Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky

2. Náhodná veličina a její charakteristiky

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2022/2023

2. Náhodná veličina a její charakteristiky

Co máme?

Co máme?

1. elementární náhodné jevy Ω

Co máme?

1. elementární náhodné jevy Ω

2. jevové pole $\mathcal{F}$:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1,\ A_2,\ \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Co máme?

1. elementární náhodné jevy Ω

2. jevové pole $\mathcal{F}$: (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1,\ A_2,\ \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

3. Pravděpodobnost (a) $\forall A \in \mathcal{F}: \quad P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

(b) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Co máme?

1. elementární náhodné jevy Ω

2. jevové pole $\mathcal{F}$: (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1,\, A_2,\, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

3. Pravděpodobnost (a) $\forall A \in \mathcal{F}: \quad P(A) \in \langle 0, 1\rangle$

(b) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

$\Rightarrow \quad (\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

Co máme?

1. elementární náhodné jevy Ω

2. jevové pole $\mathcal{F}$: (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1,\ A_2,\ \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

3. Pravděpodobnost (a) $\forall A \in \mathcal{F}: \quad P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

(b) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

$\Rightarrow \quad (\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ …. pravděpodobnostní prostor

Co nám chybí?

Co máme?

1. elementární náhodné jevy Ω

2. jevové pole $\mathcal{F}$: (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1,\, A_2,\, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

3. Pravděpodobnost (a) $\forall A \in \mathcal{F}: \quad P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

(b) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

$\Rightarrow \quad (\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

Co nám chybí?

4. Náhodná veličina: $X : \mathbf{\Omega} \to \mathbf{R}$

Co máme?

1. elementární náhodné jevy Ω

2. jevové pole $\mathcal{F}$: (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1,\ A_2,\ \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

3. Pravděpodobnost (a) $\forall A \in \mathcal{F}: \quad P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

(b) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

$\Rightarrow \quad (\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ …. pravděpodobnostní prostor

Co nám chybí?

4. Náhodná veličina: $\boldsymbol{X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}}$

Přesněji: měřitelná funkce $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B})$

$$\forall x \in \mathbf{R}: \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

$$P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\right) = F(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

Co máme?

1. elementární náhodné jevy Ω

2. jevové pole $\mathcal{F}$: (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

3. Pravděpodobnost (a) $\forall A \in \mathcal{F}: \quad P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

(b) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

Co nám chybí?

4. Náhodná veličina: $X : \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$

Přesněji: měřitelná funkce $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B})$

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = F(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\ \} \in \mathcal{F}$$

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Distribuční funkce náhodné veličiny: $F(x) = P\left(X \leq x\right), \quad x \in \mathbf{R}$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\} \in \mathcal{F}$$

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Distribuční funkce náhodné veličiny: $F(x) = P\left(X \leq x\right), \quad x \in \mathbf{R}$

Distribuční funkce odpovídá na otázku: S jakou pravděpodobností náhodná veličina nepřekročí hodnotu x?

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\} \in \mathcal{F}$$

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Distribuční funkce náhodné veličiny: $F(x) = P\left(X \leq x\right), \quad x \in \mathbf{R}$

Distribuční funkce odpovídá na otázku: S jakou pravděpodobností náhodná veličina nepřekročí hodnotu x?

Pro distribuční funkci platí:

1) je neklesající

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle \} \in \mathcal{F}$$

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Distribuční funkce náhodné veličiny: $F(x) = P\left(X \leq x\right), \quad x \in \mathbf{R}$

Distribuční funkce odpovídá na otázku: S jakou pravděpodobností náhodná veličina nepřekročí hodnotu x?

Pro distribuční funkci platí:

1) je neklesající $\quad x \leq y \;\Rightarrow \{X \leq x\} \subset \{X \leq y\} \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y) \Rightarrow F(x) \leq F(y).$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\,\} \in \mathcal{F}$$

$$\{X \leq x\,\} \in \mathcal{F}$$

Distribuční funkce náhodné veličiny: $F(x) = P\,(X \leq x)\,, \quad x \in \mathbf{R}$

Distribuční funkce odpovídá na otázku: S jakou pravděpodobností náhodná veličina nepřekročí hodnotu x?

Pro distribuční funkci platí:

1) je neklesající $\quad x \leq y \ \Rightarrow \{X \leq x\,\} \subset \{X \leq y\,\} \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y) \Rightarrow F(x) \leq F(y).$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X \leq x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(X \leq x) = 1$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\,\} \in \mathcal{F}$$

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$$

$$\boxed{\text{Distribuční funkce náhodné veličiny:} \quad F(x) = P\left(X \leq x\right), \quad x \in \mathbf{R}}$$

Distribuční funkce odpovídá na otázku: S jakou pravděpodobností náhodná veličina nepřekročí hodnotu x?

Pro distribuční funkci platí:

1) je neklesající $x \leq y \Rightarrow \{X \leq x\} \subset \{X \leq y\} \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y) \Rightarrow F(x) \leq F(y).$

2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X \leq x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} P(X \leq x) = 1$

3) $F(x)$ je zprava spojitá $\lim_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0)$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle \} \in \mathcal{F}$$

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$$

$\boxed{\text{Distribuční funkce náhodné veličiny: } F(x) = P\left(X \leq x\right), \quad x \in \mathbf{R}}$

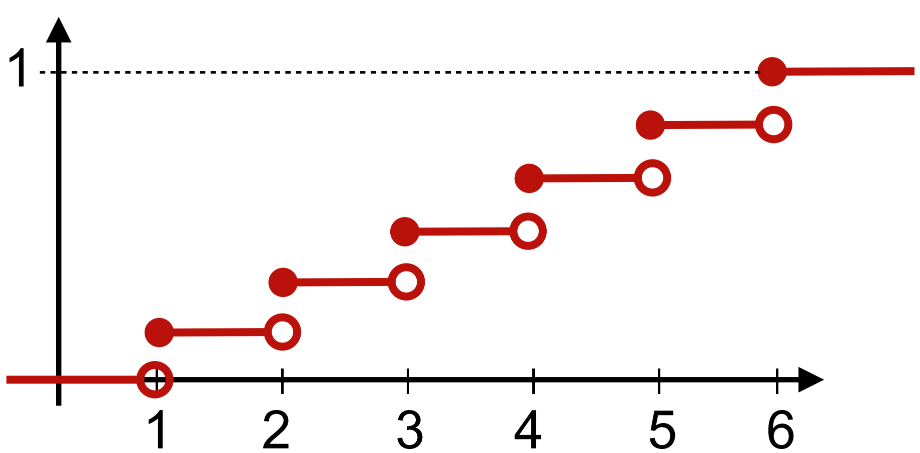
Distribuční funkce odpovídá na otázku: S jakou pravděpodobností náhodná veličina nepřekročí hodnotu x?

Pro distribuční funkci platí:

1) je neklesající $x \leq y \Rightarrow \{X \leq x\} \subset \{X \leq y\} \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y) \Rightarrow F(x) \leq F(y).$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X \leq x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(X \leq x) = 1$

3) $F(x)$ je zprava spojitá $\lim\limits_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0)$



Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\,\} \in \mathcal{F}$$

$$\{X \le x\} \in \mathcal{F}$$

Distribuční funkce náhodné veličiny: $F(x) = P\,(X \le x)\,,\quad x \in \mathbf{R}$

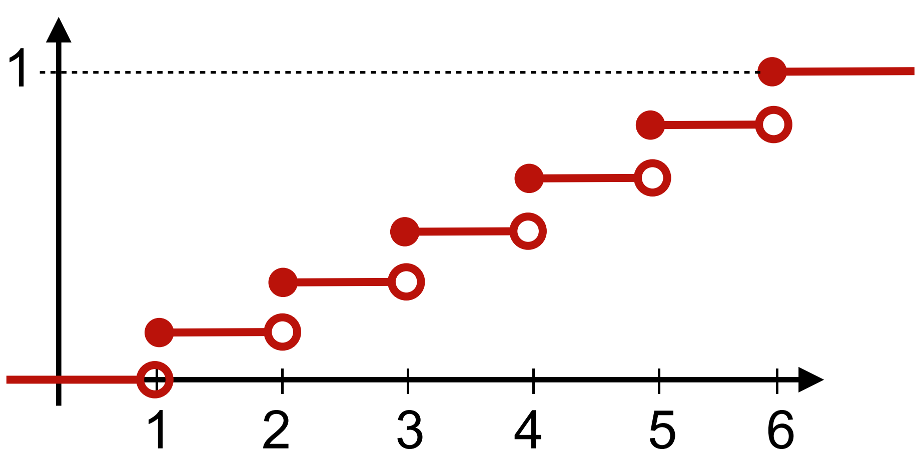
Distribuční funkce odpovídá na otázku: S jakou pravděpodobností náhodná veličina nepřekročí hodnotu x?

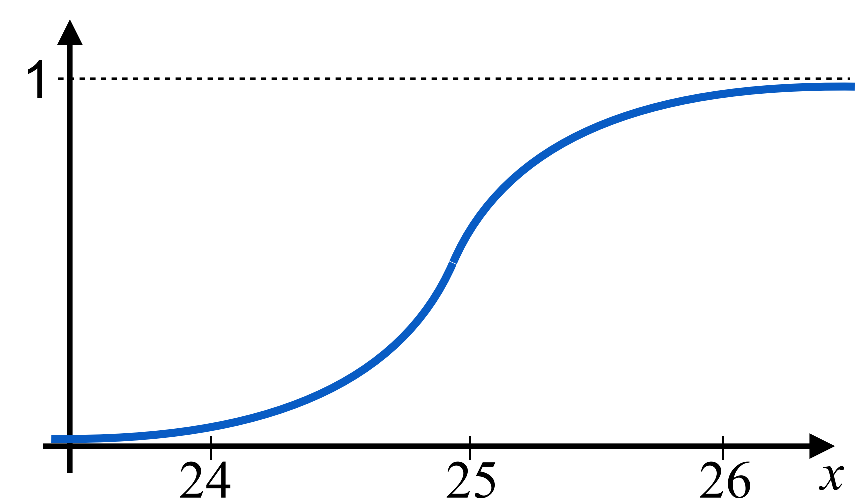
Pro distribuční funkci platí:

1) je neklesající $\quad x \le y \;\Rightarrow \{X \le x\} \subset \{X \le y\} \Rightarrow P(X \le x) \le P(X \le y) \Rightarrow F(x) \le F(y).$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X \le x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(X \le x) = 1$

3) $F(x)$ je zprava spojitá $\lim\limits_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0)$





Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\ \} \in \mathcal{F}$$

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Distribuční funkce náhodné veličiny: $F(x) = P\,(X \leq x)\,, \quad x \in \mathbf{R}$

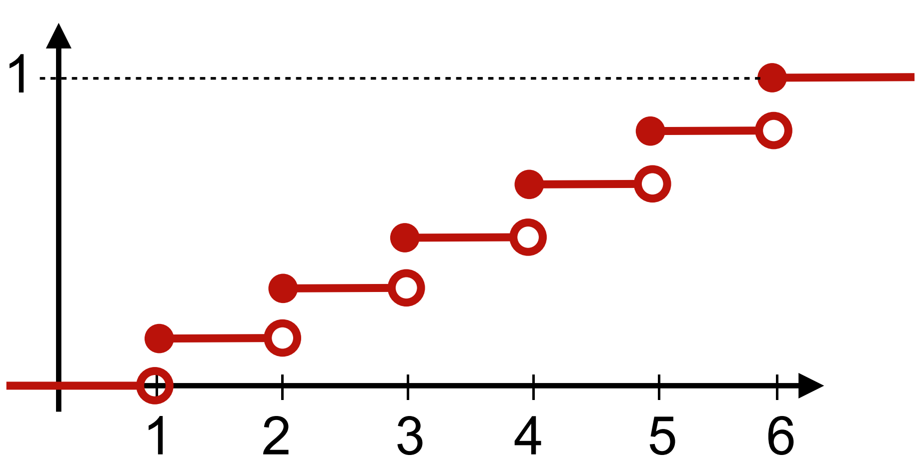
Distribuční funkce odpovídá na otázku: S jakou pravděpodobností náhodná veličina nepřekročí hodnotu x?

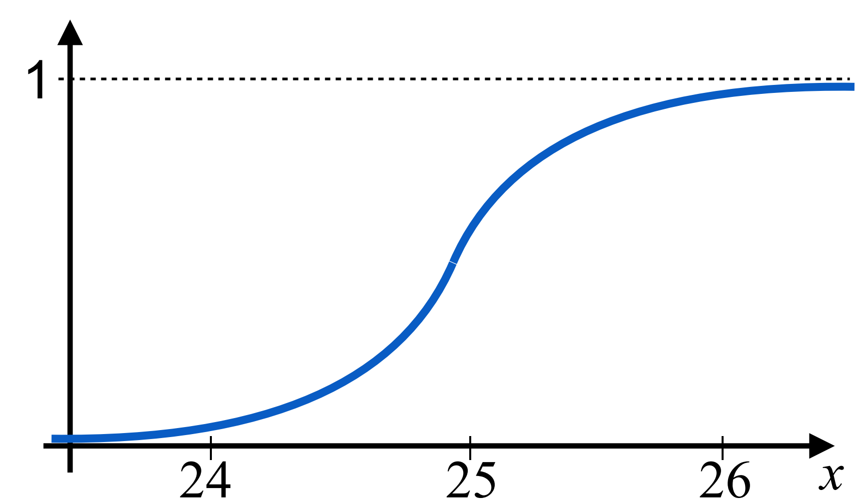
Pro distribuční funkci platí:

1) je neklesající $\quad x \leq y \ \Rightarrow \{X \leq x\} \subset \{X \leq y\} \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y) \Rightarrow F(x) \leq F(y).$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X \leq x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(X \leq x) = 1$

3) $F(x)$ je zprava spojitá $\quad \lim\limits_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0)$





Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

Náhodná veličina

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$

diskrétní náhodná veličina

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

Náhodná veličina

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$

diskrétní náhodná veličina

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

spojitá náhodná veličina

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$ — diskrétní náhodná veličina

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$ — spojitá náhodná veličina

a) Diskrétní náhodná veličina:

Náhodná veličina

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

diskrétní náhodná veličina

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

spojitá náhodná veličina

a) Diskrétní náhodná veličina:

- obor hodnot = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$ — diskrétní náhodná veličina

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$ — spojitá náhodná veličina

a) Diskrétní náhodná veličina:

- obor hodnot = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$
- pravděpodobnostní funkce: $P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots$

vždycky musí platit, že $p_i \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

diskrétní náhodná veličina

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

spojitá náhodná veličina

a) Diskrétní náhodná veličina:

- obor hodnot = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$
- pravděpodobnostní funkce: $P(X = x_i) = p_i,\ i=1, 2, \ldots$

  vždycky musí platit, že $p_i \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$
- distribuční funkce: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=:x_i \leq x} p_i, \quad x \in \mathbf{R}$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

diskrétní náhodná veličina

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

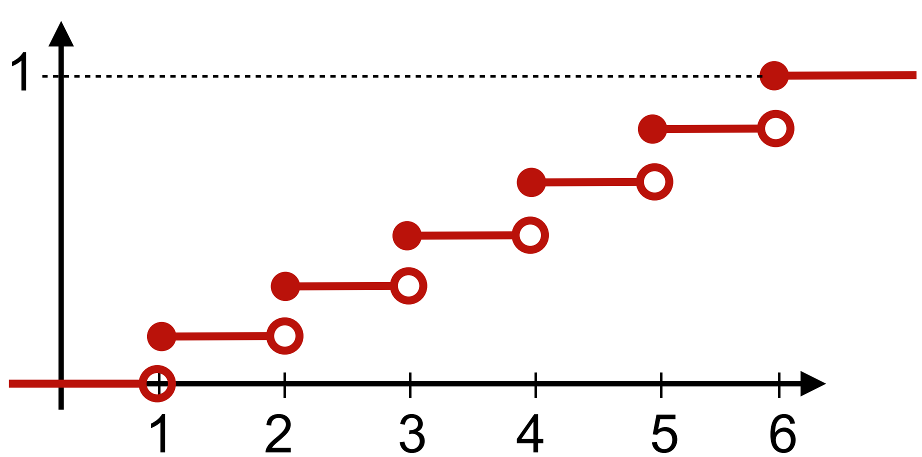
b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

spojitá náhodná veličina

a) Diskrétní náhodná veličina:

- obor hodnot = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$
- pravděpodobnostní funkce: $P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots$

  vždycky musí platit, že $p_i \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$
- distribuční funkce: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=:x_i \leq x} p_i, \quad x \in \mathbf{R}$



Náhodná veličina

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

diskrétní náhodná veličina

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

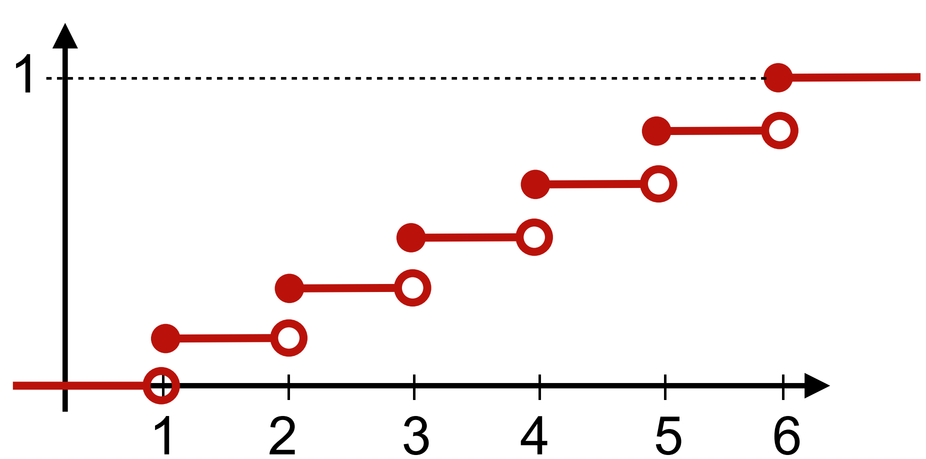
b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

spojitá náhodná veličina

a) Diskrétní náhodná veličina:

- obor hodnot = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$
- pravděpodobnostní funkce: $P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots$

  vždycky musí platit, že $p_i \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$
- distribuční funkce: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=:x_i \leq x} p_i, \quad x \in \mathbf{R}$



Náhodná veličina

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

b) Spojitá náhodná veličina:

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

b) Spojitá náhodná veličina:

- obor hodnot = (a,b) či $\langle a, \infty)$ nebo celé $\mathbf{R}$

Náhodná veličina

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

b) Spojitá náhodná veličina:

- obor hodnot = (a,b) či $\langle a, \infty)$ nebo celé $\mathbf{R}$
- nutně platí: $P(x) = 0, \;\; \forall x \in (a, b)$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

b) Spojitá náhodná veličina:

- obor hodnot = (a,b) či $\langle a, \infty)$ nebo celé $\mathbf{R}$
- nutně platí: $P(x) = 0, \ \ \forall x \in (a, b)$
- hustota pravděpodobnosti: nezáporná, spojitá funkce $f(x)$ pro kterou platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \ \ \forall x \in \mathbf{R}$$

vždycky musí být $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$

Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

Rozlišujeme dva případy:

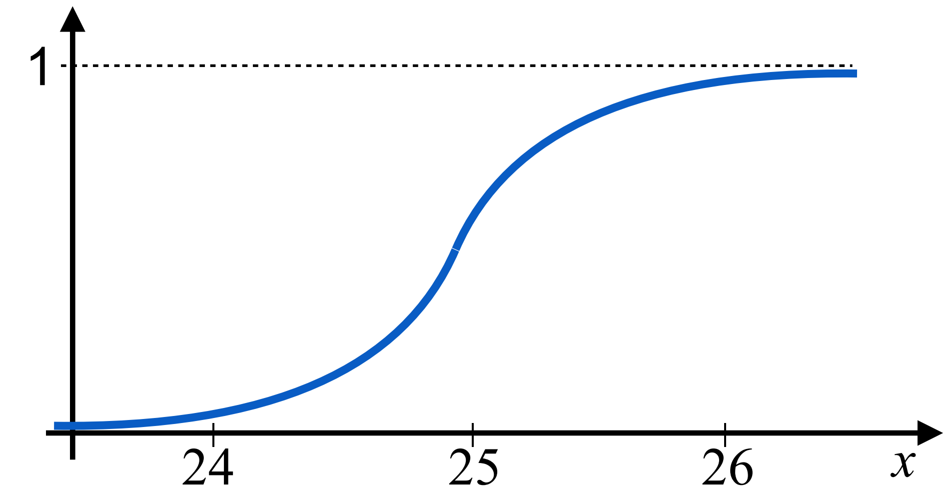
Náhodná veličina je funkce z Ω do
- a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$
- b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

b) Spojitá náhodná veličina:

- obor hodnot = (a,b) či $\langle a, \infty)$ nebo celé $\mathbf{R}$
- nutně platí: $P(x) = 0, \ \forall x \in (a,b)$
- hustota pravděpodobnosti: nezáporná, spojitá funkce $f(x)$ pro kterou platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

vždycky musí být $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$



Náhodná veličina

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

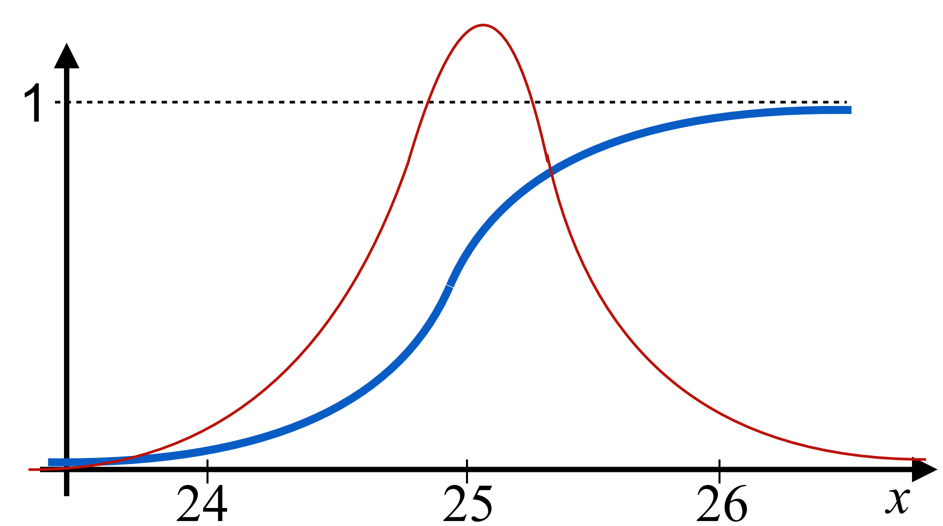
b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

b) Spojitá náhodná veličina:

- obor hodnot = (a,b) či $\langle a, \infty)$ nebo celé $\mathbf{R}$
- nutně platí: $P(x) = 0, \ \forall x \in (a, b)$
- hustota pravděpodobnosti: nezáporná, spojitá funkce $f(x)$ pro kterou platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

vždycky musí být $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$



Náhodná veličina

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$

Rozlišujeme dva případy:

Náhodná veličina je funkce z Ω do

a) spočetné podmnožiny $S \subset \mathbf{R}$

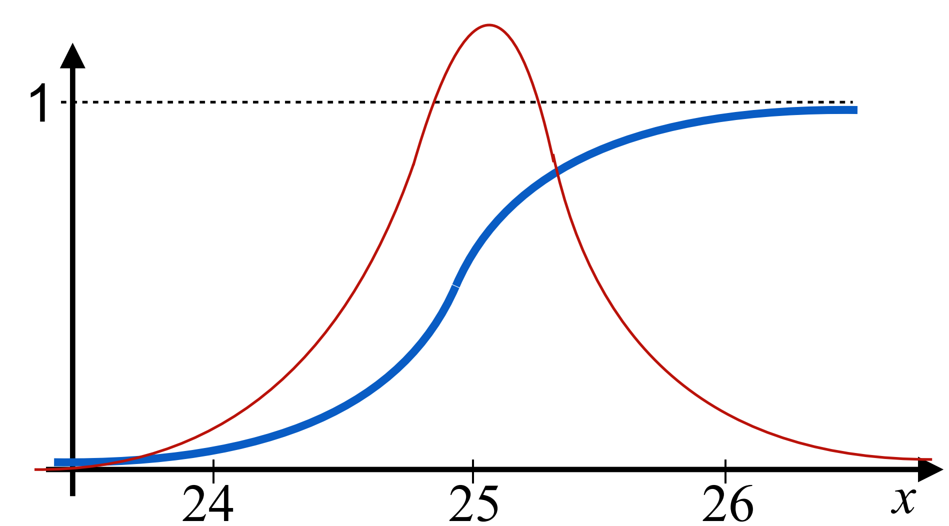
b) souvislé podmnožiny $Q \subset \mathbf{R}$

b) Spojitá náhodná veličina:

- obor hodnot = (a,b) či $\langle a, \infty)$ nebo celé $\mathbf{R}$
- nutně platí: $P(x) = 0, \ \forall x \in (a,b)$
- hustota pravděpodobnosti: nezáporná, spojitá funkce $f(x)$ pro kterou platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \ \ \forall x \in \mathbf{R}$$

vždycky musí být $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$



Charakteristiky náhodné veličiny

Charakteristiky náhodné veličiny

- Funkce rozdělení pravděpodobnosti
  (distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota)

Charakteristiky náhodné veličiny

- Funkce rozdělení pravděpodobnosti
  (distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota)
- Momenty (obecné, centrální)

Charakteristiky náhodné veličiny

- Funkce rozdělení pravděpodobnosti
  (distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota)
- Momenty (obecné, centrální)
- Kvantily (kvantilová funkce)

Charakteristiky náhodné veličiny

- Funkce rozdělení pravděpodobnosti
  (distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota)
- Momenty (obecné, centrální)
- Kvantily (kvantilová funkce)
- další (modus, …)

Charakteristiky náhodné veličiny

- Funkce rozdělení pravděpodobnosti
  (distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota)
- Momenty (obecné, centrální)
- Kvantily (kvantilová funkce)
- další (modus, …)

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Střední hodnota: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Střední hodnota: $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$$

a) v případě diskrétní náhodné veličiny $$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Střední hodnota: $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$$

a) v případě diskrétní náhodné veličiny $$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

b) v případě spojité náhodné veličiny $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Střední hodnota: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$

a) v případě diskrétní náhodné veličiny $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

b) v případě spojité náhodné veličiny $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$

Střední hodnota je lineární funkcionál:

je aditivní: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

a je homogenní: $E(kX) = kE(X), \quad k \in \mathbf{R}$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Střední hodnota: $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$$

a) v případě diskrétní náhodné veličiny $$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

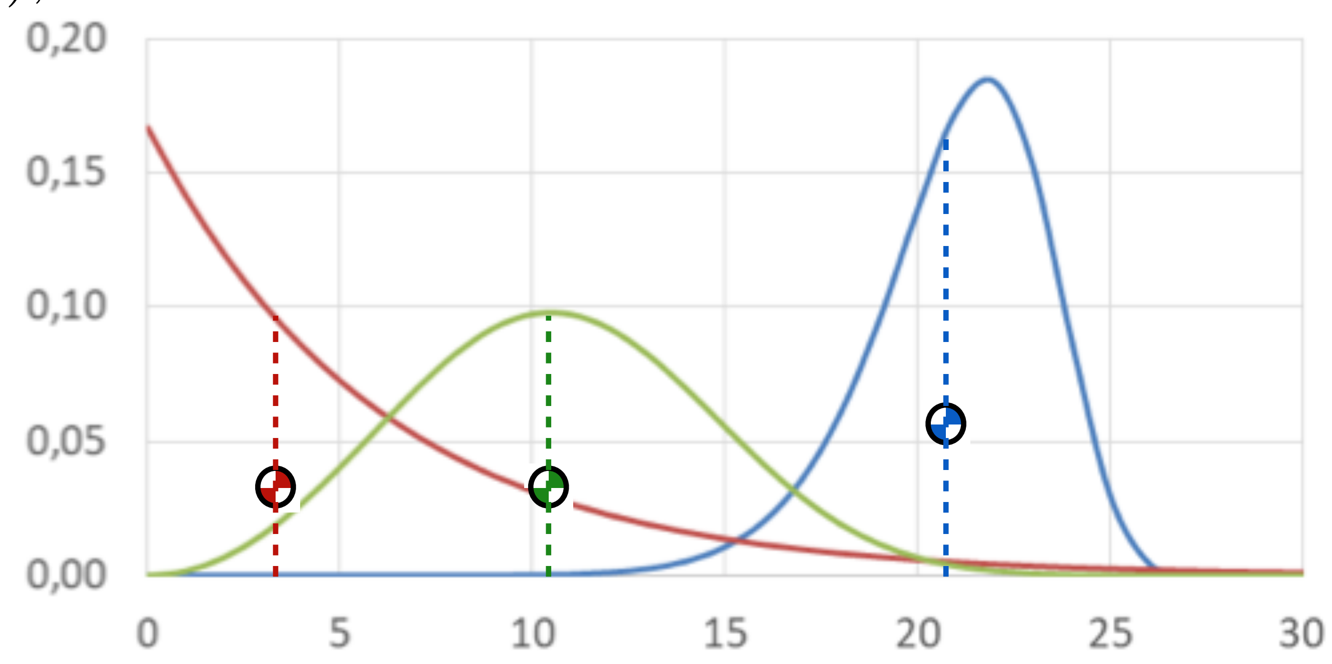
b) v případě spojité náhodné veličiny $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

