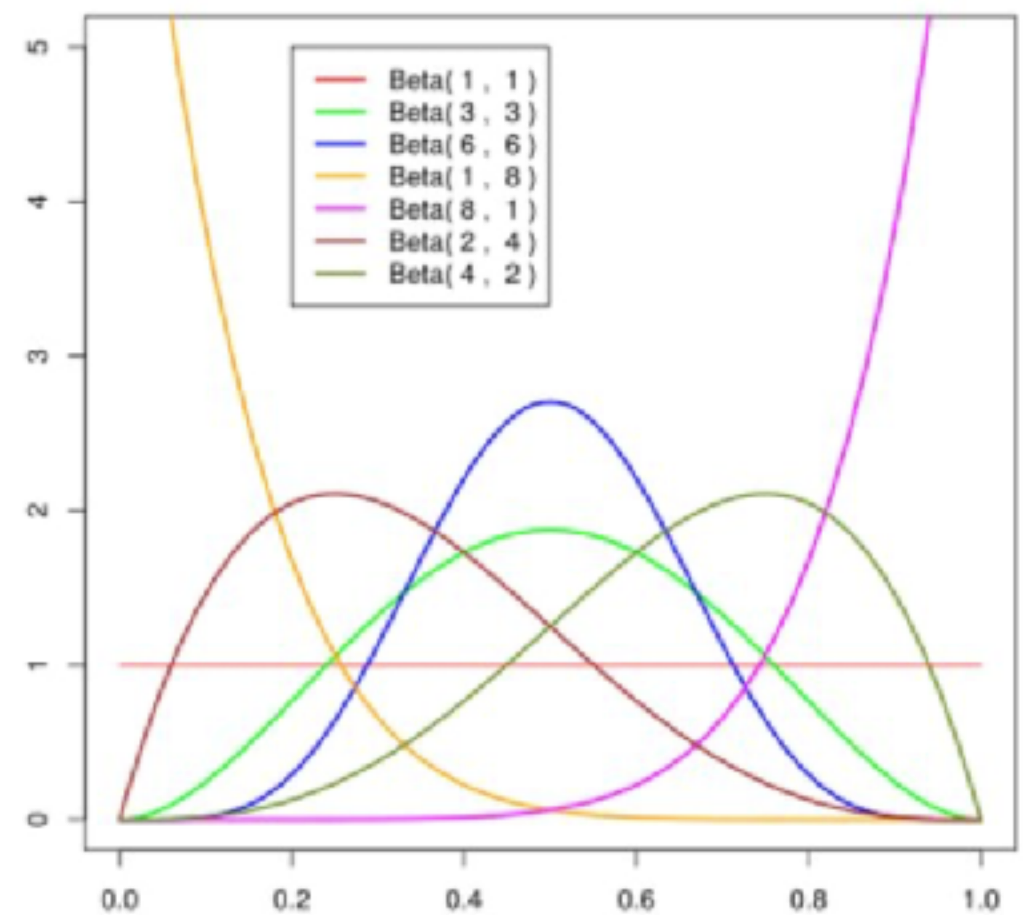
kde $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$

# Spojité pravděpodobnostní modely

### 2. Model náhodného chování na omezeném intervalu

Model experimentu, při němž mohou výsledky nastat kdekoli v nějakém reálném omezeném intervalu, přičemž máme důvod preferovat některou jeho část.

- Zpravidla se uvádí pro interval ⟨0,1⟩. Chceme-li jej použít pro jiný interval, musíme nejprve provést transformaci.
- Používá se často pro modelování náhodného chování procent a podílů.




$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, x^{\alpha-}(1-x)^{\beta-1} & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

kde $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

# Spojité pravděpodobnostní modely

## 3. Model normálního (Gaussova) rozdělení

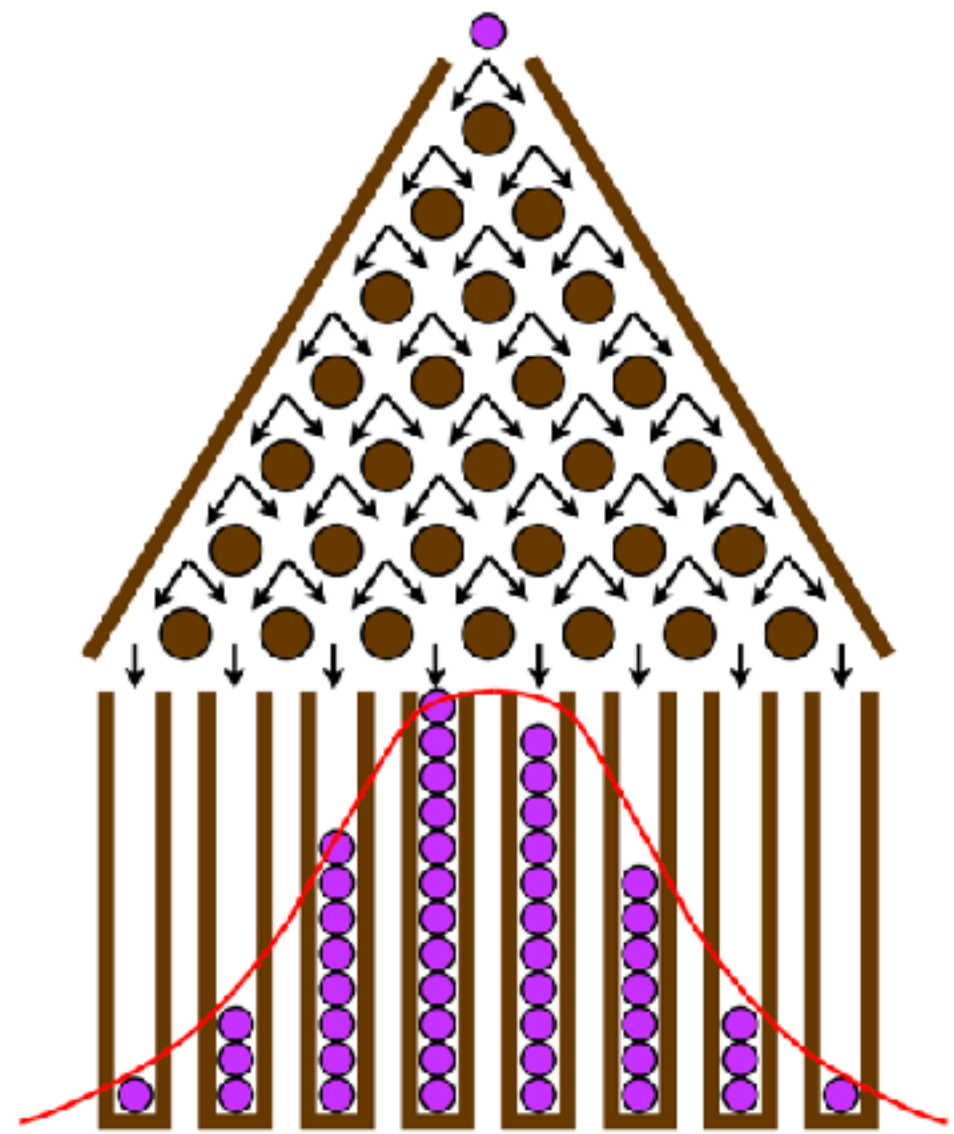
Model experimentu, při němž se výsledky pohybují kolem jedné (jmenovité, nominální) hodnoty se symetrickou náhodnou chybou.

- první formulace tohoto rozdělení a rovnice jeho hustoty pochází z 18. století od Abrahama de Moivre. Ten popsal tzv. „zvonovou křivku“ pomocí exponenciální funkce.

Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{y = Ke^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}}$$



# Spojité pravděpodobnostní modely

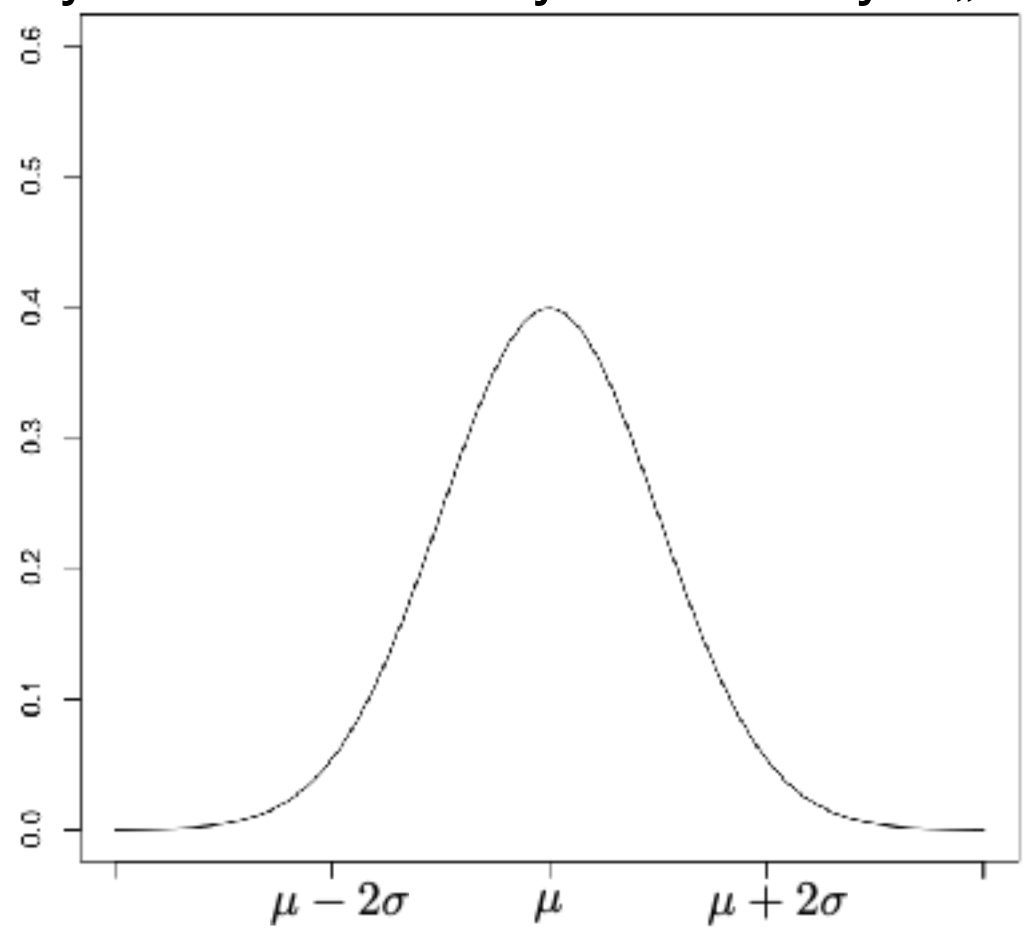
### 3. Model normálního (Gaussova) rozdělení

Model experimentu, při němž se výsledky pohybují kolem jedné (jmenovité, nominální) hodnoty se symetrickou náhodnou chybou.

- první formulace tohoto rozdělení a rovnice jeho hustoty pochází z 18. století od Abrahama de Moivre. Ten popsal tzv. „zvonovou křivku“ pomocí exponenciální funkce.
- název „Gaussovo rozdělení“ pochází z přelomu 18. a 19. století, kdy F. Gauss a P. Laplace řešili rozdíly v astronomických měřeních - výsledkem byla „křivka chyb měření“, tzv. Gaussova křivka.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hustota pravděpodobnosti

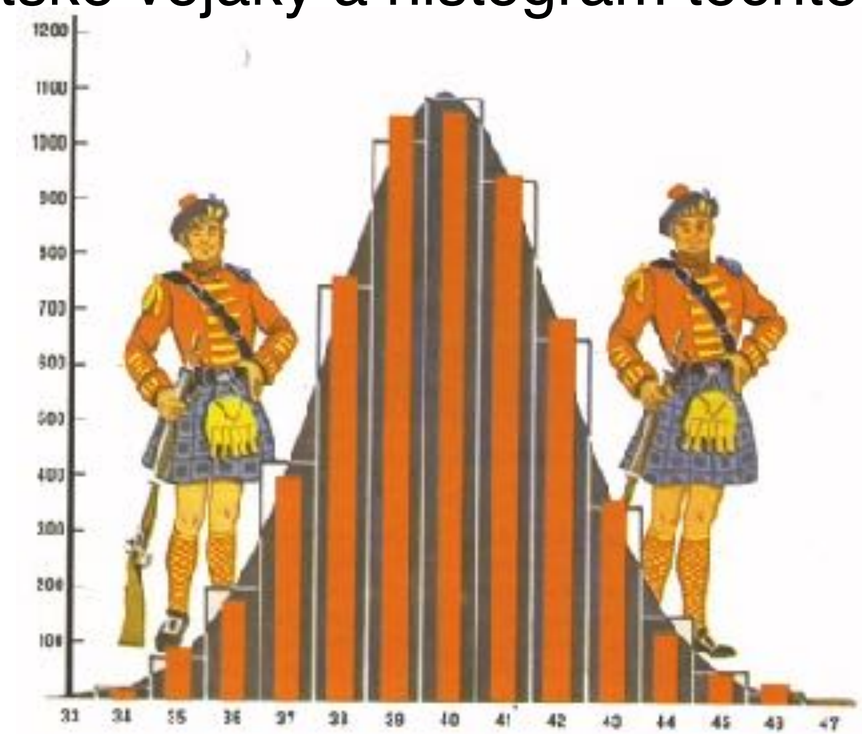


# Spojité pravděpodobnostní modely

**3. Model normálního (Gaussova) rozdělení**

Model experimentu, při němž se výsledky pohybují kolem jedné (jmenovité, nominální) hodnoty se symetrickou náhodnou chybou.

- první formulace tohoto rozdělení a rovnice jeho hustoty pochází z 18. století od Abrahama de Moivre. Ten popsal tzv. „zvonovou křivku“ pomocí exponenciální funkce.
- název „Gaussovo rozdělení“ pochází z přelomu 18. a 19. století, kdy F. Gauss a P. Laplace řešili rozdíly v astronomických měřeních - výsledkem byla „křivka chyb měření“, tzv. Gaussova křivka.
- přívlastek „normální“ je odvozen z výsledků antropometrických měření A. Quételeta z počátku 19. století (měřil skotské vojáky a histogram těchto měření lze aproximovat zvonovou křivkou.



Obvod hrudi skotských vojáků v palcích, naměřený Quételetem ve dvacátých letech 19. století

# Spojité pravděpodobnostní modely

**3. Model normálního rozdělení**

Model experimentu, při němž se výsledky pohybují kolem jedné (jmenovité, nominální) hodnoty se symetrickou náhodnou chybou.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

