

Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

5. Spojité pravděpodobnostní modely



5. Spojité pravděpodobnostní modely

- Klíčové pojmy:**
- Náhodný vektor;
 - Sdružené, marginální a podmíněné charakteristiky - distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota;
 - Střední hodnota náh. vektoru;
 - Kovariance, korelace, korelační koeficient,
 - Kovarianční matice, korelační matice;

- Klíčové věty:**
- Rozdělení náhodného vektoru s nezávislými složkami.
 - Vztah mezi korelovaností a stochastickou nezávislostí.
 - Věta o hustotě transformované náhodné veličiny.

Spojité pravděpodobnostní modely

1. Model rovnoměrného rozdělení na intervalu

Model experimentu, při němž mohou výsledky nastat kdekoli v nějakém reálném omezeném intervalu a my nemáme důvod preferovat některou jeho část.

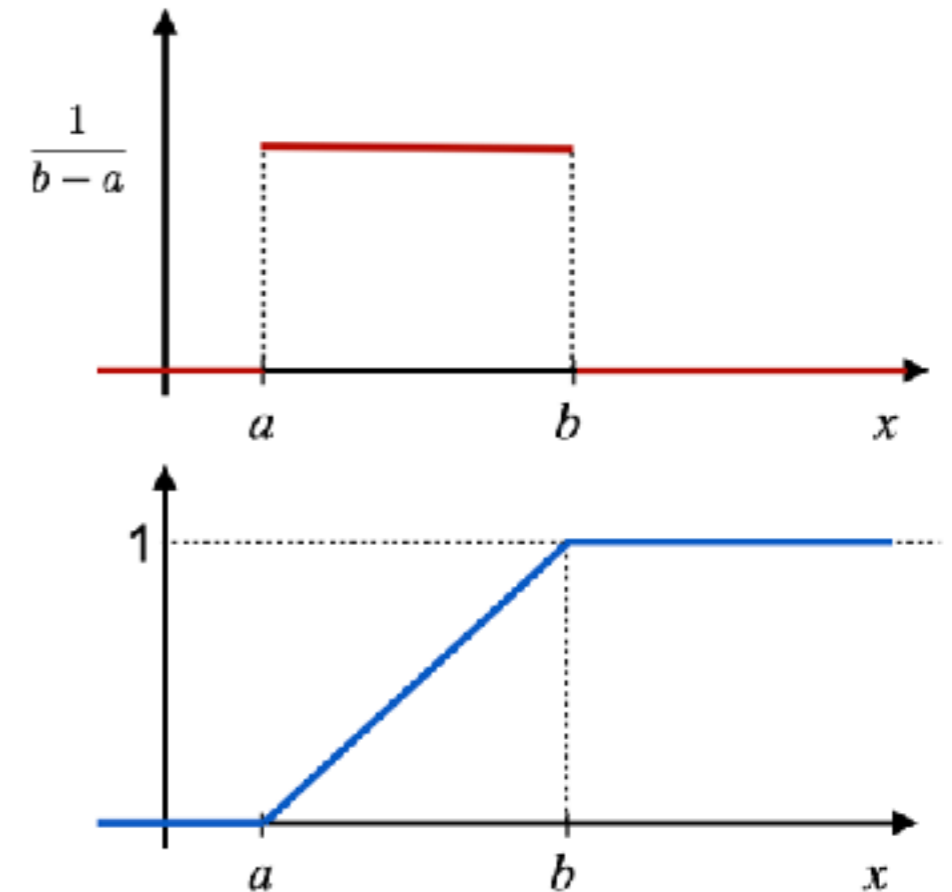
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{1}{b-a} & x \in \langle a; b \rangle, \\ 0 & x > b. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in \langle a; b \rangle, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \\ &= \frac{[x^2]_a^b}{2(b-a)} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Spojité pravděpodobnostní modely

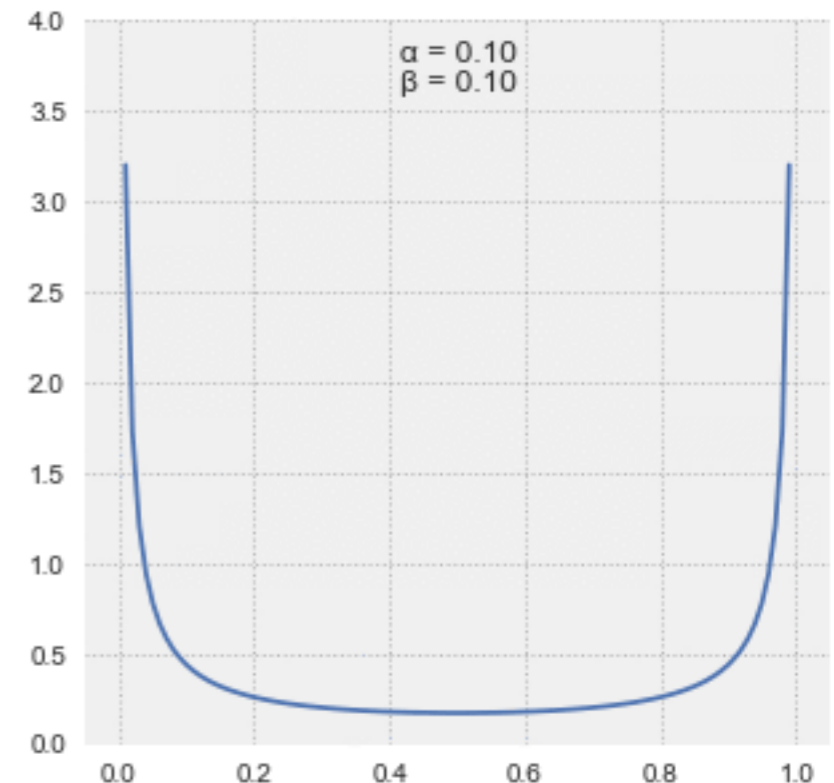
2. Model náhodného chování na omezeném intervalu

Model experimentu, při němž mohou výsledky nastat kdekoli v nějakém reálném omezeném intervalu, přičemž máme důvod preferovat některou jeho část.

- Zpravidla se uvádí pro interval $\langle 0, 1 \rangle$. Chceme-li jej použít pro jiný interval, musíme nejprve provést transformaci.
- Používá se často pro modelování náhodného chování procent a podílů.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} & x \in \langle 0; 1 \rangle, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

$$\text{kde } B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - t)^{\beta-1} dt$$



Spojité pravděpodobnostní modely

2. Model náhodného chování na omezeném intervalu

Model experimentu, při němž mohou výsledky nastat kdekoli v nějakém reálném omezeném intervalu, přičemž máme důvod preferovat některou jeho část.

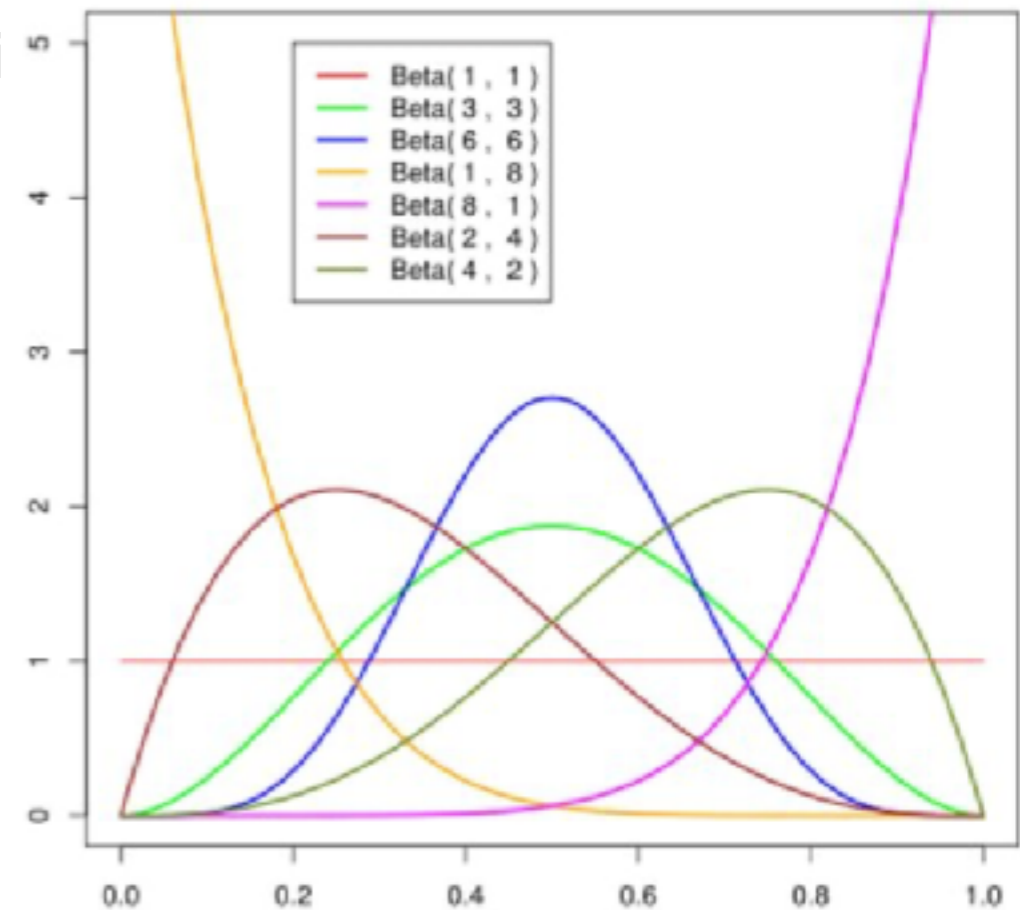
- Zpravidla se uvádí pro interval $\langle 0, 1 \rangle$. Chceme-li jej použít pro jiný interval, musíme nejprve provést transformaci.
- Používá se často pro modelování náhodného chování procent a podílů.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & x \in \langle 0; 1 \rangle, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

