

Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

B.2 - Náhodné vektory



B.3 - Náhodné vektory

- Klíčové pojmy:**
- Náhodný vektor;
 - Sdružené, marginální a podmíněné charakteristiky - distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota;
 - Střední hodnota náh. vektoru;
 - Kovariance, korelace, korelační koeficient,
 - Kovarianční matice, korelační matice;

- Klíčové věty:**
- Rozdělení náhodného vektoru s nezávislými složkami.
 - Vztah mezi korelovaností a stochastickou nezávislostí.
 - Věta o hustotě transformované náhodné veličiny.

Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ - náhodný vektor

$$\vec{X} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Sdružené pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- sdružená distribuční funkce

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

$$\lim_{x_n \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$



Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ - náhodný vektor

$$\vec{X} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Sdružené pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- sdružená distribuční funkce

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

- sdružená pravděpodobnostní funkce (pro vektor diskrétních náh. veličin)

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = P(X_1 = a_{i_1}, X_2 = a_{i_2}, \dots, X_n = a_{i_n})$$

$$\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \quad \sum_{(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) \in \mathcal{S}^n} p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = 1$$

Příklad: $\vec{Z} = (X, Y)$, $X \in \{a_1, a_2, a_3\}$, $Y \in \{b_1, b_2\}$

$Y \backslash X$	a_1	a_2	a_3
b_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
b_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

$$p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$$



Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ - náhodný vektor

$$\vec{X} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Sdružené pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

- sdružená distribuční funkce

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

- sdružená pravděpodobnostní funkce

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = P(X_1 = a_{i_1}, X_2 = a_{i_2}, \dots, X_n = a_{i_n})$$

- sdružená hustota

$$f^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f^n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

$$\Theta \subset \mathbb{R}^n : P(\vec{X} \in \Theta) = \int_{\Theta} \dots \int f^n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$



Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ - náhodný vektor

$$\vec{X} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Marginální pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

Rozdělení jednotlivých složek náhodného vektoru

- marginální distribuční funkce

$$F^{X_i}(x) = F(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty) = P(X_1 < \infty, \dots, X_i \leq x, \dots, X_n < \infty)$$

Příklad: $\vec{Z} = (X, Y)$ $F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, \quad x, y \geq 0$

$$F^X(x) = F(x, \infty) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0$$

$$F^Y(y) = F(\infty, y) = 1 - e^{-y}, \quad y \geq 0$$



Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ - náhodný vektor

$$\vec{X} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Marginální pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

Rozdělení jednotlivých složek náhodného vektoru

- marginální distribuční funkce

$$F^{X_i}(x) = F(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty) = P(X_1 < \infty, \dots, X_i \leq x, \dots, X_n < \infty)$$

- marginální hustota

$$f_x^{X_i} = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n}^n dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$$

Příklad: $\vec{Z} = (X, Y)$ $F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}$, $x, y \geq 0$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = e^{-x-y}, \quad x, y \geq 0$$

$$f^X(x) = \int_0^\infty e^{-x-y} dy = e^{-x} [-e^{-y}]_0^\infty = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

$$f^Y(y) = \int_0^\infty e^{-x-y} dx = \dots = e^{-y}, \quad y \geq 0$$



Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ - náhodný vektor

$$\vec{X} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Marginální pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

Rozdělení jednotlivých složek náhodného vektoru

- marginální distribuční funkce

$$F^{X_i}(x) = F(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty) = P(X_1 < \infty, \dots, X_i \leq x, \dots, X_n < \infty)$$

- marginální hustota

$$f_x^{X_i} = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n}^n dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$$

- marginální pravděpodobnostní funkce

$$p_k^{X_i} = \sum_{j_1} \dots \sum_{j_{i-1}} \sum_{j_{i+1}} \dots \sum_{j_n} p_{j_1, \dots, j_{i-1}, k, j_{i+1}, \dots, j_n}$$

(součty jsou přes všechny složky kromě i-té, která je ve všech sčítancích rovna k)



Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ - náhodný vektor

$$\vec{X} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Podmíněné pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

Rozdělení, kdy jedna nebo více složek ($r < n$) náhodného vektoru je konstantní.

- podmíněná distribuční funkce

$$F(x_1, \dots, x_r | x_{r+1}, \dots, x_n) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_r \leq x_r | x_{r+1} < X_{r+1} \leq x_{r+1} + \Delta, \dots, x_n < X_n \leq x_n + \Delta)$$

Příklad: $\vec{Z} = (X, Y)$ $F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}$, $x, y \geq 0$

$$F(x|y) = \frac{\int_0^x f(t, y) dt}{f^Y(y)} = \frac{\int_0^x f(t, y) dt}{\int_0^\infty f(t, y) dt} = \frac{e^{-y}(1 - e^{-x})}{e^{-y}} = 1 - e^{-x}$$



Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ - náhodný vektor

$$\vec{X} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Podmíněné pravděpodobnostní charakteristiky náhodného vektoru:

Rozdělení, kdy jedna nebo více složek ($r < n$) náhodného vektoru je konstantní.