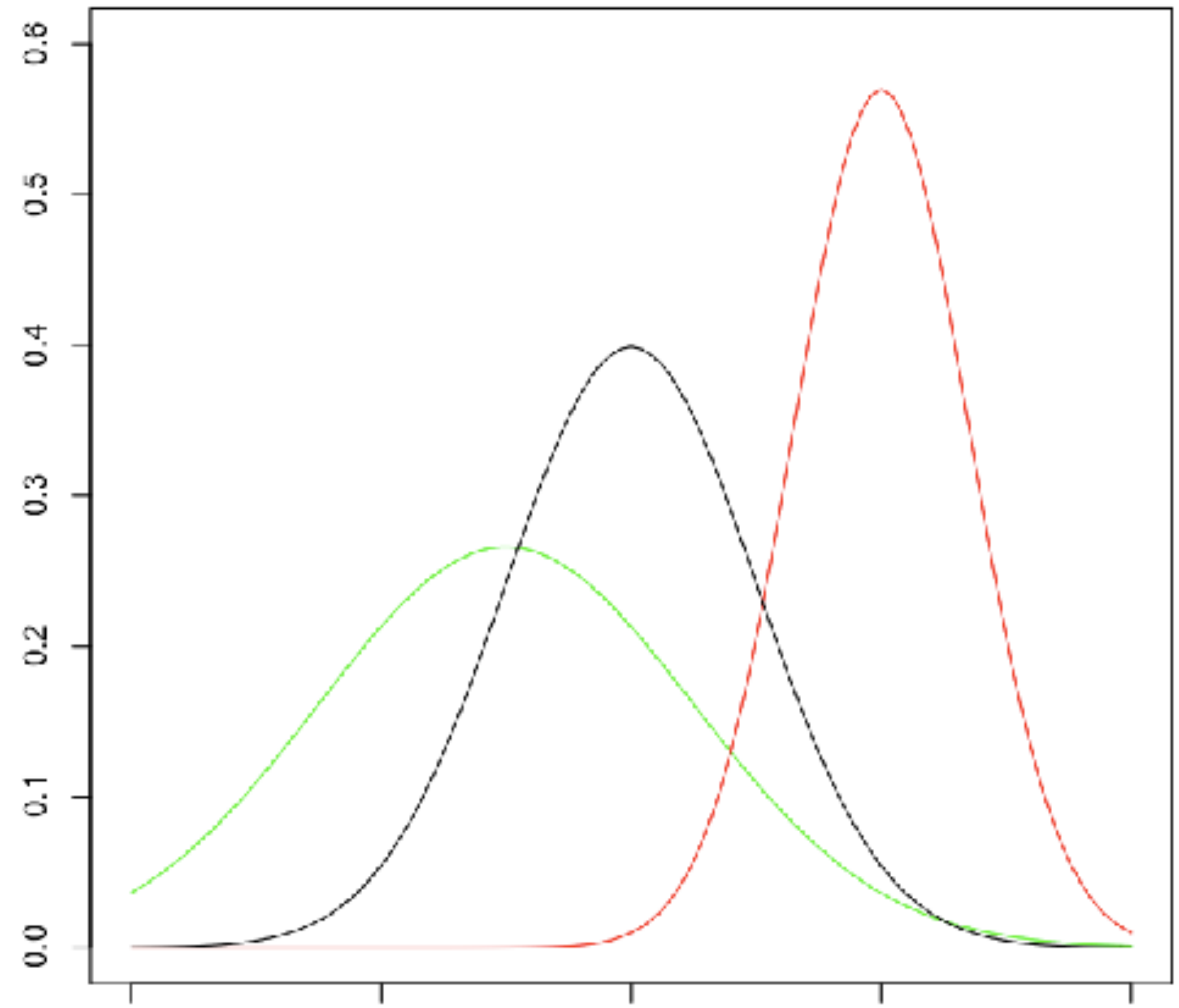
hustota pravděpodobnosti

$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in R$ - parametr polohy

**Normální rozdělení** $N(\mu, \sigma^2)$

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$




$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \quad E(X) = \mu \qquad var(X) = \sigma^2$$

# Spojité pravděpodobnostní modely

## 3. Model normálního rozdělení

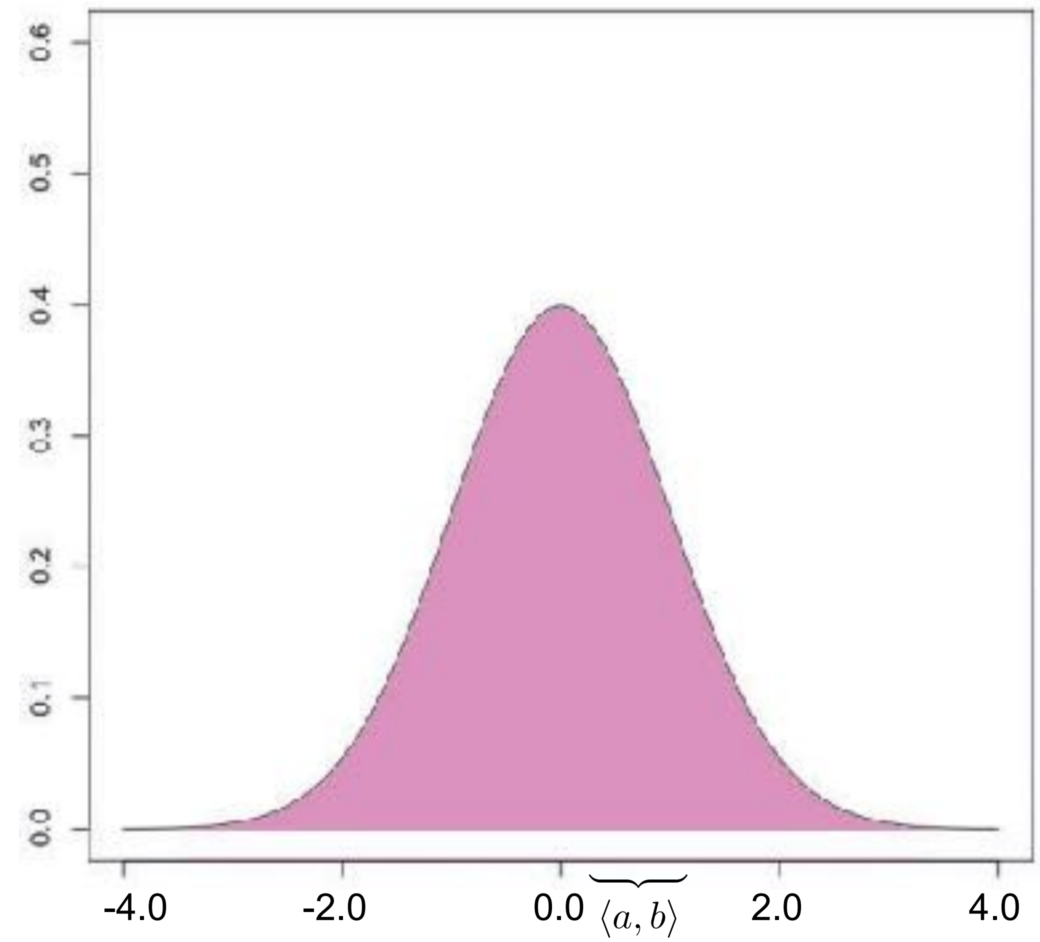
### Standardní normální rozdělení N(0,1):

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 \quad : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1) \qquad\qquad X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

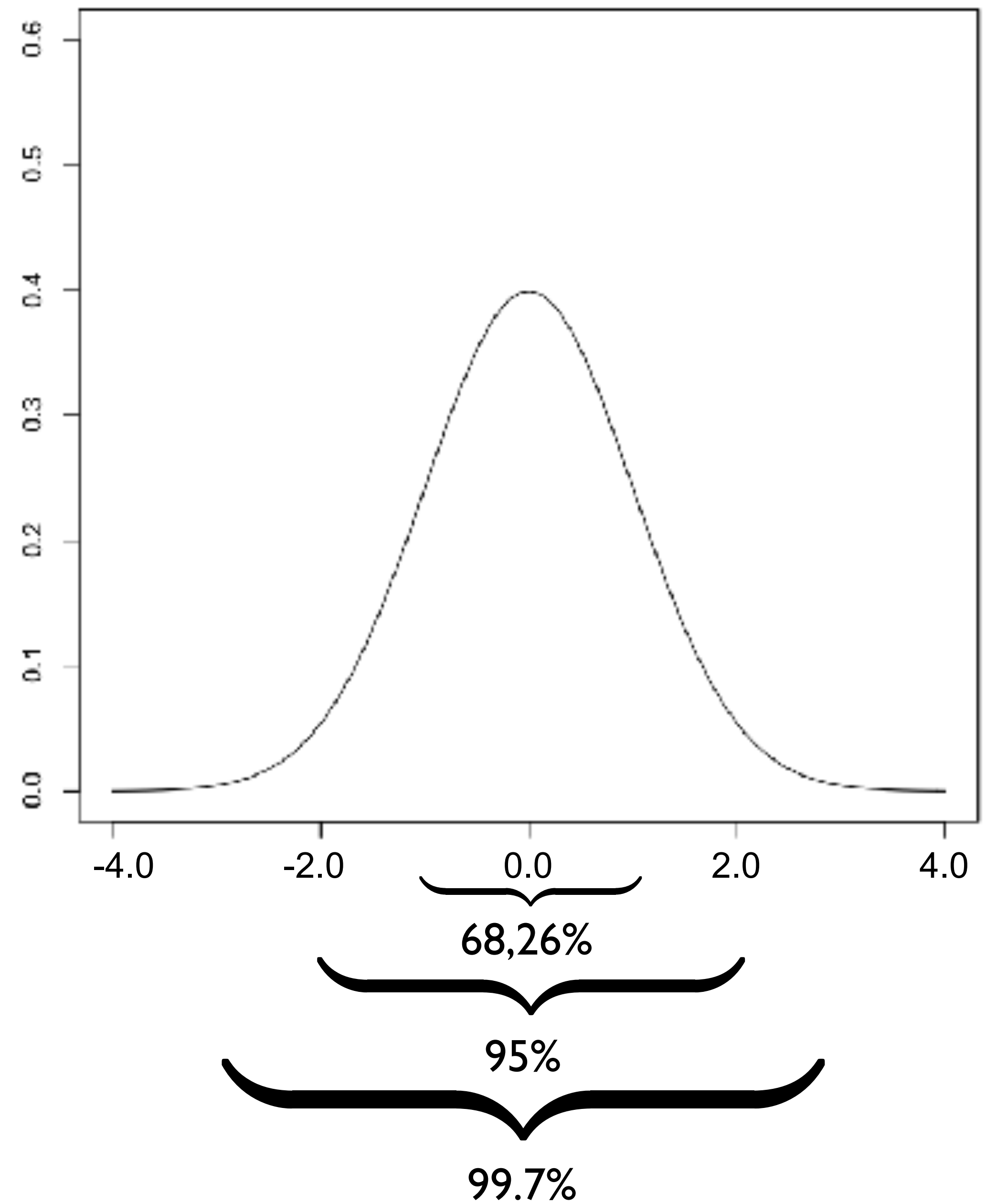


# Spojité pravděpodobnostní modely

## 3. Model normálního rozdělení

### Standardní normální rozdělení N(0,1):

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 \quad : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R$$