Střední hodnota je lineární funkcionál:

je aditivní: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

a je homogenní: $E(kX) = kE(X), \quad k \in \mathbf{R}$

Střední hodnota tvoří jakési "těžiště rozdělení" náhodné veličiny:



Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Střední hodnota: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$

a) v případě diskrétní náhodné veličiny $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

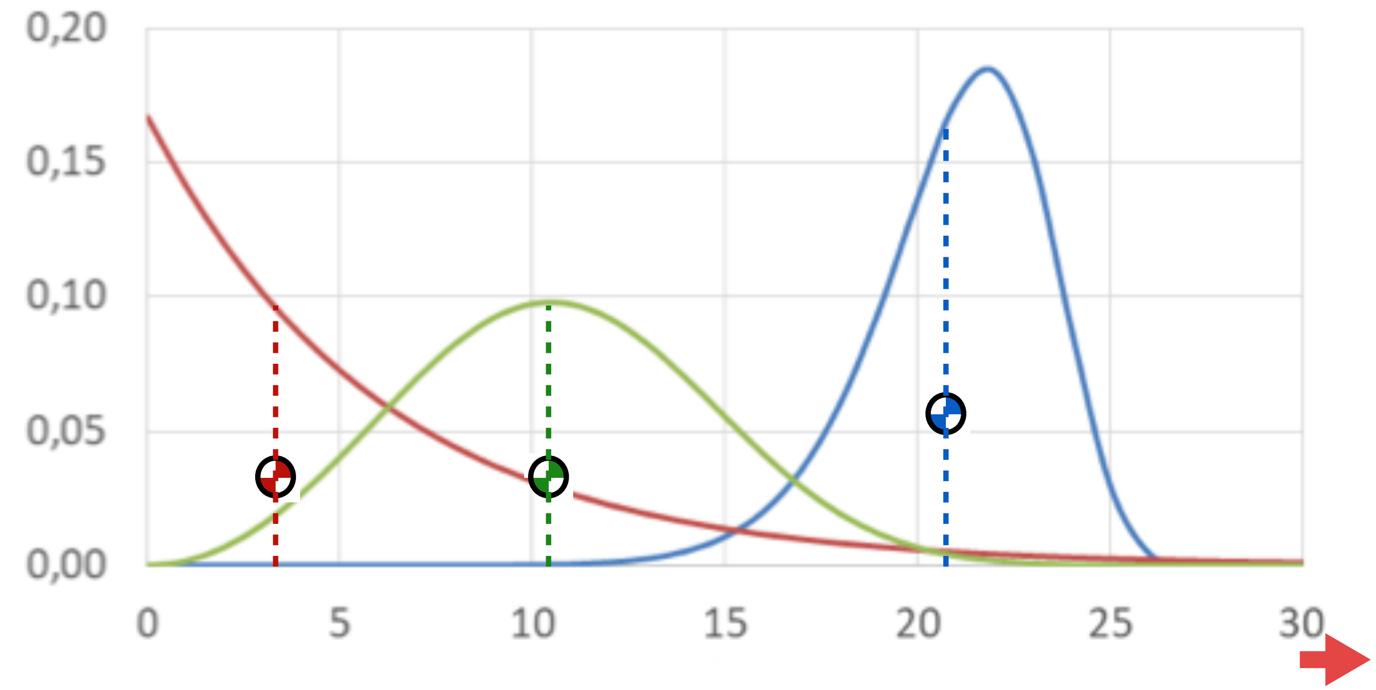
b) v případě spojité náhodné veličiny $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$

Střední hodnota je lineární funkcionál:

je aditivní: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

a je homogenní: $E(kX) = kE(X), \quad k \in \mathbf{R}$

Střední hodnota tvoří jakési "těžiště rozdělení" náhodné veličiny:



Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Obecné momenty: $$\mu_k(X) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Obecné momenty: $$\mu_k(X) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$$

$$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$ v diskrétním případě (pro d.n.v.)

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) \mathrm{d}x$$ ve spojitém případě (pro s.n.v.)

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Obecné momenty: $\mu_k(X) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$

$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ v diskrétním případě (pro d.n.v.)

$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) \mathrm{d}x$ ve spojitém případě (pro s.n.v.)

Momentová vytvořující funkce: $M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \in \mathbf{R}$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Obecné momenty: $\mu_k(X) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$

$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ v diskrétním případě (pro d.n.v.)

$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) \mathrm{d}x$ ve spojitém případě (pro s.n.v.)

Momentová vytvořující funkce: $M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \in \mathbf{R}$

$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i$ pro d.n.v., $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) \mathrm{d}x$ pro s.n.v.

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Obecné momenty: $\mu_k(X) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$

$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ v diskrétním případě (pro d.n.v.)

$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x$ ve spojitém případě (pro s.n.v.)

Momentová vytvořující funkce: $M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \in \mathbf{R}$

$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i$ pro d.n.v., $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\mathrm{d}x$ pro s.n.v.

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}\mu_2 + \frac{t^3}{3!}\mu_3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}\mu_n + \ldots$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Obecné momenty: $$\mu_k(X) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$$

$$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$ v diskrétním případě (pro d.n.v.)

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x$$ ve spojitém případě (pro s.n.v.)

Momentová vytvořující funkce: $$M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \in \mathbf{R}$$

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i$$ pro d.n.v., $$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\mathrm{d}x$$ pro s.n.v.

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}\mu_2 + \frac{t^3}{3!}\mu_3 + \dots + \frac{t^n}{n!}\mu_n + \dots$$

Platí například: 1) $\mu_1(X) = E(X) = \mu$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Obecné momenty: $\mu_k(X) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$

$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ v diskrétním případě (pro d.n.v.)

$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) \mathrm{d}x$ ve spojitém případě (pro s.n.v.)

Momentová vytvořující funkce: $M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \in \mathbf{R}$

$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i$ pro d.n.v., $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) \mathrm{d}x$ pro s.n.v.

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}\mu_2 + \frac{t^3}{3!}\mu_3 + \dots + \frac{t^n}{n!}\mu_n + \dots$$

Platí například: 1) $\mu_1(X) = E(X) = \mu$ 2) $\mu_k = \frac{\mathrm{d}^k M_X}{\mathrm{d}t^k}(0)$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Obecné momenty: $\mu_k(X) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$

$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ v diskrétním případě (pro d.n.v.)

$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) \mathrm{d}x$ ve spojitém případě (pro s.n.v.)

Momentová vytvořující funkce: $M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \in \mathbf{R}$

$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i$ pro d.n.v., $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) \mathrm{d}x$ pro s.n.v.

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}\mu_2 + \frac{t^3}{3!}\mu_3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}\mu_n + \ldots$$

Platí například: 1) $\mu_1(X) = E(X) = \mu$ 2) $\mu_k = \frac{\mathrm{d}^k M_X}{\mathrm{d}t^k}(0)$

3) $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \Rightarrow M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(a_i t)$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Obecné momenty: $\mu_k(X) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$

$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ v diskrétním případě (pro d.n.v.)

$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x$ ve spojitém případě (pro s.n.v.)

Momentová vytvořující funkce: $M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \in \mathbf{R}$

$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i$ pro d.n.v., $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\mathrm{d}x$ pro s.n.v.

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}\mu_2 + \frac{t^3}{3!}\mu_3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}\mu_n + \ldots$$

Platí například: 1) $\mu_1(X) = E(X) = \mu$ 2) $\mu_k = \frac{\mathrm{d}^k M_X}{\mathrm{d}t^k}(0)$

3) $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \;\Rightarrow\; M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(a_i t)$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - E(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Je zřejmě:

1) $\nu_1(X) = E(X_C) = E(X-\mu) = E(X) - \mu = E(X) - E(X) = 0$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - E(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X - \mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Je zřejmě:

1) $\nu_1(X) = E(X_C) = E(X - \mu) = E(X) - \mu = E(X) - E(X) = 0$

2) $\nu_2(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_{\mathrm{C}} = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Je zřejmě:

1) $\nu_1(X) = E(X_C) = E(X-\mu) = E(X) - \mu = E(X) - E(X) = 0$

2) $\nu_2(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \; = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Je zřejmě:

1) $\nu_1(X) = E(X_C) = E(X-\mu) = E(X) - \mu = E(X) - E(X) = 0$

2) $\nu_2(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \ = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$

$$= E(X^2) - 2\Big(E(X)\Big)^2 + \Big(E(X)\Big)^2 = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ..... centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Je zřejmě:

1) $\nu_1(X) = E(X_C) = E(X-\mu) = E(X) - \mu = E(X) - E(X) = 0$

2) $\nu_2(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$

$$= E(X^2) - 2\Big(E(X)\Big)^2 + \Big(E(X)\Big)^2 = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$$

$$= \mu_2(X) - \Big(\mu_1(X)\Big)^2$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Je zřejmě:

1) $\nu_1(X) = E(X_C) = E(X-\mu) = E(X) - \mu = E(X) - E(X) = 0$

2) $\nu_2(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$

$$= E(X^2) - 2\Big(E(X)\Big)^2 + \Big(E(X)\Big)^2 = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$$

$$= \mu_2(X) - \Big(\mu_1(X)\Big)^2$$

3) $\nu_k(X) = E(X-\mu)^k$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - E(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Je zřejmě:

1) $\nu_1(X) = E(X_C) = E(X-\mu) = E(X) - \mu = E(X) - E(X) = 0$

2) $\nu_2(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$

$$= E(X^2) - 2\Big(E(X)\Big)^2 + \Big(E(X)\Big)^2 = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$$

$$= \mu_2(X) - \Big(\mu_1(X)\Big)^2$$

3) $\nu_k(X) = E(X-\mu)^k = E\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^{k-i} \mu^i\right)$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Je zřejmě:

1) $\nu_1(X) = E(X_C) = E(X-\mu) = E(X) - \mu = E(X) - E(X) = 0$

2) $$\nu_2(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \ = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$
$$= E(X^2) - 2\Big(E(X)\Big)^2 + \Big(E(X)\Big)^2 = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$$
$$= \mu_2(X) - \Big(\mu_1(X)\Big)^2$$

3) $$\nu_k(X) = E(X-\mu)^k = E\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^{k-i}\mu^i\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_{k-i}\mu_1^i$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - E(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Je zřejmě:

1) $\nu_1(X) = E(X_C) = E(X-\mu) = E(X) - \mu = E(X) - E(X) = 0$

2) $$\nu_2(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$
$$= E(X^2) - 2\Big(E(X)\Big)^2 + \Big(E(X)\Big)^2 = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$$
$$= \mu_2(X) - \Big(\mu_1(X)\Big)^2$$

3) $$\nu_k(X) = E(X-\mu)^k = E\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^{k-i}\mu^i\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_{k-i}\mu_1^i$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - E(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - E(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

- druhý centrální moment = rozptyl : $Var(X) = E(X - EX)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$
  (míra variability)

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

- druhý centrální moment = rozptyl : (míra variability) $Var(X) = E(X - EX)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$
- odvozenou charakteristikou je směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X-\mu)^2} = \sqrt{\nu_2}$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

- druhý centrální moment = rozptyl : (míra variability) $Var(X) = E(X - EX)^2 \; = \mu_2 - \mu_1^2$
- odvozenou charakteristikou je směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X-\mu)^2} \; = \sqrt{\nu_2}$
- další odvozenou charakteristikou je variační koeficient: $V = \dfrac{\sigma(X)}{E(X)} = \dfrac{\sqrt{(\nu_2)}}{\mu_1}$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

- druhý centrální moment = rozptyl : (míra variability) $Var(X) = E(X - EX)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$
- odvozenou charakteristikou je směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X-\mu)^2} = \sqrt{\nu_2}$
- další odvozenou charakteristikou je variační koeficient: $V = \dfrac{\sigma(X)}{E(X)} = \dfrac{\sqrt{(\nu_2)}}{\mu_1}$
- třetí centrální moment je mírou symetrie; koeficient šikmosti: $Skew(X) = \dfrac{E(X-EX)^3}{(Var(X))^{3/2}} = \dfrac{\nu_3}{\mu_2^{3/2}}$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

- druhý centrální moment = rozptyl : (míra variability)

$$Var(X) = E(X - EX)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

- odvozenou charakteristikou je směrodatná odchylka:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X-\mu)^2} = \sqrt{\nu_2}$$

- další odvozenou charakteristikou je variační koeficient:

$$V = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = \frac{\sqrt{(\nu_2)}}{\mu_1}$$

- třetí centrální moment je mírou symetrie; koeficient šikmosti:

$$Skew(X) = \frac{E(X - EX)^3}{(Var(X))^{3/2}} = \frac{\nu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

- čtvrtý centrální moment je mírou koncentrace; koeficient špičatosti:

$$Kurt(X) = \frac{E(X - EX)^4}{(Var(X))^2} = \frac{\nu_4}{\mu_2^2}$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Momenty

Centrální momenty: $X_C = X - \mathrm{E}(X) = X - \mu$ ….. centrovaná náhodná veličina

$$\nu_k(X) = E(X_C^k) = E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k \mathrm{d}F(x)$$

- druhý centrální moment = rozptyl : (míra variability)

$$Var(X) = E(X - EX)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

- odvozenou charakteristikou je směrodatná odchylka:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X-\mu)^2} = \sqrt{\nu_2}$$

- další odvozenou charakteristikou je variační koeficient:

$$V = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = \frac{\sqrt{(\nu_2)}}{\mu_1}$$

- třetí centrální moment je mírou symetrie; koeficient šikmosti:

$$Skew(X) = \frac{E(X-EX)^3}{(Var(X))^{3/2}} = \frac{\nu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

- čtvrtý centrální moment je mírou koncentrace; koeficient špičatosti:

$$Kurt(X) = \frac{E(X-EX)^4}{(Var(X))^2} = \frac{\nu_4}{\mu_2^2}$$

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^{-}(\alpha)$

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^{-}(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^{-}(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

- je-li $F(x)$ spojitá a prostá, potom je $\tilde{x}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^{-}(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

- je-li $F(x)$ spojitá a prostá, potom je $\tilde{x}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$
- v ostatních případech je to taková maximální hodnota $\tilde{x}_\alpha$, pro kterou platí: $P(X \leq \tilde{x}_\alpha) \geq \alpha$ a zároveň $P(X < \tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$ (tzv. pseudoinverze).

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^{-}(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

- je-li $F(x)$ spojitá a prostá, potom je $\tilde{x}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$
- v ostatních případech je to taková maximální hodnota $\tilde{x}_\alpha$, pro kterou platí: $P(X \leq \tilde{x}_\alpha) \geq \alpha$ a zároveň $P(X < \tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$ (tzv. pseudoinverze).
- někdy hovoříme o $\tilde{x}_\alpha$ jako o α-kvantilu nebo o 100α%-kvantilu náhodné veličiny X.

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^{-}(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

- je-li $F(x)$ spojitá a prostá, potom je $\tilde{x}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$
- v ostatních případech je to taková maximální hodnota $\tilde{x}_\alpha$, pro kterou platí: $P(X \leq \tilde{x}_\alpha) \geq \alpha$ a zároveň $P(X < \tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$ (tzv. pseudoinverze).
- někdy hovoříme o $\tilde{x}_\alpha$ jako o α-kvantilu nebo o 100α%-kvantilu náhodné veličiny X.

Patří sem:

- minimum ($\tilde{x}_0$), maximum ($\tilde{x}_{1,0}$),

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^{-}(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

- je-li $F(x)$ spojitá a prostá, potom je $\tilde{x}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$
- v ostatních případech je to taková maximální hodnota $\tilde{x}_\alpha$, pro kterou platí: $P(X \leq \tilde{x}_\alpha) \geq \alpha$ a zároveň $P(X < \tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$ (tzv. pseudoinverze).
- někdy hovoříme o $\tilde{x}_\alpha$ jako o α-kvantilu nebo o 100α%-kvantilu náhodné veličiny X.

Patří sem:

- minimum ($\tilde{x}_0$), maximum ($\tilde{x}_{1,0}$),
- medián ($\tilde{x}_{0,5}$),

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^-(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

- je-li $F(x)$ spojitá a prostá, potom je $\tilde{x}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$
- v ostatních případech je to taková maximální hodnota $\tilde{x}_\alpha$, pro kterou platí: $P(X \leq \tilde{x}_\alpha) \geq \alpha$ a zároveň $P(X < \tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$ (tzv. pseudoinverze).
- někdy hovoříme o $\tilde{x}_\alpha$ jako o α-kvantilu nebo o 100α%-kvantilu náhodné veličiny X.

Patří sem:

- minimum ($\tilde{x}_0$), maximum ($\tilde{x}_{1,0}$),
- medián ($\tilde{x}_{0,5}$),
- dolní decil ($\tilde{x}_{0,1}$) a horní decil ($\tilde{x}_{0,9}$),

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^{-}(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

- je-li $F(x)$ spojitá a prostá, potom je $\tilde{x}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$
- v ostatních případech je to taková maximální hodnota $\tilde{x}_\alpha$, pro kterou platí: $P(X \leq \tilde{x}_\alpha) \geq \alpha$ a zároveň $P(X < \tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$ (tzv. pseudoinverze).
- někdy hovoříme o $\tilde{x}_\alpha$ jako o α-kvantilu nebo o 100α%-kvantilu náhodné veličiny X.

Patří sem:

- minimum ($\tilde{x}_0$), maximum ($\tilde{x}_{1,0}$),
- medián ($\tilde{x}_{0,5}$),
- dolní decil ($\tilde{x}_{0,1}$) a horní decil ($\tilde{x}_{0,9}$),
- dolní kvartil ($\tilde{x}_{0,25}$), horní kvartil ($\tilde{x}_{0,75}$)

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^-(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

- je-li $F(x)$ spojitá a prostá, potom je $\tilde{x}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$
- v ostatních případech je to taková maximální hodnota $\tilde{x}_\alpha$, pro kterou platí: $P(X \leq \tilde{x}_\alpha) \geq \alpha$ a zároveň $P(X < \tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$ (tzv. pseudoinverze).
- někdy hovoříme o $\tilde{x}_\alpha$ jako o α-kvantilu nebo o 100α%-kvantilu náhodné veličiny X.

Patří sem:

- minimum ($\tilde{x}_0$), maximum ($\tilde{x}_{1,0}$),
- medián ($\tilde{x}_{0,5}$),
- dolní decil ($\tilde{x}_{0,1}$) a horní decil ($\tilde{x}_{0,9}$),
- dolní kvartil ($\tilde{x}_{0,25}$), horní kvartil ($\tilde{x}_{0,75}$)
- a další ….

Charakteristiky náhodné veličiny - Kvantily

Kvantilová funkce: $\tilde{x}_\alpha = F^-(\alpha)$

Často se ptáme: Jakou hodnotu sledovaná náhodná veličina nepřekročí s danou pravděpodobností?

… tedy pro zadané $\alpha \in (0,1)$ hledáme $\tilde{x}_\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $F(\tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$

- je-li $F(x)$ spojitá a prostá, potom je $\tilde{x}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$
- v ostatních případech je to taková maximální hodnota $\tilde{x}_\alpha$, pro kterou platí: $P(X \leq \tilde{x}_\alpha) \geq \alpha$ a zároveň $P(X < \tilde{x}_\alpha) \leq \alpha$ (tzv. pseudoinverze).
- někdy hovoříme o $\tilde{x}_\alpha$ jako o α-kvantilu nebo o 100α%-kvantilu náhodné veličiny X.

Patří sem:
- minimum ($\tilde{x}_0$), maximum ($\tilde{x}_{1,0}$),
- medián ($\tilde{x}_{0,5}$),
- dolní decil ($\tilde{x}_{0,1}$) a horní decil ($\tilde{x}_{0,9}$),
- dolní kvartil ($\tilde{x}_{0,25}$), horní kvartil ($\tilde{x}_{0,75}$)
- a další ….

Charakteristiky náhodné veličiny - další …

Patří sem například :

- modus (nejpravděpodobnější hodnota)

Charakteristiky náhodné veličiny - další ...

Patří sem například :

- modus (nejpravděpodobnější hodnota)

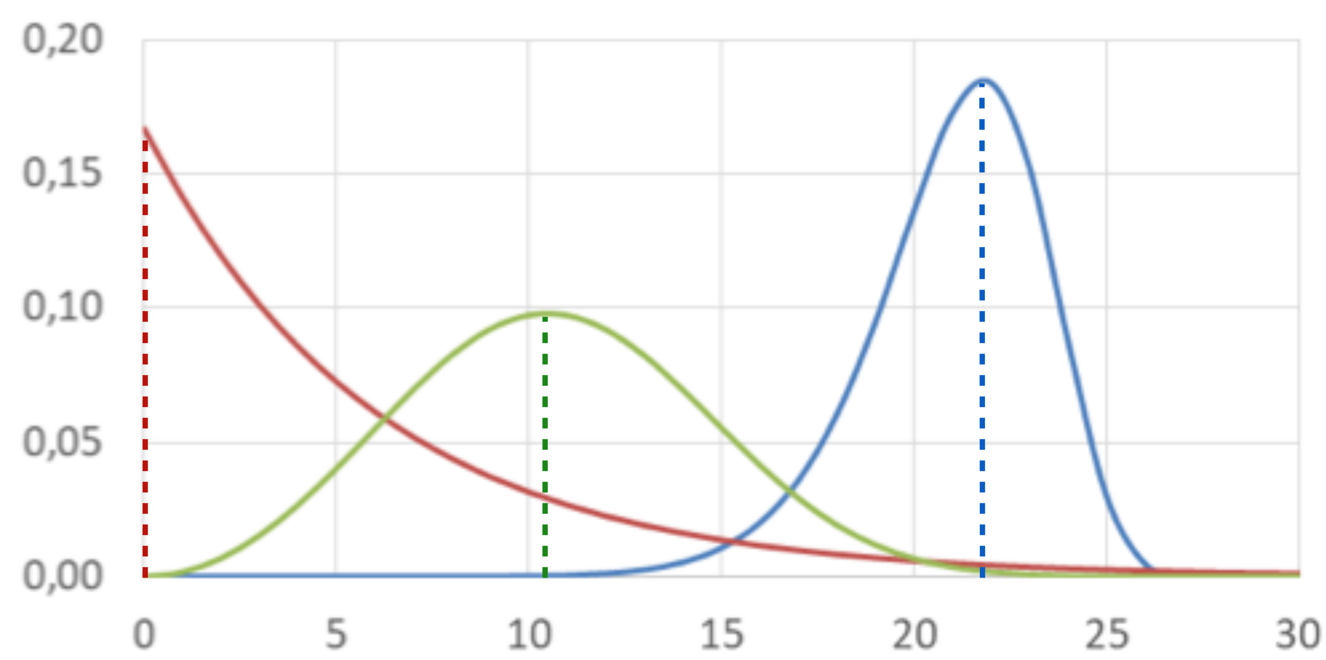
v diskrétním případě: $x_{\mathrm{mod}} = \max\{p_i ; i = 1, 2, \dots\}$

Charakteristiky náhodné veličiny - další ...

Patří sem například :
- modus (nejpravděpodobnější hodnota)

v diskrétním případě: $x_{\mathrm{mod}} = \max\{p_i; i = 1, 2, \ldots\}$

ve spojitém případě: $x_{\mathrm{mod}} = \mathrm{argmax}\{f(x); x \in \mathbf{R}\}$



Charakteristiky náhodné veličiny - další ...

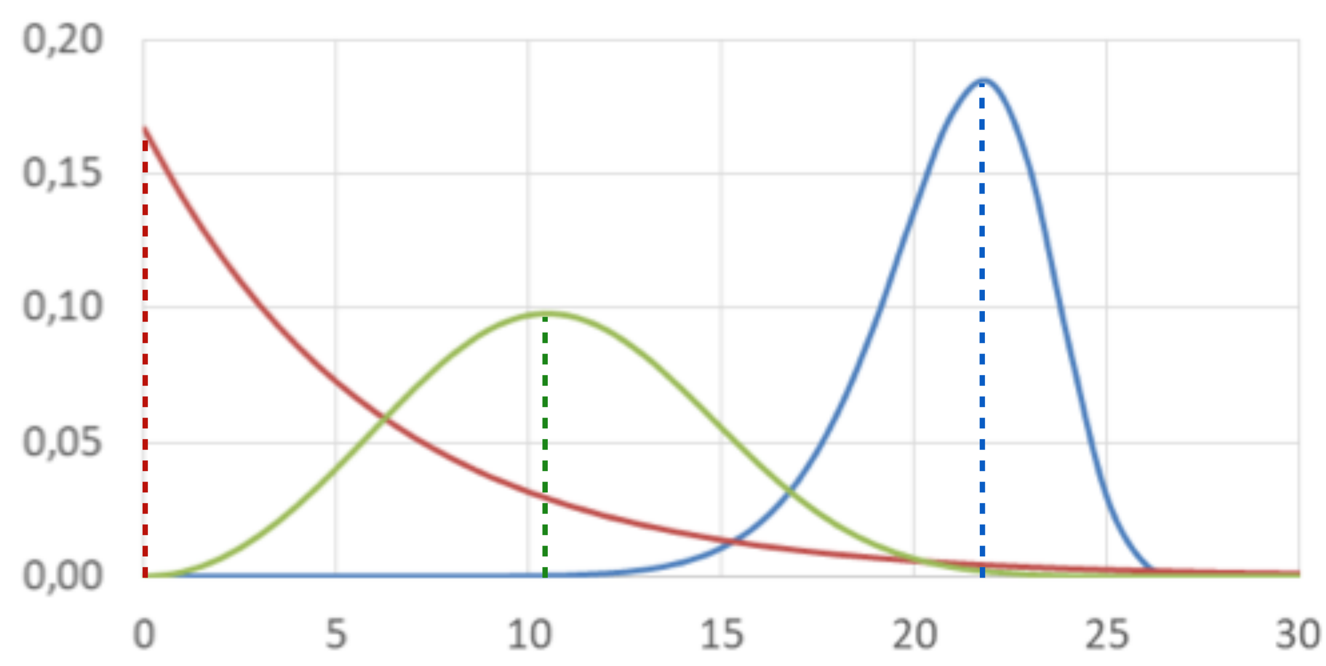
Patří sem například :

- modus (nejpravděpodobnější hodnota)

v diskrétním případě: $x_{\mathrm{mod}} = \max\{p_i; i = 1, 2, \ldots\}$

ve spojitém případě: $x_{\mathrm{mod}} = \mathrm{argmax}\{f(x);\, x \in \mathbf{R}\,\}$

$$P(X = x_0) = 0$$



Charakteristiky náhodné veličiny - další ...