- podmíněná distribuční funkce

$$F(x_1, \dots, x_r | x_{r+1}, \dots, x_n) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_r \leq x_r | x_{r+1} < X_{r+1} \leq x_{r+1} + \Delta, \dots, x_n < X_n \leq x_n + \Delta)$$

- podmíněná hustota

$$f(x_1, \dots, x_r | x_{r+1}, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f^{r+1, \dots, n}(x_{r+1}, \dots, x_n)}$$

Příklad: $\vec{Z} = (X, Y)$ $F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}$, $x, y \geq 0$

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f^Y(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_0^\infty f(t, y) dt} = \frac{e^{-x-y}}{e^{-y}} = e^{-x}$$



Náhodný vektor

Uvažujme zobrazení $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ - náhodný vektor

$$\vec{X} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Nezávislost složek náhodného vektoru:

Složky náhodného vektoru jsou stochasticky nezávislé právě když platí

- $F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F^{X_i}(x_i)$
- $p_{i_1, \dots, i_n} = \prod_{j=1}^n p(i_j)$
- $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f^{X_i}(x_i)$

Příklad: $\vec{Z} = (X, Y)$

$$F^X(x) = 1 - e^{-x}, \quad F^Y(y) = 1 - e^{-y}, \quad F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, \quad x, y \geq 0$$

$$f^X(x) = e^{-x}, \quad f^Y(y) = e^{-y}, \quad f(x, y) = e^{-x-y}$$

$$F(x|y) = F^X(x) = 1 - e^{-x}, \quad f(x|y) = f^X(x) = e^{-x}$$



Charakteristiky náhodného vektoru

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \dots, X_n) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$$

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f^n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f^n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n}_{= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f^{n-1}(x_1) dx_1} \right) dx_1 \end{aligned}$$

marginální hustota



Charakteristiky náhodného vektoru

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \dots, X_n) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$$

- kovarianční matice

$$\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2$$

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = E(\vec{X} - E(\vec{X}))^T E(\vec{X} - E(\vec{X}))$$

$$= E \left(\begin{pmatrix} X_1 - E(X_1) \\ X_2 - E(X_2) \\ \dots \\ X_n - E(X_n) \end{pmatrix} \cdot (X_1 - E(X_1), X_2 - E(X_2), \dots, X_n - E(X_n)) \right)$$



Charakteristiky náhodného vektoru

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \dots, X_n) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$$

- kovarianční matice

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = E(\vec{X} - E(\vec{X}))^T E(\vec{X} - E(\vec{X}))$$

$$= E \begin{pmatrix} (X_1 - E(X_1))(X_1 - E(X_1)) & (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) & \cdots & (X_1 - E(X_1))(X_n - E(X_n)) \\ (X_2 - E(X_2))(X_1 - E(X_1)) & (X_2 - E(X_2))(X_2 - E(X_2)) & \cdots & (X_2 - E(X_2))(X_n - E(X_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - E(X_n))(X_1 - E(X_1)) & (X_n - E(X_n))(X_2 - E(X_2)) & \cdots & (X_n - E(X_n))(X_n - E(X_n)) \end{pmatrix}$$



Charakteristiky náhodného vektoru

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \dots, X_n) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$$

- kovarianční matice

$$\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2$$

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = E(\vec{X} - E(\vec{X}))^T E(\vec{X} - E(\vec{X}))$$

$$= E \begin{pmatrix} (X_1 - E(X_1))(X_1 - E(X_1)) & (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) & \cdots & (X_1 - E(X_1))(X_n - E(X_n)) \\ (X_2 - E(X_2))(X_1 - E(X_1)) & (X_2 - E(X_2))(X_2 - E(X_2)) & \cdots & (X_2 - E(X_2))(X_n - E(X_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - E(X_n))(X_1 - E(X_1)) & (X_n - E(X_n))(X_2 - E(X_2)) & \cdots & (X_n - E(X_n))(X_n - E(X_n)) \end{pmatrix}$$

kovariance $\text{Cov}(X_i X_j)$

rozptyly $\text{Var}(X_i)$



Charakteristiky náhodného vektoru

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \dots, X_n) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$$

- kovarianční matice

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

- Kovariance $Cov(X, Y)$ je míra lineární závislosti mezi X a Y .

- $Cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY)$

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X) \Rightarrow \mathbf{D}(\vec{X})$ je symetrická

- Kovariance $Cov(X, Y)$ závisí na měřítku (jednotkách).

