Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

6. Model náhodných událostí v čase

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

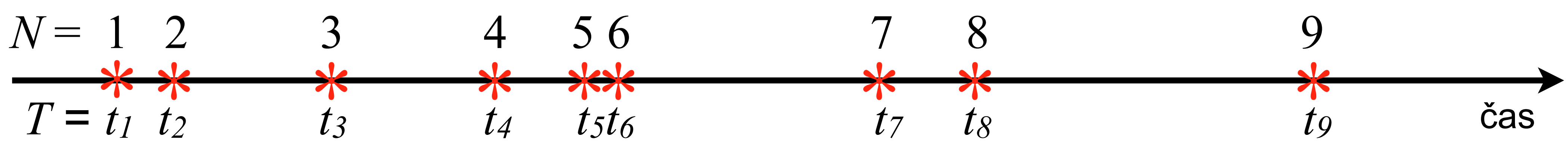
prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2023/2024

6. Model náhodných událostí v čase

Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

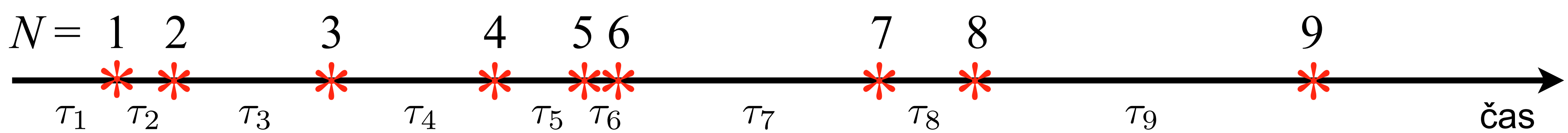
počet událostí do času t: $N(t)$ diskrétní náhodná veličina



čas výskytu i-té události: T_i spojitá náhodná veličina

Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

počet událostí do času t: $N(t)$ ← diskrétní náhodná veličina



doby mezi událostmi: $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ ← spojitá náhodná veličina

$$\lambda(t) = \frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$$

střední počet událostí za jednotku času

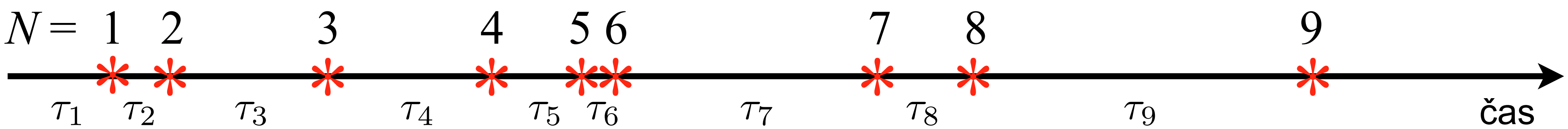
$$\bar{T}_i = \frac{t_i}{i} \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{T} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \frac{1}{\lambda}$$