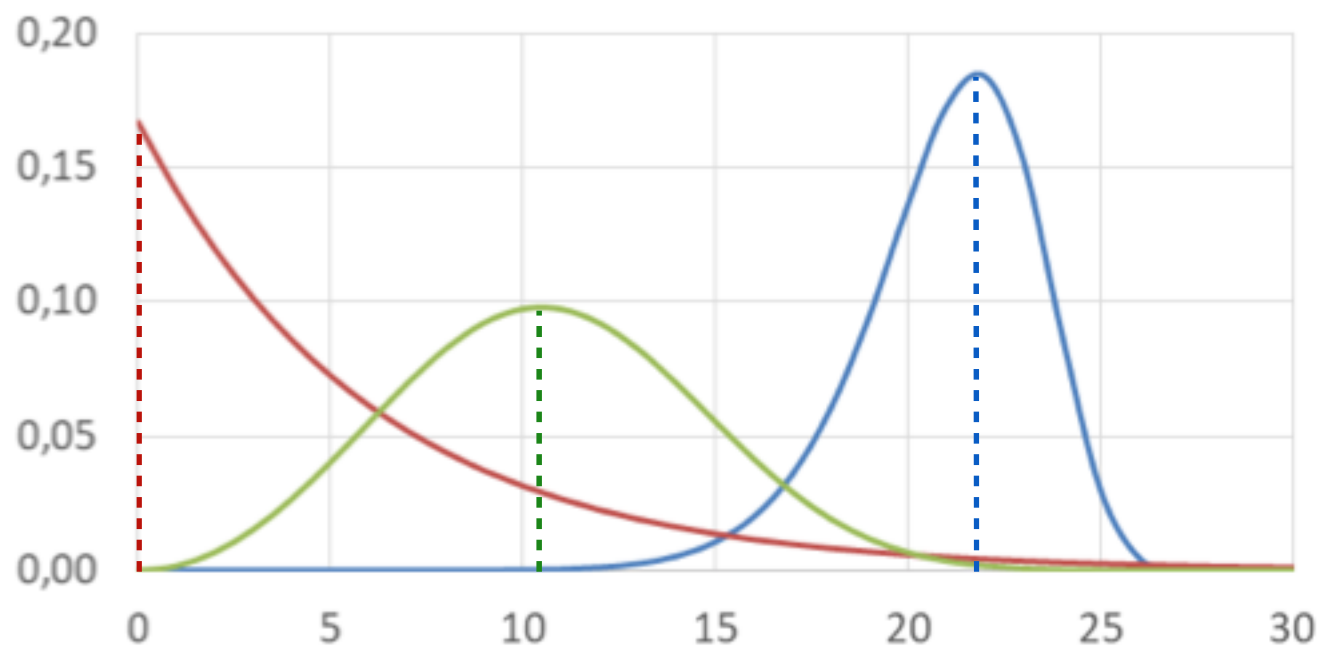
Patří sem například :

- modus (nejpravděpodobnější hodnota)

v diskrétním případě: $x_{\mathrm{mod}} = \max\{p_i; i = 1, 2, \ldots\}$

ve spojitém případě: $x_{\mathrm{mod}} = \mathrm{argmax}\{f(x);\, x \in \mathbf{R}\}$

$$P(X = x_0) = 0$$
$$P(X \in \langle x_0;\, \mathrm{d}x\,\rangle) \doteq f(x_0)\mathrm{d}x$$



Charakteristiky náhodné veličiny - další ...

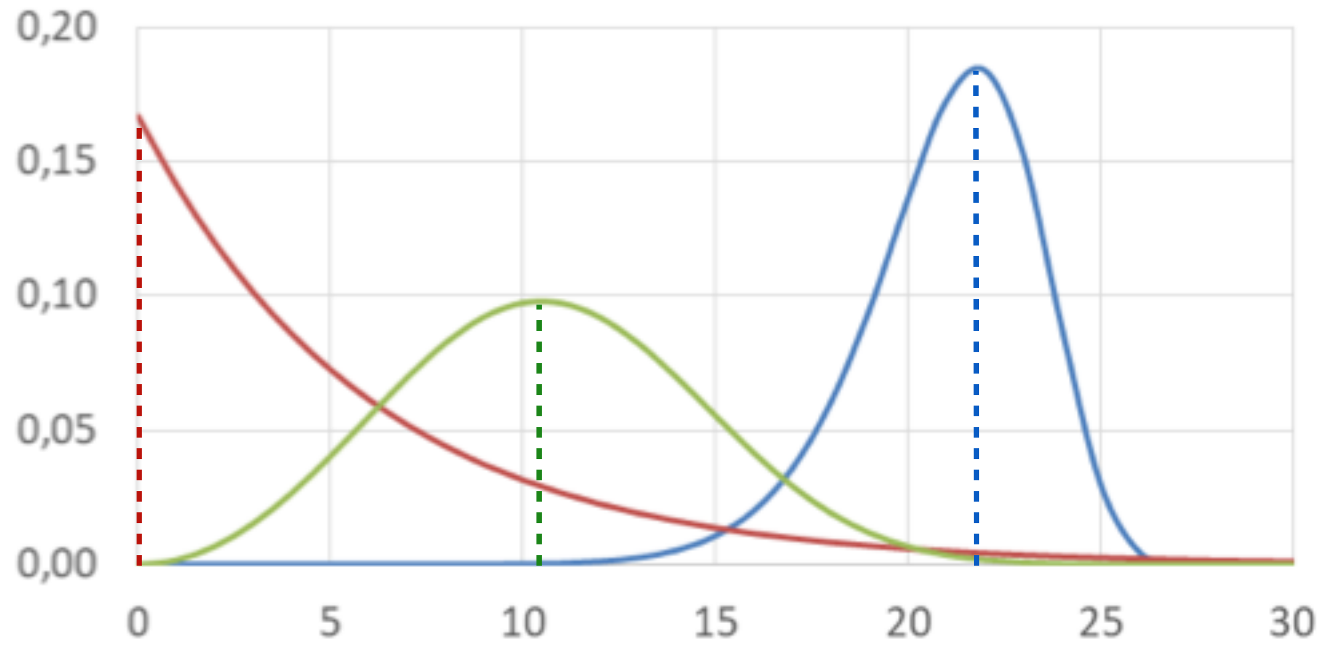
Patří sem například :

- modus (nejpravděpodobnější hodnota)
- rozpětí $(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)$,

v diskrétním případě: $x_{\mathrm{mod}} = \max\{p_i; i = 1, 2, \dots\}$

ve spojitém případě: $x_{\mathrm{mod}} = \mathrm{argmax}\{f(x); x \in \mathbf{R}\}$

$$P(X = x_0) = 0$$
$$P(X \in \langle x_0; \mathrm{d}x \rangle) \doteq f(x_0)\mathrm{d}x$$



Charakteristiky náhodné veličiny - další ...

Patří sem například :

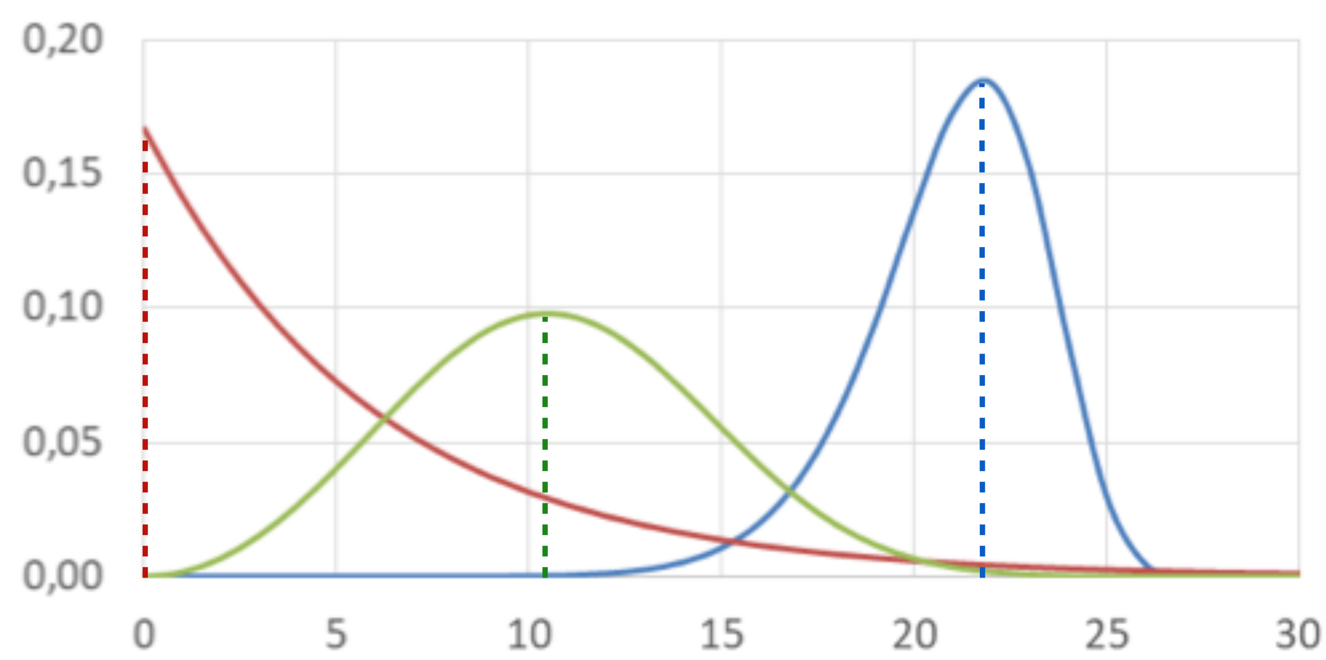
- modus (nejpravděpodobnější hodnota)
- rozpětí $(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)$,
- mezikvartilová odchylka $(\tilde{x}_{0,75} - \tilde{x}_{0,25})$

v diskrétním případě: $x_{\text{mod}} = \max\{p_i; i = 1, 2, \ldots\}$

ve spojitém případě: $x_{\text{mod}} = \text{argmax}\{f(x); x \in \mathbf{R}\}$

$$P(X = x_0) = 0$$

$$P(X \in \langle x_0; \mathrm{d}x\rangle) \doteq f(x_0)\mathrm{d}x$$



Charakteristiky náhodné veličiny - další …

Patří sem například :

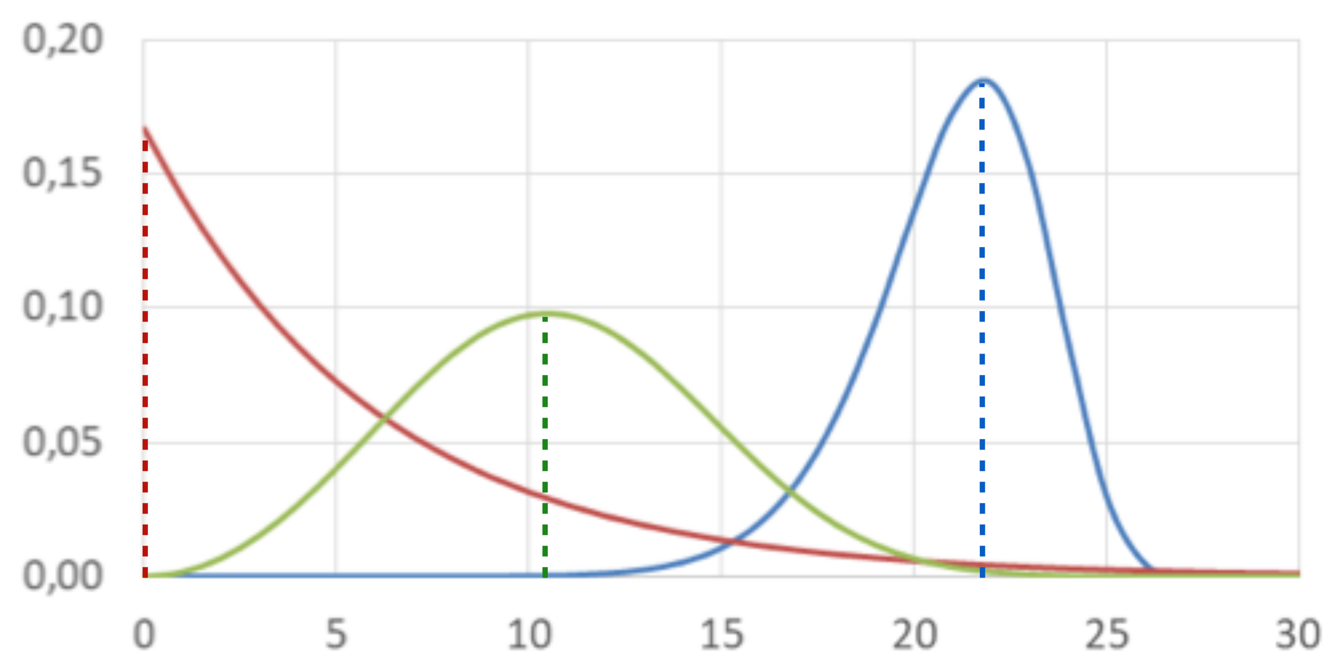
- modus (nejpravděpodobnější hodnota)
- rozpětí ($\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0$),
- mezikvartilová odchylka ($\tilde{x}_{0,75} - \tilde{x}_{0,25}$)
- a další ….

v diskrétním případě: $x_{\mathrm{mod}} = \max\{p_i; i = 1, 2, \ldots\}$

ve spojitém případě: $x_{\mathrm{mod}} = \mathrm{argmax}\{f(x); x \in \mathbf{R}\}$

$$P(X = x_0) = 0$$

$$P(X \in \langle x_0; \mathrm{d}x\,\rangle) \doteq f(x_0)\mathrm{d}x$$



Charakteristiky náhodné veličiny - další …

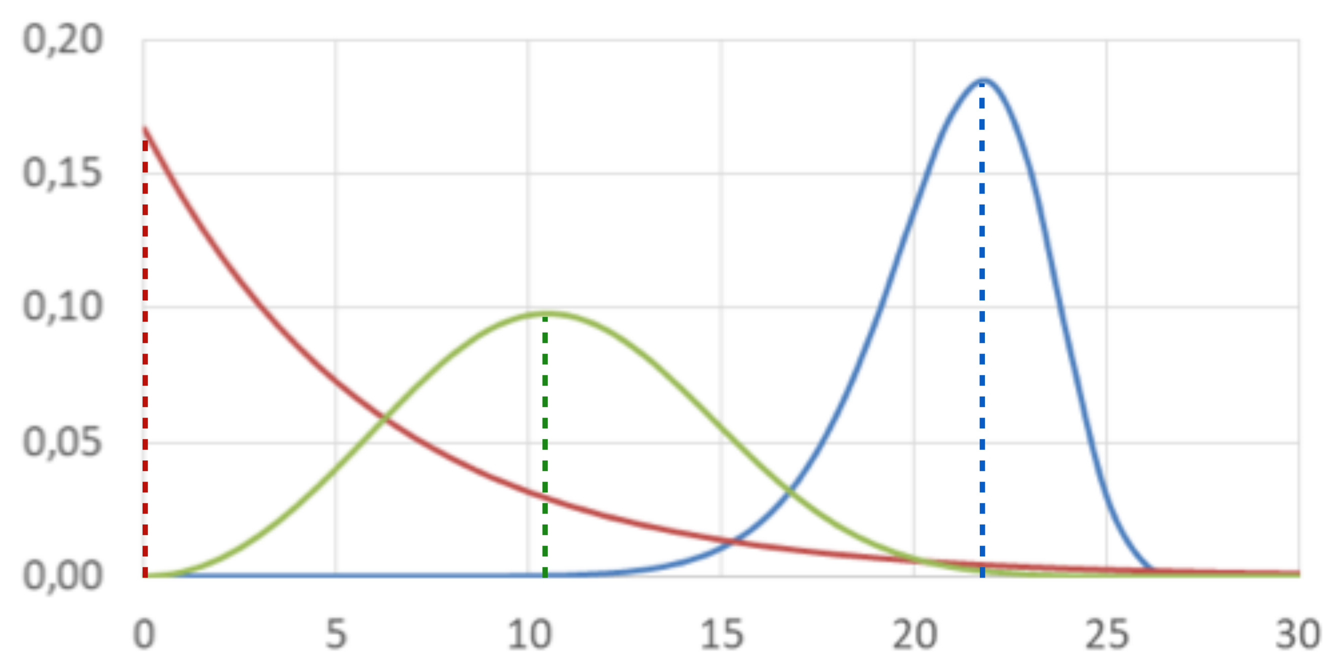
Patří sem například :

- modus (nejpravděpodobnější hodnota)
- rozpětí $(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)$,
- mezikvartilová odchylka $(\tilde{x}_{0,75} - \tilde{x}_{0,25})$
- a další ….

v diskrétním případě: $x_{\mathrm{mod}} = \max\{p_i; i = 1, 2, \ldots\}$

ve spojitém případě: $x_{\mathrm{mod}} = \mathrm{argmax}\{f(x); x \in \mathbf{R}\}$

$$P(X = x_0) = 0$$
$$P(X \in \langle x_0; \mathrm{d}x\rangle) \doteq f(x_0)\mathrm{d}x$$



Charakteristiky náhodné veličiny - …

Charakteristiky podle funkce:

Charakteristiky náhodné veličiny - …

Charakteristiky podle funkce:

- míry polohy - posouvají se s náhodnou veličinou:
  je-li θ mírou polohy veličiny X, potom veličina $X+d$ má míru polohy $\theta+d$
  (patří sem střední hodnota, kvantily, modus, …)

Charakteristiky náhodné veličiny - …

Charakteristiky podle funkce:

- míry polohy - posouvají se s náhodnou veličinou:
  je-li θ mírou polohy veličiny X, potom veličina $X+d$ má míru polohy $\theta+d$
  (patří sem střední hodnota, kvantily, modus, …)

- míry rozptýlenosti (variability) - jsou invariantní vůči posunutí:
  je-li ϑ mírou variability veličiny X, potom je mírou variability i veličiny $X+d$
  (patří sem rozptyl, směrodatná odchylka, různá rozpětí, …)

Charakteristiky náhodné veličiny - …

Charakteristiky podle funkce:

- míry polohy - posouvají se s náhodnou veličinou:
  je-li θ mírou polohy veličiny X, potom veličina $X+d$ má míru polohy $\theta+d$
  (patří sem střední hodnota, kvantily, modus, …)

- míry rozptýlenosti (variability) - jsou invariantní vůči posunutí:
  je-li ϑ mírou variability veličiny X, potom je mírou variability i veličiny $X+d$
  (patří sem rozptyl, směrodatná odchylka, různá rozpětí, …)

- míry symetrie (šikmost)

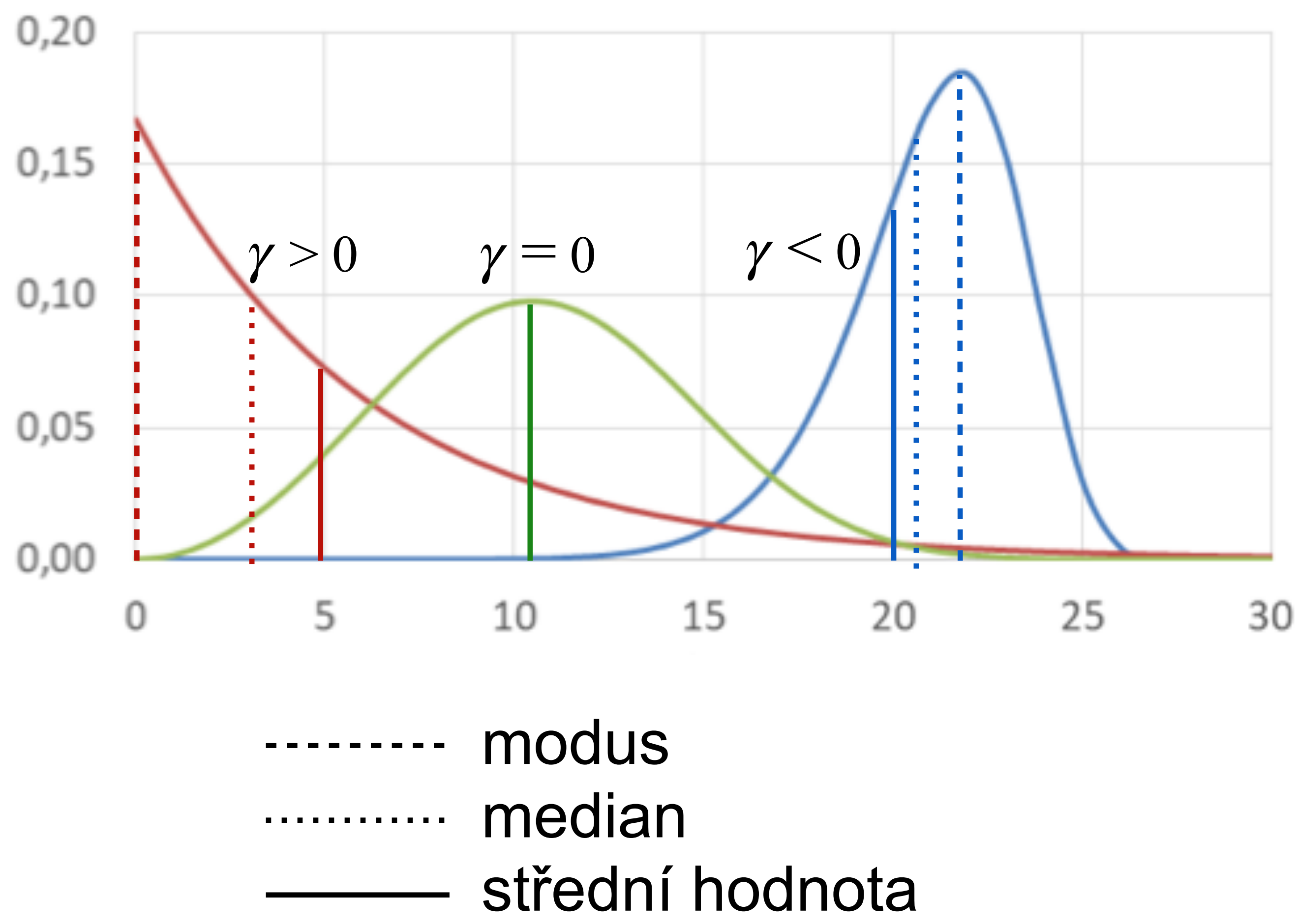
Charakteristiky náhodné veličiny - …

Charakteristiky podle funkce:

- míry polohy - posouvají se s náhodnou veličinou:
  je-li θ mírou polohy veličiny X, potom veličina $X+d$ má míru polohy $\theta+d$
  (patří sem střední hodnota, kvantily, modus, …)

- míry rozptýlenosti (variability) - jsou invariantní vůči posunutí:
  je-li ϑ mírou variability veličiny X, potom je mírou variability i veličiny $X+d$
  (patří sem rozptyl, směrodatná odchylka, různá rozpětí, …)

- míry symetrie (šikmost)



označíme-li šikmost = γ, potom

$\gamma > 0$ – zešikmené zprava (doleva)

$\gamma = 0$ – symetrické

$\gamma < 0$ – zešikmené zleva (doprava)

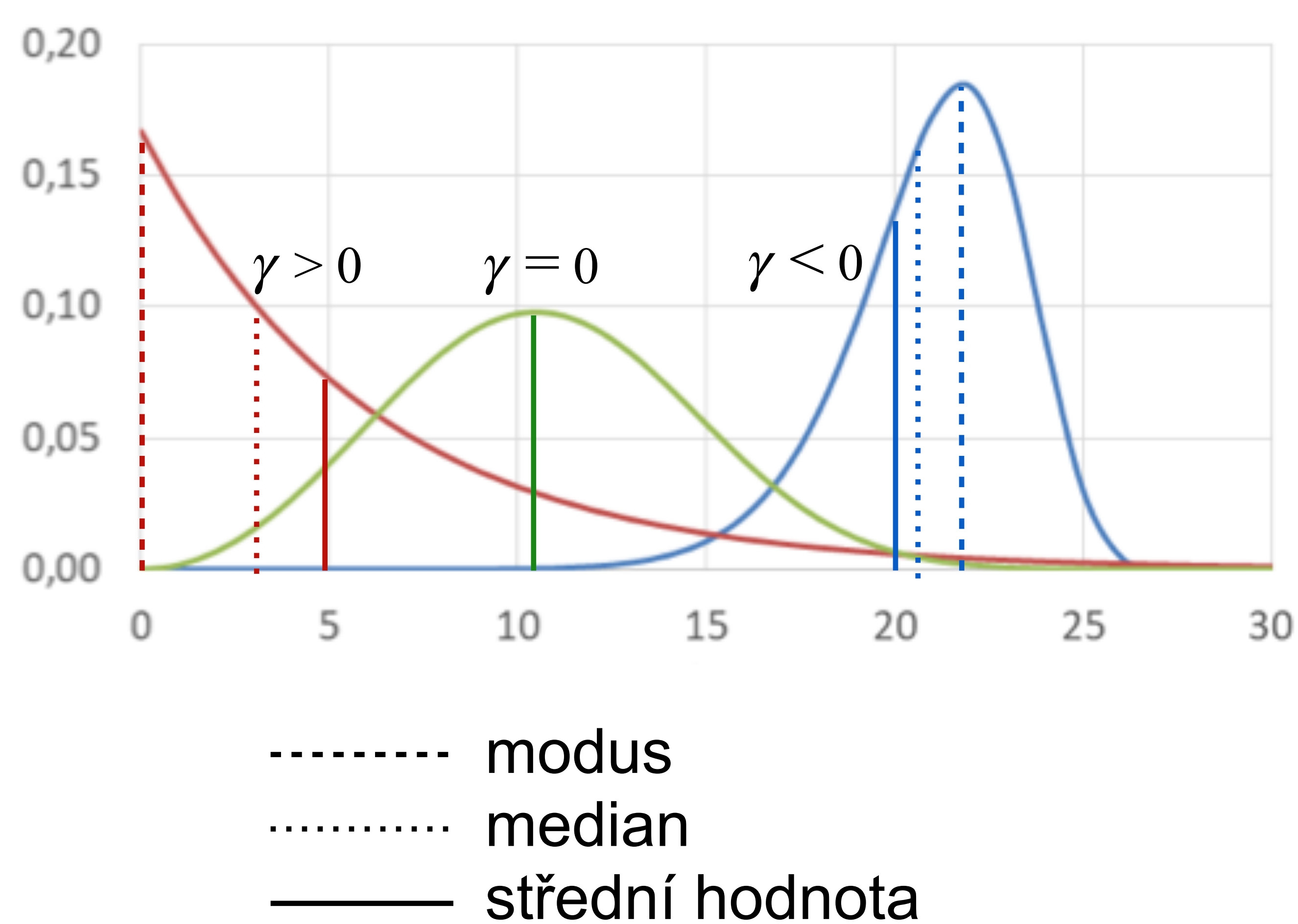
Charakteristiky náhodné veličiny - …

Charakteristiky podle funkce:

- míry polohy - posouvají se s náhodnou veličinou:
  je-li θ mírou polohy veličiny X, potom veličina $X+d$ má míru polohy $\theta+d$
  (patří sem střední hodnota, kvantily, modus, …)

- míry rozptýlenosti (variability) - jsou invariantní vůči posunutí:
  je-li ϑ mírou variability veličiny X, potom je mírou variability i veličiny $X+d$
  (patří sem rozptyl, směrodatná odchylka, různá rozpětí, …)

- míry symetrie (šikmost)



označíme-li šikmost = γ, potom

$\gamma > 0$ – zešikmené zprava (doleva)

$\gamma = 0$ – symetrické

$\gamma < 0$ – zešikmené zleva (doprava)

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

1) Model diskrétního rovnoměrného rozdělení

Experiment, při němž může nastat jeden z n možných výsledků. Předpokládáme, že každý z nich je stejně možný, tedy všechny mají stejnou pravděpodobnost.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

1) Model diskrétního rovnoměrného rozdělení

Experiment, při němž může nastat jeden z n možných výsledků. Předpokládáme, že každý z nich je stejně možný, tedy všechny mají stejnou pravděpodobnost.

$$\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad \mathrm{P}(X = x_i) = 1/n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

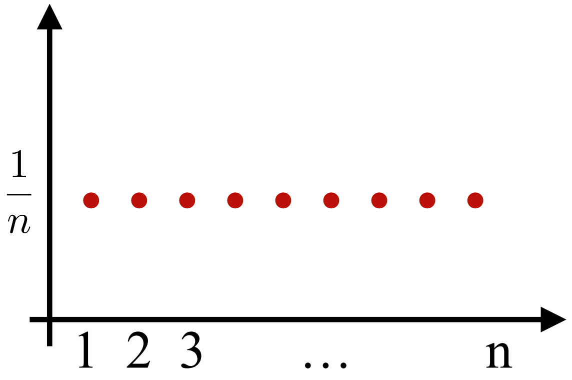
Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

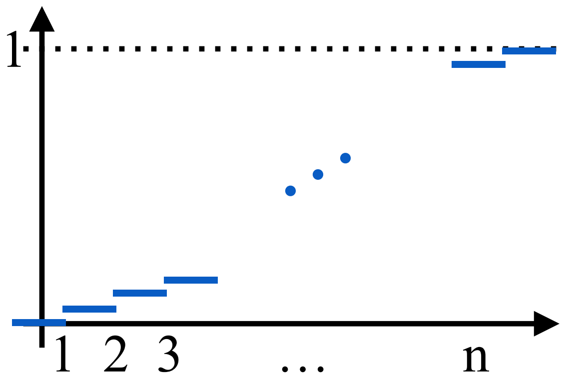
$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

1) Model diskrétního rovnoměrného rozdělení

Experiment, při němž může nastat jeden z n možných výsledků. Předpokládáme, že každý z nich je stejně možný, tedy všechny mají stejnou pravděpodobnost.