- korelační koeficient $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$

- nezávisí na měřítku: $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

- je mírou lineární závislosti



Charakteristiky náhodného vektoru

- střední hodnota

$$E(\vec{X}) = E(X_1, X_2, \dots, X_n) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$$

- kovarianční matice

$$\mathbf{D}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix}$$

- korelační koeficient $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$

- nezávisí na měřítku: $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
- je mírou lineární závislosti

- korelační matice

$$\mathbf{R}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1, X_2) & \cdots & \rho(X_1, X_n) \\ \rho(X_2, X_1) & 1 & \cdots & \rho(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_n, X_1) & \rho(X_n, X_2) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$



Diskrétní náhodný vektor $Z=(X, Y)$

$$X \in \{a_1, a_2, a_3\}, \quad Y \in \{b_1, b_2\}$$

$$p_{ij} = P(X = a_i \wedge Y = b_j)$$

$Y \backslash X$	a_1	a_2	a_3
b_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
b_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$



Diskrétní náhodný vektor $Z=(X, Y)$

$$X \in \{a_1, a_2, a_3\}, \quad Y \in \{b_1, b_2\}$$

$$p_{ij} = P(X = a_i \wedge Y = b_j)$$

$$P(X = a_i) = \sum_{b_j} p_{ij} = p_i^X$$

$$P(Y = b_j) = \sum_{a_i} p_{ij} = p_j^Y$$

$Y \backslash X$	a_1	a_2	a_3	Y
b_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p^{Y_1}
b_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p^{Y_2}
X	p^{X_1}	p^{X_2}	p^{X_3}	1

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

$$P(X = a_i | Y = b_j) = \frac{p_{ij}}{p_j^Y} = \frac{p_{ij}}{\sum_{a_i} p_{ij}}$$

Příklad:

Jsou tři výrobci dodávané součástky a ta může být ve kvalitativní třídě I, II nebo III. Pravděpodobnostní rozdělení těchto znaků je dáno tabulkou:

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraná součástka třídy III je od výrobce A?

$$X \in \{1, 2, 3\}, \quad Y \in \{1, 2, 3\} \quad P(X = 1 | Y = 3) = ?$$

$$P(X = 1 | Y = 3) = \frac{0,08}{0,23} = 0,3478$$

	A	B	C	
I	0,22	0,18	0,10	0,5
II	0,12	0,08	0,07	0,27
III	0,08	0,12	0,03	0,23
	0,42	0,38	0,20	1,00



Spojité náhodný vektor $Z=(X, Y)$

Dvourozměrné rozdělení pravděpodobnosti:

sdrúžená distribuční funkce $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

$$F(x, y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y|X \leq x) = F(x)F(y|x)$$

Pokud jsou X a Y stochasticky nezávislé, potom je

$$F(x, y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F(x)F(y)$$

Platí to i opačně: pokud je $F(x, y) = F(x)F(y)$, potom jsou X a Y stochasticky nezávislé.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y) \quad \dots \text{ a naopak } \dots \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

Speciálně $P((X, Y) \in W) = \iint_W f(x, y) dx dy$ pro libovolnou oblast $W \subset \mathbb{R}^2$



Spojité náhodný vektor $Z=(X, Y)$

Jaké je rozdělení pravděpodobnosti složky X ?

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(X \leq x \wedge Y \leq \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \end{aligned}$$

Hustotu $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ nazveme marginální hustotou složky X vektoru $Z=(X, Y)$. Podobně $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ je marginální hustotou složky Y .

Složky X a Y náhodného vektoru $Z=(X, Y)$ jsou stochasticky nezávislé právě když platí jedna z rovností

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_X(x) f_Y(y) \\ F(x, y) &= F_X(x) F_Y(y) \end{aligned}$$



Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Střední hodnota náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ je rovna vektoru středních hodnot jeho složek: $E(Z)=(EX, EY)$.

$$EX = \iint_{R^2} x f(x, y) dx dy = \int_R x \int_R f(x, y) dy dx = \int_R x f^X(x) dx,$$
$$EY = \iint_{R^2} y f(x, y) dx dy = \int_R y \int_R f(x, y) dx dy = \int_R y f^Y(y) dy.$$

V diskretním případě:

$$EX = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_i^X,$$
$$EY = \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_j y_j p_j^Y.$$

Kovariance $cov(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako
 $cov(X,Y) = E[(X-EX).(Y-EY)] = EXY - EX.EY$

kde $EXY = \iint_{R^2} xy f(x, y) dx dy$ nebo $EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$,



Náhodný vektor $Z=(X, Y)$

Korelační koeficient $\rho(X, Y)$ náhodných veličin X, Y je roven

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Je-li $\rho(X, Y) = 0$ t, říkáme, že X a Y jsou nekorelované.

Kovarianční matice náhodného vektoru $Z=(X, Y)$ má tvar

$$D(X, Y) = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(Y, X) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

Korelační matice náhodného vektoru $Z=(X, Y)$ má tvar

$$R(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X, Y) \\ \rho(Y, X) & 1 \end{pmatrix}$$



Náhodný vektor $Z=(X, Y)$

Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, potom je $E(X, Y) = E(X).E(Y)$ a tedy $Cov(X, Y) = 0$.

Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, potom je

$$EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_i^X p_j^Y = \sum_i x_i p_i^X \sum_j y_j p_j^Y = EX.EY,$$

případně (ve spojitém případě)

$$EXY = \iint_{R^2} xy f^X(x) f^Y(y) dx dy = \int_R x f^X(x) dx \int_R y f^Y(y) dy = EX.EY.$$

a tedy $cov(X, Y) = EXY - EXEY = EXEY - EXEY = 0$.