$$\text{kde } B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$$



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního (Gaussova) rozdělení

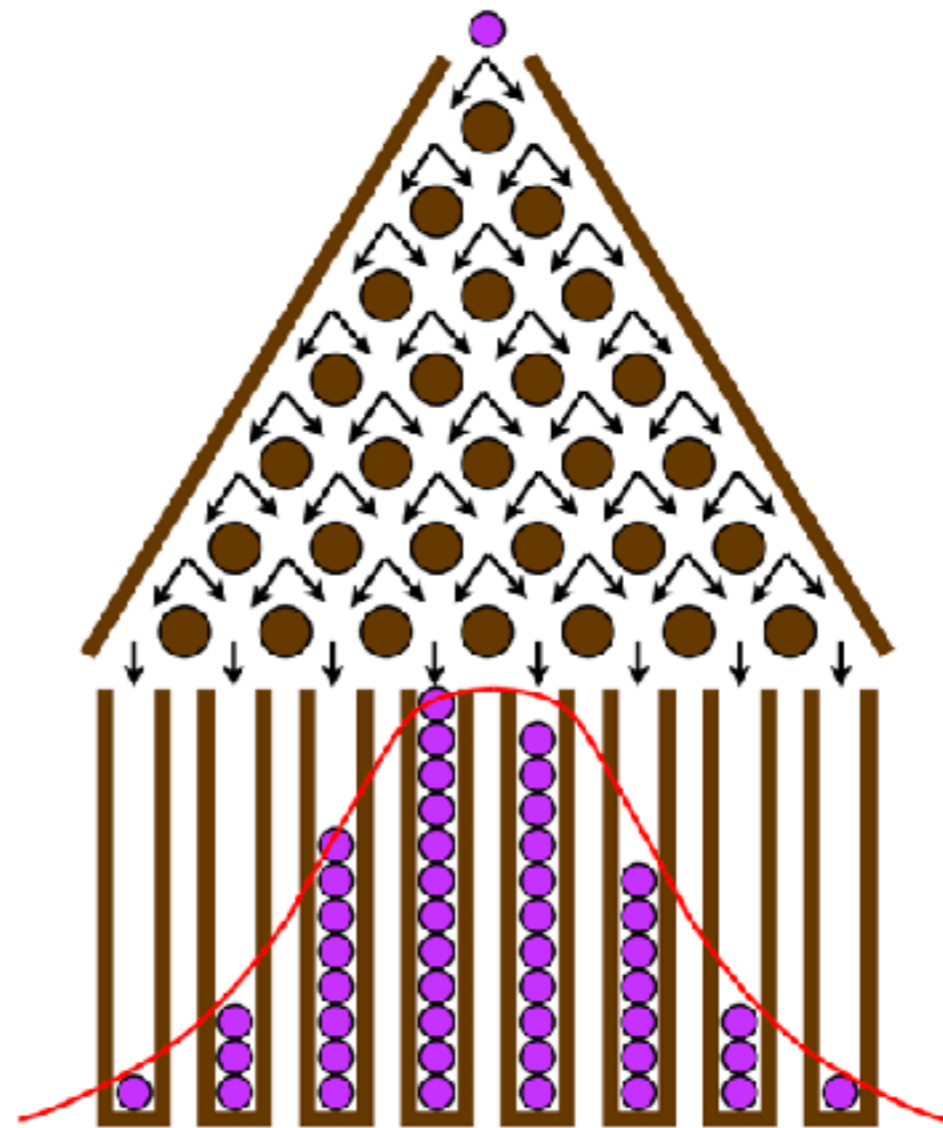
Model experimentu, při němž se výsledky pohybují kolem jedné (jmenovité, nominální) hodnoty se symetrickou náhodnou chybou.

- první formulace tohoto rozdělení a rovnice jeho hustoty pochází z 18. století od Abrahama de Moivre. Ten popsal tzv. „zvonovou křivku“ pomocí exponenciální funkce.

Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = Ke^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$



Spojité pravděpodobnostní modely

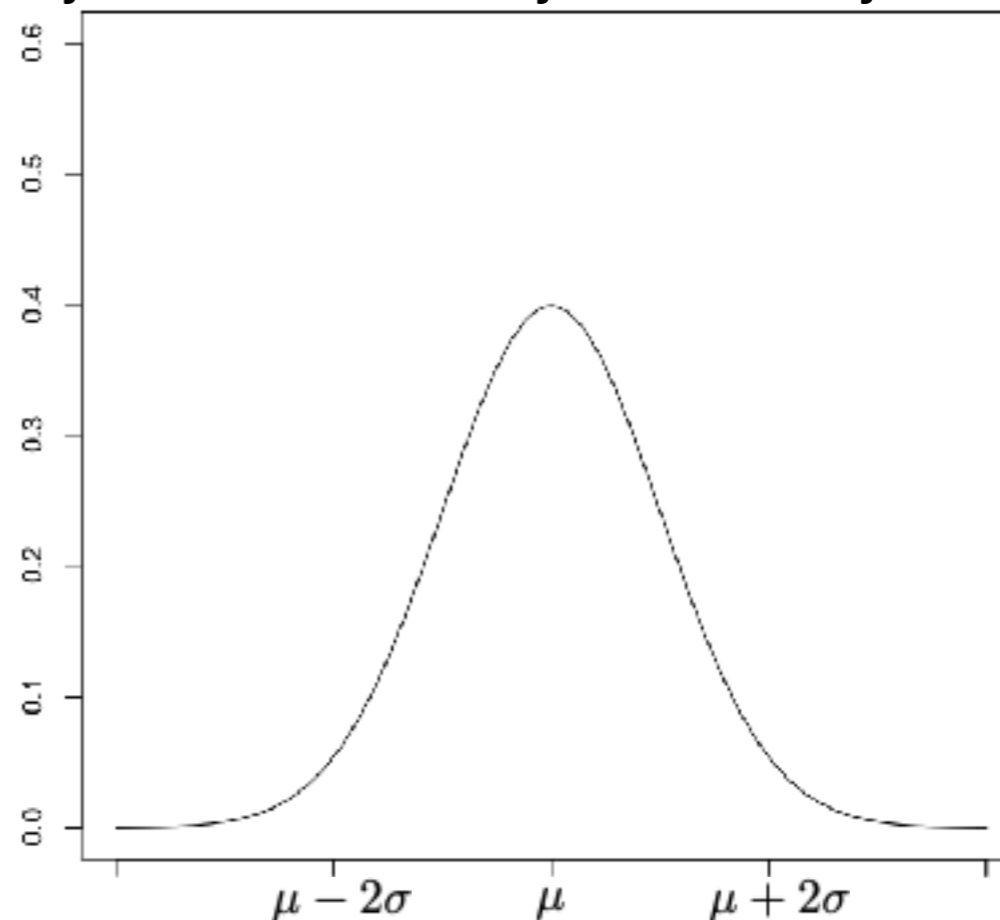
3. Model normálního (Gaussova) rozdělení

Model experimentu, při němž se výsledky pohybují kolem jedné (jmenovité, nominální) hodnoty se symetrickou náhodnou chybou.