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad P(X = x_i) = 1/n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$





Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

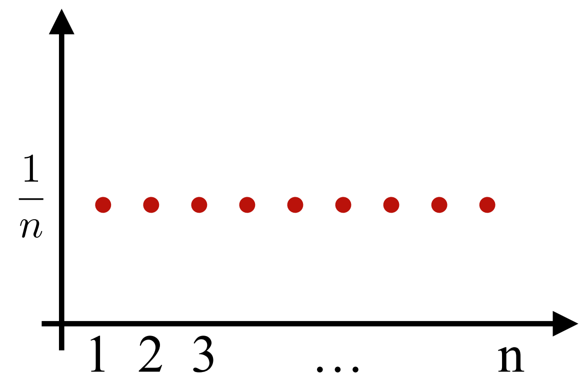
$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

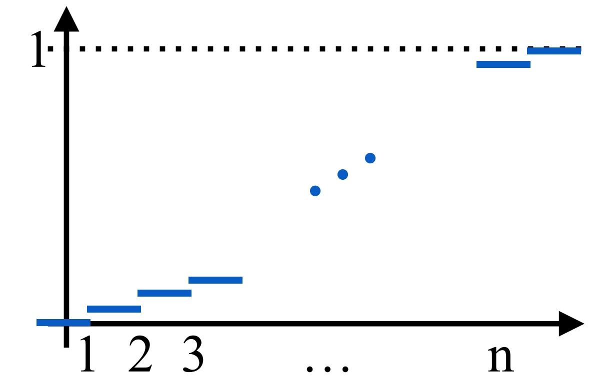
1) Model diskrétního rovnoměrného rozdělení

Experiment, při němž může nastat jeden z n možných výsledků. Předpokládáme, že každý z nich je stejně možný, tedy všechny mají stejnou pravděpodobnost.

$\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad \mathrm{P}(X = x_i) = 1/n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$





Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

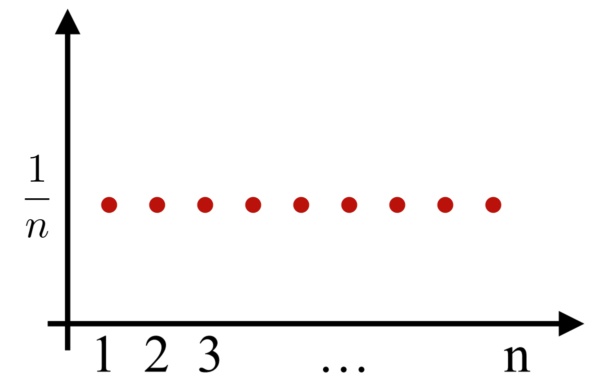
1) Model diskrétního rovnoměrného rozdělení

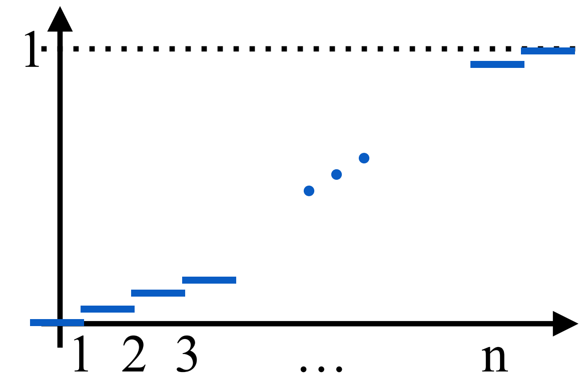
Experiment, při němž může nastat jeden z n možných výsledků. Předpokládáme, že každý z nich je stejně možný, tedy všechny mají stejnou pravděpodobnost.

$\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad P(X = x_i) = 1/n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$





Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

1) Model diskrétního rovnoměrného rozdělení

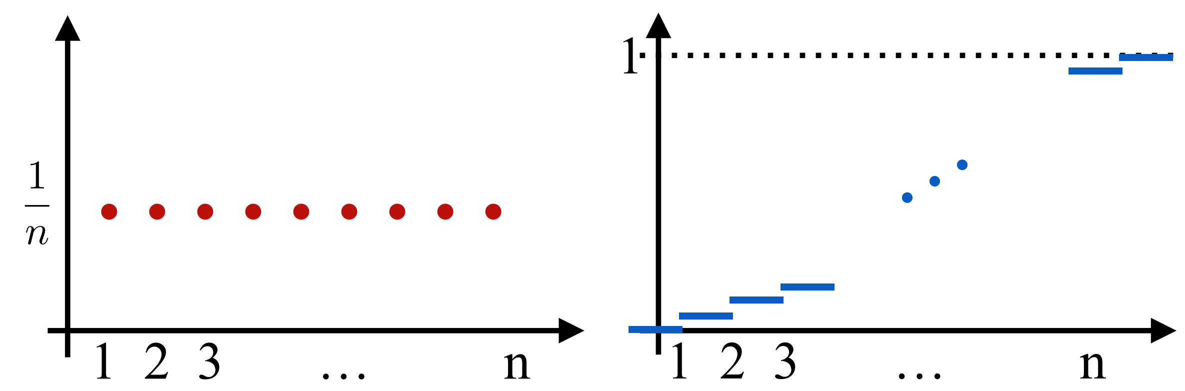
Experiment, při němž může nastat jeden z n možných výsledků. Předpokládáme, že každý z nich je stejně možný, tedy všechny mají stejnou pravděpodobnost.

$\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\quad X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\quad \mathrm{P}(X = x_i) = 1/n$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n.$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$X \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow E(X) = \frac{n+1}{2}$$



Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

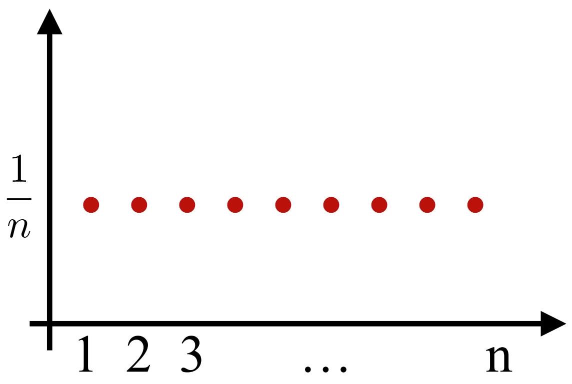
1) Model diskrétního rovnoměrného rozdělení

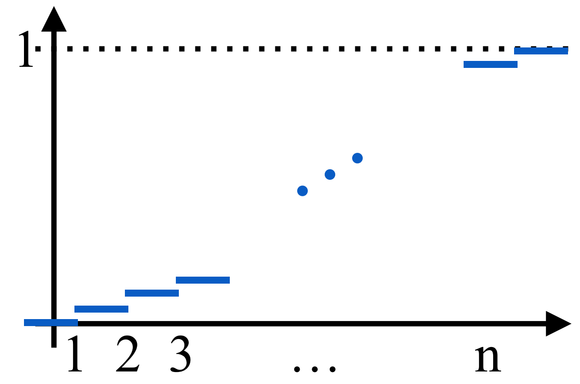
Experiment, při němž může nastat jeden z n možných výsledků. Předpokládáme, že každý z nich je stejně možný, tedy všechny mají stejnou pravděpodobnost.

$\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad \mathrm{P}(X = x_i) = 1/n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$





$X \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

$$E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

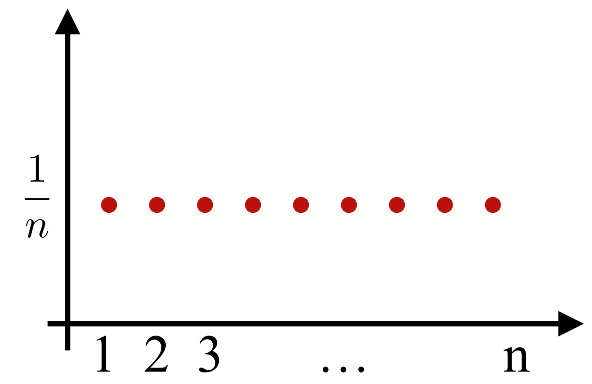
1) Model diskrétního rovnoměrného rozdělení

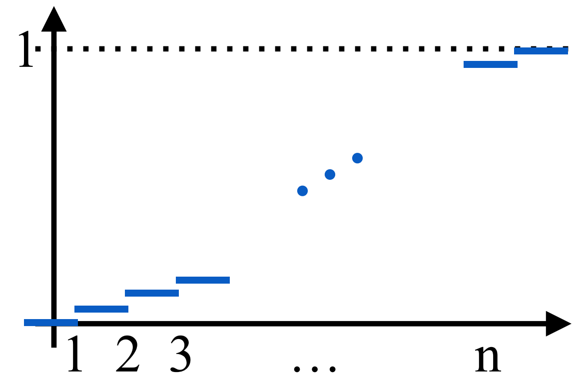
Experiment, při němž může nastat jeden z n možných výsledků. Předpokládáme, že každý z nich je stejně možný, tedy všechny mají stejnou pravděpodobnost.

$\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad P(X = x_i) = 1/n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$





$$X \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

Pravděpodobnostní model = popis experimentu, při němž se realizuje náhodná veličina (jedna či více) s nějakým rozdělením pravděpodobnosti

$\Rightarrow \quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ …. pravděpodobnostní prostor

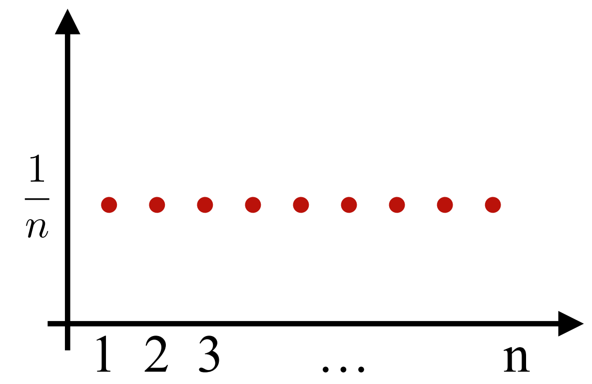
1) Model diskrétního rovnoměrného rozdělení

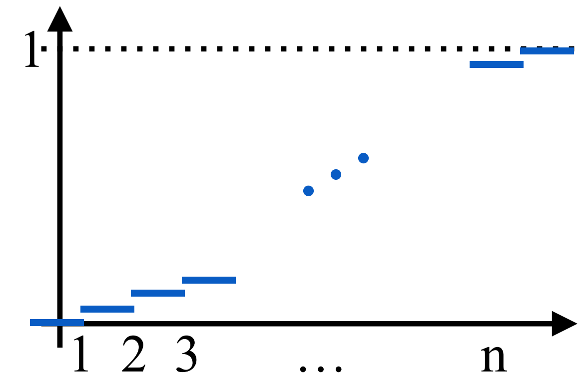
Experiment, při němž může nastat jeden z n možných výsledků. Předpokládáme, že každý z nich je stejně možný, tedy všechny mají stejnou pravděpodobnost.

$\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad P(X = x_i) = 1/n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$





$$X \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}$, $X \in \{0, 1\}$, $\mathrm{P}(X = 1) = p$ => $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}$, $X \in \{0, 1\}$, $\mathrm{P}(X = 1) = p$ => $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$

$$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}$, $X \in \{0, 1\}$, $\mathrm{P}(X = 1) = p$ => $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$ $\qquad E(X^2) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}$, $X \in \{0, 1\}$, $\mathrm{P}(X = 1) = p$ => $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$ $\qquad E(X^2) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$

$Var(X) = E(X^2) - (E(x))^2 = p - p^2 = p(1-p)$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}, \quad X \in \{0, 1\}, \quad \mathrm{P}(X = 1) = p \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \qquad E(X^2) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$

$Var(X) = E(X^2) - (E(x))^2 = p - p^2 = p(1-p)$

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž opakujeme n-krát nezávisle na sobě alternativní pokus za stejných podmínek. Zajímá nás počet „úspěchů“, tedy kolikrát nastal výsledek „1“.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}$, $X \in \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p$ => $P(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$ $E(X^2) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$

$Var(X) = E(X^2) - (E(x))^2 = p - p^2 = p(1-p)$

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž opakujeme n-krát nezávisle na sobě alternativní pokus za stejných podmínek. Zajímá nás počet „úspěchů“, tedy kolikrát nastal výsledek „1“.

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}$, $X \in \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p$ => $P(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$ $\qquad E(X^2) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(x))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž opakujeme n-krát nezávisle na sobě alternativní pokus za stejných podmínek. Zajímá nás počet „úspěchů“, tedy kolikrát nastal výsledek „1“.

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}, \quad X \in \{0, 1\}, \quad \mathrm{P}(X = 1) = p \quad => \quad \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \qquad E(X^2) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$

$Var(X) = E(X^2) - (E(x))^2 = p - p^2 = p(1-p)$

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž opakujeme n-krát nezávisle na sobě alternativní pokus za stejných podmínek. Zajímá nás počet „úspěchů“, tedy kolikrát nastal výsledek „1“.

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\boxed{P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.}$$

$Y \sim Bin(n, p)$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}$, $X \in \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p$ => $P(X = 0) = 1 - p$

$$E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \qquad E(X^2) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(x))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž opakujeme n-krát nezávisle na sobě alternativní pokus za stejných podmínek. Zajímá nás počet „úspěchů“, tedy kolikrát nastal výsledek „1“.

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\boxed{P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.} \qquad Y \sim Bin(n, p)$$

Cvičení: 1) Ukažte, že součet těchto pravděpodobností je roven jedné.
2) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl veličiny Y podle definice.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

2) Alternativní model (model alternativního rozdělení)

Experiment, při němž může nastat pouze jeden ze dvou možných výsledků.

$\Omega = \{a_1, a_2\}, \quad X \in \{0, 1\}, \quad \mathrm{P}(X = 1) = p \quad => \quad \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$

$$E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \qquad E(X^2) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(x))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž opakujeme n-krát nezávisle na sobě alternativní pokus za stejných podmínek. Zajímá nás počet „úspěchů“, tedy kolikrát nastal výsledek „1“.

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $\quad Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\boxed{P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.} \qquad Y \sim Bin(n, p)$$

Cvičení: 1) Ukažte, že součet těchto pravděpodobností je roven jedné.
2) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl veličiny Y podle definice.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np \qquad Var(Y) = E(Y - np)^2 = np(1-p)$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np \qquad Var(Y) = E(Y-np)^2 = np(1-p)$$

relativní četnost kladných výsledků = aritmetický průměr pozorování $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np \qquad Var(Y) = E(Y - np)^2 = np(1-p)$$

relativní četnost kladných výsledků = aritmetický průměr pozorování $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}np = p$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np \qquad Var(Y) = E(Y - np)^2 = np(1-p)$$

relativní četnost kladných výsledků = aritmetický průměr pozorování $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}np = p$$

$$Var(\bar{X}) = E(\bar{X} - p)^2 = \frac{p(1-p)}{n}$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

absolutní četnost kladných výsledků = součet pozorování $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np \qquad Var(Y) = E(Y - np)^2 = np(1-p)$$

relativní četnost kladných výsledků = aritmetický průměr pozorování $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}np = p$$

$$Var(\bar{X}) = E(\bar{X} - p)^2 = \frac{p(1-p)}{n}$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek vrátíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolikrát vybereme prvek s danou vlastností.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek vrátíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolikrát vybereme prvek s danou vlastností.

$$\text{P(vybereme prvek s danou vlastností)} = \frac{M}{N}, \quad Y = \text{počet vybraných prvků s danou vlastností}$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek vrátíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolikrát vybereme prvek s danou vlastností.

$$\text{P(vybereme prvek s danou vlastností)} = \frac{M}{N}\,, \quad Y = \text{počet vybraných prvků s danou vlastností}$$

$$P(Y = k) = \binom{N}{n} \left(\frac{M}{N}\right)^{k} \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

počet k-tic v n prvcích

k-krát vybereme prvek s pravděpodobností $\frac{M}{N}$

(n-k)-krát vybereme prvek s pravděpodobností (1- $\frac{M}{N}$)

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek vrátíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolikrát vybereme prvek s danou vlastností.

$$\text{P(vybereme prvek s danou vlastností)} = \frac{M}{N}\,, \quad Y = \text{počet vybraných prvků s danou vlastností}$$

$$P(Y = k) = \binom{N}{n} \left(\frac{M}{N}\right)^{k} \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \qquad Y \sim Bin\left(n, \frac{M}{N}\right)$$

počet k-tic v n prvcích

k-krát vybereme prvek s pravděpodobností $\frac{M}{N}$

(n-k)-krát vybereme prvek s pravděpodobností (1- $\frac{M}{N}$)

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek vrátíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolikrát vybereme prvek s danou vlastností.

P(vybereme prvek s danou vlastností) $= \dfrac{M}{N}$, $Y =$ počet vybraných prvků s danou vlastností

$$P(Y = k) = \binom{N}{n} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \qquad\qquad Y \sim Bin\Big(n, \frac{M}{N}\Big)$$

počet k-tic v n prvcích

k-krát vybereme prvek s pravděpodobností $\frac{M}{N}$

(n-k)-krát vybereme prvek s pravděpodobností (1- $\frac{M}{N}$)

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek vrátíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolikrát vybereme prvek s danou vlastností.

$$\mathrm{P}(\text{vybereme prvek s danou vlastností}) = \frac{M}{N}, \quad Y = \text{počet vybraných prvků s danou vlastností}$$

$$P(Y = k) = \binom{N}{n}\left(\frac{M}{N}\right)^{k}\left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \qquad Y \sim Bin\left(n, \frac{M}{N}\right)$$

Příklad 1: Házení kostkou: házíme třemi hracími kostkami současně (nebo jednou třikrát po sobě). Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky?

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek vrátíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolikrát vybereme prvek s danou vlastností.

$$\mathrm{P}(\text{vybereme prvek s danou vlastností}) = \frac{M}{N}, \quad Y = \text{počet vybraných prvků s danou vlastností}$$

$$P(Y = k) = \binom{N}{n} \left(\frac{M}{N}\right)^{k} \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \qquad Y \sim Bin\left(n, \frac{M}{N}\right)$$

Příklad 1: Házení kostkou: házíme třemi hracími kostkami současně (nebo jednou třikrát po sobě). Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky?

Příklad 2: Kontrola jakosti: Z výrobní linky odebíráme nezávisle na sobě 10 výrobků. Víme, že v produkci jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru vybereme alespoň 1 zmetek?

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek vrátíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolikrát vybereme prvek s danou vlastností.

$$\mathrm{P}(\text{vybereme prvek s danou vlastností}) = \frac{M}{N}, \quad Y = \text{počet vybraných prvků s danou vlastností}$$

$$P(Y = k) = \binom{N}{n} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \qquad Y \sim Bin\left(n, \frac{M}{N}\right)$$

Příklad 1: Házení kostkou: házíme třemi hracími kostkami současně (nebo jednou třikrát po sobě). Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky?

Příklad 2: Kontrola jakosti: Z výrobní linky odebíráme nezávisle na sobě 10 výrobků. Víme, že v produkci jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru vybereme alespoň 1 zmetek?

Příklad 3: Losování zaměstnance: každý den v týdnu losujeme jednoho z 15ti zaměstnanců, který provede odpolední úklid. Mezi zaměstnanci 10 žen. Jaká je pravděpodobnost, že v týdnu vybereme samé ženy?

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

3) Bernoulliho model (model binomického rozdělení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek vrátíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolikrát vybereme prvek s danou vlastností.

$$\mathrm{P(vybereme\ prvek\ s\ danou\ vlastností)} = \frac{M}{N}, \quad Y = \text{počet vybraných prvků s danou vlastností}$$

$$P(Y = k) = \binom{N}{n} \left(\frac{M}{N}\right)^{k} \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \qquad Y \sim Bin\left(n, \frac{M}{N}\right)$$

Příklad 1: Házení kostkou: házíme třemi hracími kostkami současně (nebo jednou třikrát po sobě). Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky?

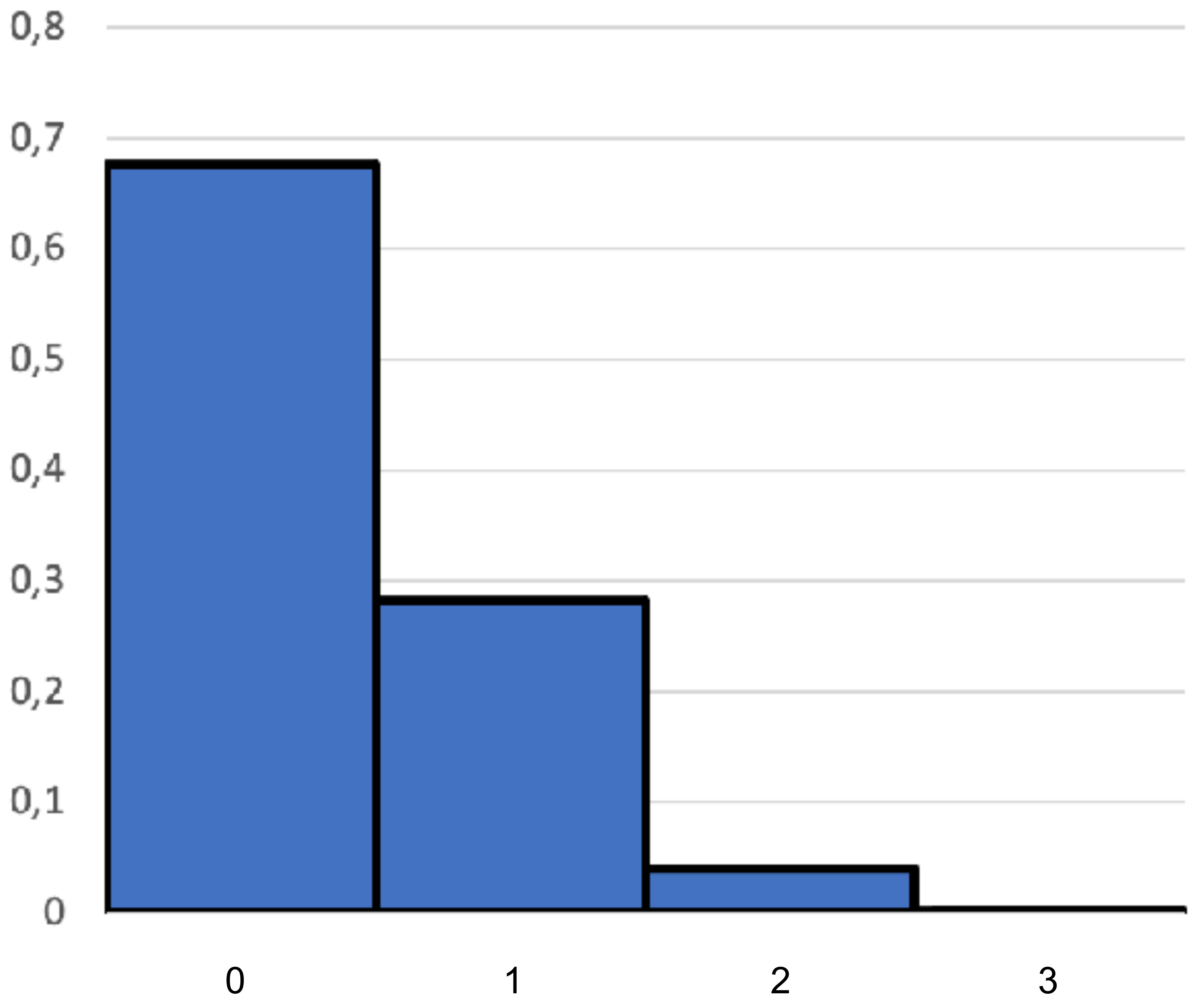
Příklad 2: Kontrola jakosti: Z výrobní linky odebíráme nezávisle na sobě 10 výrobků. Víme, že v produkci jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru vybereme alespoň 1 zmetek?

Příklad 3: Losování zaměstnance: každý den v týdnu losujeme jednoho z 15ti zaměstnanců, který provede odpolední úklid. Mezi zaměstnanci 10 žen. Jaká je pravděpodobnost, že v týdnu vybereme samé ženy?

Příklad 1: Házení kostkou: házíme třemi hracími kostkami současně (nebo jednou třikrát po sobě). Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky?

0 1 2 3

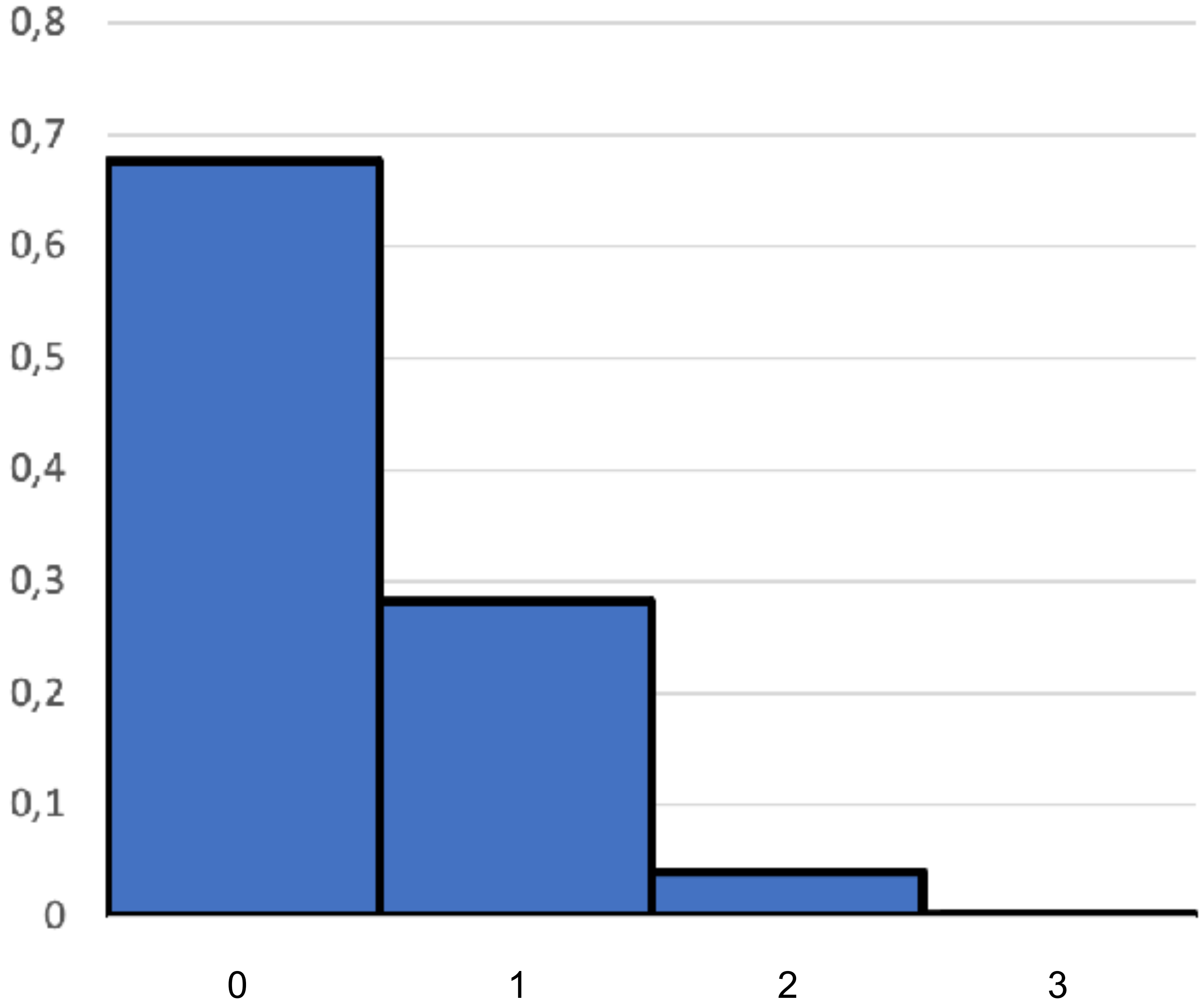
Příklad 1: Házení kostkou: házíme třemi hracími kostkami současně (nebo jednou třikrát po sobě). Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky?



X = počet šestek

k	P(X=k)
0	0,6757983
1	0,2828923
2	0,0394733
3	0,001836

Příklad 1: Házení kostkou: házíme třemi hracími kostkami současně (nebo jednou třikrát po sobě). Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky?