$$X \sim N(0,1) \qquad X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$

# Spojité pravděpodobnostní modely

### 3. Model normálního rozdělení

**Standardní normální rozdělení N(0,1):**

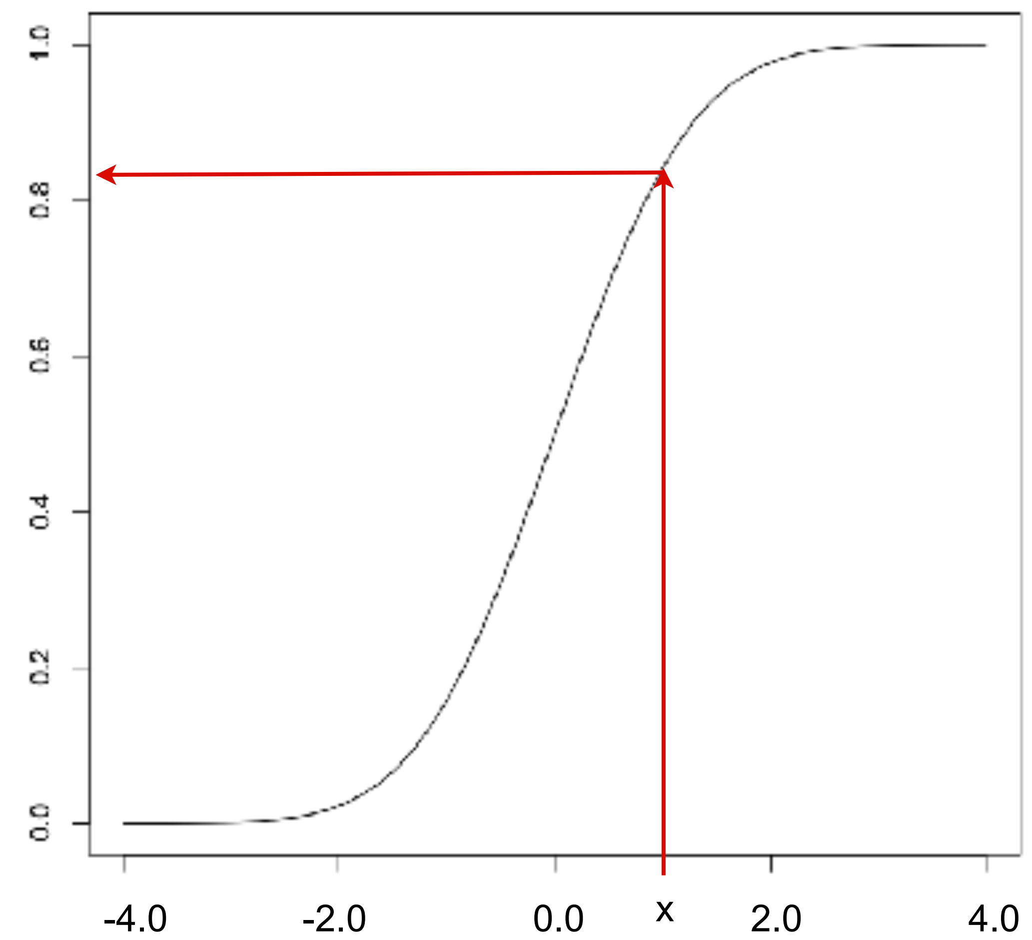
$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 \ : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R$$

$$X \sim N(0,1) \qquad\qquad X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\boxed{\Phi(x) = P(X \leq x)}$$

distribuční funkce



# Spojité pravděpodobnostní modely

## 3. Model normálního rozdělení

### Standardní normální rozdělení N(0,1):

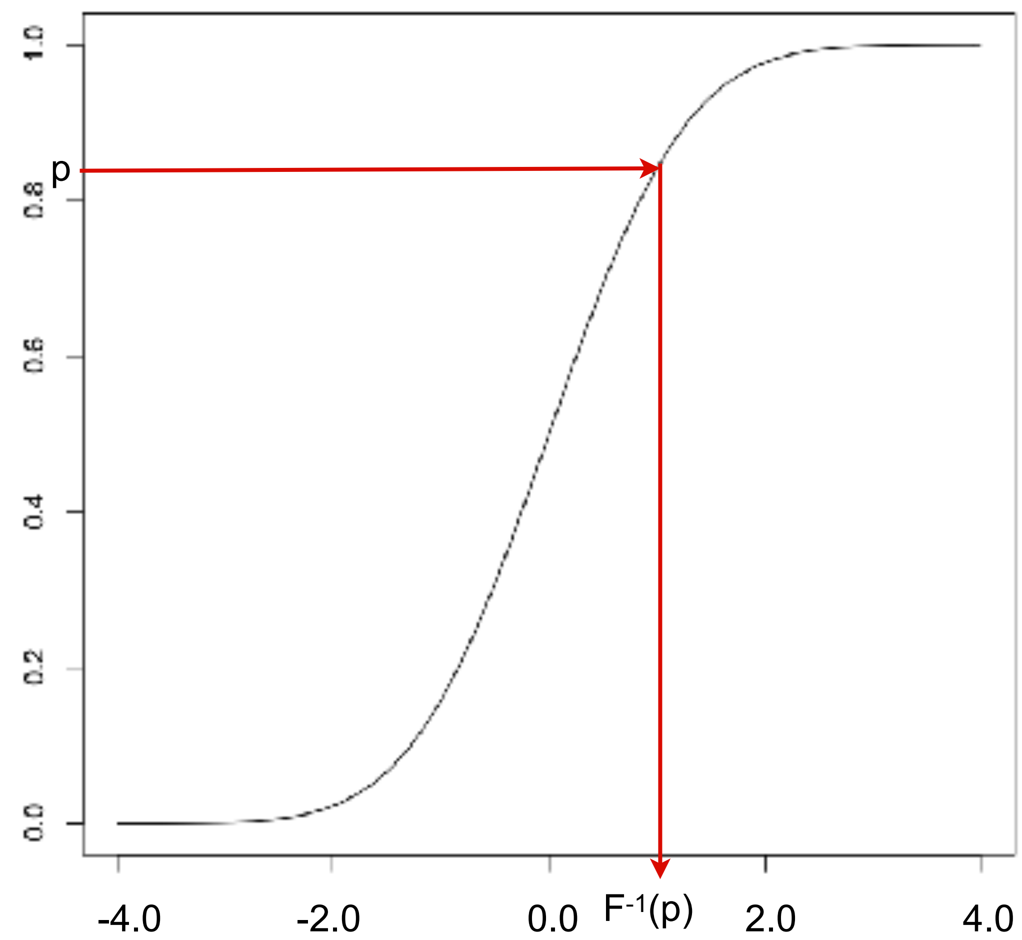
$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 \quad : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R$$

$$X \sim N(0,1) \qquad X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\Phi(x) = P(X \le x)$$