- první formulace tohoto rozdělení a rovnice jeho hustoty pochází z 18. století od Abrahama de Moivre. Ten popsal tzv. „zvonovou křivku“ pomocí exponenciální funkce.
- název „Gaussovo rozdělení“ pochází z přelomu 18. a 19. století, kdy F. Gauss a P. Laplace řešili rozdíly v astronomických měřeních - výsledkem byla „křivka chyb měření“, tzv. Gaussova křivka.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hustota pravděpodobnosti

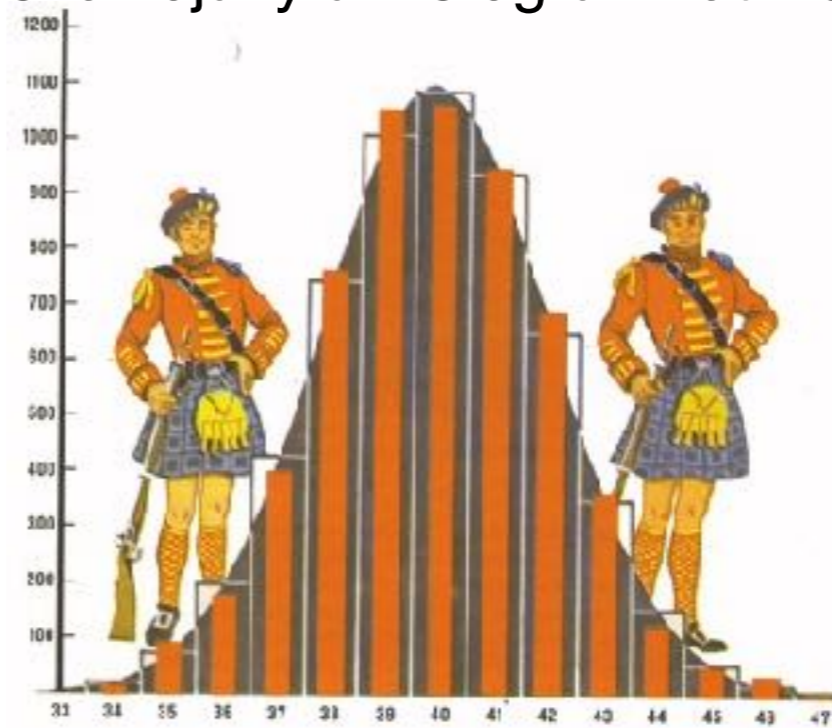


Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního (Gaussova) rozdělení

Model experimentu, při němž se výsledky pohybují kolem jedné (jmenovité, nominální) hodnoty se symetrickou náhodnou chybou.

- první formulace tohoto rozdělení a rovnice jeho hustoty pochází z 18. století od Abrahama de Moivre. Ten popsal tzv. „zvonovou křivku“ pomocí exponenciální funkce.
- název „Gaussovo rozdělení“ pochází z přelomu 18. a 19. století, kdy F. Gauss a P. Laplace řešili rozdíly v astronomických měřeních - výsledkem byla „křivka chyb měření“, tzv. Gaussova křivka.
- přívlastek „normální“ je odvozen z výsledků antropometrických měření A. Quételeta z počátku 19. století (měřil skotské vojáky a histogram těchto měření lze aproximovat zvonovou křivkou).



Obvod hrudi
skotských vojáků
v palcích,
naměřený
Quételem ve
dvacátých letech
19. století



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

Model experimentu, při němž se výsledky pohybují kolem jedné (jmenovité, nominální) hodnoty se symetrickou náhodnou chybou.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hustota pravděpodobnosti

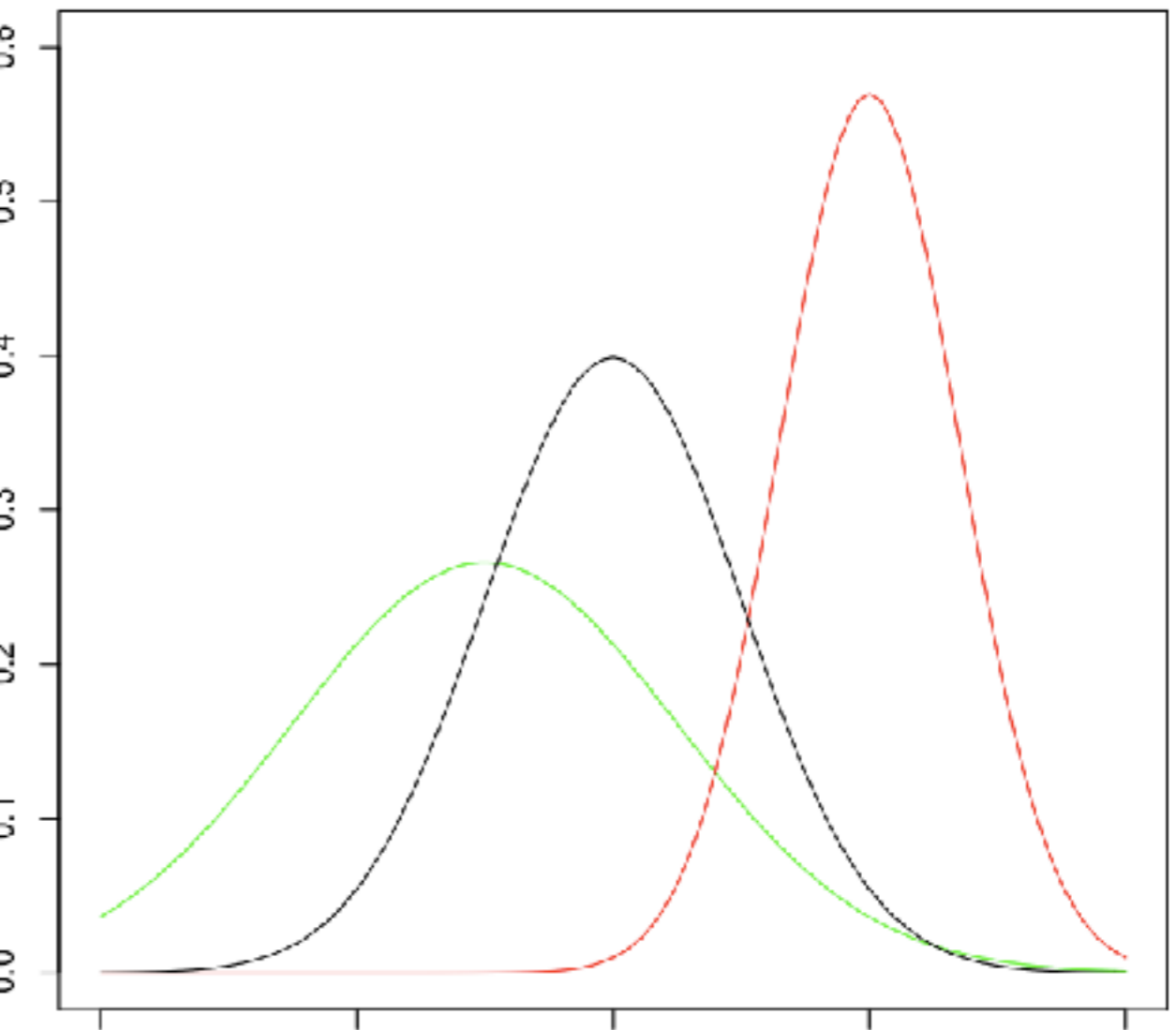
$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in \mathbb{R}$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu$$