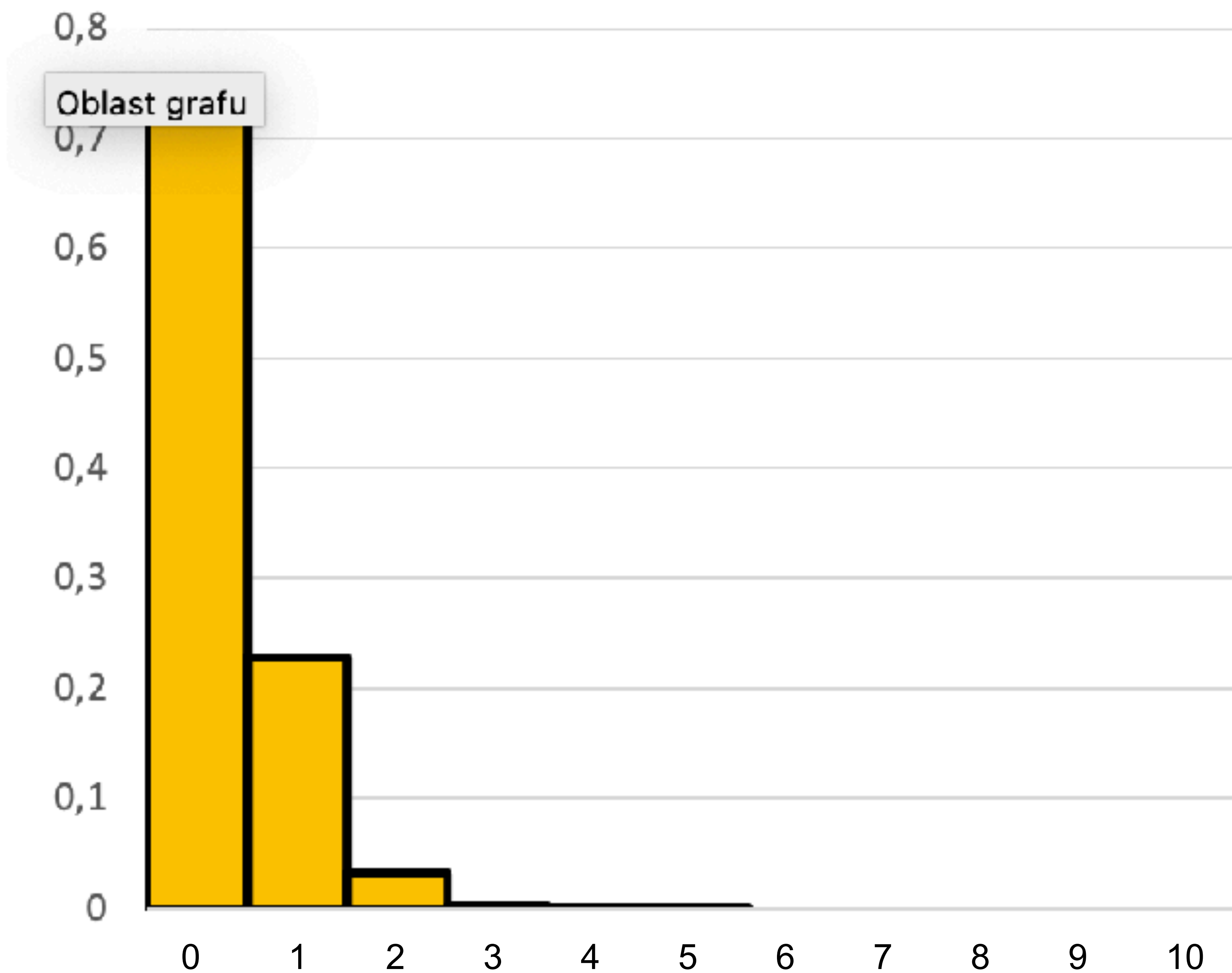
X = počet šestek

k	P(X=k)
0	0,6757983
1	0,2828923
2	0,0394733
3	0,001836

Příklad 2: Kontrola jakosti: Z výrobní linky odebíráme nezávisle na sobě 10 výrobků. Víme, že v produkci jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru vybereme alespoň 1 zmetek?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

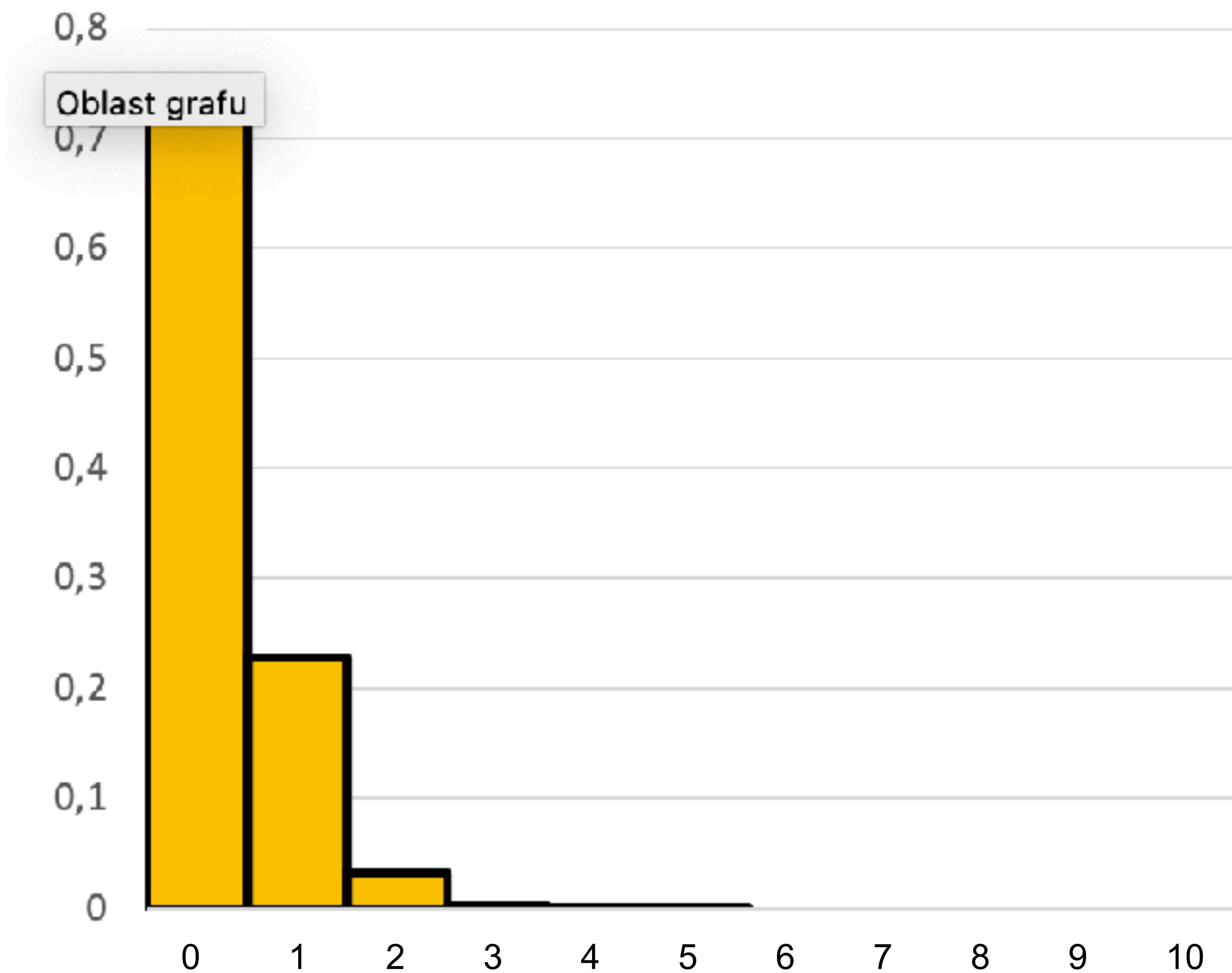
Příklad 2: Kontrola jakosti: Z výrobní linky odebíráme nezávisle na sobě 10 výrobků. Víme, že v produkci jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru vybereme alespoň 1 zmetek?



X = počet vybraných zmetků

k	P(X=k)
0	0,7374241
1	0,2280693
2	0,0317416
3	0,0026179
4	0,0001417
5	5,259E-06
6	1,355E-07
7	2,395E-09
8	2,778E-11
9	1,909E-13
10	5,905E-16

Příklad 2: Kontrola jakosti: Z výrobní linky odebíráme nezávisle na sobě 10 výrobků. Víme, že v produkci jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru vybereme alespoň 1 zmetek?



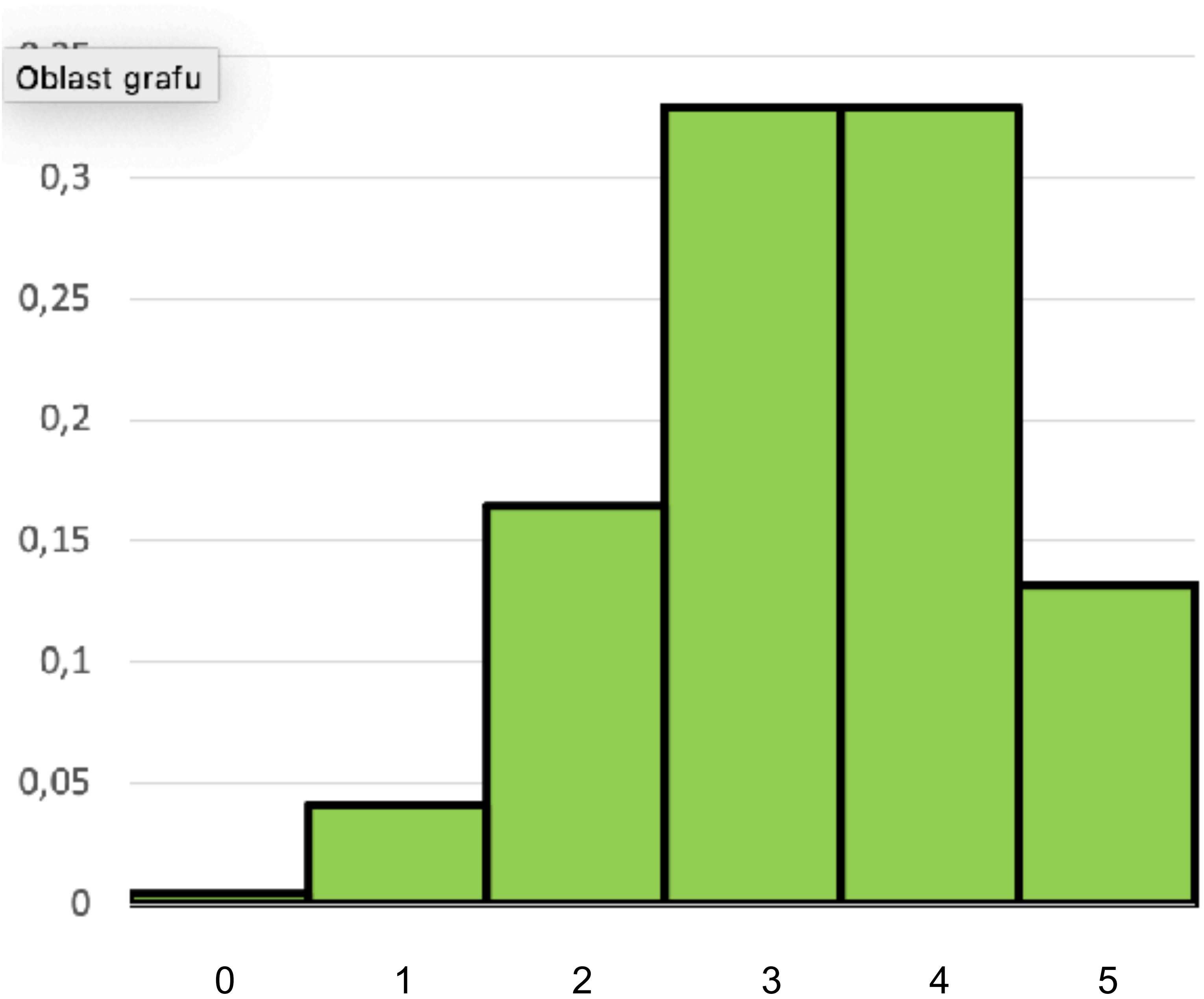
X = počet vybraných zmetků

k	P(X=k)
0	0,7374241
1	0,2280693
2	0,0317416
3	0,0026179
4	0,0001417
5	5,259E-06
6	1,355E-07
7	2,395E-09
8	2,778E-11
9	1,909E-13
10	5,905E-16

Příklad 3: Losování zaměstnance: každý den v týdnu losujeme jednoho z 15ti zaměstnanců, který provede odpolední úklid. Mezi zaměstnanci 10 žen. Jaká je pravděpodobnost, že v týdnu vybereme samé ženy?

0 1 2 3 4 5

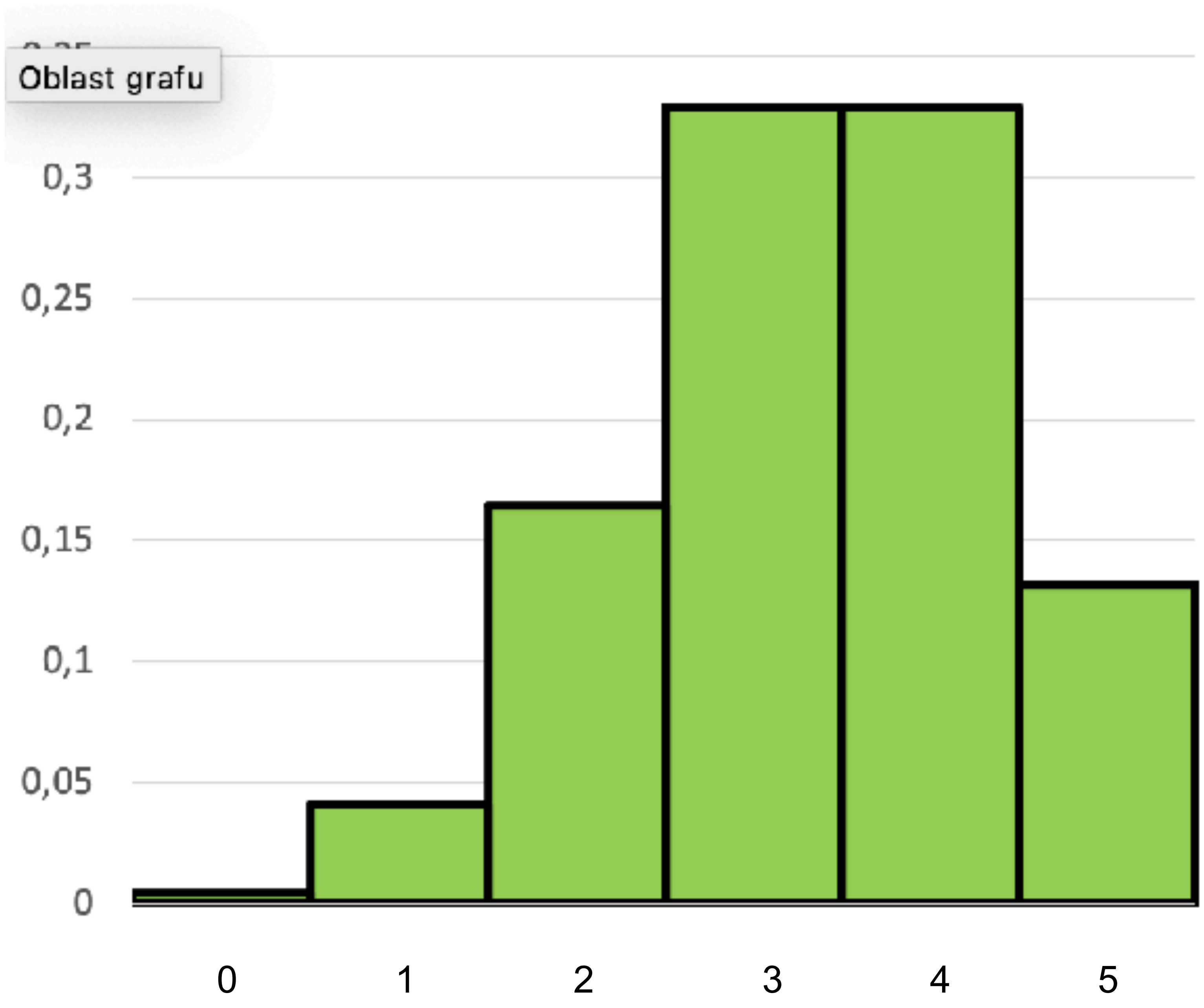
Příklad 3: Losování zaměstnance: každý den v týdnu losujeme jednoho z 15ti zaměstnanců, který provede odpolední úklid. Mezi zaměstnanci 10 žen. Jaká je pravděpodobnost, že v týdnu vybereme samé ženy?



X = počet vybraných žen

k	P(X=k)
0	0,0041152
1	0,0411523
2	0,1646091
3	0,3292181
4	0,3292181
5	0,1316872

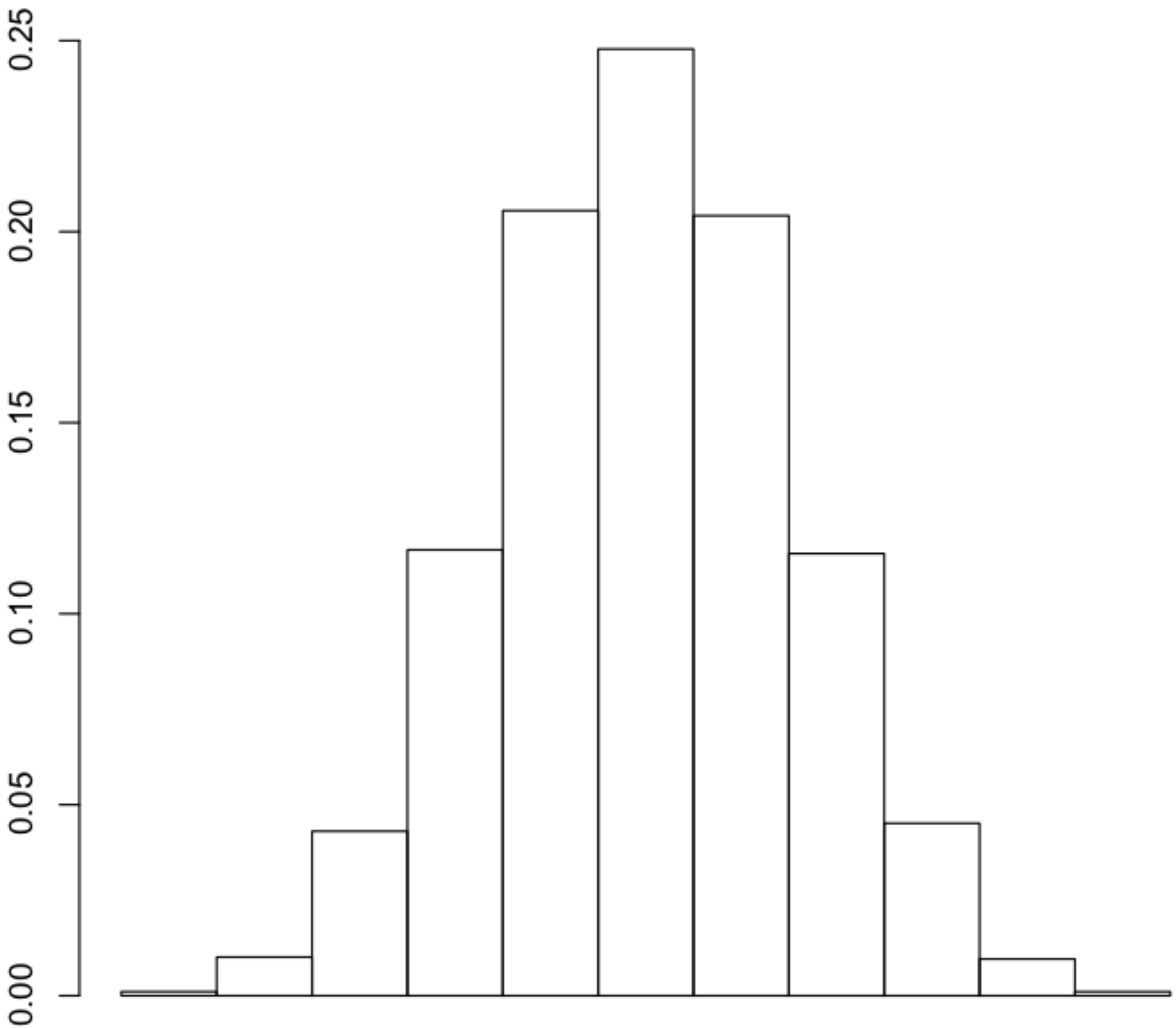
Příklad 3: Losování zaměstnance: každý den v týdnu losujeme jednoho z 15ti zaměstnanců, který provede odpolední úklid. Mezi zaměstnanci 10 žen. Jaká je pravděpodobnost, že v týdnu vybereme samé ženy?



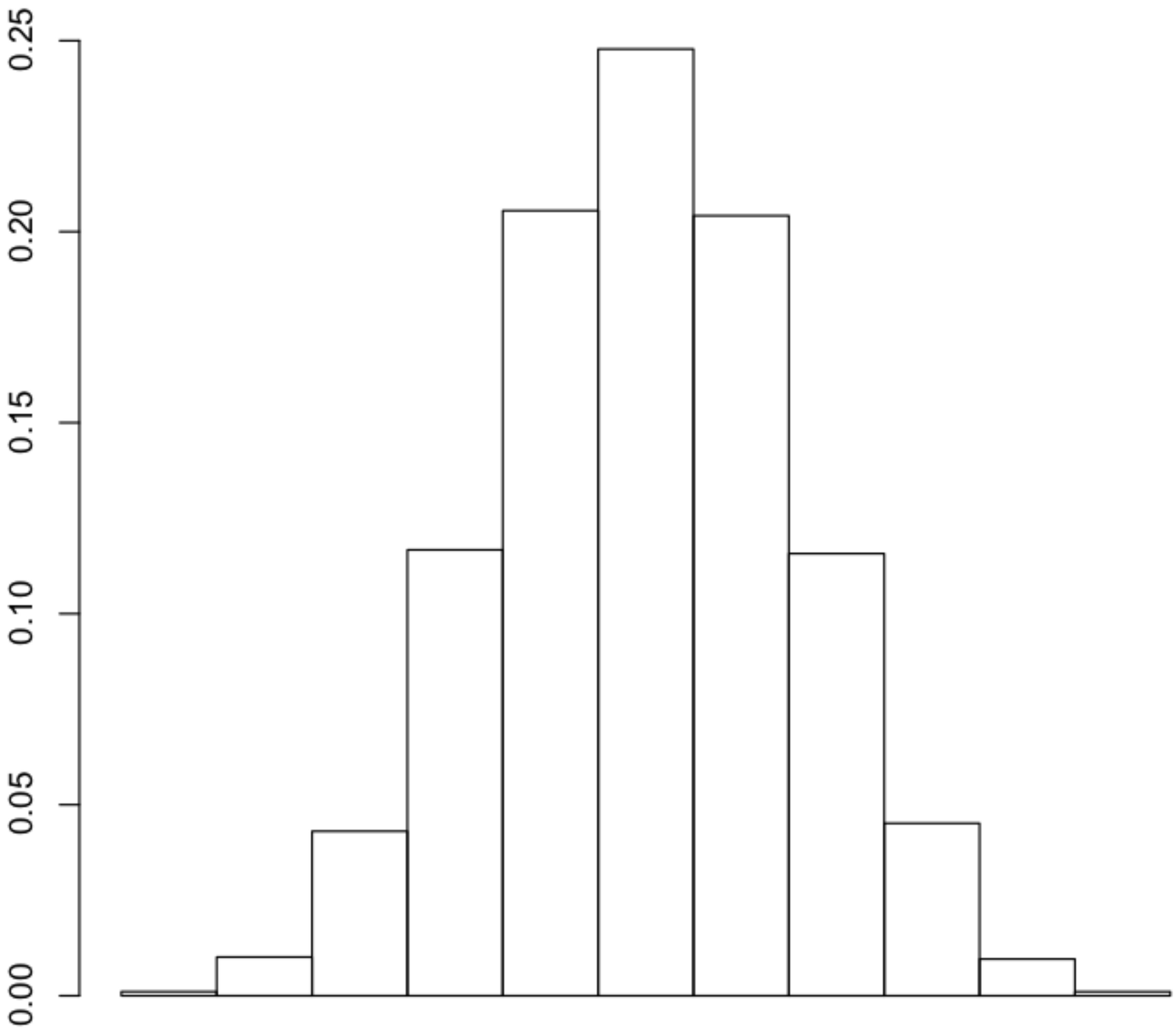
X = počet vybraných žen

k	P(X=k)
0	0,0041152
1	0,0411523
2	0,1646091
3	0,3292181
4	0,3292181
5	0,1316872

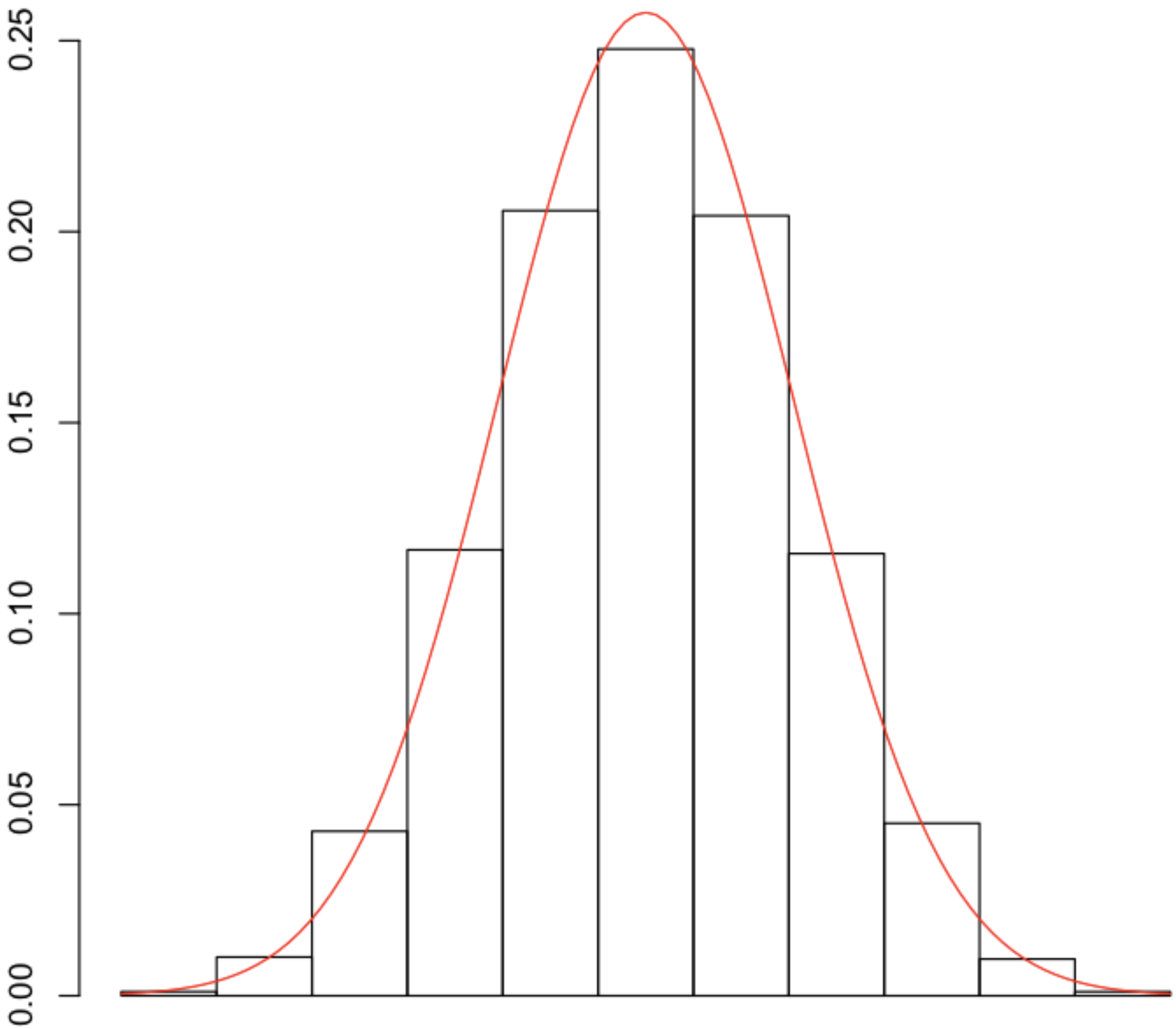
Binomické rozdělení lze pro velká n a relativně malá k aproximovat spojitým normálním rozdělením