Opačné tvrzení neplatí!

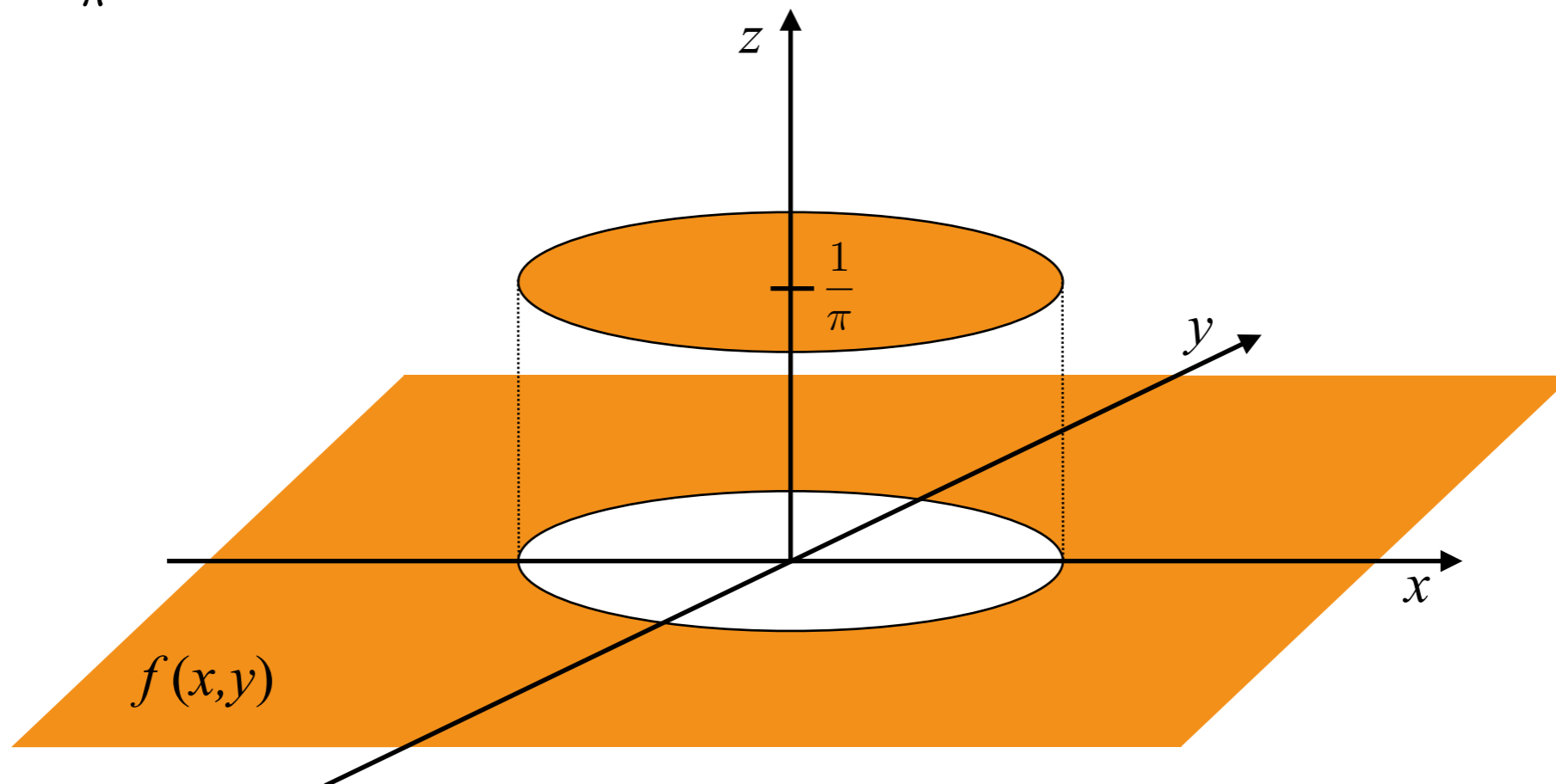


Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 1: Necht' náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{const}, & (x, y) \in K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