střední doba mezi událostmi

λ je intenzita poruch, $1/\lambda$ je střední doba mezi poruchami

Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

počet událostí do času t: $N(t)$

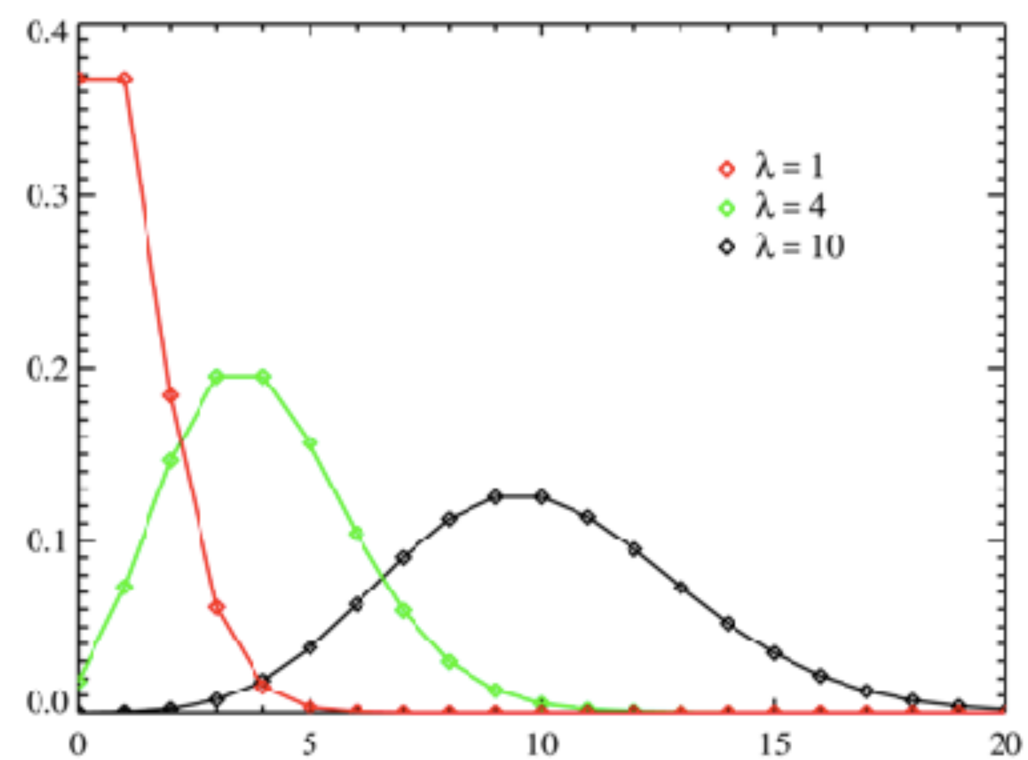


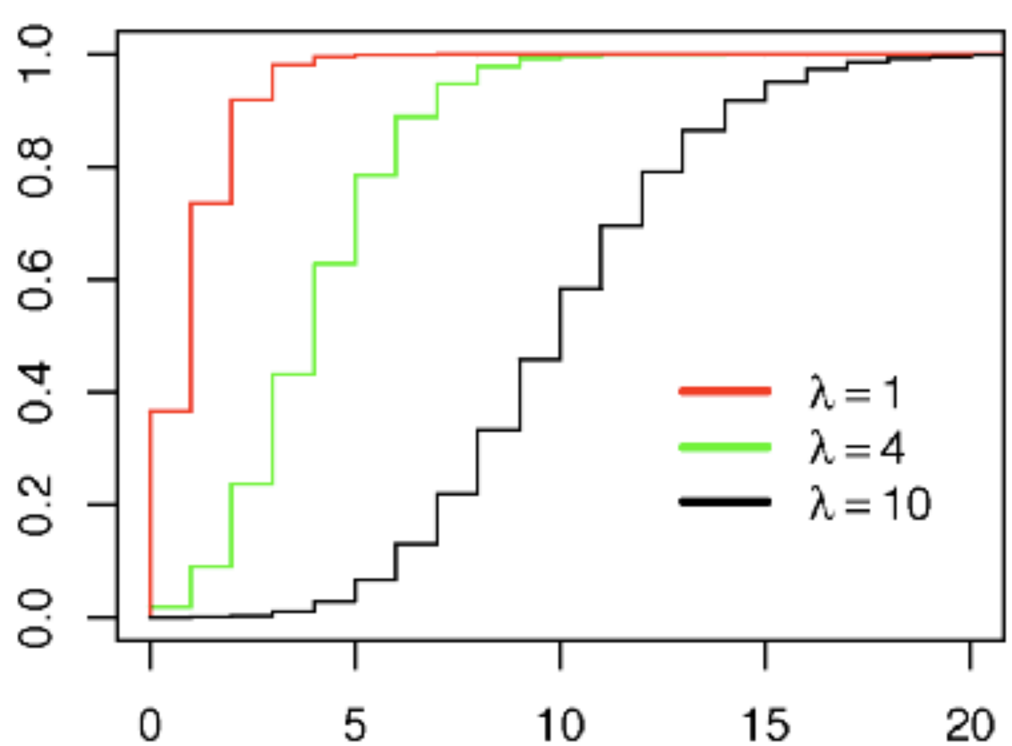
Jaká je pravděpodobnost, že za jednotku času nastane k událostí? $P(N=k)=?$

$$\boxed{P(N=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\dots,}$$

$$E(N)=Var(N)=\lambda.$$

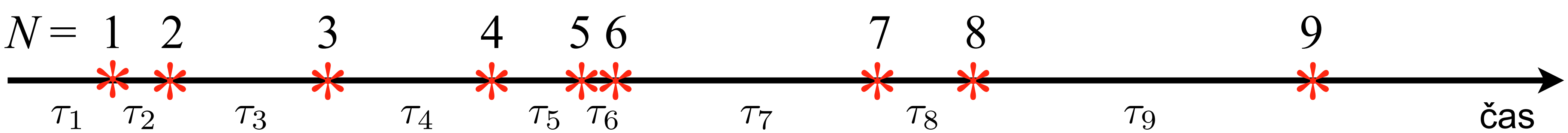
Poissonovo rozdělení Poiss(λ)





Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

počet událostí do času t: $N(t)$

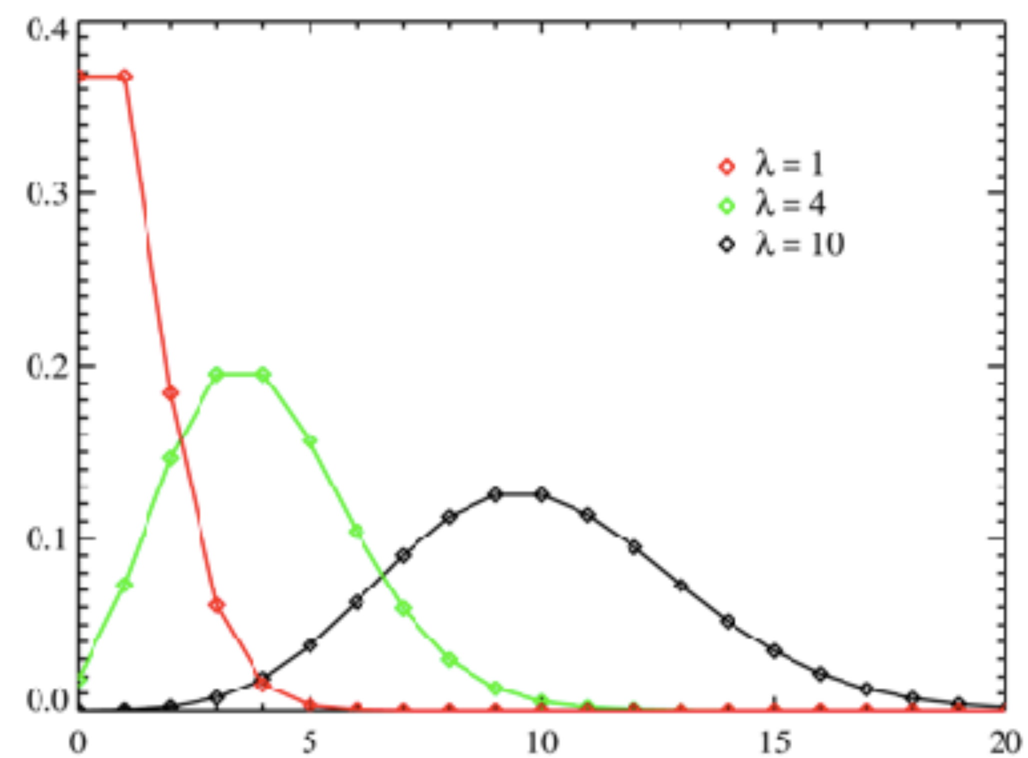


Jaká je pravděpodobnost, že za jednotku času nastane k událostí? $P(N = k) = ?$

$$\boxed{P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,}$$

$$E(N) = Var(N) = \lambda.$$

Poissonovo rozdělení Poiss(λ)

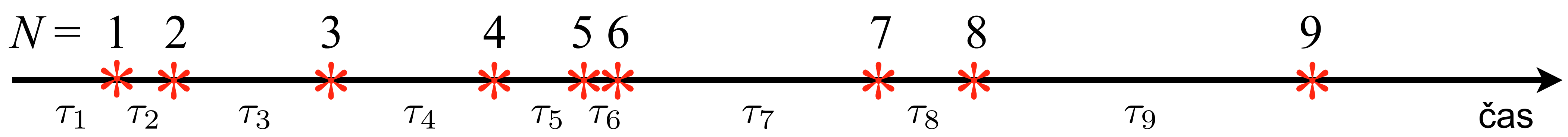


Jaká je pravděpodobnost, že za dobu t nastane k událostí? $P(N(t) = k) = ?$

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad t > 0, \qquad E(N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t.$$

Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

počet událostí do času t: $N(t)$



doby mezi událostmi: $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

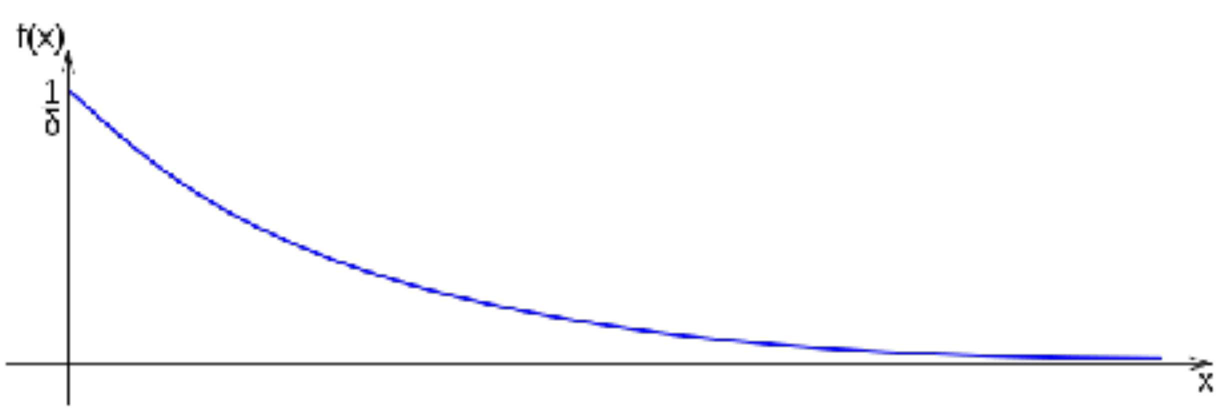
Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi událostmi nepřekročí hodnotu t ? $P(\tau \leq t) = ?$