distribuční funkce




$$u_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce

# Spojité pravděpodobnostní modely

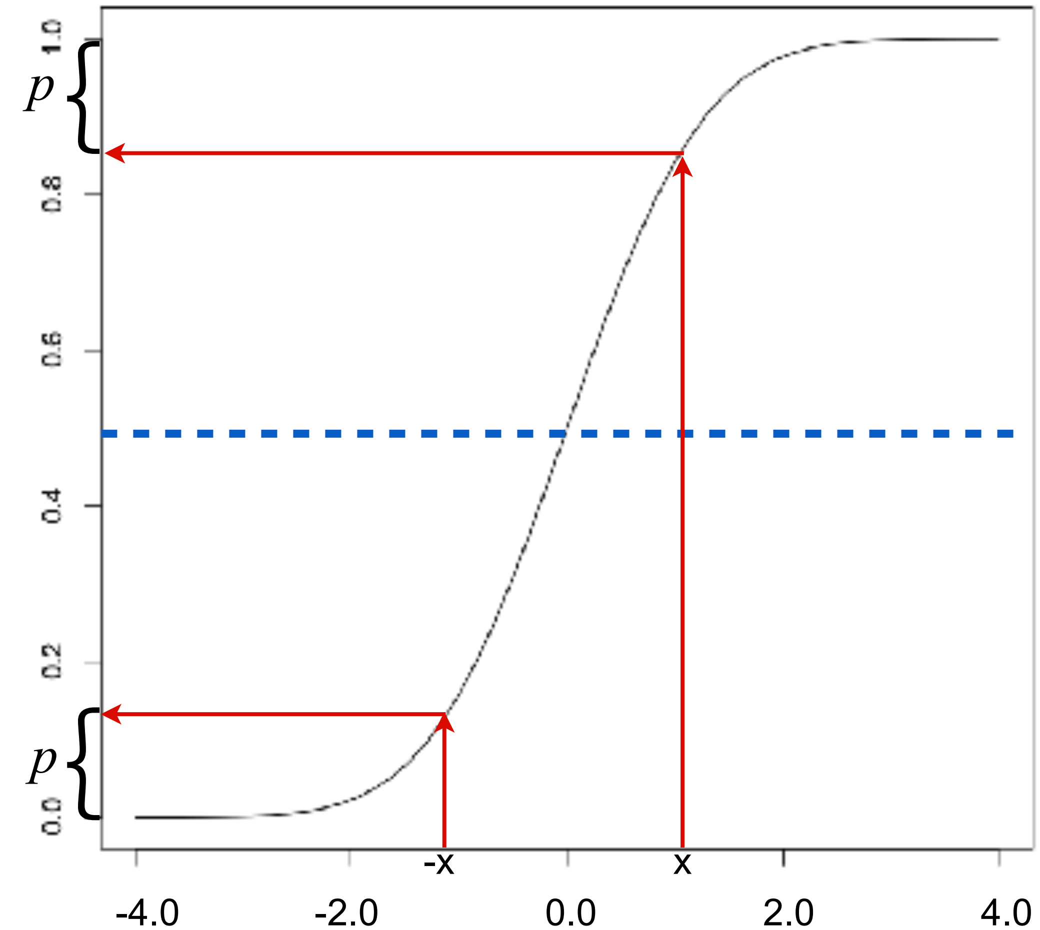
**3. Model normálního rozdělení**

**Standardní normální rozdělení N(0,1):**

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 \quad : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R$$

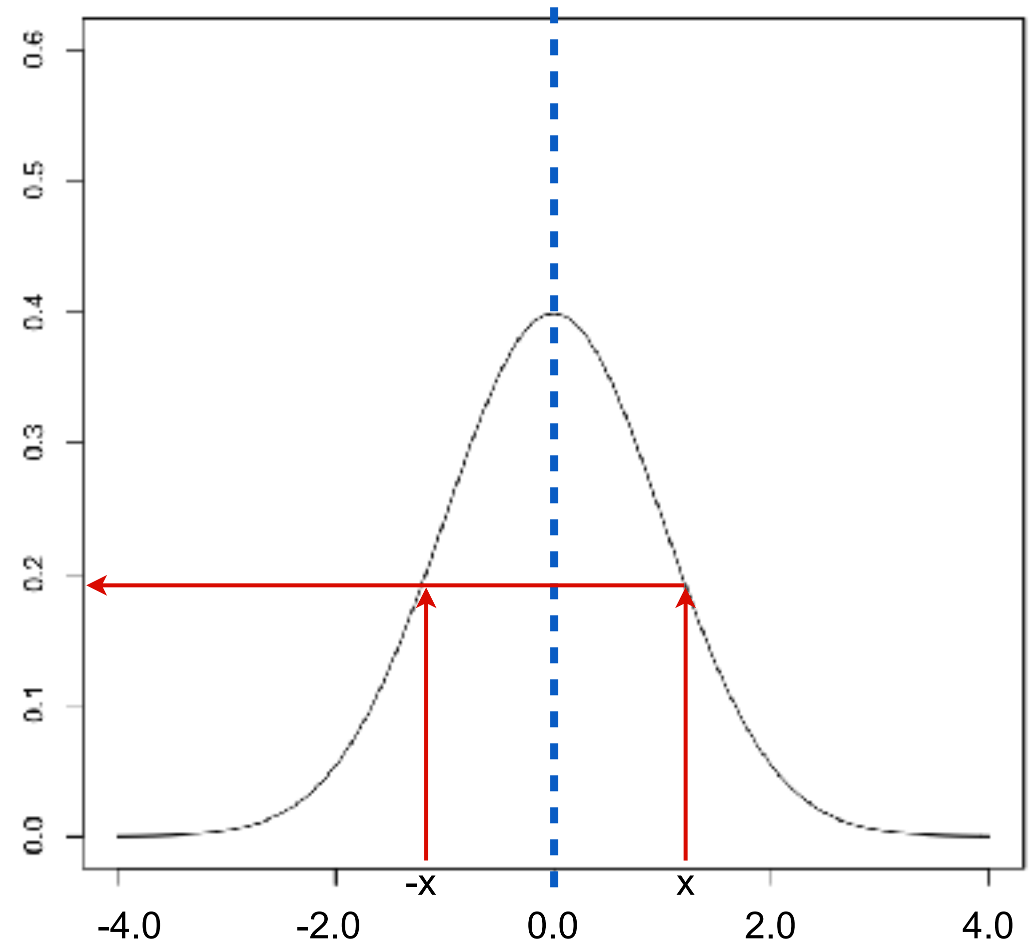
**Symetrie:**

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \Rightarrow u(p) = -u(1_p)$$




Distribuční funkce $\Phi(x)$ je symetrická podle osy y=0,5.

# Spojité pravděpodobnostní modely




**3. Model normálního rozdělení**

## Standardní normální rozdělení N(0,1):

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 \quad : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R$$

**Symetrie:**

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \Rightarrow u(p) = -u(1_p)$$

Distribuční funkce $\Phi(x)$ je symetrická podle osy y=0,5.