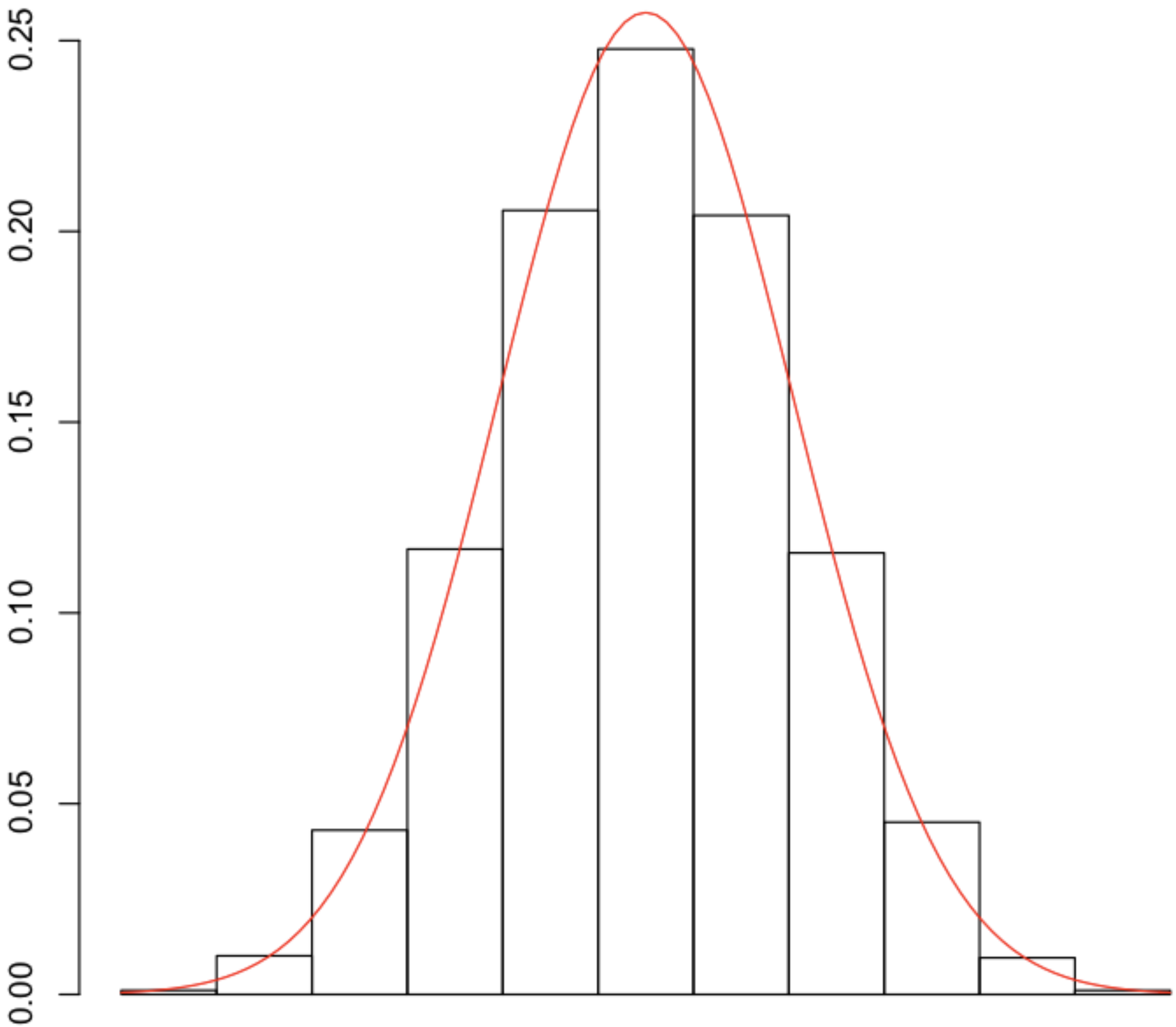
Binomické rozdělení lze pro velká n a relativně malá k aproximovat spojitým normálním rozdělením



Binomické rozdělení lze pro velká n a relativně malá k aproximovat spojitým normálním rozdělením



Binomické rozdělení lze pro velká n a relativně malá k aproximovat spojitým normálním rozdělením



Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

k prvků s danou vlastností z celkového počtu M můžeme vybrat celkem $\binom{M}{k}$ způsoby

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

k prvků s danou vlastností z celkového počtu M můžeme vybrat celkem $\binom{M}{k}$ způsoby

zbylých n-k prvků bez této vlastnost můžeme vybrat celkem $\binom{N-M}{n-k}$ způsoby

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

k prvků s danou vlastností z celkového počtu M můžeme vybrat celkem $\binom{M}{k}$ způsoby

zbylých n-k prvků bez této vlastnost můžeme vybrat celkem $\binom{N-M}{n-k}$ způsoby

celkový počet možných n výběrů z N prvků je $\binom{N}{n}$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

k prvků s danou vlastností z celkového počtu M můžeme vybrat celkem $\binom{M}{k}$ způsoby

zbylých n-k prvků bez této vlastnost můžeme vybrat celkem $\binom{N-M}{n-k}$ způsoby

celkový počet možných n výběrů z N prvků je $\binom{N}{n}$

Tedy: $$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Hypergeometrické rozdělení
s parametry N, M, n.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

k prvků s danou vlastností z celkového počtu M můžeme vybrat celkem $\binom{M}{k}$ způsoby

zbylých n-k prvků bez této vlastnost můžeme vybrat celkem $\binom{N-M}{n-k}$ způsoby

celkový počet možných n výběrů z N prvků je $\binom{N}{n}$

Tedy: $$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ $$N = 1, 2, \ldots, \quad M \leq N, \quad n \leq N,$$

Hypergeometrické rozdělení
s parametry N, M, n.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

k prvků s danou vlastností z celkového počtu M můžeme vybrat celkem $\binom{M}{k}$ způsoby

zbylých n-k prvků bez této vlastnost můžeme vybrat celkem $\binom{N-M}{n-k}$ způsoby

celkový počet možných n výběrů z N prvků je $\binom{N}{n}$

Tedy: $$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$N=1,2,\ldots,\quad M\le N,\quad n\le N,$$
$$\max\{\,0,\,n+M-N\,\}\le k\le\min\{\,n,\,M\,\}$$

Hypergeometrické rozdělení
s parametry N, M, n.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

k prvků s danou vlastností z celkového počtu M můžeme vybrat celkem $\binom{M}{k}$ způsoby

zbylých n-k prvků bez této vlastnost můžeme vybrat celkem $\binom{N-M}{n-k}$ způsoby

celkový počet možných n výběrů z N prvků je $\binom{N}{n}$

Tedy: $$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$N = 1, 2, \ldots, \quad M \leq N, \quad n \leq N,$$

$$\max\{\,0,\ n + M - N\,\} \leq k \leq \min\{\,n,\ M\,\}$$

$$E(X) = n\frac{M}{N}$$

Hypergeometrické rozdělení
s parametry N, M, n.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

k prvků s danou vlastností z celkového počtu M můžeme vybrat celkem $\binom{M}{k}$ způsoby

zbylých n-k prvků bez této vlastnost můžeme vybrat celkem $\binom{N-M}{n-k}$ způsoby

celkový počet možných n výběrů z N prvků je $\binom{N}{n}$

Tedy: $$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$N = 1, 2, \ldots, \quad M \leq N, \quad n \leq N,$$
$$\max\{\,0,\, n + M - N\,\} \leq k \leq \min\{\,n,\, M\,\}$$

$$E(X) = n\frac{M}{N}$$

$$Var(X) = \frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$$

Hypergeometrické rozdělení
s parametry N, M, n.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Experiment, při němž z množiny N prvků, mezi nimiž je M prvků s určitou vlastností, vybíráme náhodně postupně n prvků tak, že po každém výběru vybraný prvek nevracíme zpět mezi ostatní. Zajímá nás kolik prvků s danou vlastností vybereme.

k prvků s danou vlastností z celkového počtu M můžeme vybrat celkem $\binom{M}{k}$ způsoby

zbylých n-k prvků bez této vlastnost můžeme vybrat celkem $\binom{N-M}{n-k}$ způsoby

celkový počet možných n výběrů z N prvků je $\binom{N}{n}$

Tedy: $$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$N = 1, 2, \ldots, \quad M \le N, \quad n \le N,$$
$$\max\{\,0,\ n+M-N\,\} \le k \le \min\{\,n,\ M\,\}$$

$$E(X) = n\frac{M}{N}$$

$$Var(X) = \frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$$

Hypergeometrické rozdělení
s parametry N, M, n.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Příklad 4: Sportka: 49 čísel, ze kterých 6 vyhrává (jsou vytaženy). Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 6ti čísel vybereme 4 z tažených?

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Příklad 4: Sportka: 49 čísel, ze kterých 6 vyhrává (jsou vytaženy). Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 6ti čísel vybereme 4 z tažených?

Příklad 5: Kontrola jakosti: 1000 výrobků, mezi nimi jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 10 výrobků vybereme alespoň 1 zmetek?

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Příklad 4: Sportka: 49 čísel, ze kterých 6 vyhrává (jsou vytaženy). Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 6ti čísel vybereme 4 z tažených?

Příklad 5: Kontrola jakosti: 1000 výrobků, mezi nimi jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 10 výrobků vybereme alespoň 1 zmetek?

Příklad 6: Výběr uchazečů o práci: z 15ti uchazečů o zaměstnání, mezi kterými je 10 žen, vybíráme anonymně podle výsledku testu 5 osob. Jaká je pravděpodobnost, že to budou samé ženy?

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny - různé modely

4) Hypergeometrický model (model výběru bez vracení)

Příklad 4: Sportka: 49 čísel, ze kterých 6 vyhrává (jsou vytaženy). Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 6ti čísel vybereme 4 z tažených?

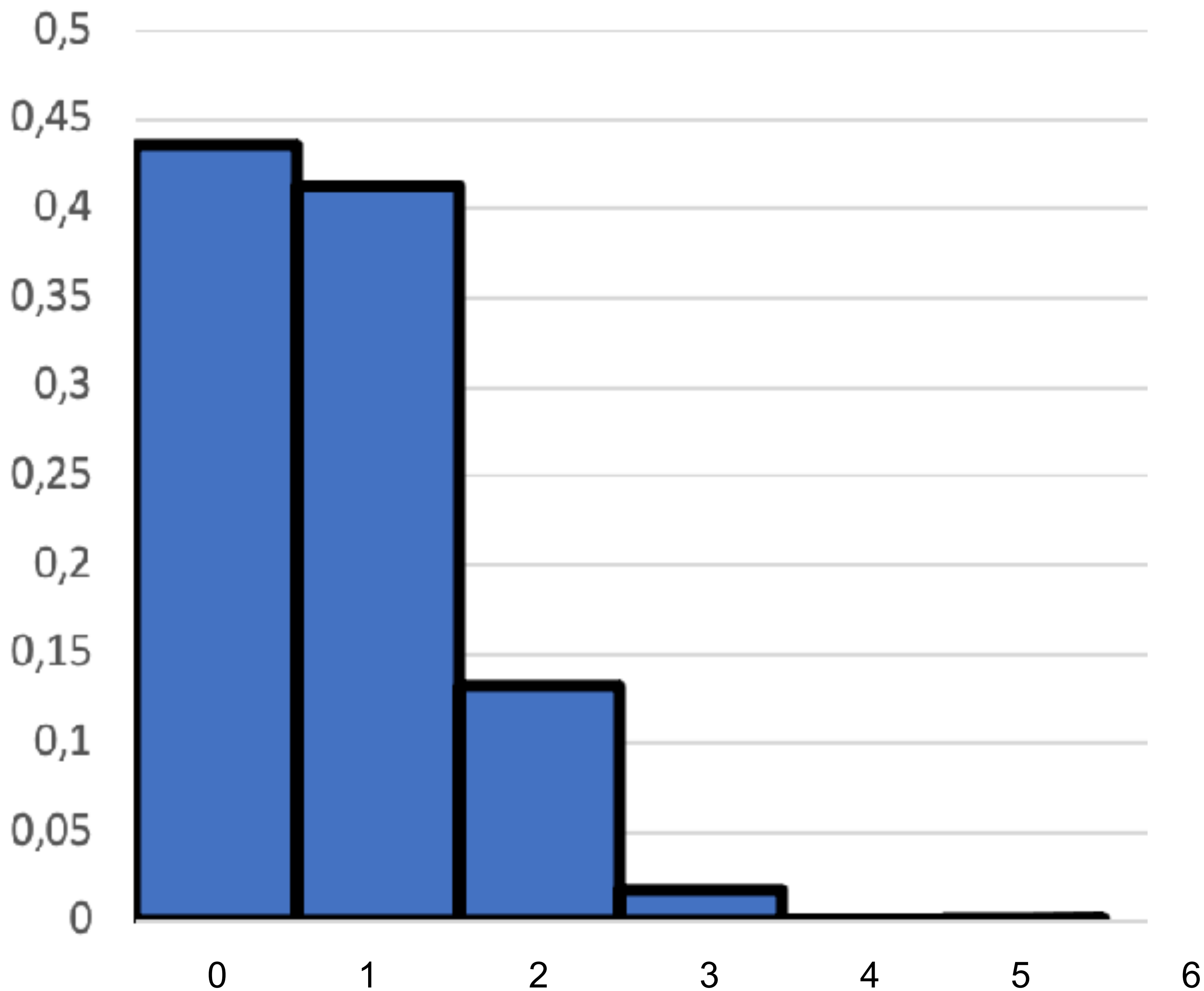
Příklad 5: Kontrola jakosti: 1000 výrobků, mezi nimi jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 10 výrobků vybereme alespoň 1 zmetek?

Příklad 6: Výběr uchazečů o práci: z 15ti uchazečů o zaměstnání, mezi kterými je 10 žen, vybíráme anonymně podle výsledku testu 5 osob. Jaká je pravděpodobnost, že to budou samé ženy?

Příklad 4: Sportka: 49 čísel, ze kterých 6 vyhrává (jsou vytaženy). Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 6ti čísel vybereme 4 z tažených?

0 1 2 3 4 5 6

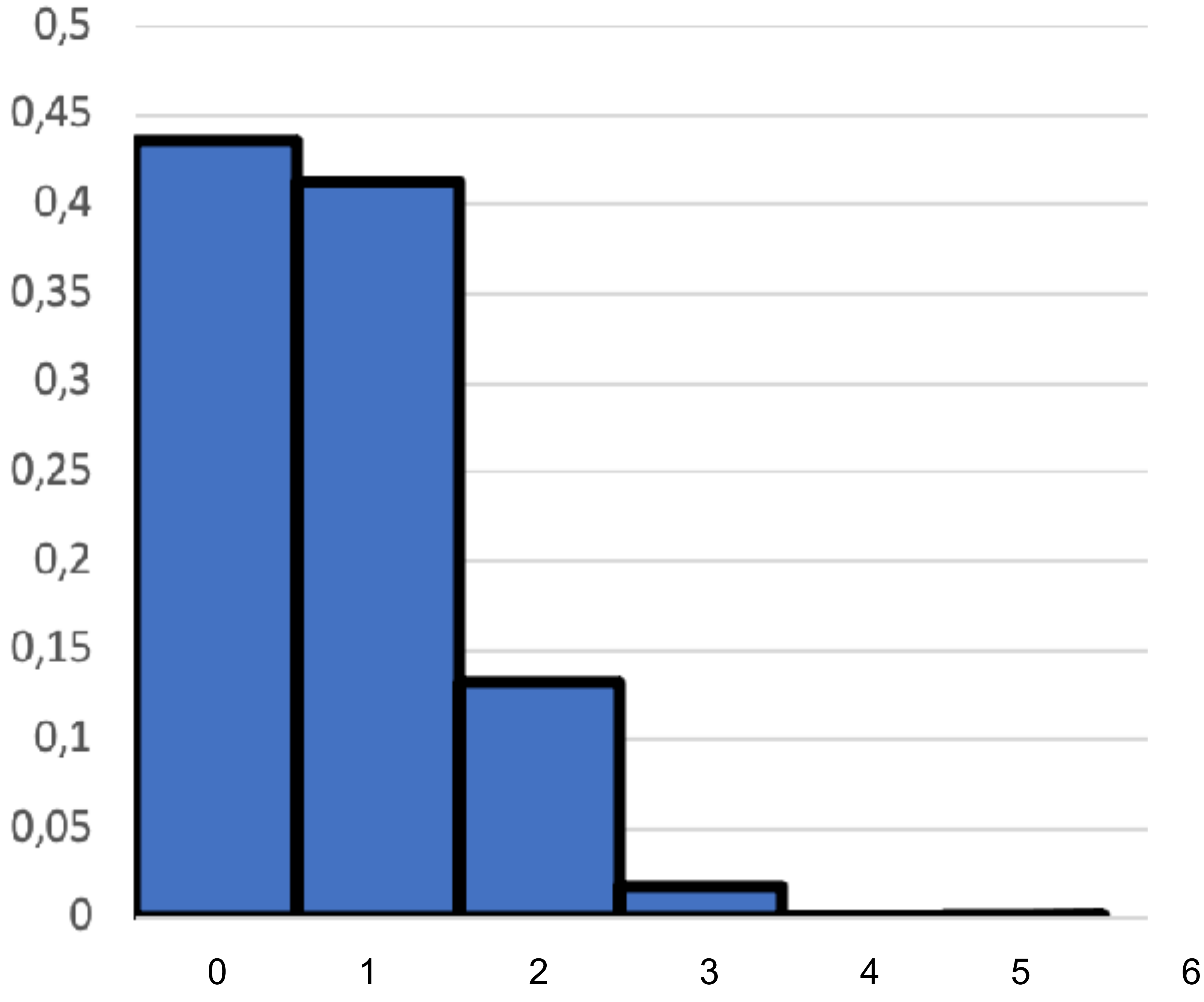
Příklad 4: Sportka: 49 čísel, ze kterých 6 vyhrává (jsou vytaženy). Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 6ti čísel vybereme 4 z tažených?



X = počet uhodnutých tažených čísel

k	P(X=k)
0	0,43596498
1	0,41301945
2	0,13237803
3	0,0176504
4	0,00096862
5	1,845E-05
6	7,1511E-08

Příklad 4: Sportka: 49 čísel, ze kterých 6 vyhrává (jsou vytaženy). Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 6ti čísel vybereme 4 z tažených?



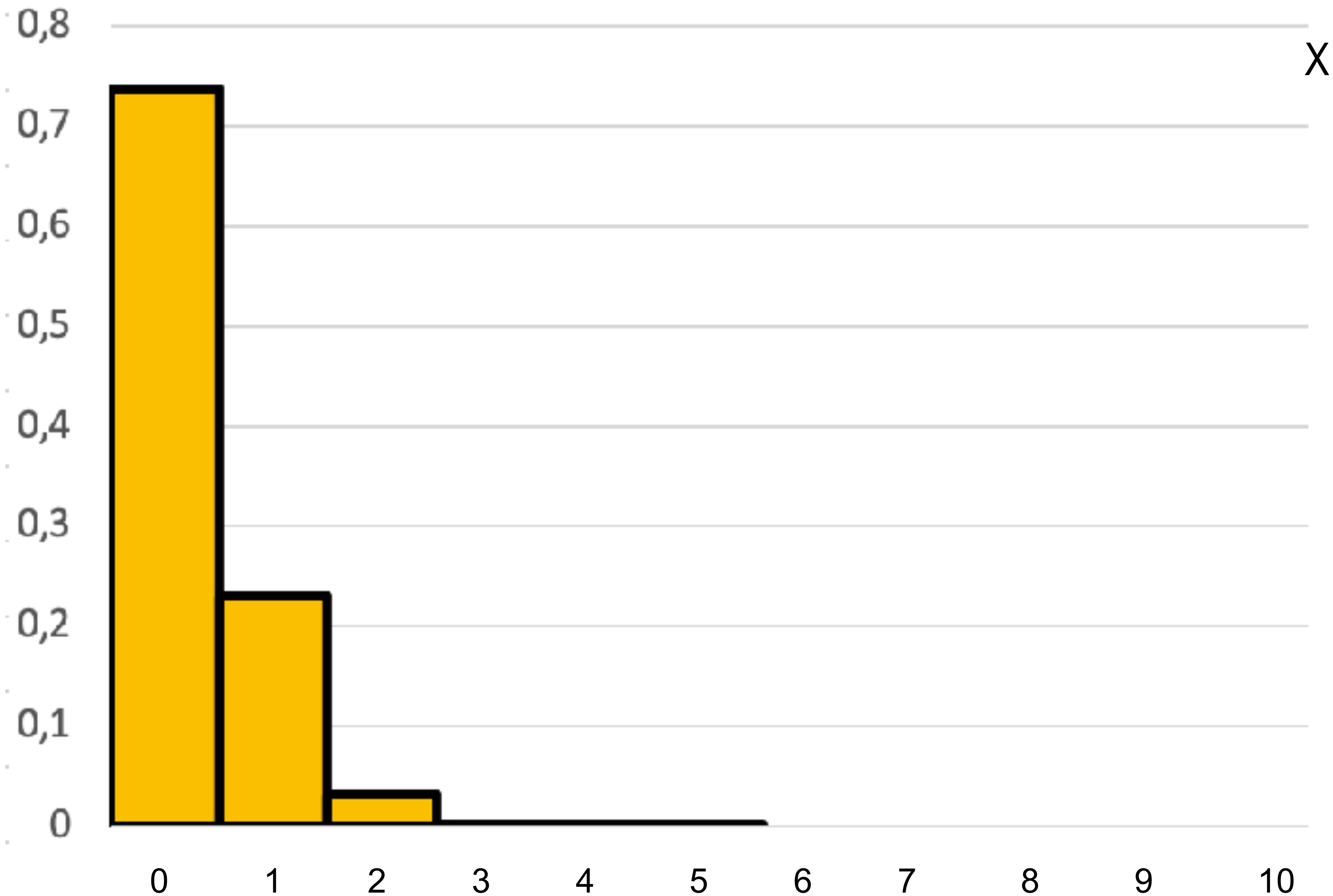
X = počet uhodnutých tažených čísel

k	P(X=k)
0	0,43596498
1	0,41301945
2	0,13237803
3	0,0176504
4	0,00096862
5	1,845E-05
6	7,1511E-08

Příklad 5: Kontrola jakosti: 1000 výrobků, mezi nimi jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 10 výrobků vybereme alespoň 1 zmetek?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

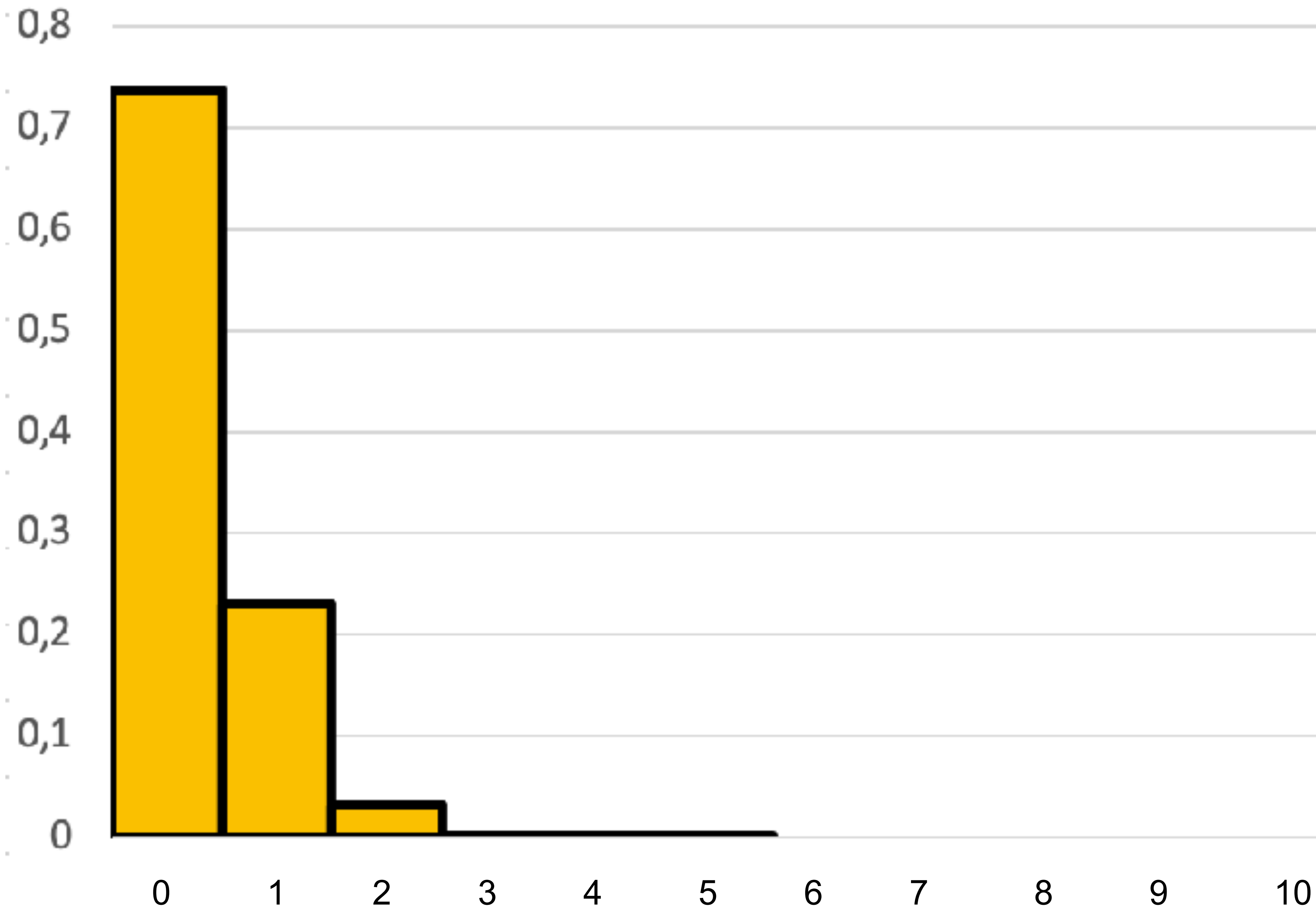
Příklad 5: Kontrola jakosti: 1000 výrobků, mezi nimi jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 10 výrobků vybereme alespoň 1 zmetek?



X = počet vybraných zmetků

k	P(X=k)
0	0,73639189
1	0,229883
2	0,03118475
3	0,00241792
4	0,00011851
5	3,8317E-06
6	8,2637E-08
7	1,172E-09
8	1,0443E-11
9	5,2686E-14
10	1,1406E-16

Příklad 5: Kontrola jakosti: 1000 výrobků, mezi nimi jsou 3% vadných. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 10 výrobků vybereme alespoň 1 zmetek?