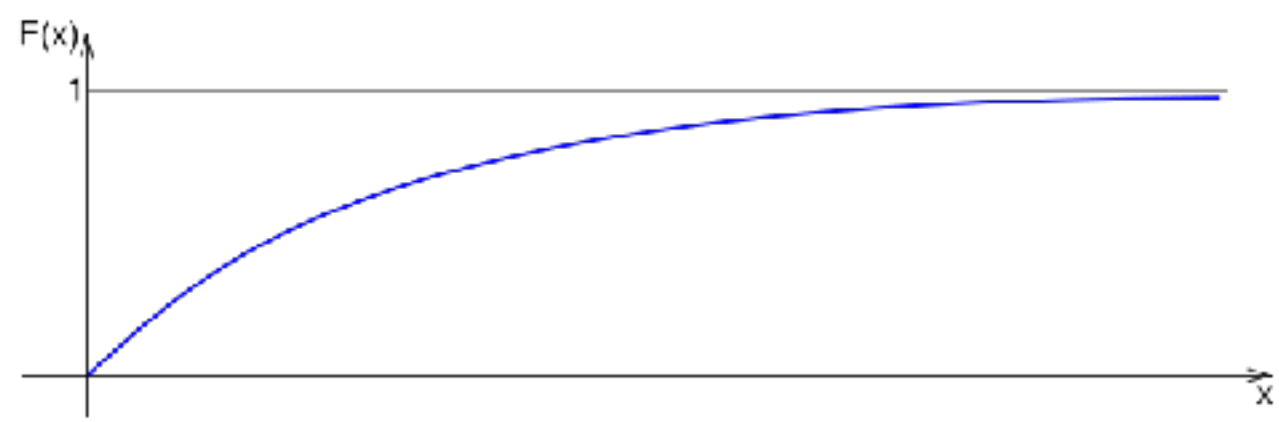
$$\boxed{P(\tau \leq t) = F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-\frac{t}{\delta}} & t \geq 0. \end{cases}}$$

$$E(\tau) = \delta, \quad Var(\tau) = \delta^2.$$

Exponenciální rozdělení Exp(δ)

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\delta}} \Rightarrow f(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{t}{\delta}}, \; t \geq 0$$





Příklad: Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat jako dobu do jeho poruchy (neopravuje se). Předpokládejme, že tato doba se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou θ = 28 700 hodin.

Úloha 1: S jakou pravděpodobností se ventilátor porouchá během prvních 100 hodin?

Úloha 2: **J**aká je pravděpodobnost, že ventilátor vydrží bez poruchy záruční dobu

Úloha 3: Jaká je intenzita poruchy?

Úloha 4: Jaká je „typická“ délka života ventilátoru?

Úloha 5: Jaká je střední doba života ventilátoru?

Úloha 6: Do jaké doby se porouchá v průměru 90 % všech ventilátorů?

Model exponenciálního rozdělení

Exponenciální rozdělení je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny, která popisuje dobu mezi nezávislými, náhodně se vyskytujícími událostmi v čase.

Přitom střední doba mezi těmito událostmi je rovna δ a střední počet těchto událostí za jednotku času je λ.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{\delta} = \lambda$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

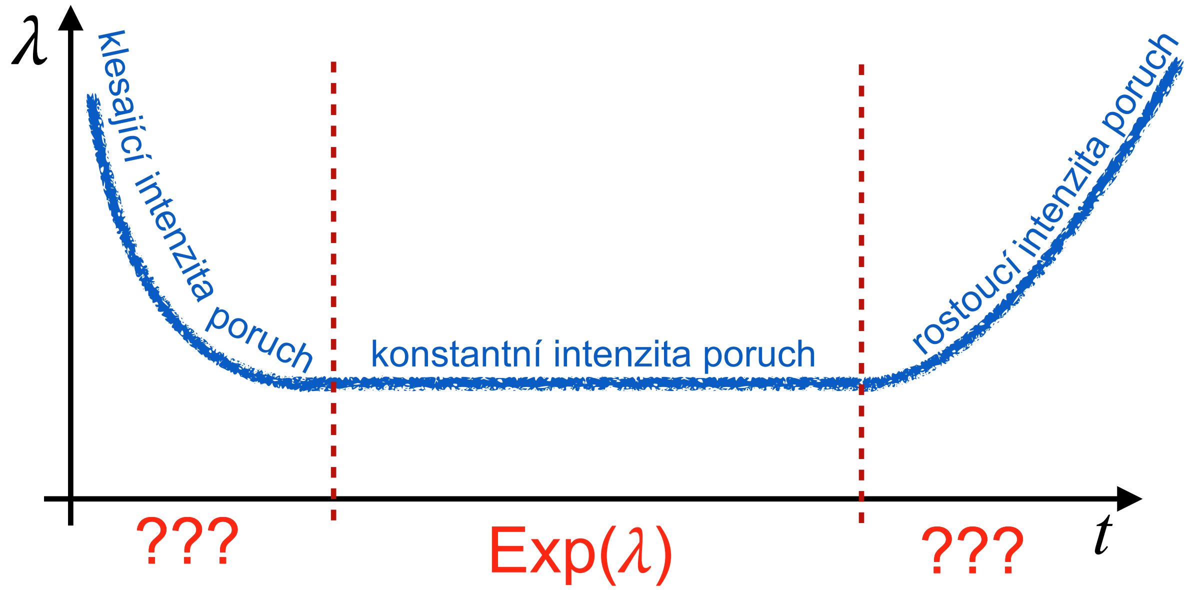
Exponenciální rozdělení nemá paměť!

$$\boxed{P(\tau \leq t + s | \tau \geq s)} = \frac{P\big((\tau \leq t + s) \ \& \ (\tau \geq s)\big)}{P(\tau \geq s)} = \frac{P\big(\tau \in \langle s, t + s \rangle\big)}{P(\tau \geq s)}$$

$$= \frac{F(t+s) - F(s)}{1 - F(s)} = \frac{1 - e^{-\frac{t+s}{\delta}} - 1 + e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} = \frac{e^{-\frac{s}{\delta}} - e^{-\frac{t}{\delta}} e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{t}{\delta}} = F(t) \boxed{= P(\tau \leq t)}$$

Modelování doby života (doby do poruchy)



$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}, \quad t \in R$$

Intenzita poruchy

Pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v čase $t+\varepsilon$, když víme, že se do doby ε neporouchalo (pro hodně malá ε) je rovna přibližně $\varepsilon\lambda(t)$.