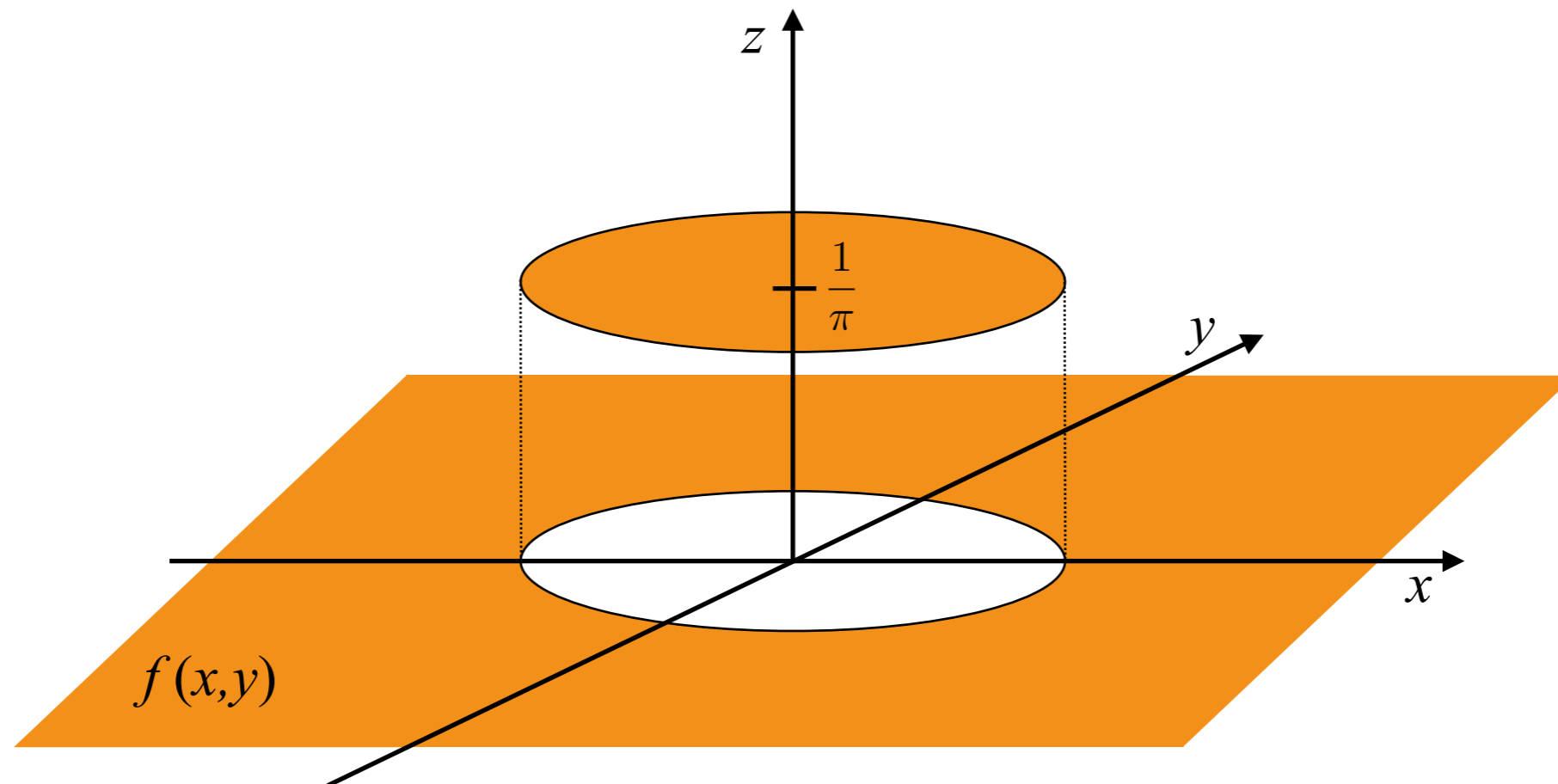
$$\text{const} = \frac{1}{\pi}$$



Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 1: Necht' náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x, y) \in K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$



Náhodný vektor $Z=(X, Y)$

Příklad 1: Necht' náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x, y) \in K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

=> složky X a Y jsou stochasticky závislé

$$\text{cov}(X, Y) = ? = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} x dx dy = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$EXY = \frac{1}{\pi} \iint_K xy dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 x \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$$

=> složky X a Y jsou nekorelované



Náhodný vektor $Z=(X, Y)$

Příklad 1: Necht' náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x, y) \in K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$EZ = (EX, EY) = (0, 0) \quad \text{cov}(X, Y) = 0 \quad \text{var}(X), \text{var}(Y)?$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 = EX^2 = \frac{1}{\pi} \iint_K x^2 dx dy \quad \left| \begin{array}{l} x = r \cos \phi, \\ y = r \sin \phi, \\ J = r \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 \phi d\phi dr = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{var}(Y) = \frac{1}{4}$$