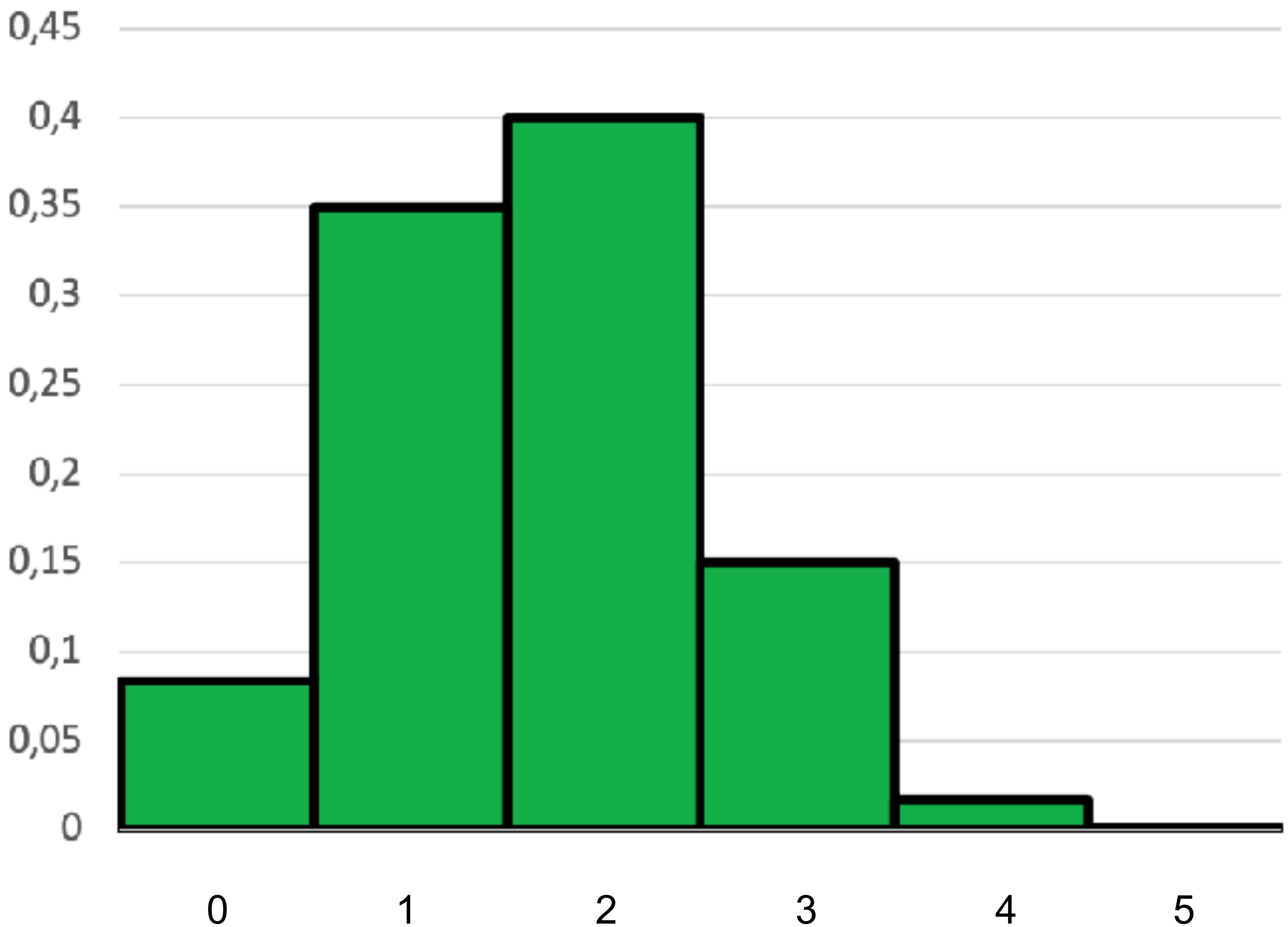
X = počet vybraných zmetků

k	P(X=k)
0	0,73639189
1	0,229883
2	0,03118475
3	0,00241792
4	0,00011851
5	3,8317E-06
6	8,2637E-08
7	1,172E-09
8	1,0443E-11
9	5,2686E-14
10	1,1406E-16

Příklad 6: Výběr uchazečů o práci: z 15ti uchazečů o zaměstnání, mezi kterými je 10 žen, vybíráme anonymně podle výsledku testu 5 osob. Jaká je pravděpodobnost, že to budou samé ženy?

0 1 2 3 4 5

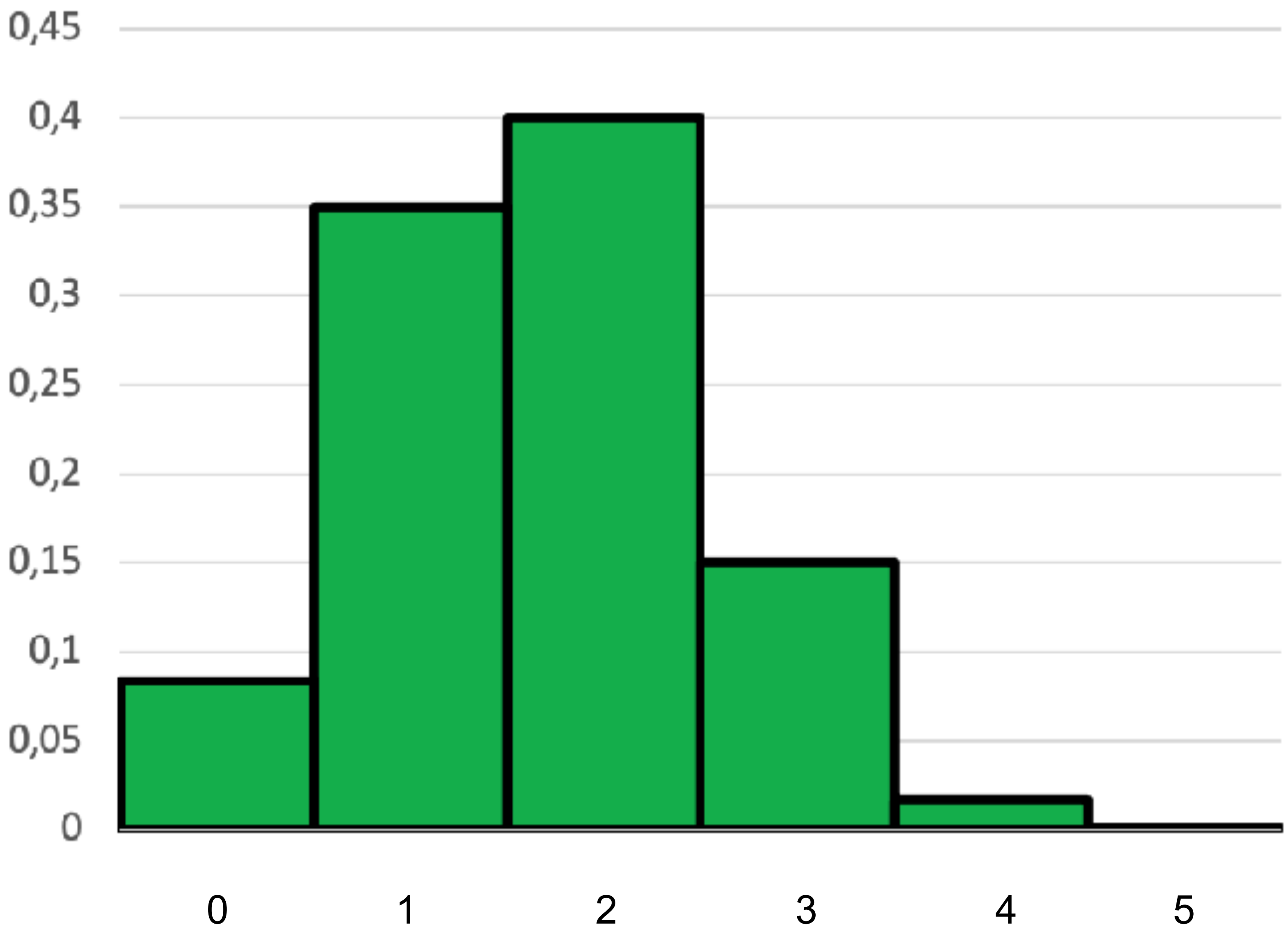
Příklad 6: Výběr uchazečů o práci: z 15ti uchazečů o zaměstnání, mezi kterými je 10 žen, vybíráme anonymně podle výsledku testu 5 osob. Jaká je pravděpodobnost, že to budou samé ženy?



X = počet mužů ve výběru

k	P(X=k)
0	0,08391608
1	0,34965035
2	0,3996004
3	0,14985015
4	0,01665002
5	0,000333

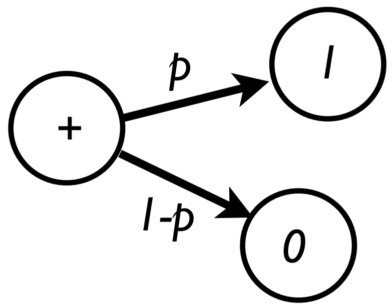
Příklad 6: Výběr uchazečů o práci: z 15ti uchazečů o zaměstnání, mezi kterými je 10 žen, vybíráme anonymně podle výsledku testu 5 osob. Jaká je pravděpodobnost, že to budou samé ženy?



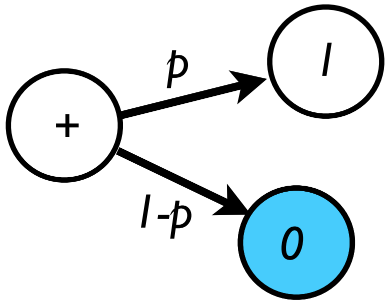
X = počet mužů ve výběru

k	P(X=k)
0	0,08391608
1	0,34965035
2	0,3996004
3	0,14985015
4	0,01665002
5	0,000333

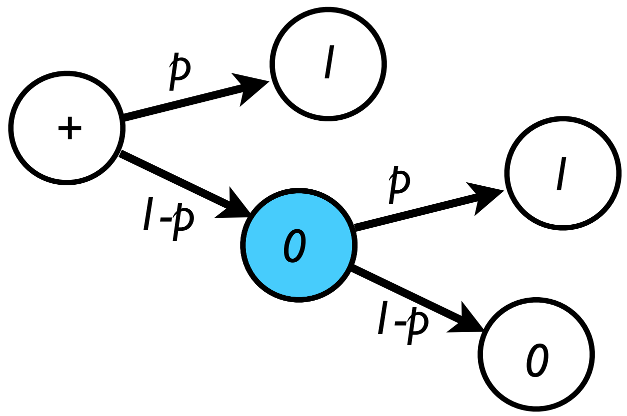
5) Geometrický model (diskrétní doba života)



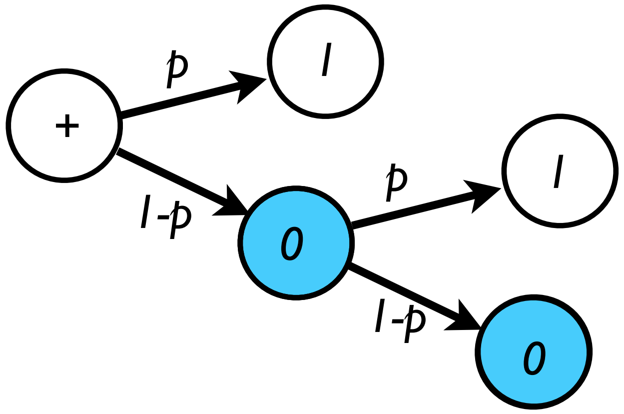
5) Geometrický model (diskrétní doba života)



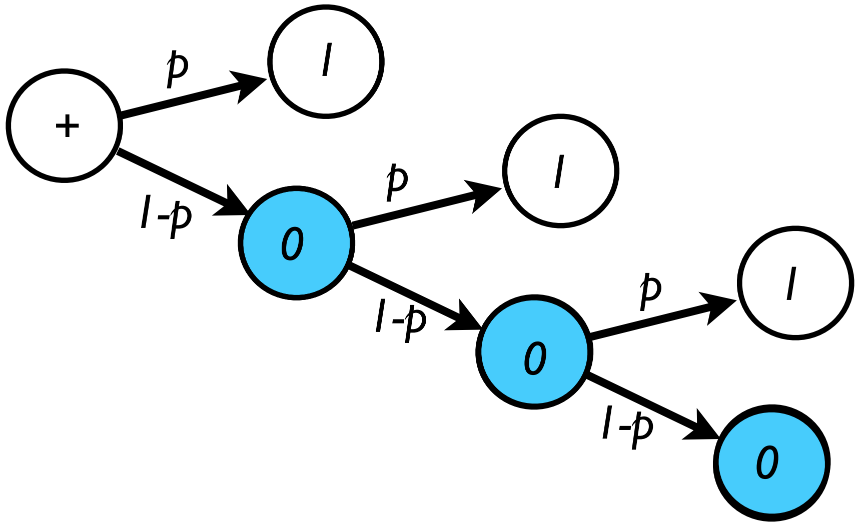
5) Geometrický model (diskrétní doba života)



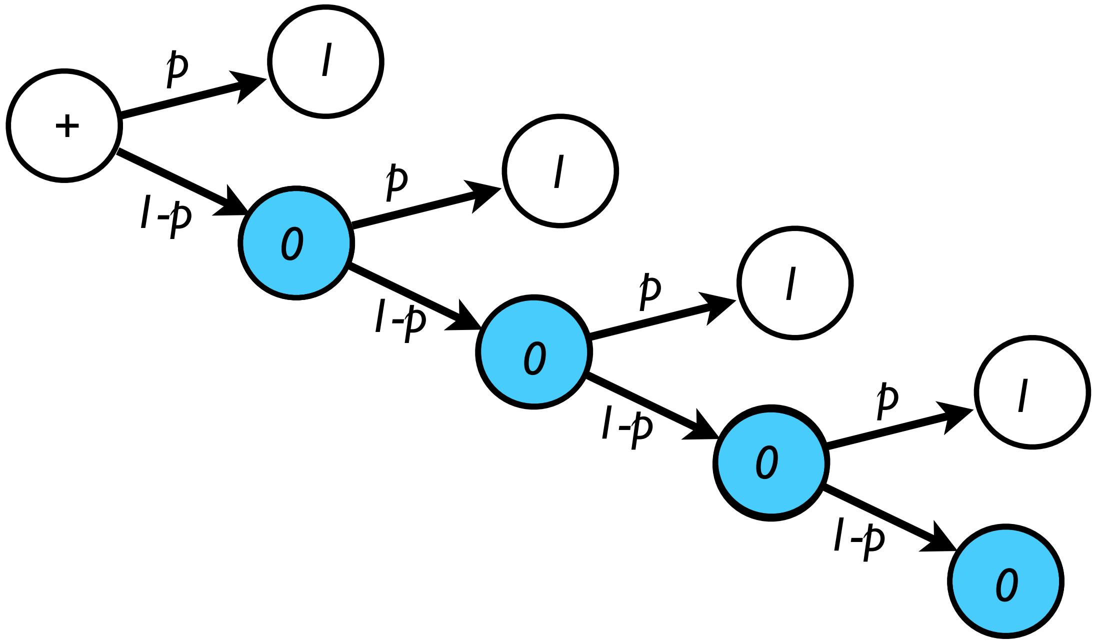
5) Geometrický model (diskrétní doba života)



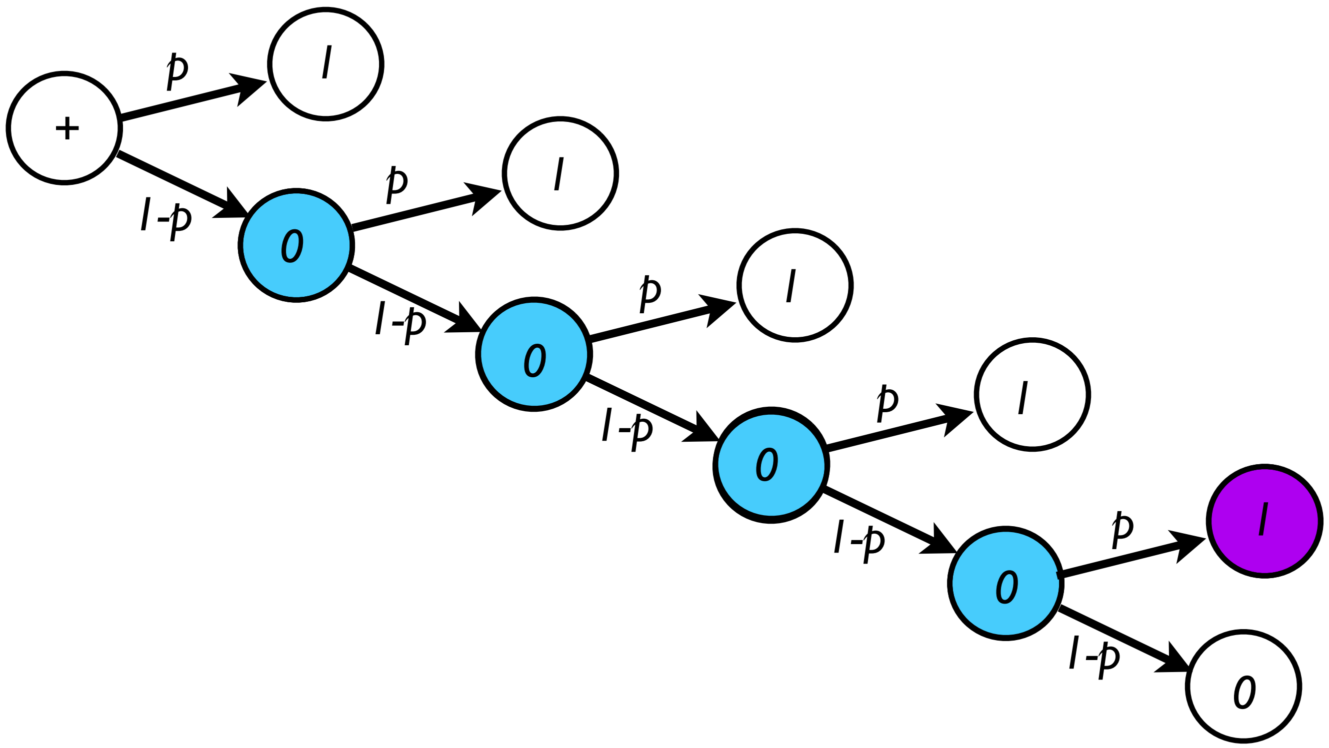
5) Geometrický model (diskrétní doba života)



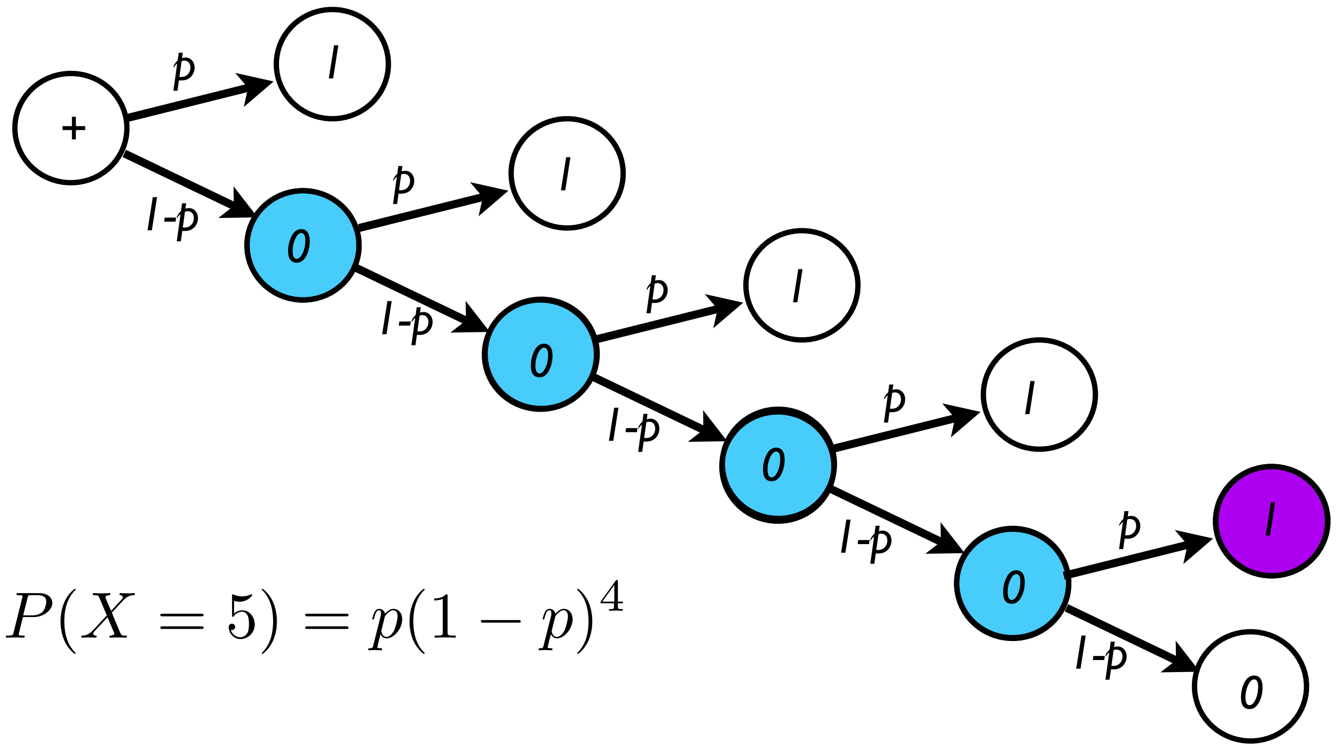
5) Geometrický model (diskrétní doba života)



5) Geometrický model (diskrétní doba života)

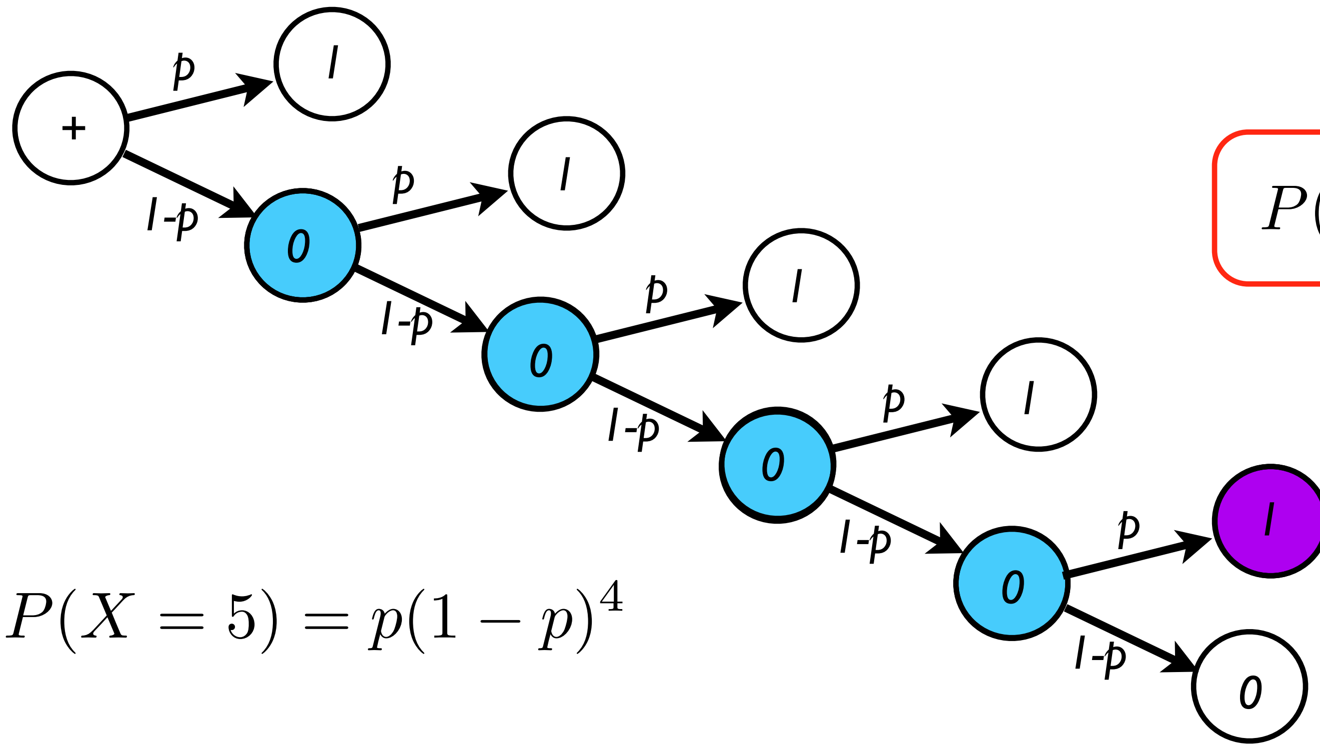


5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$P(X = 5) = p(1 - p)^4$$

5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

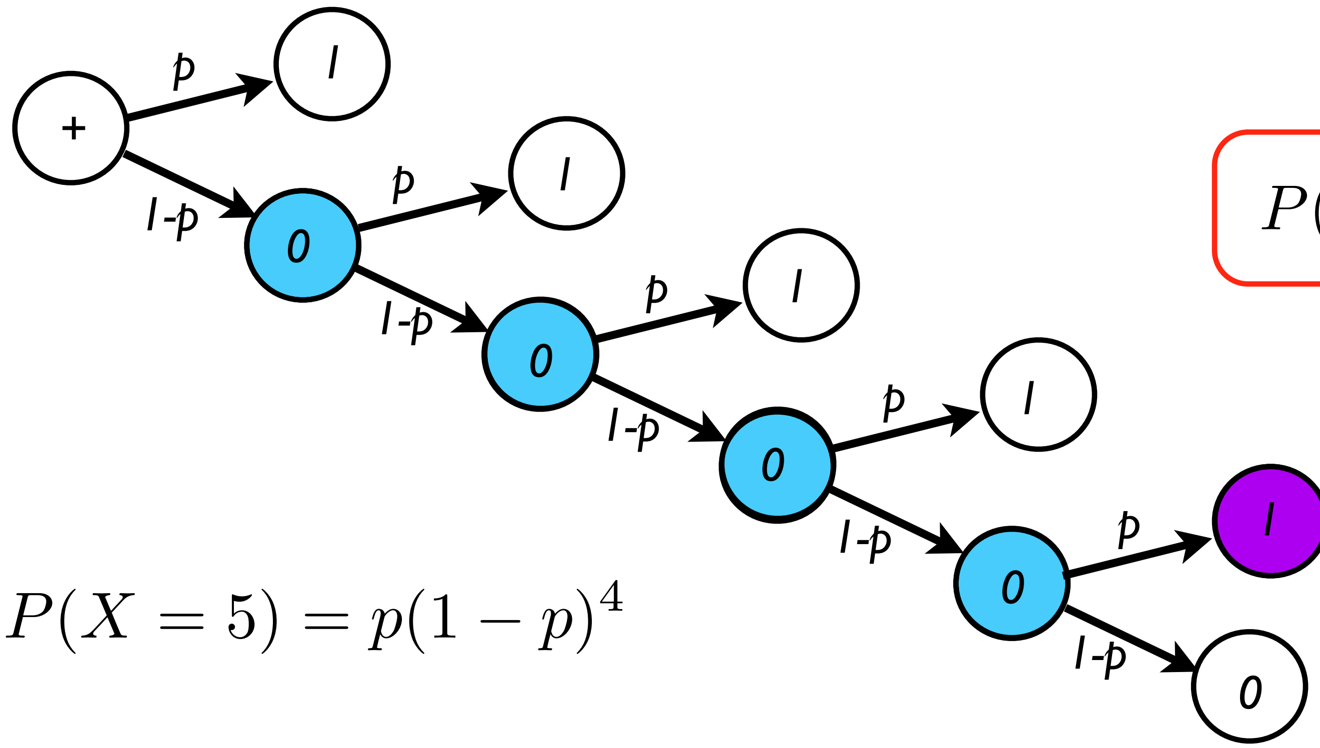
$$k = 1, 2, \ldots$$

$$P(X = 5) = p(1-p)^4$$

X je počet kroků, které je třeba učinit, aby nastal první výskyt sledovaného jevu

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

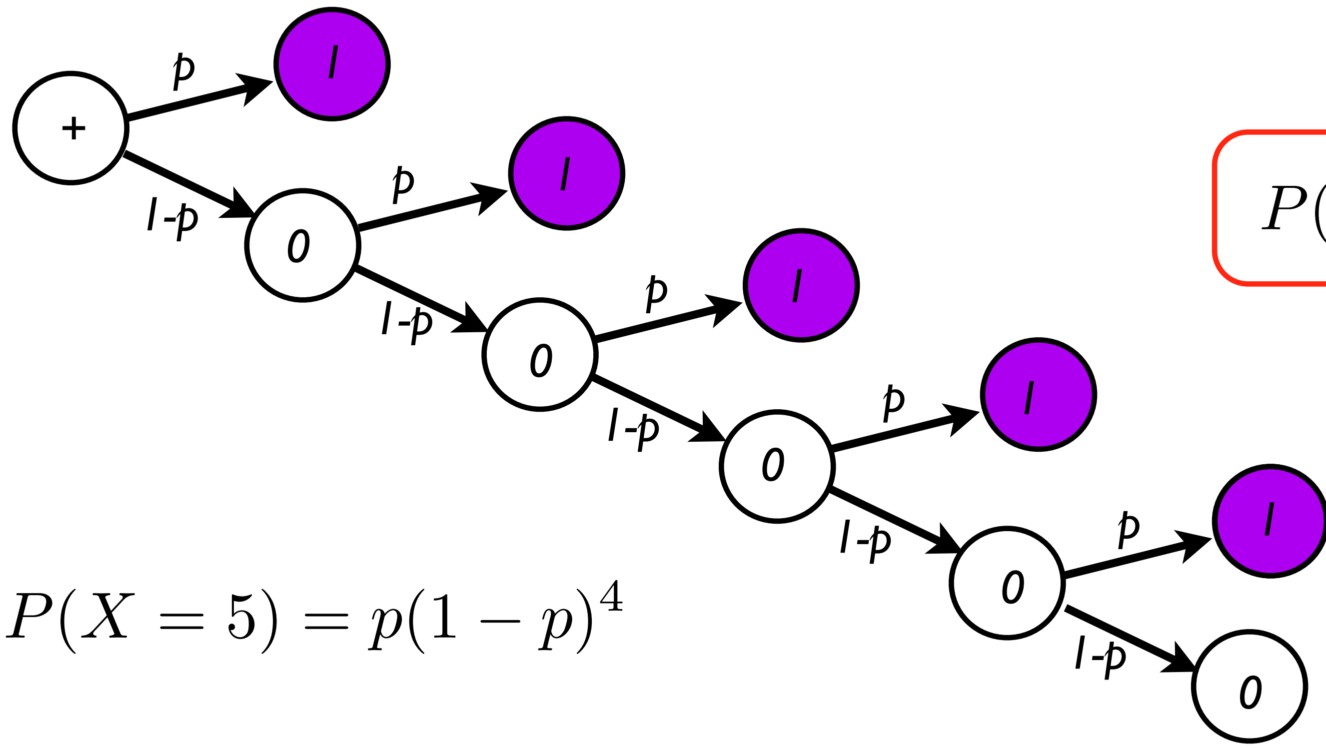
$$P(X = 5) = p(1-p)^4$$

X je počet kroků, které je třeba učinit, aby nastal první výskyt sledovaného jevu