Exponenciální rozdělení: $$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-(1-e^{-\lambda t})} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda, \quad t \geq 0.$$

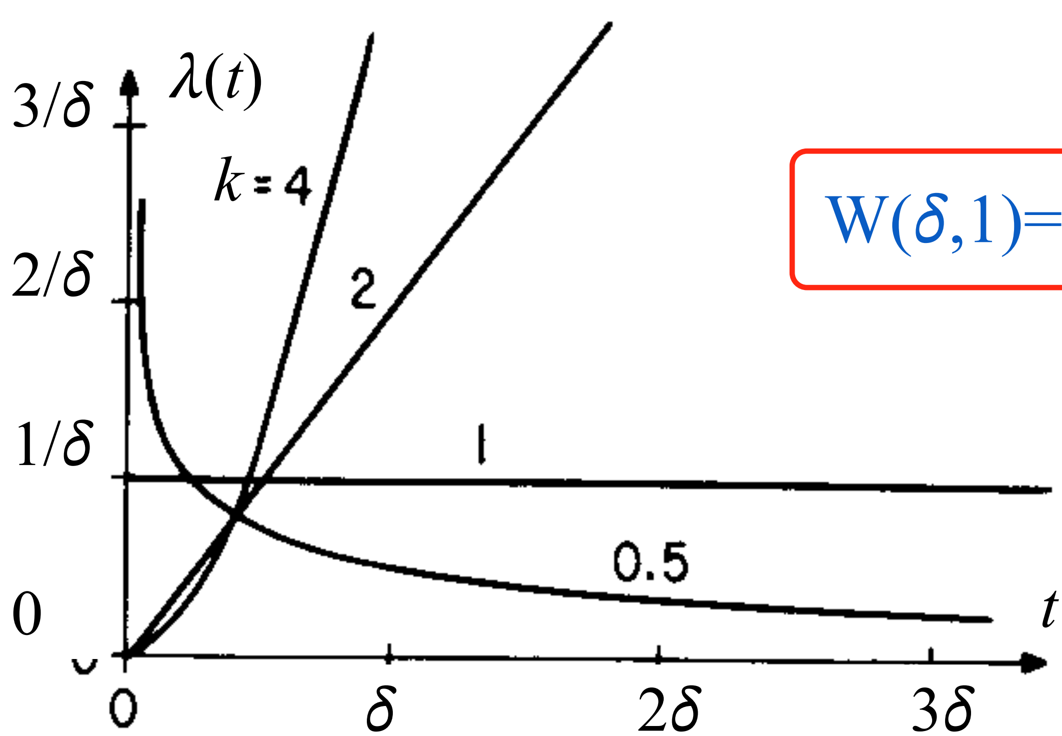
Weibullovo rozdělení   W(δ,k)

$$P(\tau \le t) = F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^k} & t \ge 0. \end{cases}$$

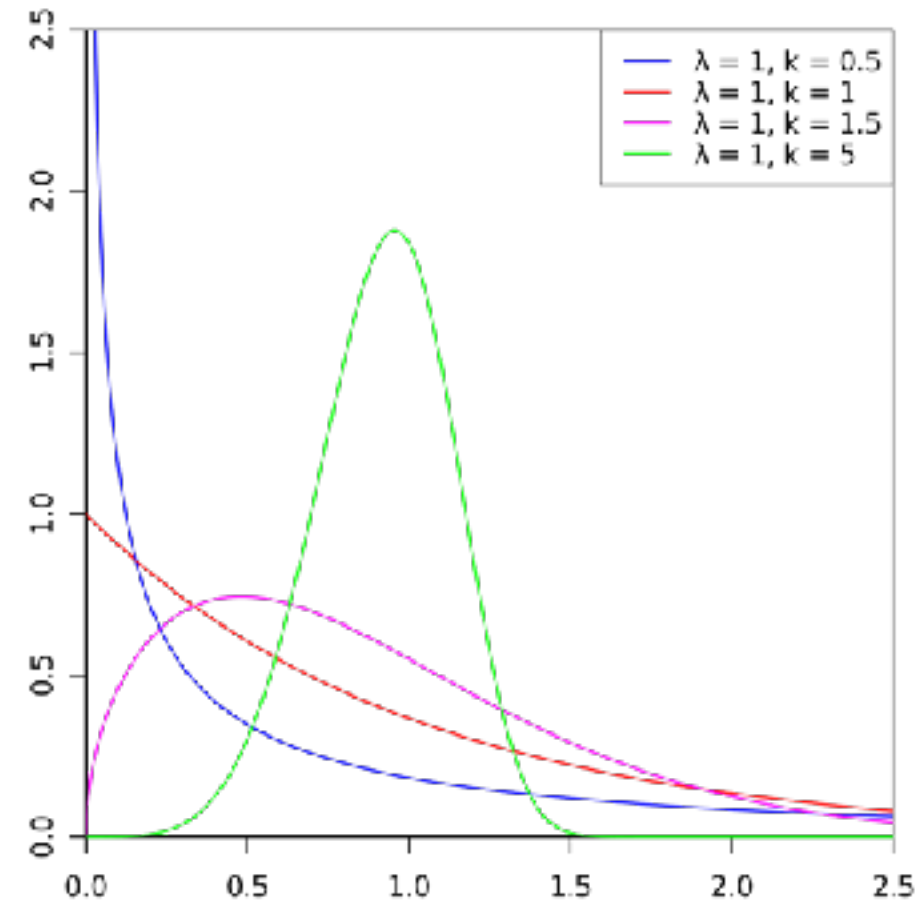
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \left(\frac{t}{\delta}\right)^{k-1} \frac{k}{\delta} e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^k} & t \ge 0. \end{cases}$$