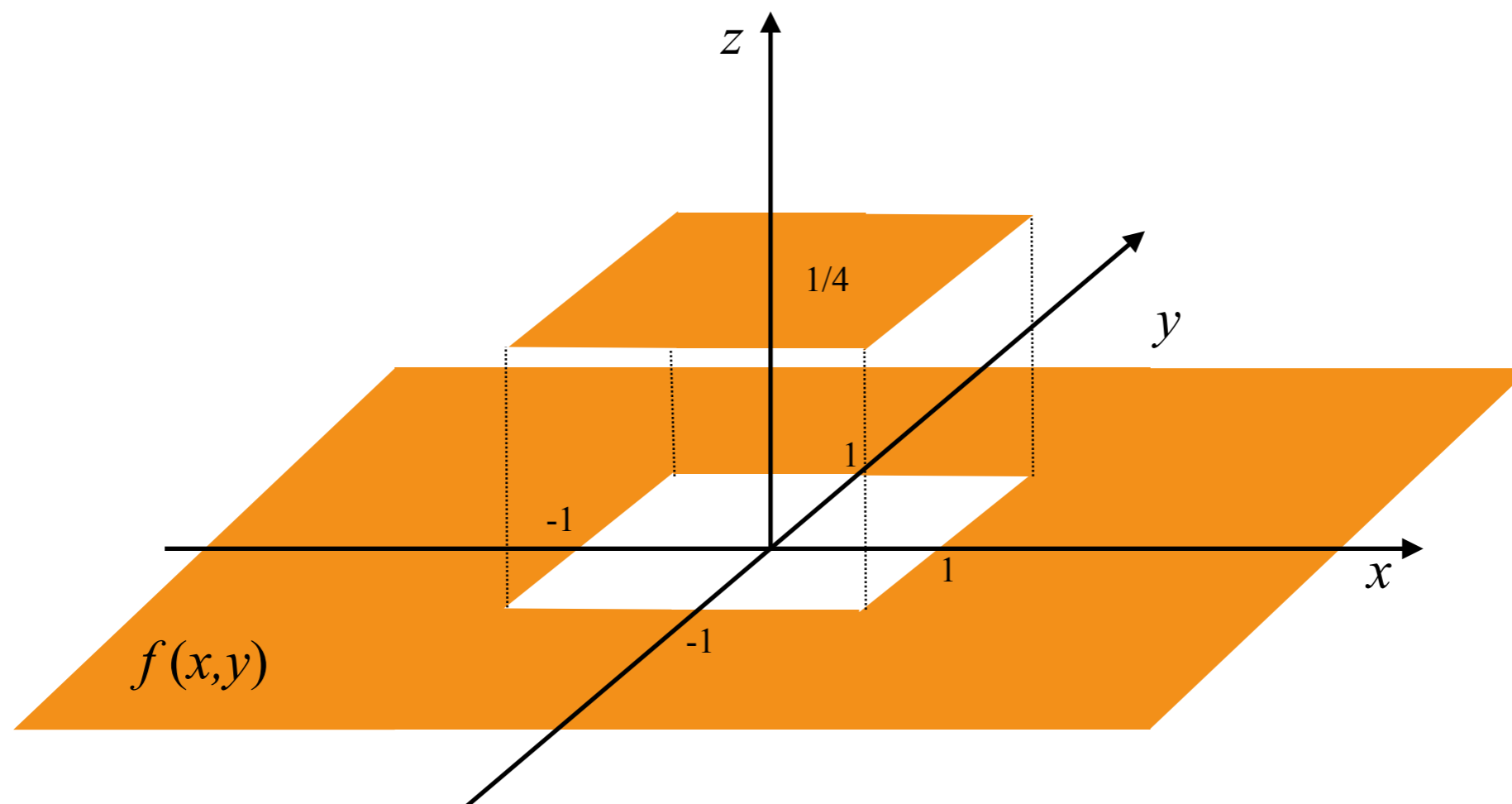
$$D(X, Y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Úloha 1: Necht' náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení nad čtvercem M . Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