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$P(X=5) = p(1-p)^4$$

$$\boxed{P(X=k) = p(1-p)^{k-1}}$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

X je počet kroků, které je třeba učinit, aby nastal první výskyt sledovaného jevu

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Y je počet kroků, které předcházejí prvnímu výskytu sledovaného jevu

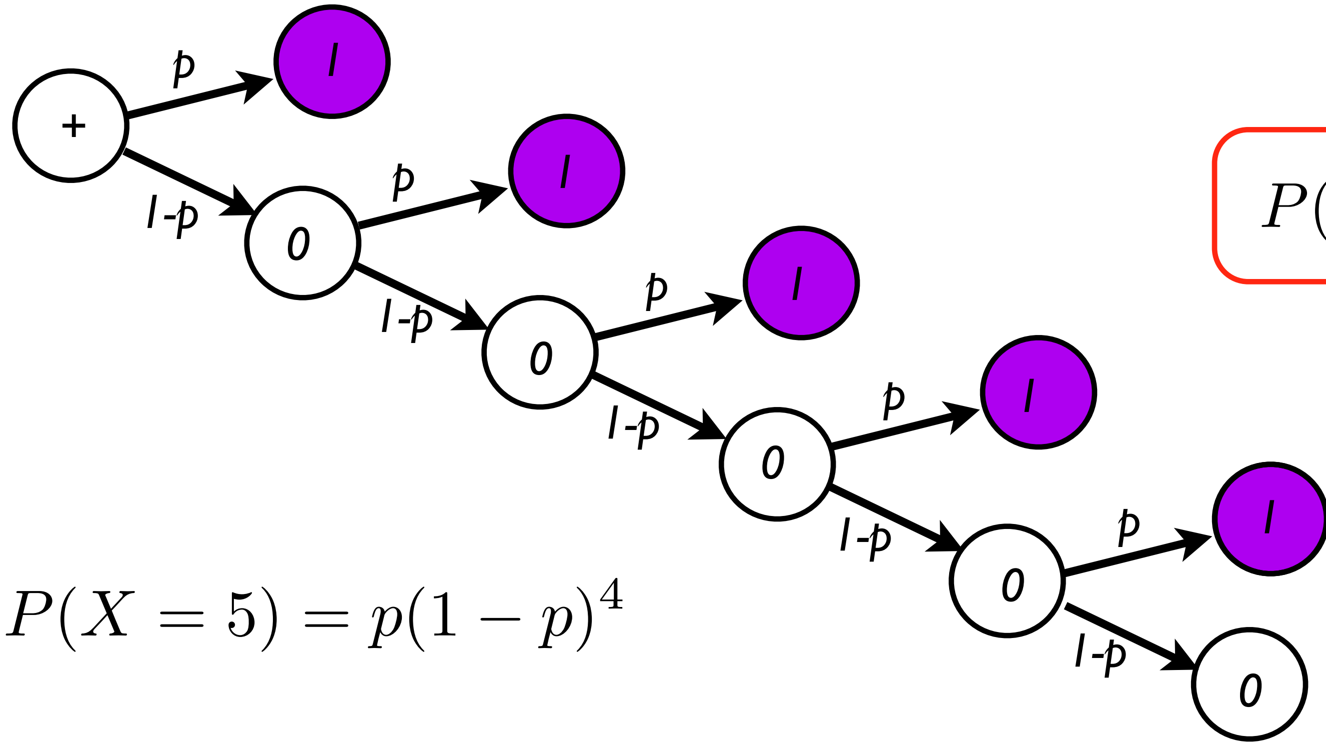
$$\boxed{P(Y=k) = p(1-p)^k}$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

$$E(Y) = \frac{1-p}{p} \qquad Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

Je-li sledovaný jev porucha, potom se Y nazývá “diskrétní doba života”

5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$\boxed{P(X=k)=p(1-p)^{k-1}}$$

$$k=1,2,\ldots$$

$$P(X=5)=p(1-p)^4$$

X je počet kroků, které je třeba učinit, aby nastal první výskyt sledovaného jevu

$$E(X)=\frac{1}{p} \qquad Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

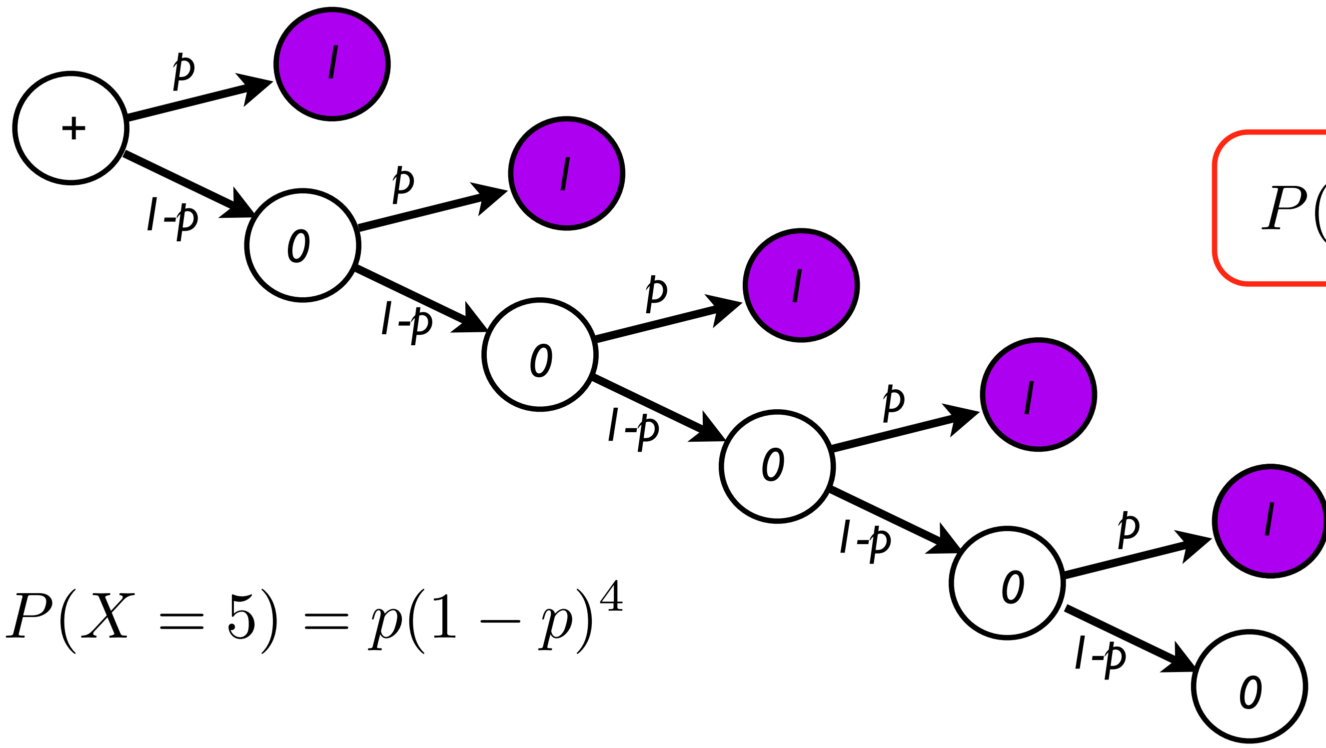
Y je počet kroků, které předcházejí prvnímu výskytu sledovaného jevu

$$\boxed{P(Y=k)=p(1-p)^k}$$

$$k=0,1,\ldots$$

$$E(Y)=\frac{1-p}{p} \qquad Var(Y)=\frac{1-p}{p^2}$$

5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$\boxed{P(X = k) = p(1-p)^{k-1}}$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

$$P(X = 5) = p(1-p)^4$$

X je počet kroků, které je třeba učinit, aby nastal první výskyt sledovaného jevu

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

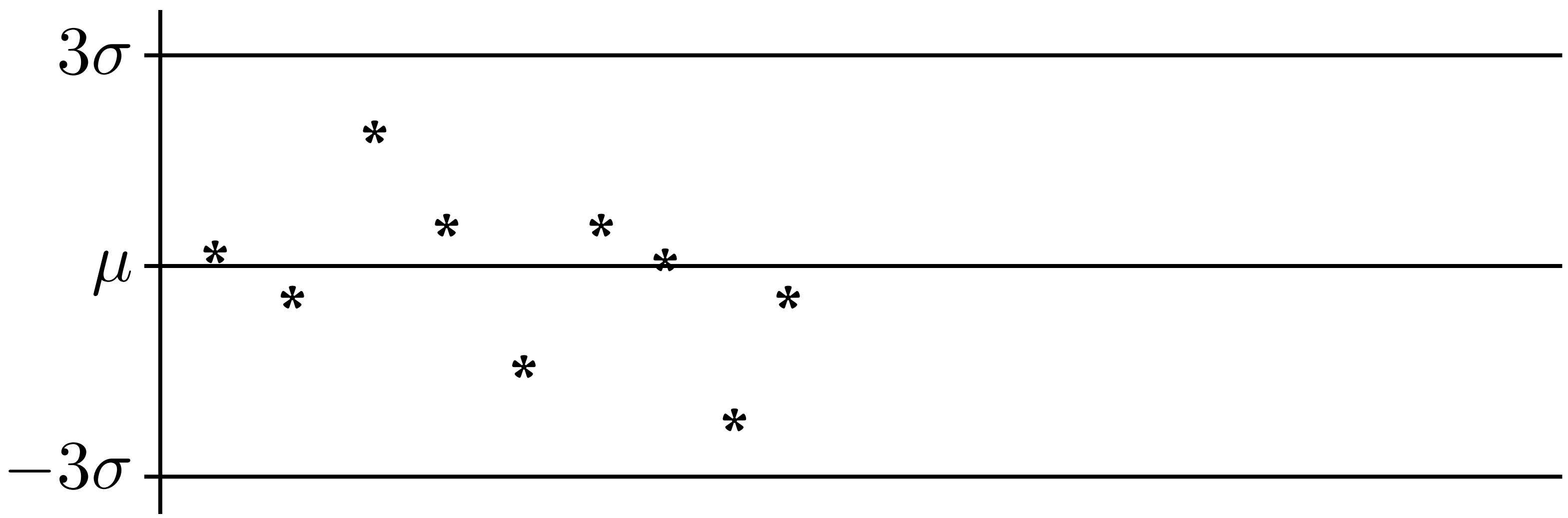
Y je počet kroků, které předcházejí prvnímu výskytu sledovaného jevu

$$\boxed{P(Y = k) = p(1-p)^k}$$

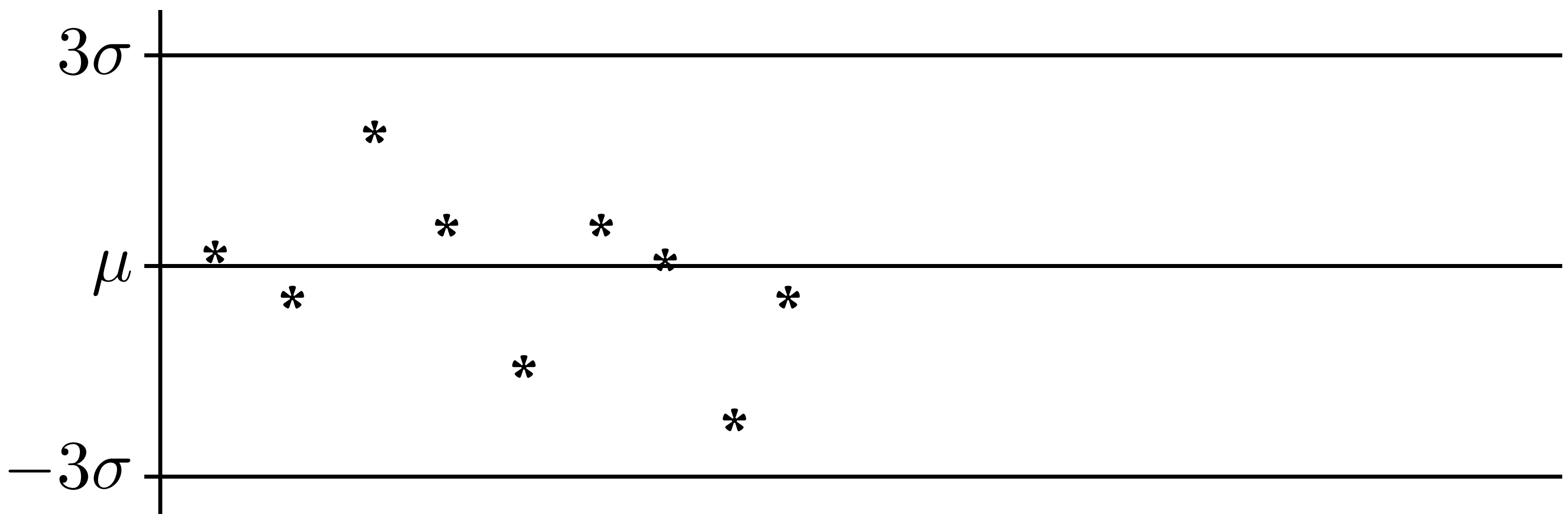
$$k = 0, 1, \ldots$$

$$E(Y) = \frac{1-p}{p} \qquad Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

5) Geometrický model (diskrétní doba života)



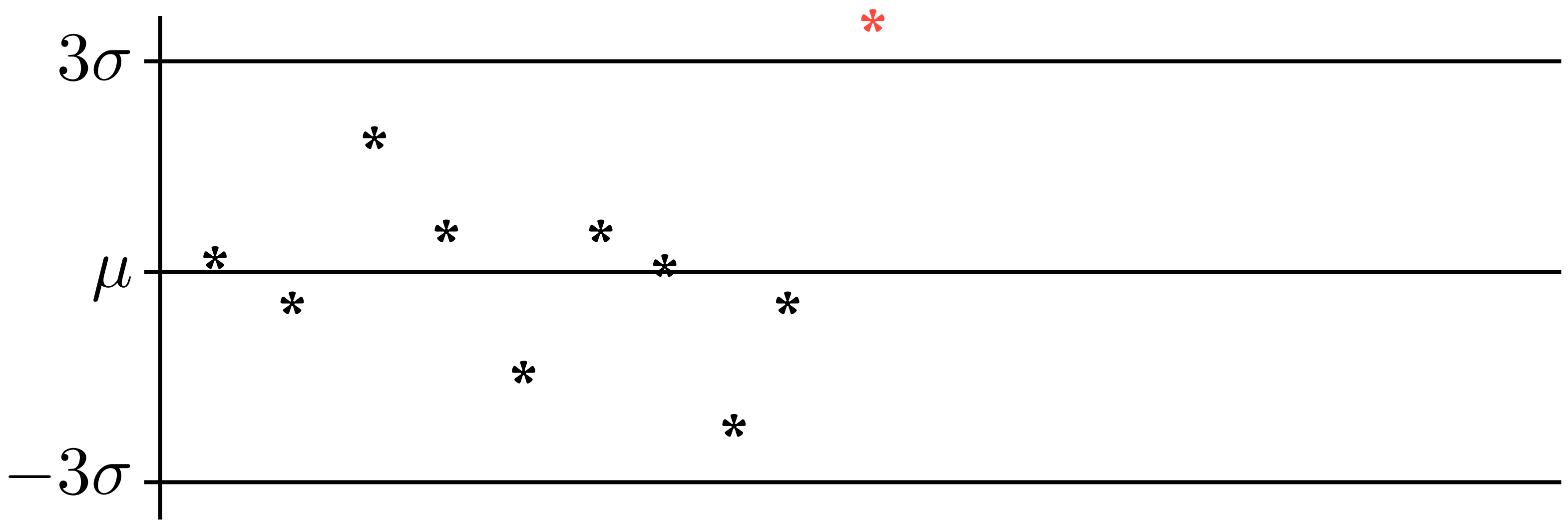
5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$P(|X-\mu| \le 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0,9973$$

$$P(|X-\mu| \ge 3\sigma) = 0,0027$$

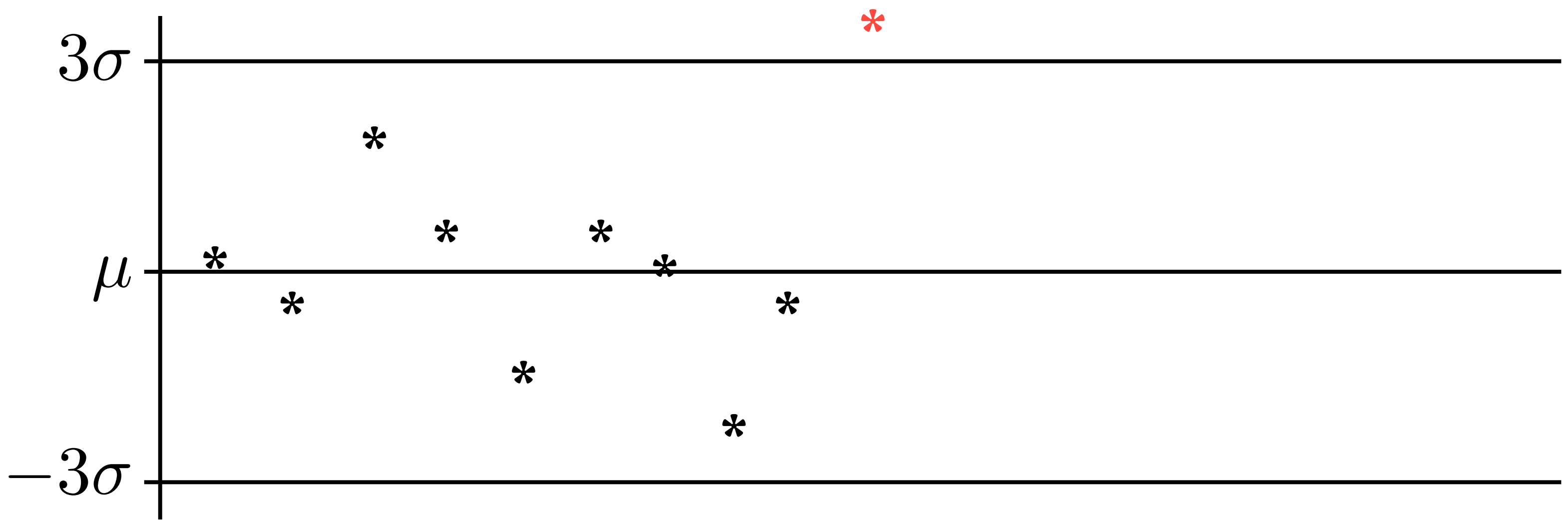
5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$P(|X-\mu| \leq 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0,9973$$

$$P(|X-\mu| \geq 3\sigma) = 0,0027$$

5) Geometrický model (diskrétní doba života)

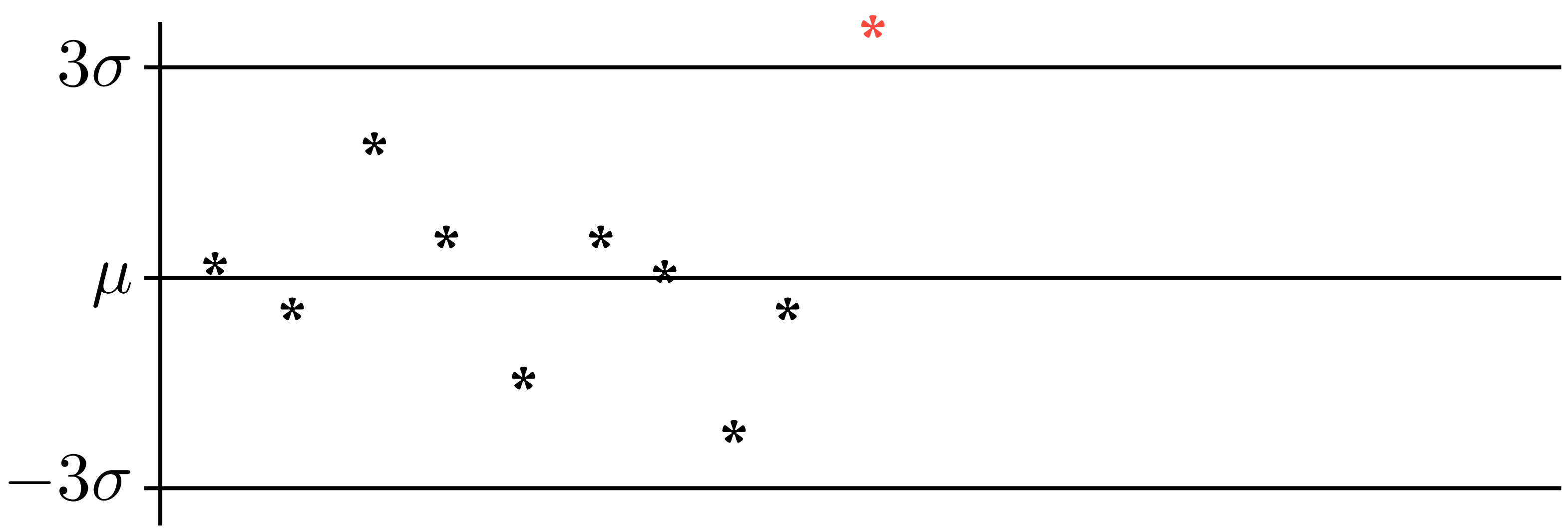


$$P(|X-\mu| \leq 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0,9973$$

$$P(|X-\mu| \geq 3\sigma) = 0,0027$$

N = počet inspekcí před signálem

5) Geometrický model (diskrétní doba života)



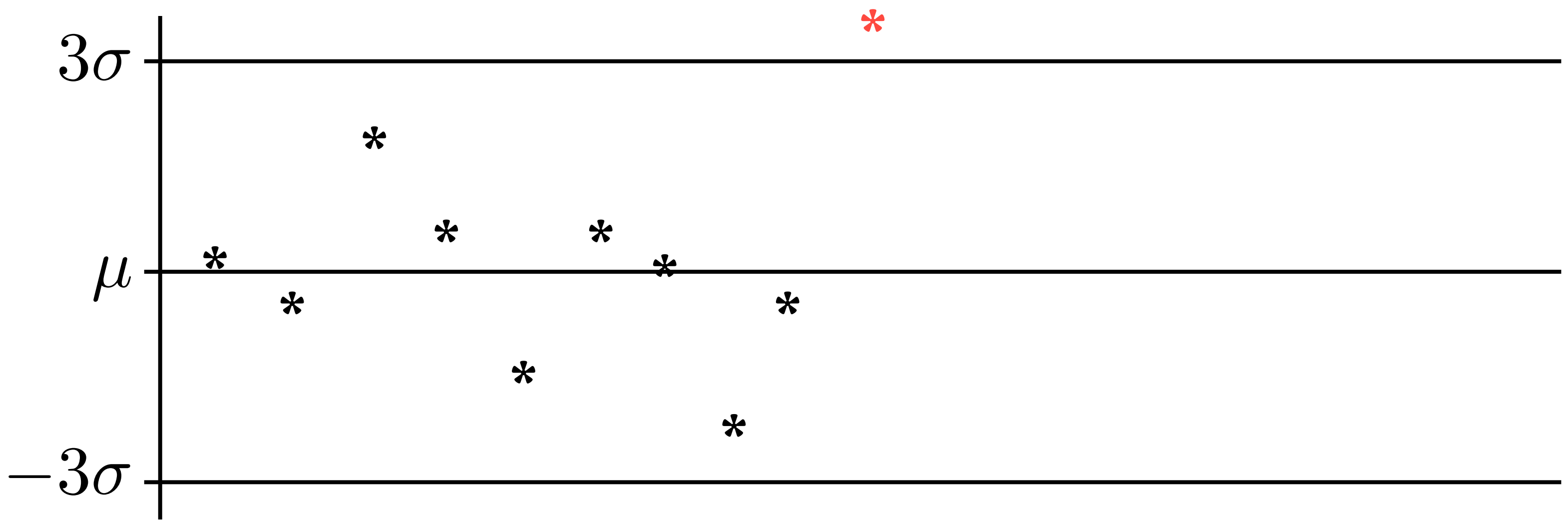
$$P(|X-\mu| \leq 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0,9973$$

$$P(|X-\mu| \geq 3\sigma) = 0,0027$$

N = počet inspekcí před signálem

$p = 0,0027$ $$E(N) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,0027} = 370$$

5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$P(|X-\mu| \leq 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0,9973$$

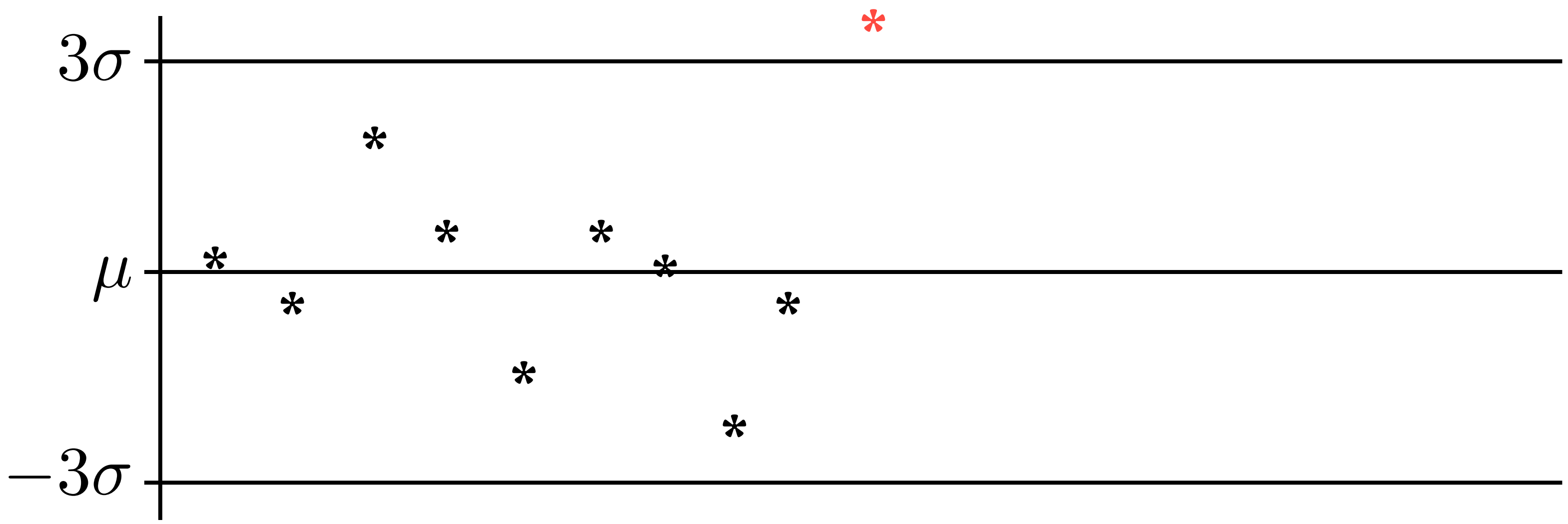
$$P(|X-\mu| \geq 3\sigma) = 0,0027$$

N = počet inspekcí před signálem

$$p = 0,0027 \qquad E(N) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,0027} = 370$$

Počet inspekcí před prvním falešným signálem (ARL = Average Run Length)

5) Geometrický model (diskrétní doba života)



$$P(|X-\mu| \le 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0,9973$$

$$P(|X-\mu| \ge 3\sigma) = 0,0027$$

N = počet inspekcí před signálem

$$p = 0,0027 \qquad E(N) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,0027} = 370$$

Počet inspekcí před prvním falešným signálem (ARL = Average Run Length)