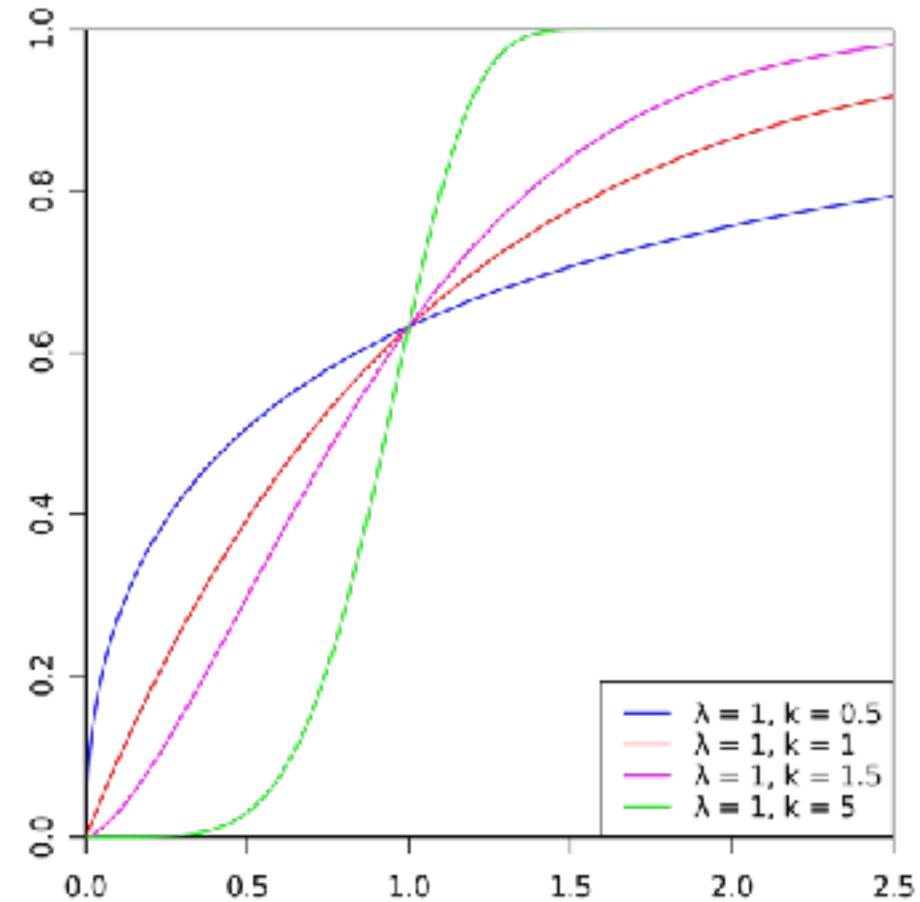
$$E(\tau) = \delta\Gamma(\frac{1}{k} + 1),$$

$$Var(\tau) = \delta^2 \left\{\Gamma(\frac{2}{k} + 1) - \left[\Gamma(\frac{2}{k} + 1)\right]^2\right\}$$