$$\text{var}(X) = \sigma^2$$



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

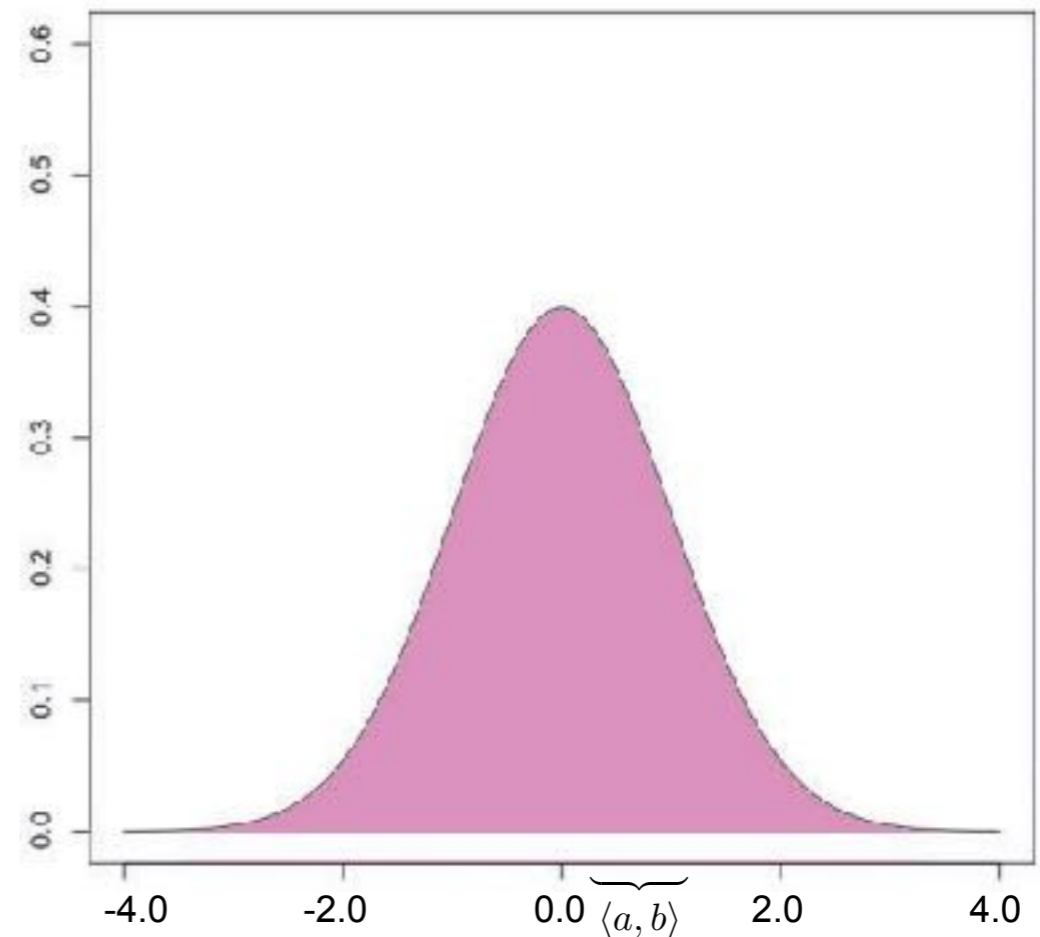
Standardní normální rozdělení $N(0,1)$:

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$x \in \mathbb{R}$

$$X \sim N(0, 1) \quad X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$:

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$x \in R$

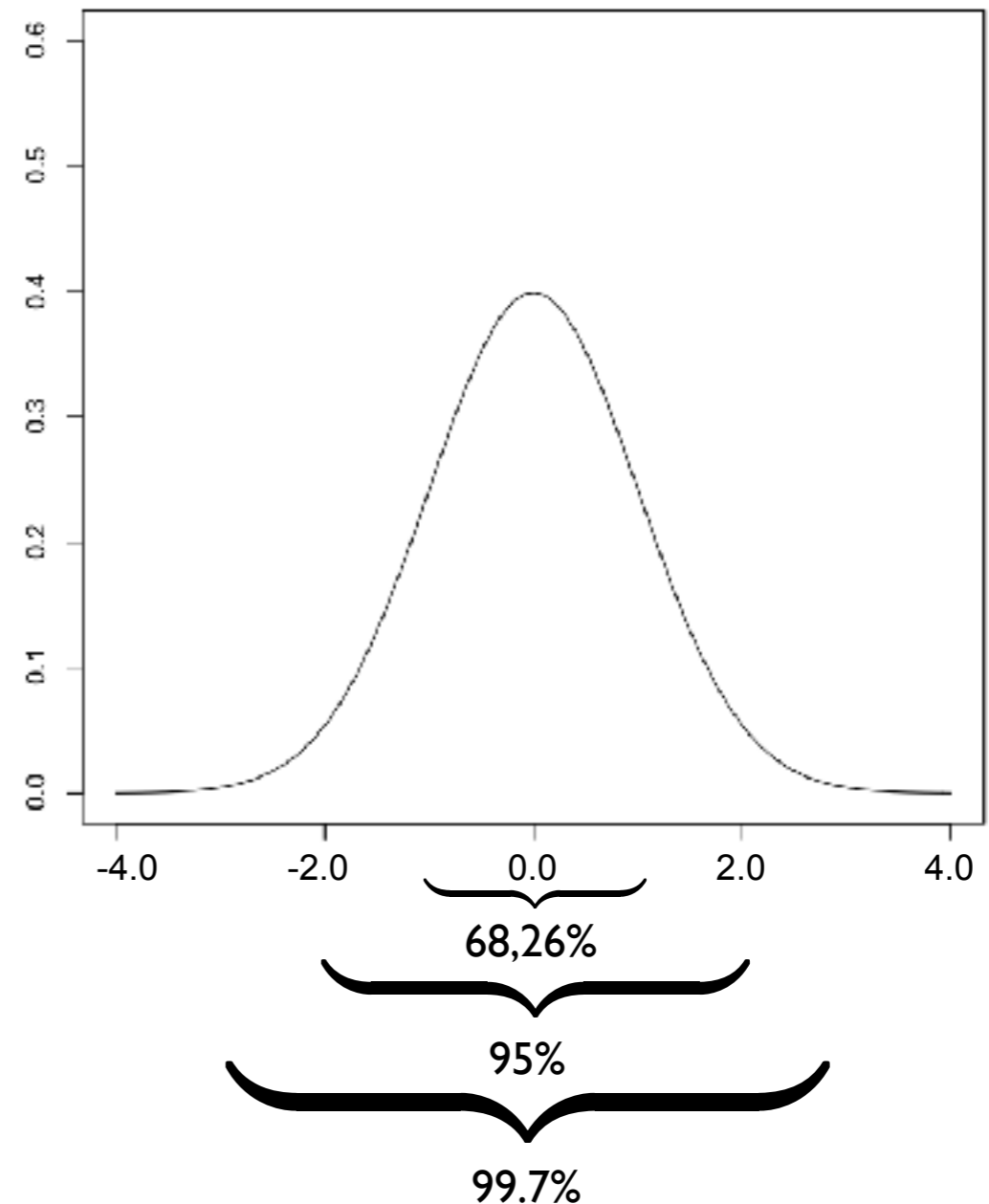
$$X \sim N(0, 1) \quad X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$:

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

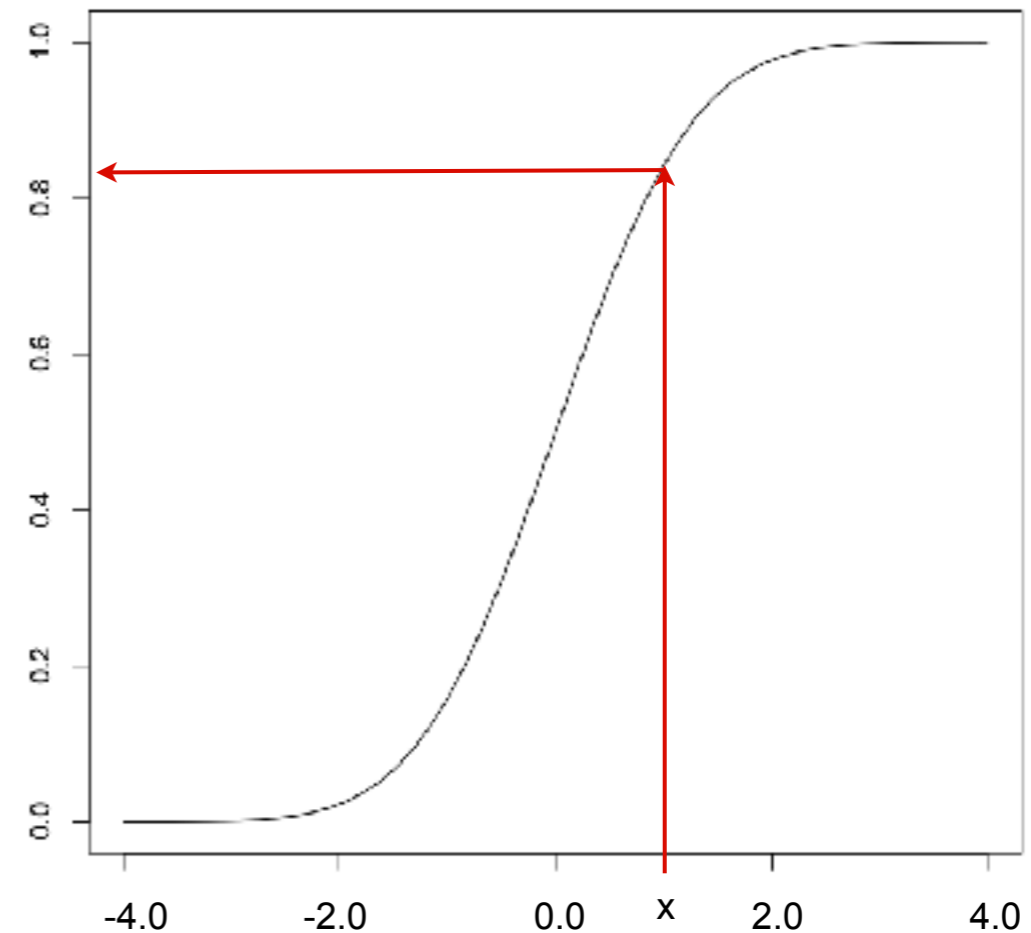
$x \in \mathbb{R}$

$$X \sim N(0, 1) \quad X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$:

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

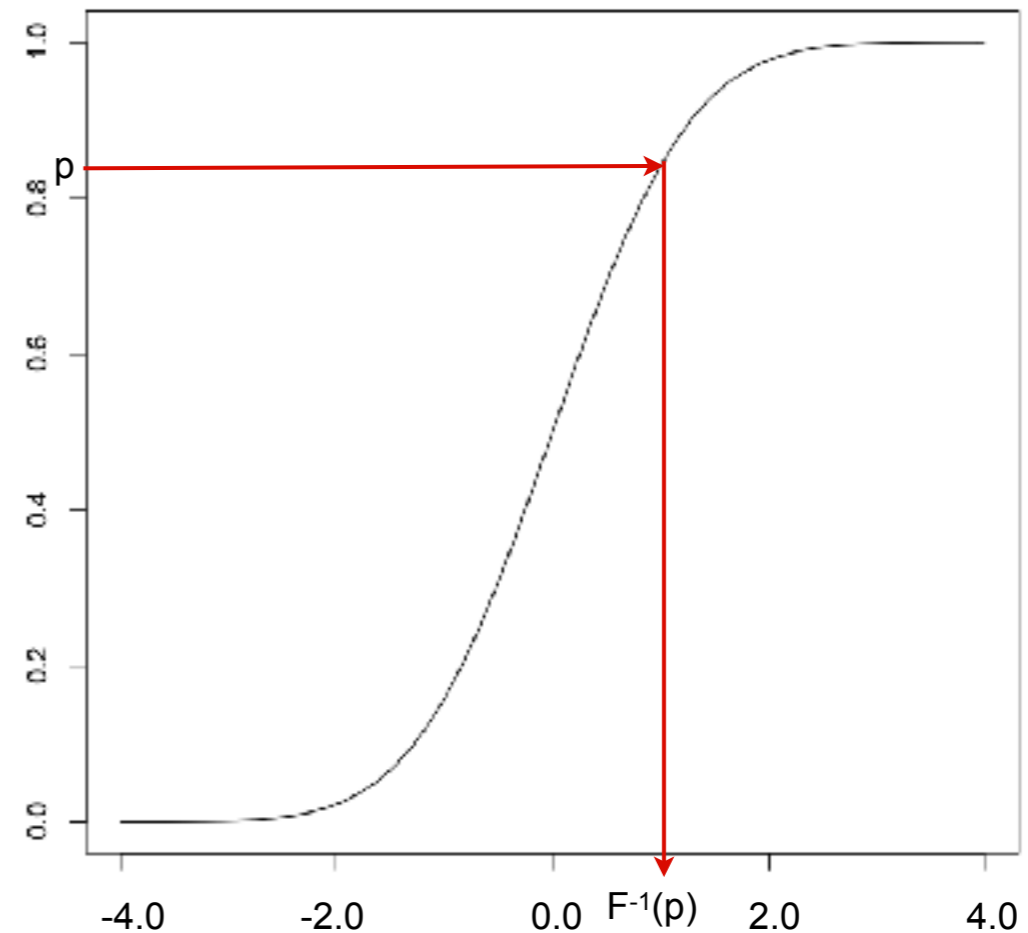
$x \in \mathbb{R}$

$$X \sim N(0, 1) \quad X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



$$u_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$:

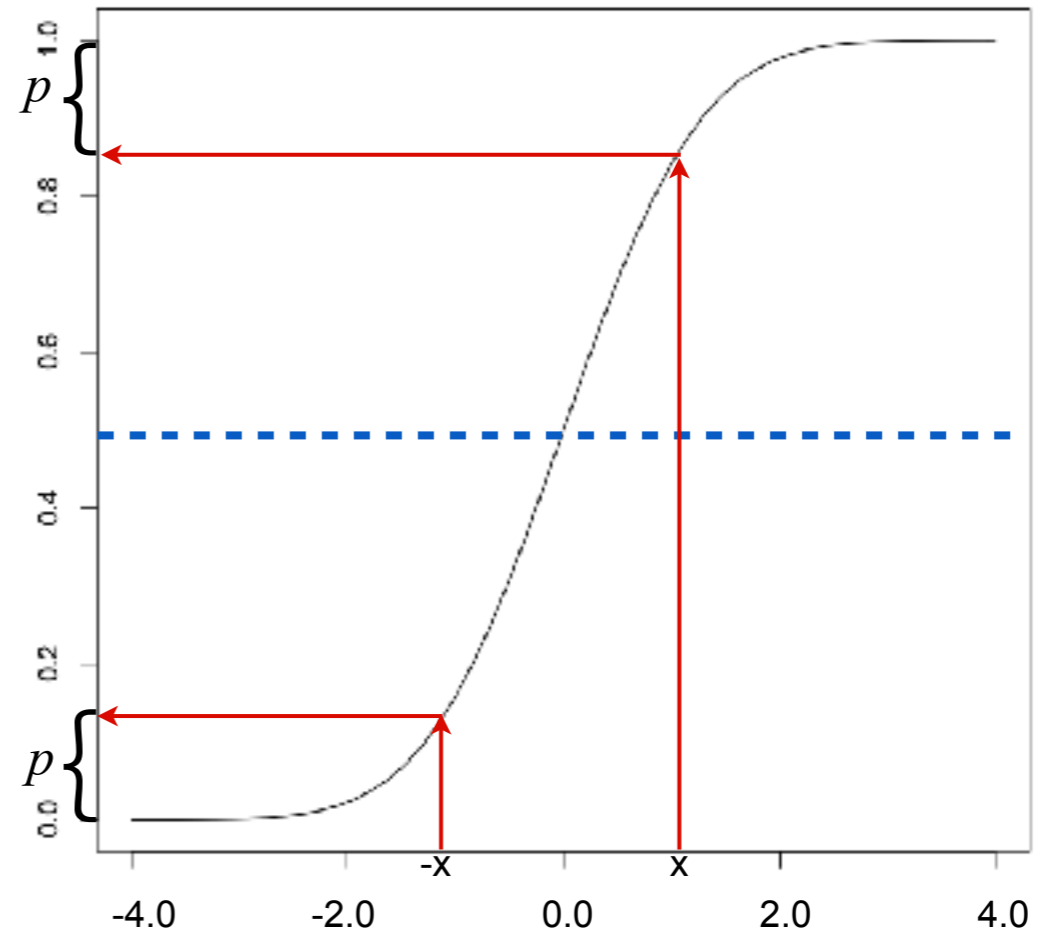
$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$x \in R$

Symetrie:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \Rightarrow \quad u(p) = -u(1-p)$$

Distribuční funkce $\Phi(x)$ je symetrická podle osy $y=0,5$.