$$f(-x) = f(x)$$

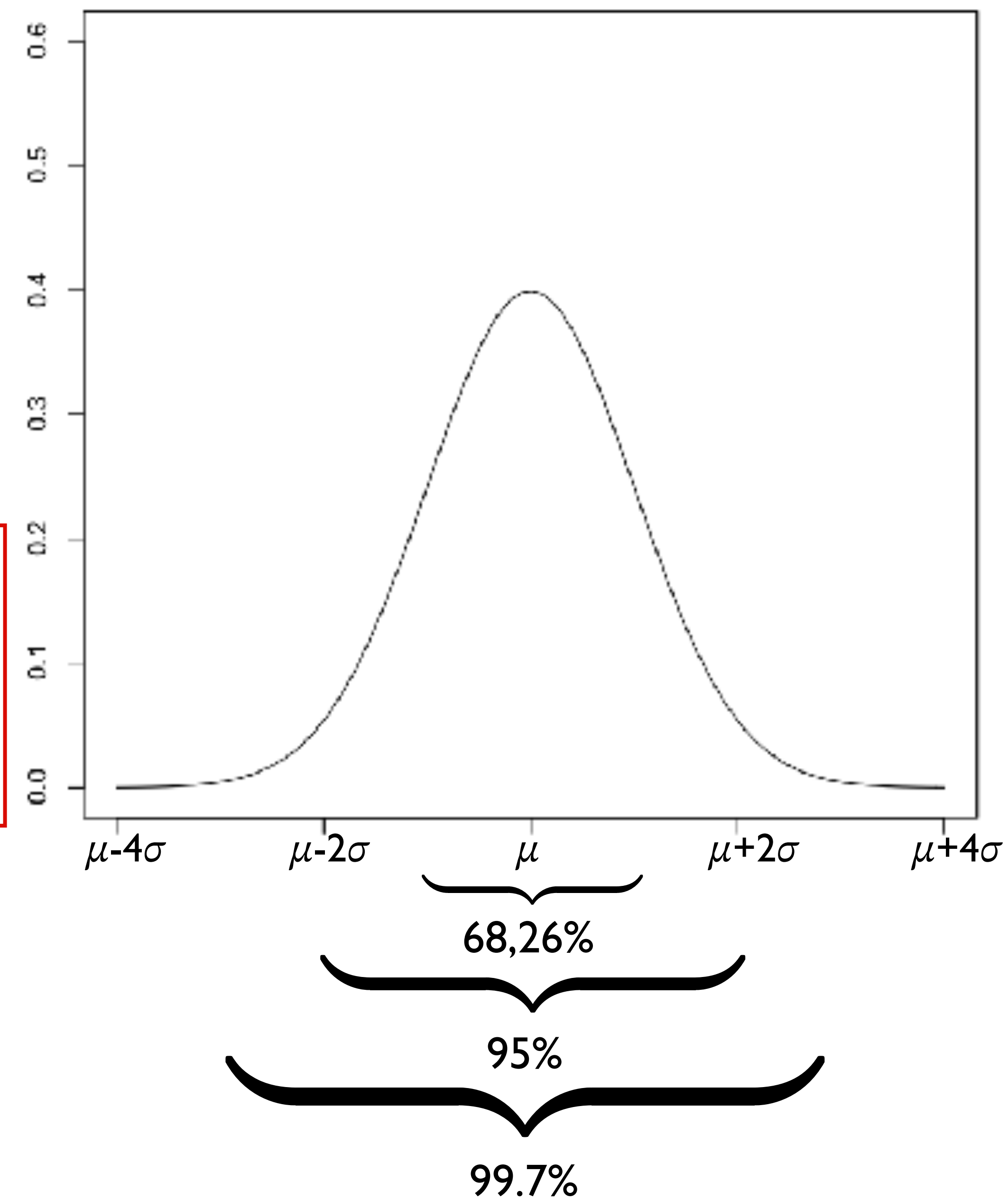
# Spojité pravděpodobnostní modely

## 3. Model normálního rozdělení

### Obecné normální rozdělení N($\mu$, $\sigma^2$):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$x \in R$$




$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow\; Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$Z \sim N(0,1) \;\Rightarrow\; X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$F(x) = P(X \le x) = P(X - \mu \le x - \mu) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma})$$
$$= \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

# Spojité pravděpodobnostní modely

**3. Model normálního rozdělení**

**Obecné normální rozdělení N($\mu$, $\sigma^2$):**

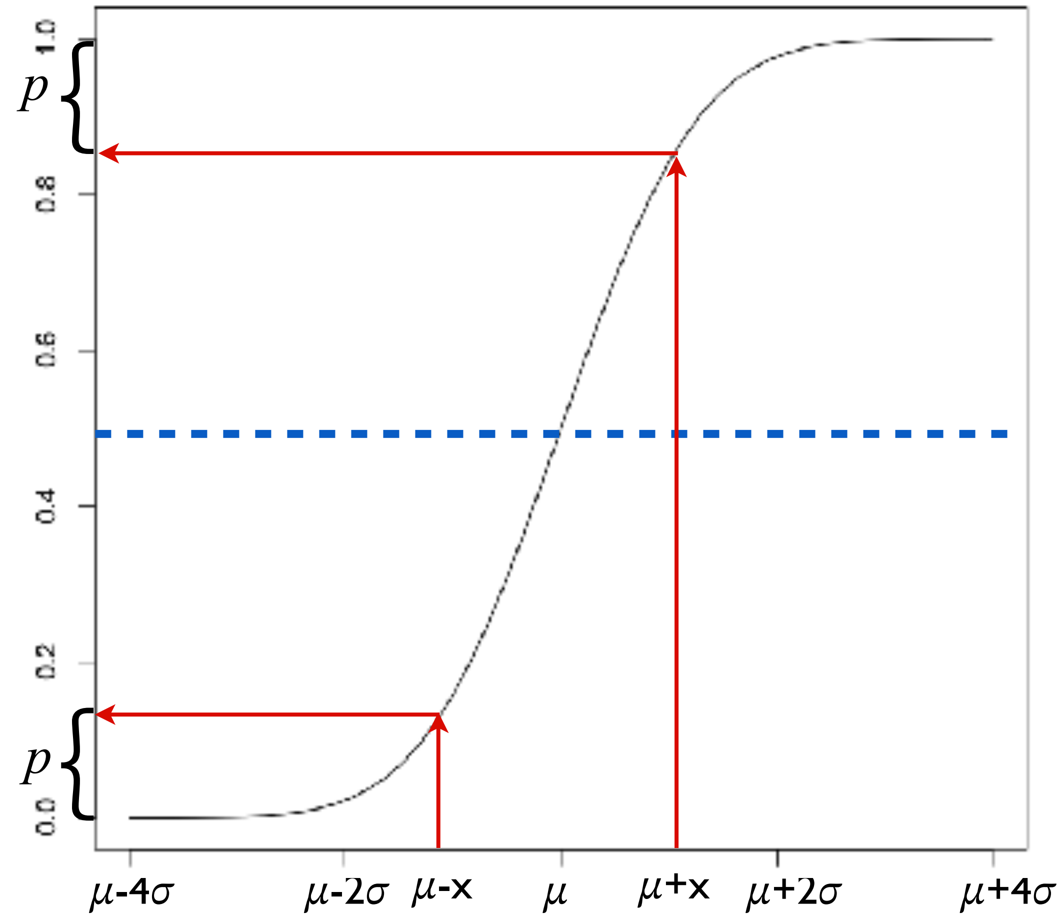
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$x \in R$$

**Symetrie:**

Distribuční funkce $F$(x) je symetrická podle osy y=0,5.

$$F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)$$




ze symetrie hustoty plyne: $\tilde{x}_p = F^{-1}(p) = 2\mu - F^{-1}(1-p) = 2\mu - \tilde{x}_{1-p}$

ze vztahu mezi N($\mu$,$\sigma^2$) a N(0,1): $F(x) = \Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma}) \;\Rightarrow\; F^{-1}(p) = \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$

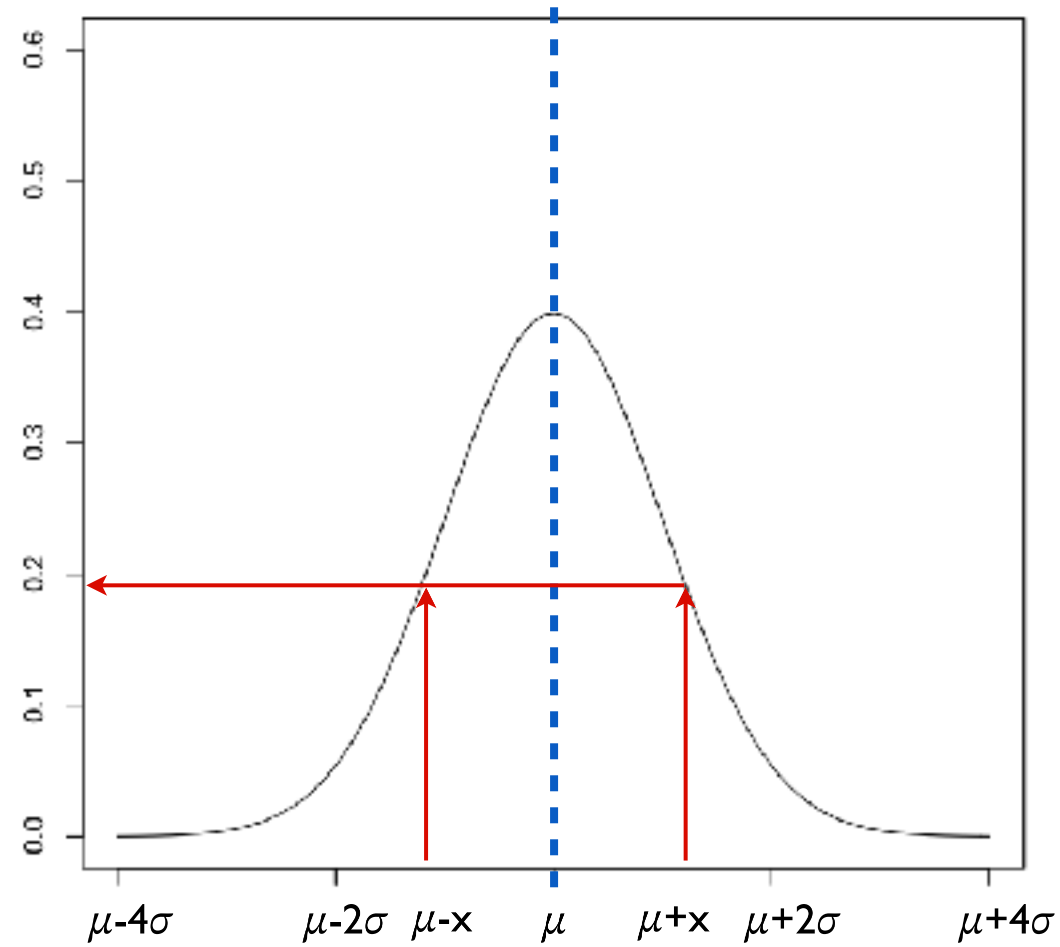
# Spojité pravděpodobnostní modely

**3. Model normálního rozdělení**

**Obecné normální rozdělení N($\mu$, $\sigma^2$):**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$x \in R$$




**Symetrie:**

Distribuční funkce $F$(x) je symetrická podle osy y=0,5.