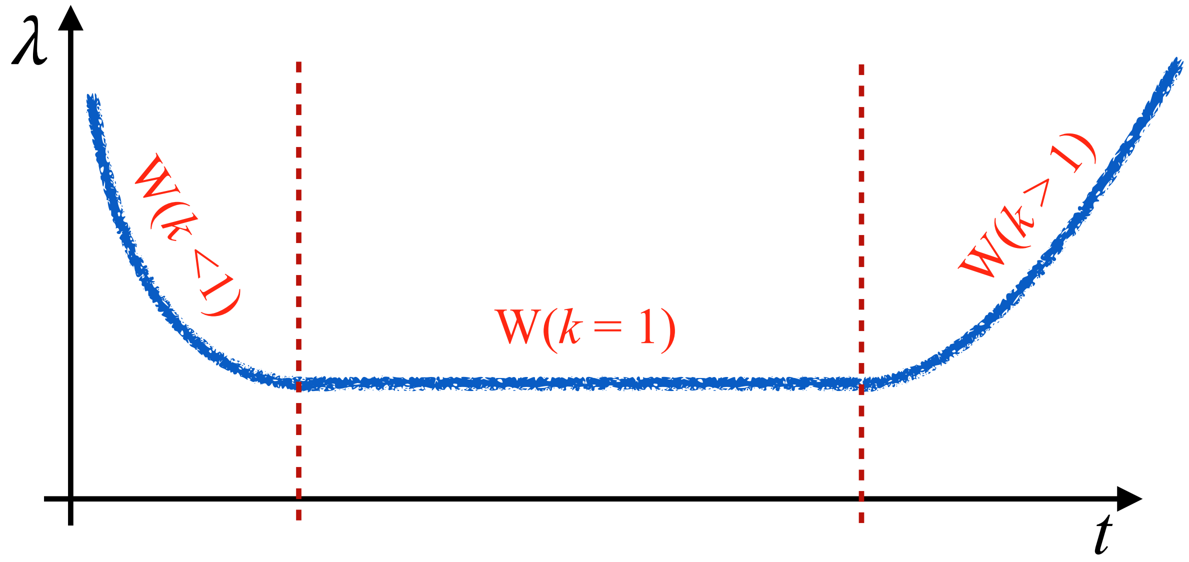


W(δ,1)=Exp(δ)





Modelování doby života (doby do poruchy)

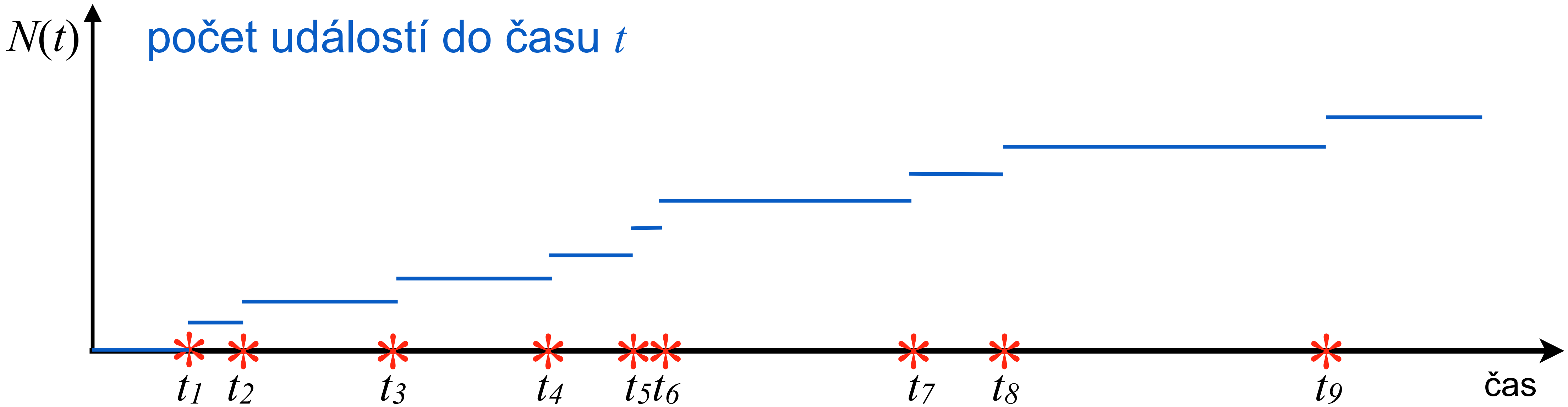


$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t \in R$$

Intenzita poruchy

Pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v čase $t+\varepsilon$, když víme, že se do doby ε neporouchalo (pro hodně malá ε) je rovna přibližně $\varepsilon\lambda(t)$.

Poissonův proces - model vzniku náhodných událostí v čase



Poissonův proces $\{N(t);\ t \geq 0\}$ je funkce dvou proměnných

$N: \quad \big(\Omega, \langle 0, \infty)\big) \quad \to \quad \mathbb{N}$ taková, že

1) $N(0) = 0$,

2) $N(t)$ má nezávislé přírůstky, to znamená, že pro každé $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n$ a všechna $i = 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}$ jsou náhodné veličiny $N(t_n) - N(t_{n-1}), \ldots, N(t_1) - N(t_0)$ stochasticky nezávislé,

3) přírůstky $N(t+h) - N(t)$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem λh.

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{t_i \leq t\}} \qquad\qquad t_i = \inf\{t \geq 0 : N(t) = k\}, k = 1, 2, \ldots$$

Úloha: Jaké rozdělení pravděpodobnosti má doba mezi k událostmi?