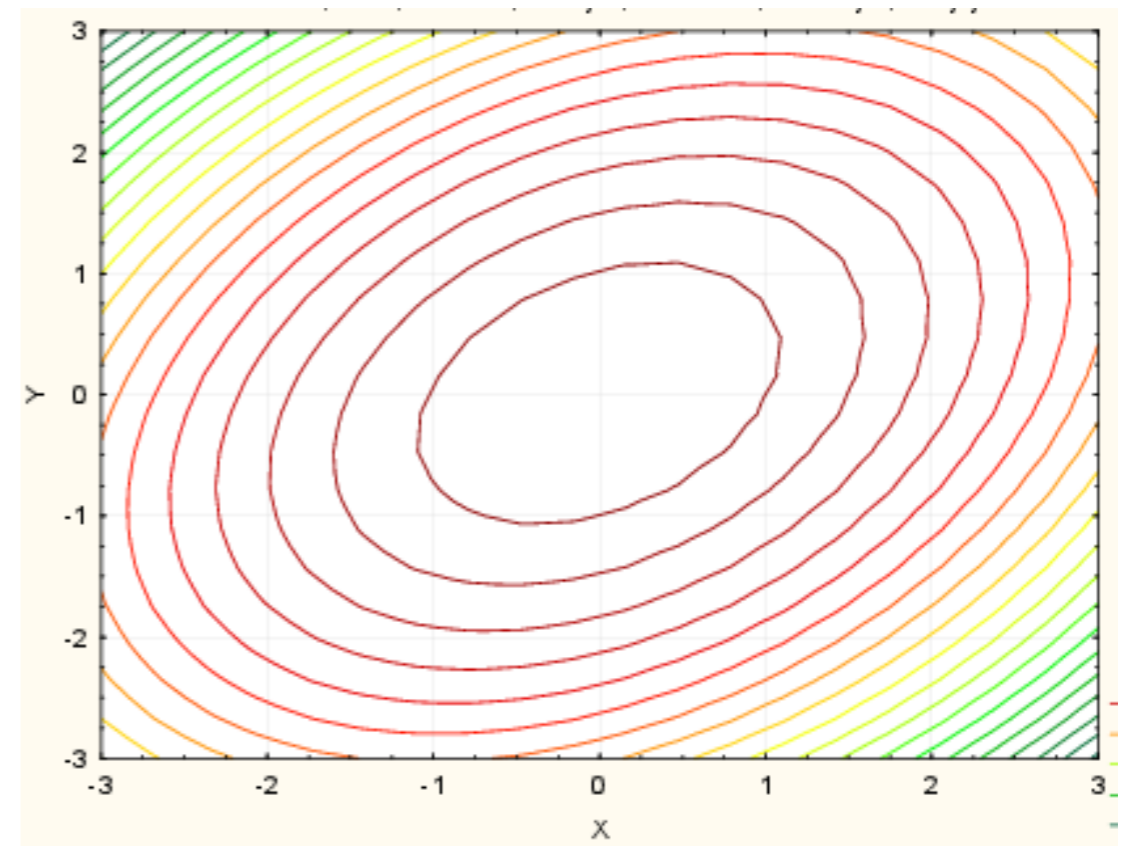
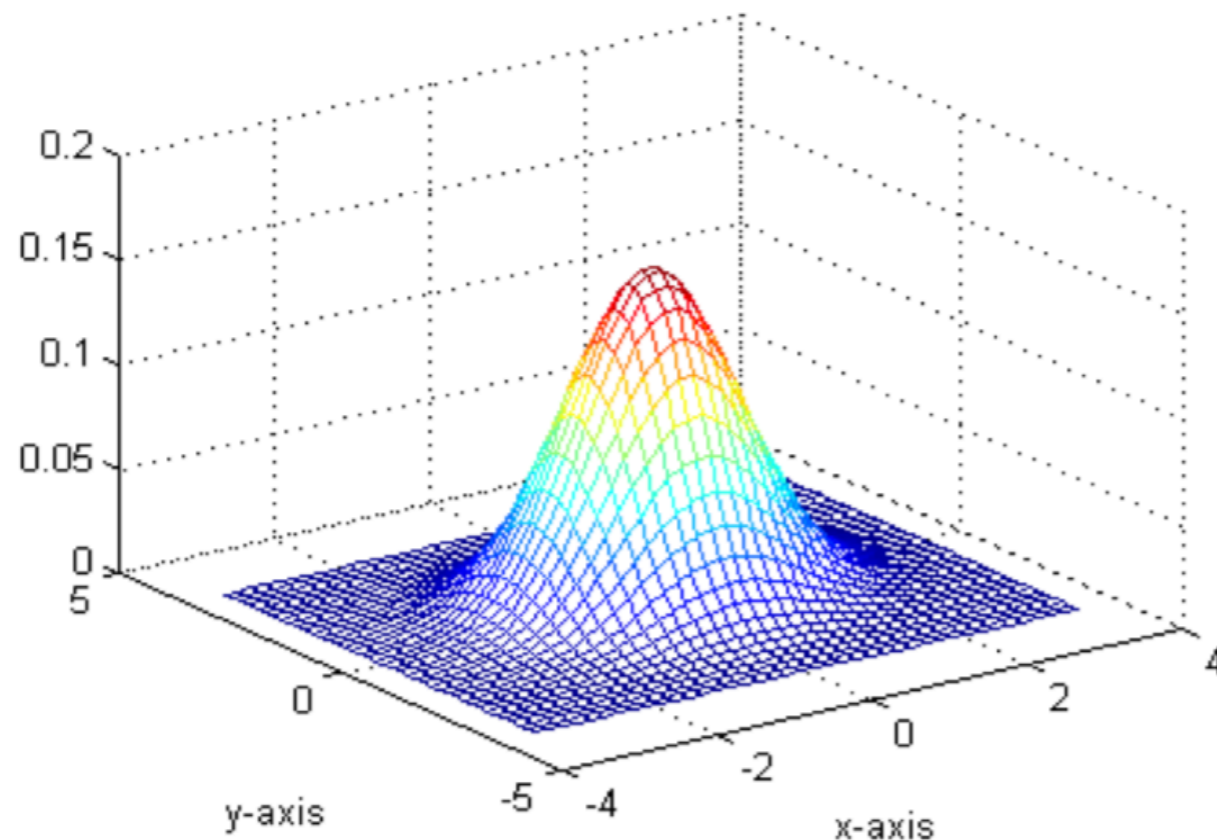
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x, y) \in M = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$



Náhodný vektor $Z=(X,Y)$

Příklad 2: Náhodný vektor (X,Y) má dvourozměrné normální rozdělení se střední hodnotou (μ_1,μ_2) a kovarianční maticí $D = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ je-li jeho dvourozměrná hustota rovna