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$:

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

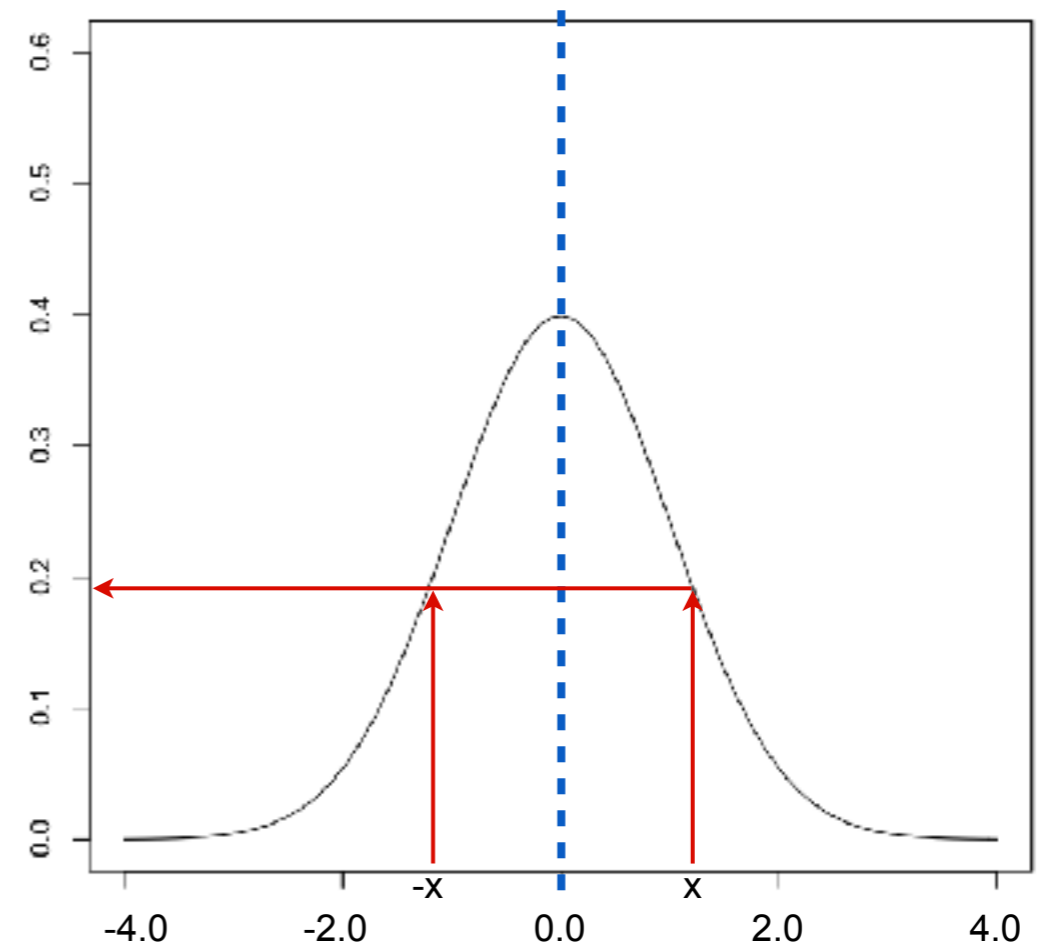
$x \in R$

Symetrie:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \Rightarrow \quad u(p) = -u(1-p)$$

Distribuční funkce $\Phi(x)$ je symetrická podle osy $y=0,5$.

$$f(-x) = f(x)$$



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

Obecné normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

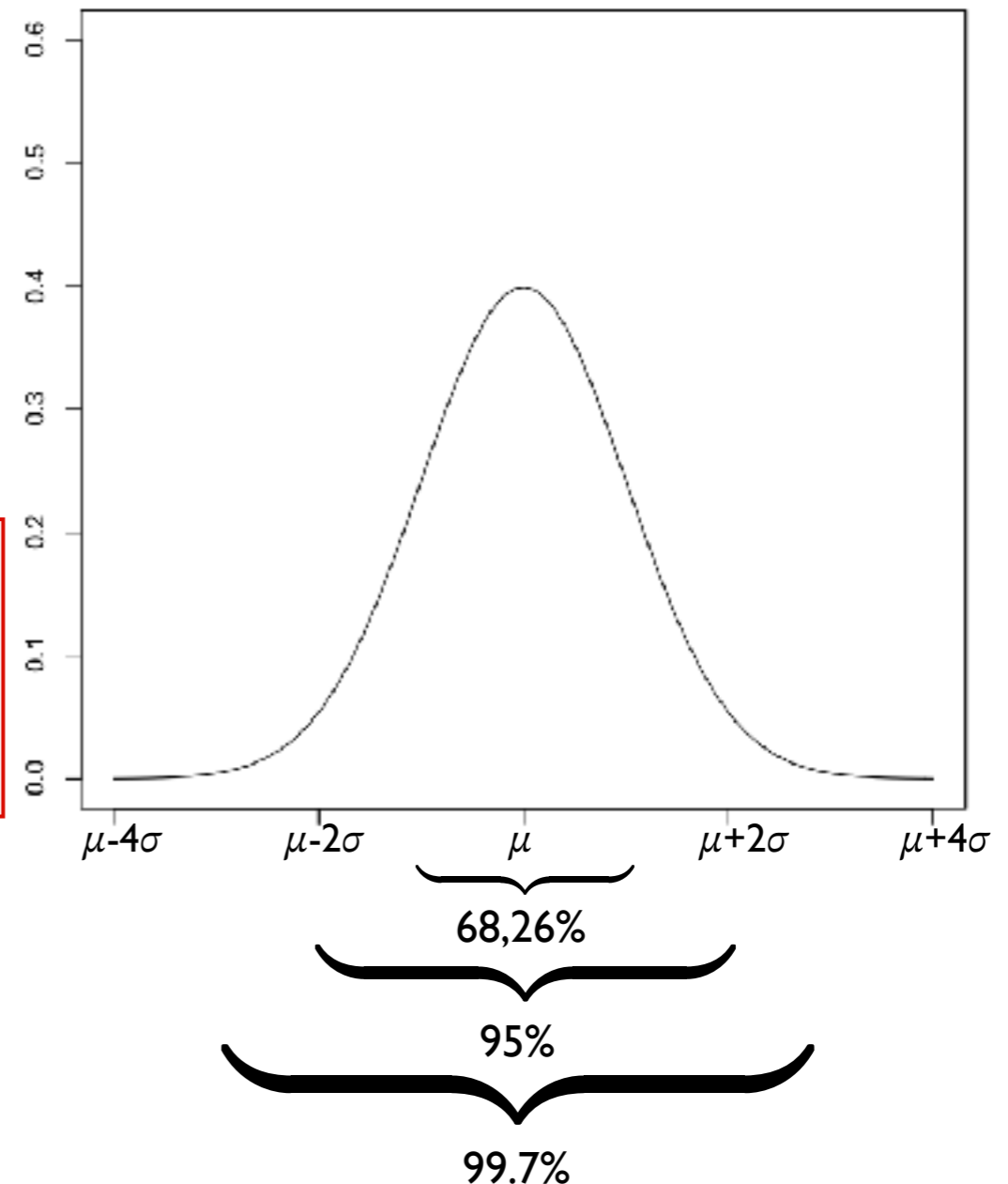
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$
$$Z \sim N(0, 1) \Rightarrow X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



$$F(x) = P(X \leq x) = P(X - \mu \leq x - \mu) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

Obecné normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Symetrie:

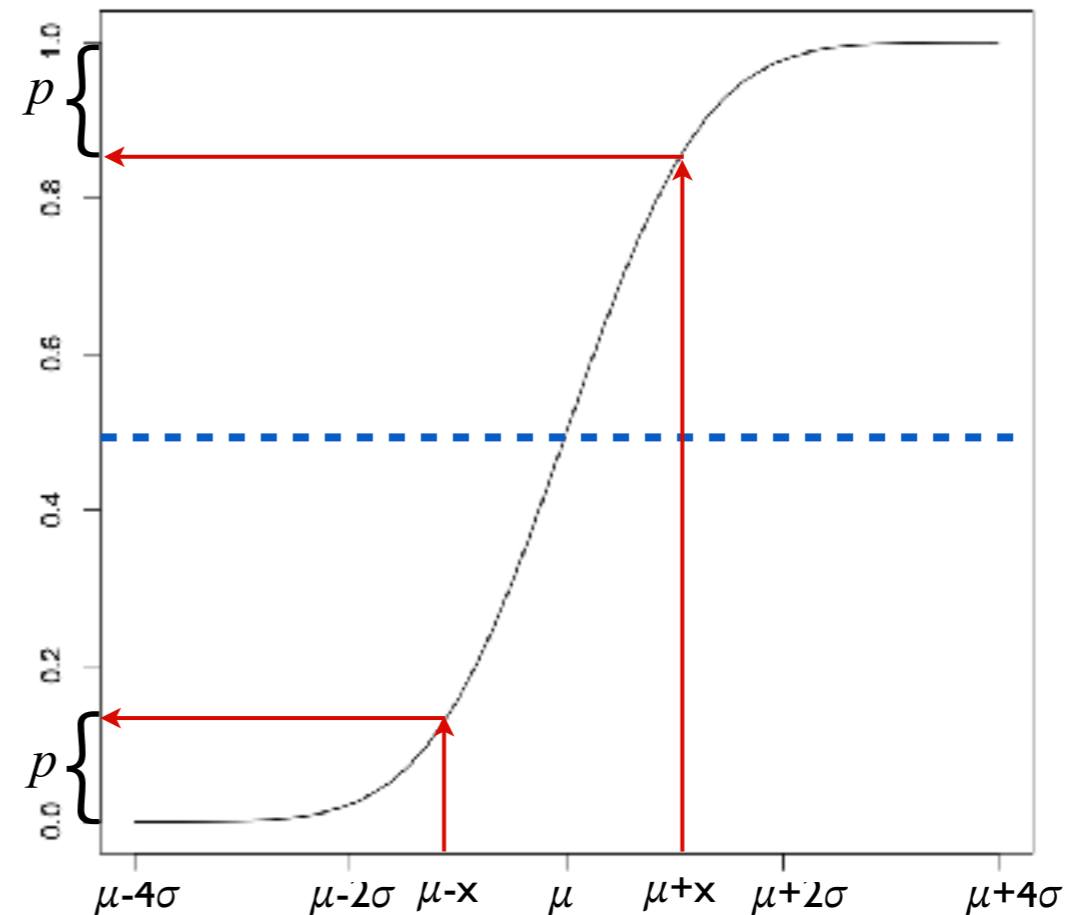
Distribuční funkce $F(x)$ je symetrická podle osy $y=0,5$.

$$F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)$$

ze symetrie hustoty plyne: $\tilde{x}_p = F^{-1}(p) = 2\mu - F^{-1}(1 - p) = 2\mu - \tilde{x}_{1-p}$

ze vztahu mezi $N(\mu, \sigma^2)$ a $N(0,1)$: $F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Rightarrow F^{-1}(p) = \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$



Spojité pravděpodobnostní modely

3. Model normálního rozdělení

Obecné normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

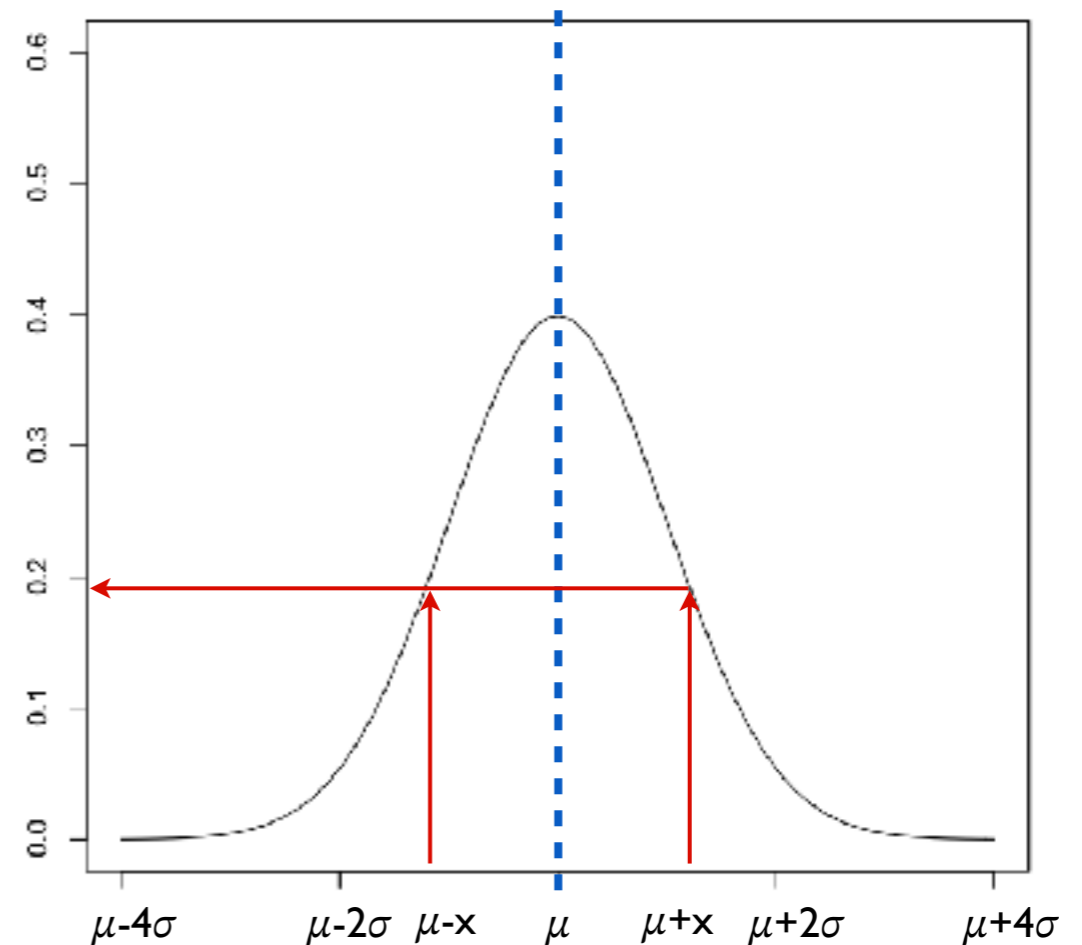
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Symetrie:

Distribuční funkce $F(x)$ je symetrická podle osy $y=0,5$.

$$F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)$$

$$\text{symetrie hustoty: } f(\mu - x) = f(\mu + x)$$



Příklad: Vyjádřete $P(|X - \mu| \leq x)$ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ pomocí distribuční funkce $\Phi(x)$.

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \leq x) &= F(\mu + x) - F(\mu - x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-x}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - (1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$



Spojité pravděpodobnostní modely

4. Modely odvozené z normálního rozdělení

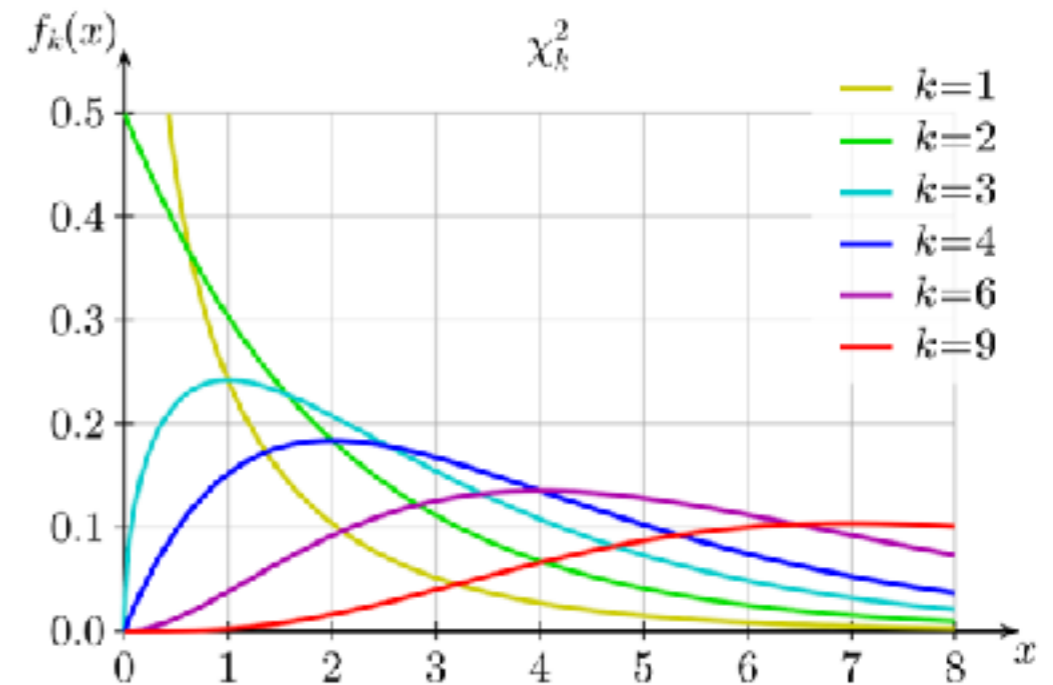
4.1 Model rozdělení součtu druhých mocnin normálně rozdělených náhodných veličin:

$$X \sim N(0, 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2(1)$$

$$X_i \sim N(0, 1) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad + \text{nezávislost}$$

$$\Rightarrow S_k^2 = \sum_{i=1}^k X_i^2 \sim \chi^2(k)$$

Pearsonovo (χ^2) rozdělení s k stupni volnosti



$$E(S_k^2) = k, \quad Var(S_k^2) = 2k$$



Spojité pravděpodobnostní modely

4. Modely odvozené z normálního rozdělení

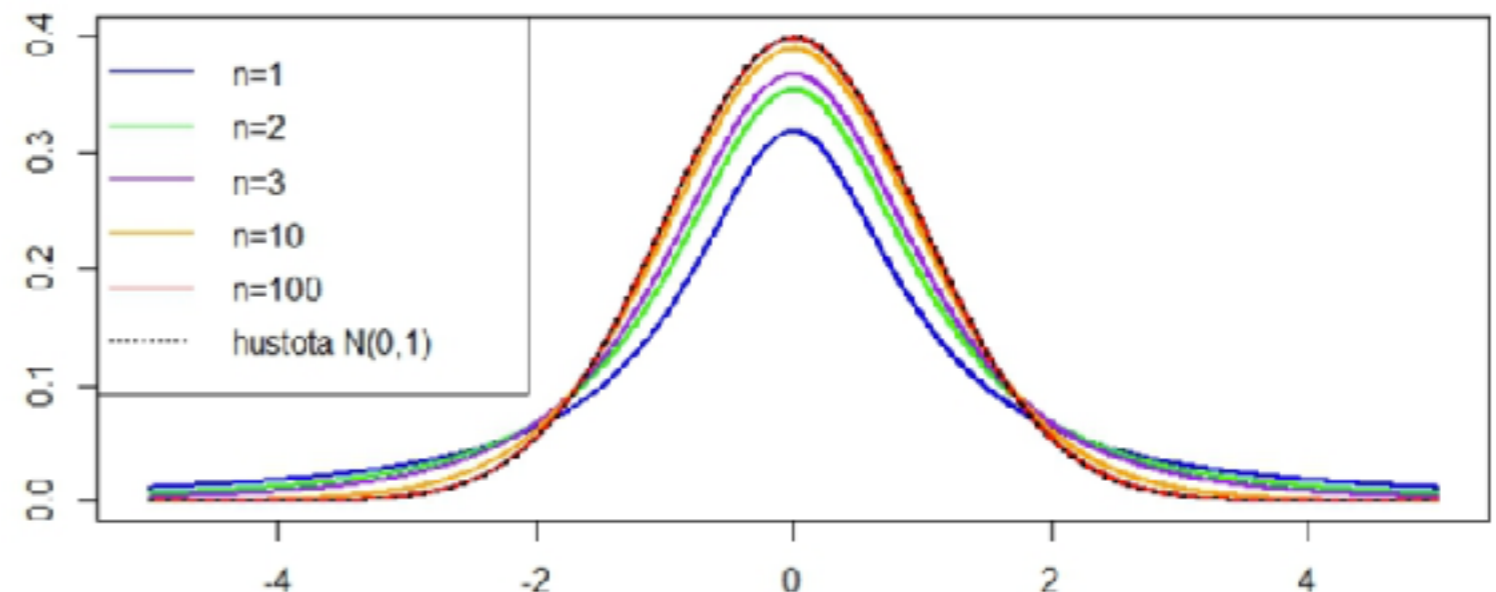
4.2 Model rozdělení podílu normálně rozdělené náhodné veličiny a veličiny s rozdělením chí-kvadrát:

Jsou-li U a V stoch. nezávislé n.v.:

$$U \sim N(0, 1), \quad V \sim \chi^2(n),$$

$$\Rightarrow T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim t(n)$$

Hustota Studentova t -rozložení s n stupni volnosti



Studentovo t -rozdělení o n stupních volnosti



Spojité pravděpodobnostní modely

4. Modely odvozené z normálního rozdělení

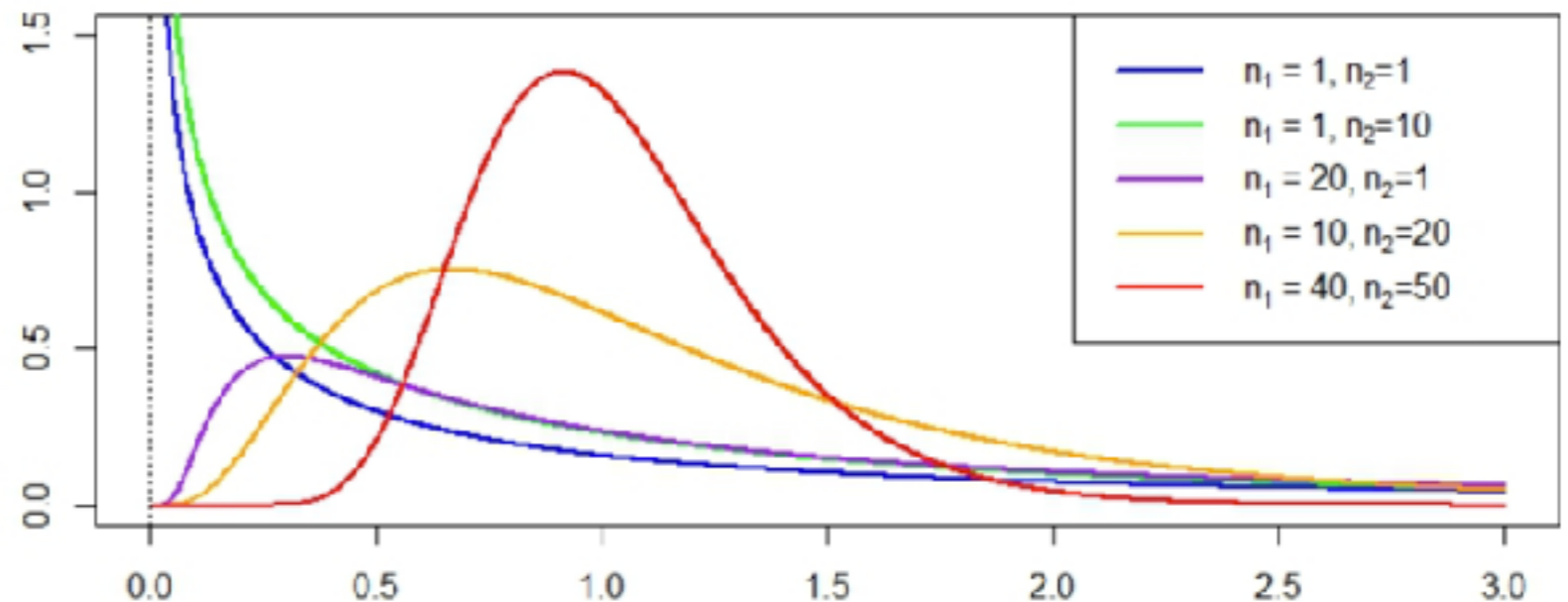
4.3 Model rozdělení podílu dvou náhodných veličin s rozdělením chí-kvadrát:

$X_i, Y_j \sim N(0, 1)$ i.i.d.

$$R_{m,n} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j^2} = \frac{nS_m^2}{mS_n^2}$$

$\sim F(m, n)$

Hustota Fisher-Snedecorova rozložení $F(n_1, n_2)$



Fischerovo-Snedecorovo rozdělení o m a n stupních volnosti



Spojité pravděpodobnostní modely

4. Modely odvozené z normálního rozdělení

4.4 Model logaritmicko-normálního rozdělení:

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2), \quad X = \exp(Y)$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0$$

$$E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2},$$

$$\text{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$$

Logaritmicko-normální rozdělení $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$