$$F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)$$

symetrie hustoty: $f(\mu - x) = f(\mu + x)$

Příklad: Vyjádřete $P(|X-\mu| \leq x)$ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ pomocí distribuční funkce $\Phi(x)$.

$$P(|X-\mu| \leq x) = F(\mu + x) - F(\mu - x) = \Phi(\frac{x}{\sigma}) - \Phi(\frac{-x}{\sigma}) = \Phi(\frac{x}{\sigma}) - (1 - \Phi(\frac{x}{\sigma})) =$$

$$= 2\Phi(\frac{x}{\sigma}) - 1$$

# Spojité pravděpodobnostní modely

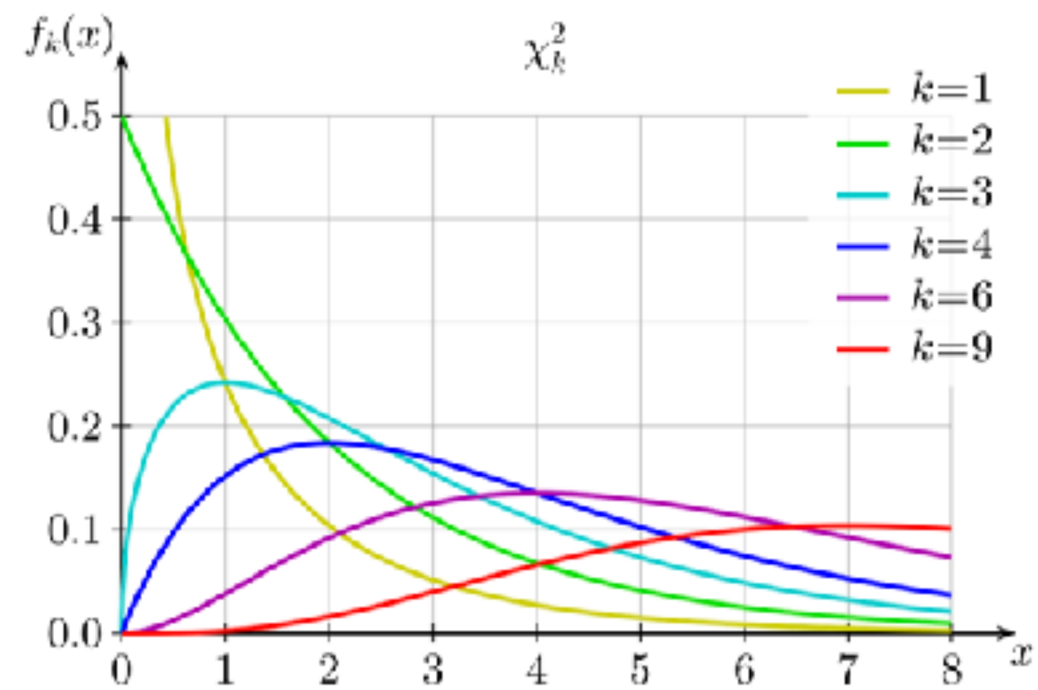
**4. Modely odvozené z normálního rozdělení**

**4.1 Model rozdělení součtu druhých mocnin normálně rozdělených náhodných veličin:**

$$X \sim N(0,1) \quad \Rightarrow \quad X^2 \sim \chi^2(1)$$

$$X_i \sim N(0,1) \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad \text{+ nezávislost}$$

$$\Rightarrow \quad S_k^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \sim \chi^2(k)$$




$\boxed{\text{Pearsonovo } (\chi^2) \text{ rozdělení s } k \text{ stupni volnosti}}$

$$E(S_k^2) = k, \quad Var(S_k^2) = 2k$$

# Spojité pravděpodobnostní modely

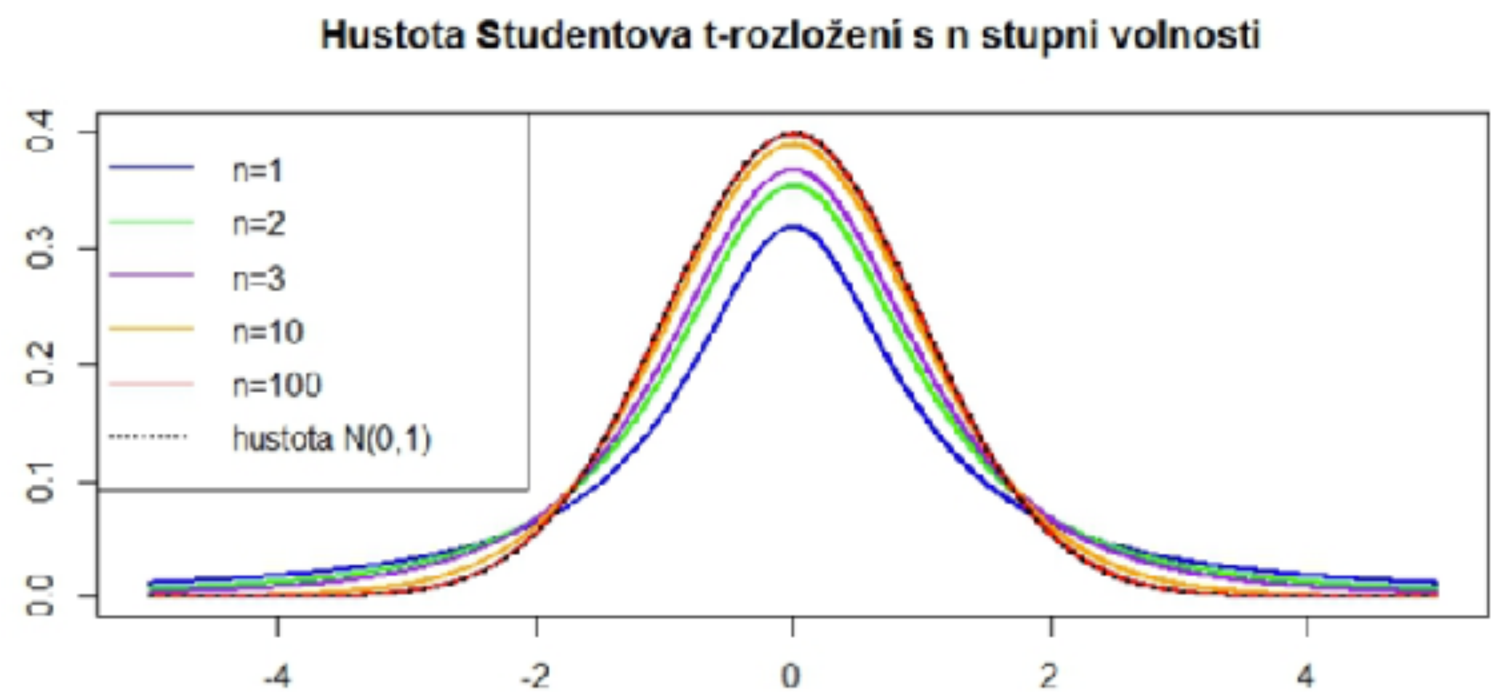
**4. Modely odvozené z normálního rozdělení**

## 4.2 Model rozdělení podílu normálně rozdělené náhodné veličiny a veličiny s rozdělením chí-kvadrát:

Jsou-li $U$ a $V$ stoch. nezávislé n.v.:

$$U \sim N(0,1), \quad V \sim \chi^2(n),$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim t(n)$$