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right)}$$



Náhodný vektor $Z=(X, Y)$

Příklad 3: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X, Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2 . Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x, y) f(x, y) dx dy$$

Protože jsou složky nezávislé, pro $x, y \in \mathbf{R}^2$ máme

$$f(x, y) = f^X(x) f^Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

a tedy
$$E(Z) = \iint \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy$$

Substitucí $x = r \cos \beta$, $y = r \sin \beta$ s Jakobiánem r dostáváme

$$EZ = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$$

Dále pro $t = \frac{r^2}{2\sigma^2}$ máme
$$EZ = \sigma \int_0^{\infty} (2t)^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt .$$



Náhodný vektor $Z=(X, Y)$

Příklad 3: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X, Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2 . Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$EZ = \sigma \int_0^{\infty} (2t)^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

[\[https://cs.wikipedia.org/wiki/Gama_funkce\]](https://cs.wikipedia.org/wiki/Gama_funkce)

Zde použijeme tzv. Gamma funkci: $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ a dostáváme

$$EZ = \sigma \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1,253\sigma$$

Podobným způsobem můžeme spočítat libovolný moment veličiny Z :

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \int_R (x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy. \text{ Stejnými substitucemi se dostaneme}$$

$$\text{k výrazu } EZ^i = \sigma^i \int_0^{\infty} (2t)^{\frac{i}{2}} e^{-t} dt = \left(\sigma\sqrt{2}\right)^i \Gamma\left(\frac{i}{2} + 1\right).$$

Pomocí druhého obecného momentu $EZ^2 = 2\sigma^2\Gamma(2)$ dostaneme

$$Var Z = EZ^2 - (EZ)^2 = 0,429\sigma^2$$



Náhodný vektor $Z=(X, Y)$

Řešení: Počítáme i -tý obecný moment Z : je $Z^i = (X^2 + Y^2)^{\frac{i}{2}}$, tedy

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \int_R (x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy.$$

Substitucí $x = r\cos\beta$, $y = r\sin\beta$, jejíž Jakobián je r , dostáváme

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\infty r^{i+1} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$$

a s použitím další substituce $t = \frac{r^2}{2\sigma^2}$

$$EZ^i = \sigma^i \int_0^\infty (2t)^{\frac{i}{2}} e^{-t} dt = \left(\sigma\sqrt{2}\right)^i \Gamma\left(\frac{i}{2} + 1\right).$$

Odsud speciálně plyne $EZ = \sigma\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1,253\sigma$. Pomocí druhého obecného momentu $EZ^2 = 2\sigma^2\Gamma(2)$ je rozptyl $VarZ = EZ^2 - (EZ)^2 = 0,429\sigma^2$.

Rozdělení transformace náhodného vektoru

Funkce náhodné veličiny

Předpokládejme, že funkce $y=h(x)$ je definovaná na množině hodnot veličiny X .
Potom distribuční funkce $G(y)$ transformované náhodné veličiny $Y=h(X)$ je:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = \int_{h(x) \leq y} f(x) dx$$

Hustotu veličiny $Y=h(X)$ potom dostaneme derivací distribuční funkce $G(y)$.

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.



Rozdělení transformace náhodného vektoru

$$\vec{X} \sim f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{regulární zobrazení (J} \neq 0)$$

$$\vec{Y} = h(\vec{X}) \quad g(y_1, y_2, \dots, y_n) = ?$$

$$y_i = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow x_i = h_i^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$$\Theta \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow H = h(\Theta) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} P(\vec{Y} \in \Theta) &= \int_{\Theta} \dots \int g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \\ &= \int_{\Theta} \dots \int f(h_1^{-1}(y_1, \dots, y_n), \dots, h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)) \cdot |J| dy_1 \dots dy_n \end{aligned}$$

... a tedy je $g(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(h_1^{-1}(y_1, \dots, y_n), \dots, h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)) \cdot |J|$



Rozdělení transformace náhodného vektoru

Příklad:

Uvažujme případ $n = 2$ a

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_2$$

Inverzní funkce jsou $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2$ a jakobián

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tudíž

$$g(y_1, y_2) = f(y_1 - y_2, y_2).$$

Marginální hustota veličiny $Y_1 = X_1 + X_2$ je

$$g_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 - y_2, y_2) dy_2.$$

Rozdělení transformace náhodného vektoru

Příklad: $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$, nezávislé náhodné veličiny

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\vec{Y} = (Y_1, Y_2), \quad Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_2 \quad \Rightarrow \quad X_1 = Y_1 - Y_2, \quad X_2 = Y_2$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Tudíž

$$g(y_1, y_2) = f(y_1 - y_2, y_2) = \lambda^2 e^{y_1}$$

$$g_1(y_1) = \int_0^\infty f(y_1 - y_2, y_2) dy_2 = \int_0^{y_1} \lambda^2 e^{y_1} dy_2 = \lambda^2 y_1 e^{y_1}$$

Srovnejte s odvozením Erlangova rozdělení pro $n=2$.