$\boxed{\text{Studentovo } t\text{-rozdělení o } n \text{ stupních volnosti}}$

# Spojité pravděpodobnostní modely

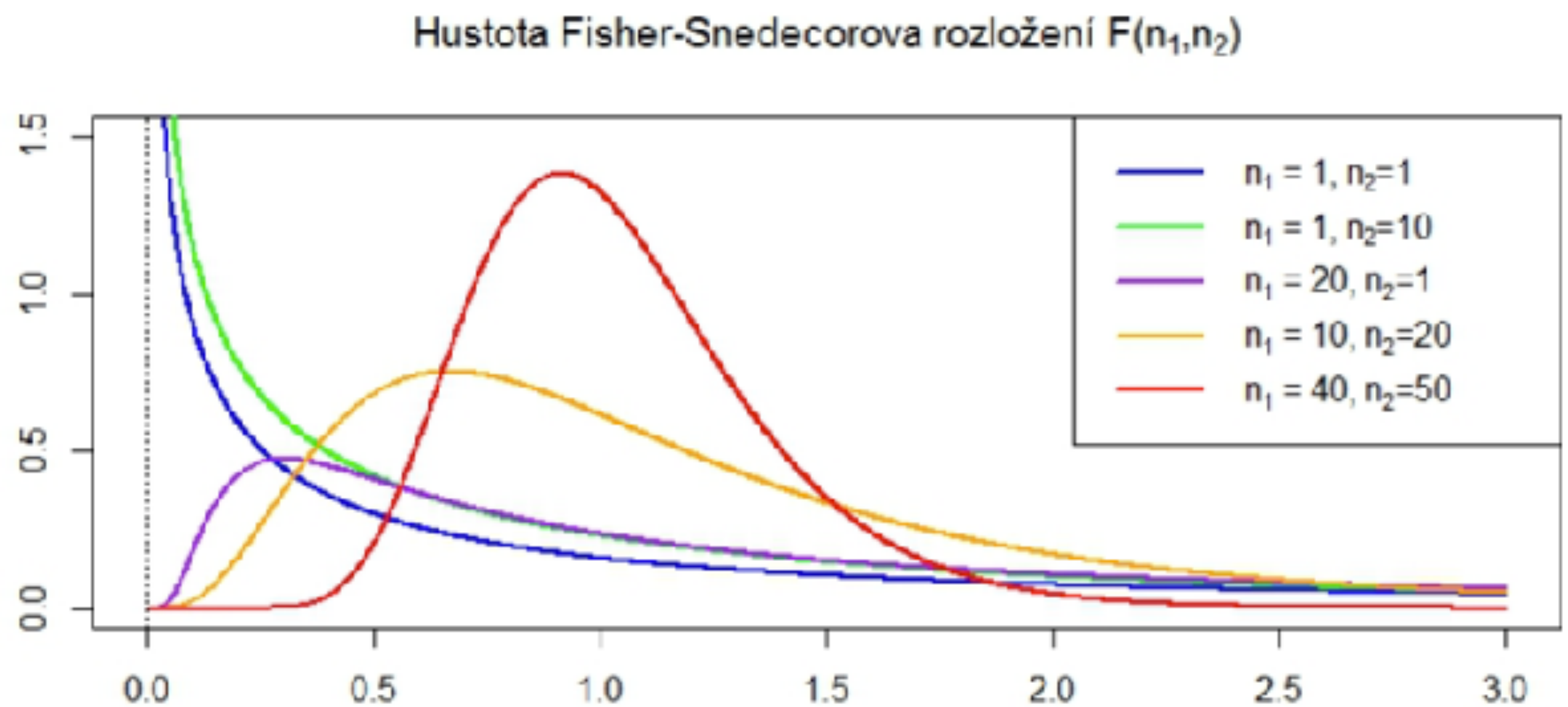
**4. Modely odvozené z normálního rozdělení**

## 4.3 Model rozdělení podílu dvou náhodných veličin s rozdělením chí-kvadrát:

$$X_i, Y_j \sim \ N(0,1) \ \text{ i.i.d.}$$

$$R_{m,n} = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j^2} = \frac{nS_m^2}{mS_n^2}$$

$$\sim \ F(m,n)$$




$\boxed{\text{Fischerovo-Snedecorovo rozdělení o } m \text{ a } n \text{ stupních volnosti}}$

# Spojité pravděpodobnostní modely

## 4. Modely odvozené z normálního rozdělení

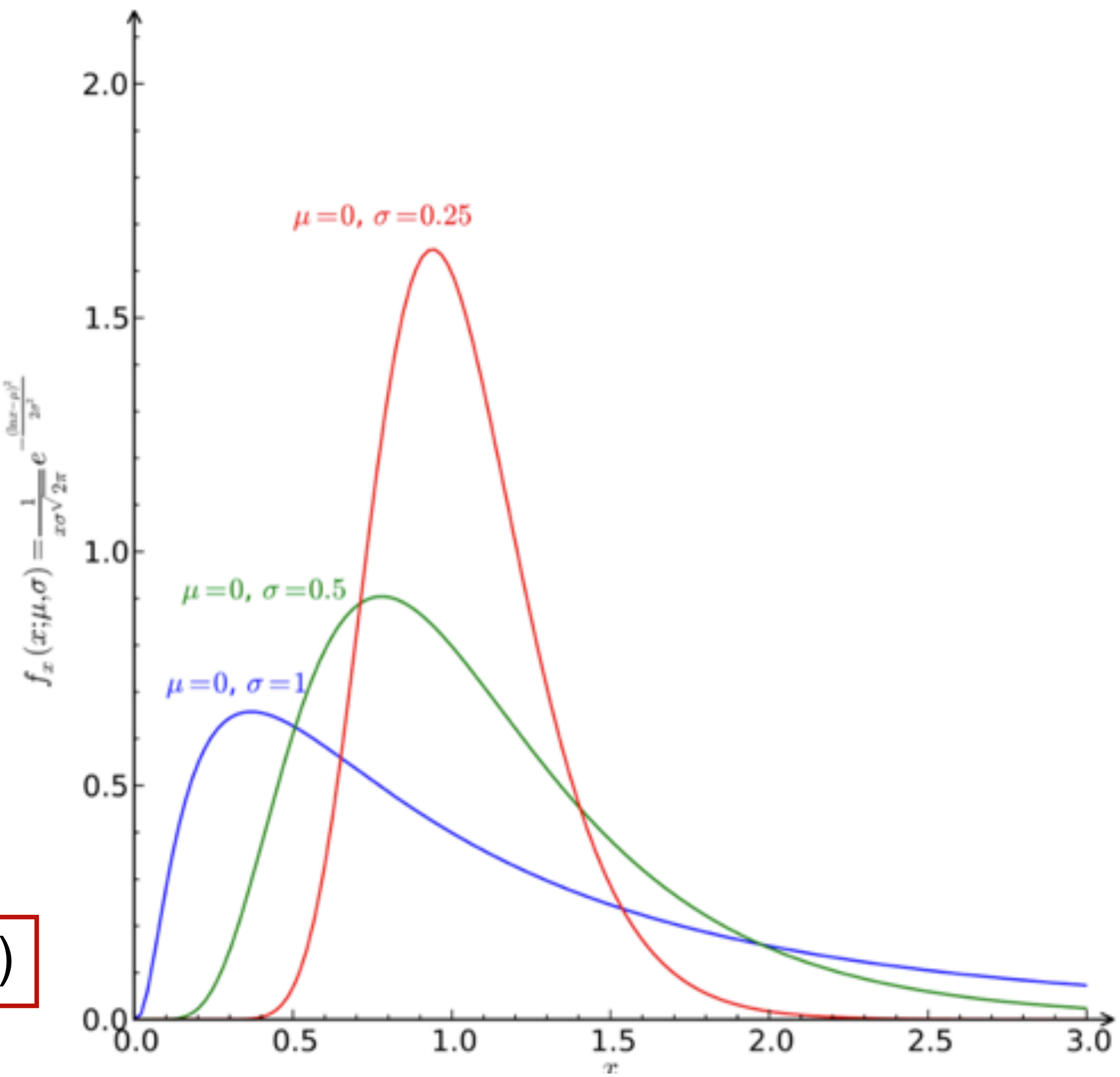
### 4.4 Model logaritmicko-normálního rozdělení:

$$Y \sim \ N(\mu, \sigma^2), \quad X = \exp(Y)$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0$$

$$E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2},$$

$$Var(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu + \sigma^2}$$




Logaritmicko-normální rozdělení LN($\mu$, $\sigma^2$)