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad h_n(z) = ?$$

a) Doby mezi dvěma událostmi mají exponenciální rozdělení s parametrem λ.

b) Doba mezi třemi událostmi je součtem dvou dob s exponenciálním rozdělením, tedy pro $k = 2$:

$$H_2(z) = P(Z \le z) = P(X_1 + X_2 \le z) = \iint_{x_1+x_2\le z} f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_0^z\int_0^{z-x_1} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_1}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

$$= \lambda^2\int_0^z \mathrm{e}^{-\lambda x_1}\int_0^{z-x_1}\mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \cdots = 1-\mathrm{e}^{-\lambda z}-\lambda z\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

$$h_2(z) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda z}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda z}+\lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z} = \lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z}, \quad z\ge 0 \qquad h_2(z)=0,\ z<0.$$

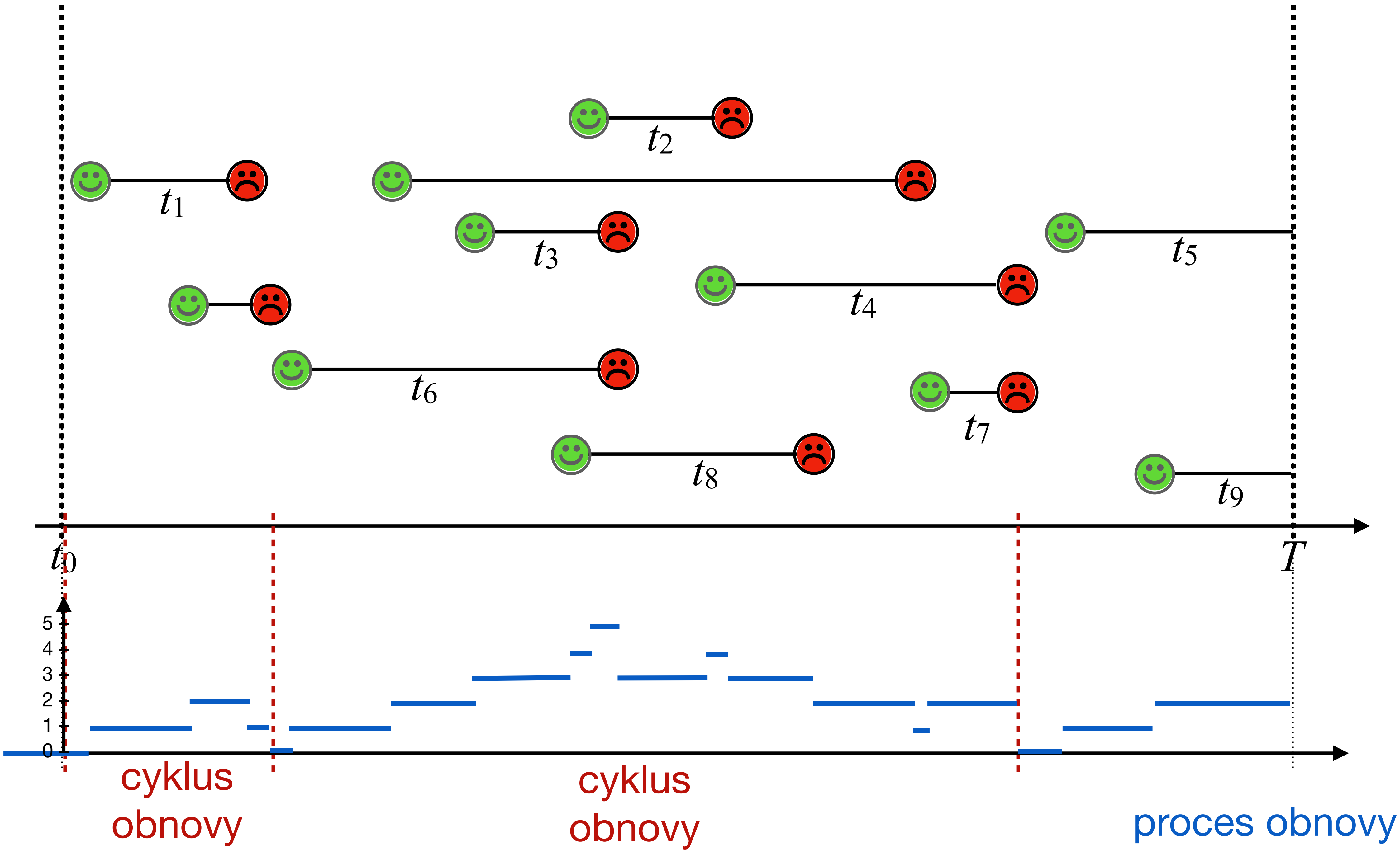
c) Pro $k = 3$: ....

d) Postup lze zobecnit pro k :

$$\boxed{\begin{aligned} h_k(z) &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}z^{k-1}e^{-\lambda z}, \quad z\ge 0 \\ h_k(z) &= 0,\ z<0. \end{aligned}}$$

Erlangovo rozdělení pravděpodobnosti

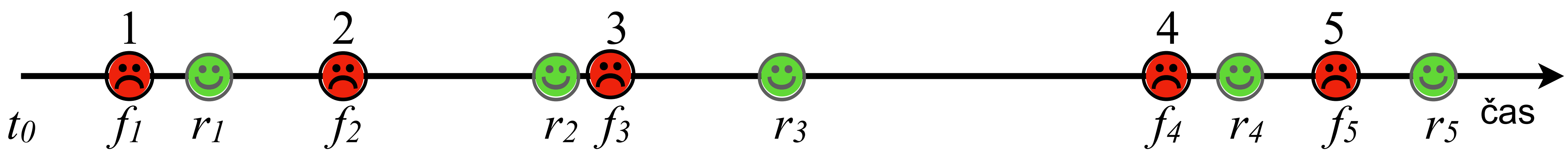
Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)

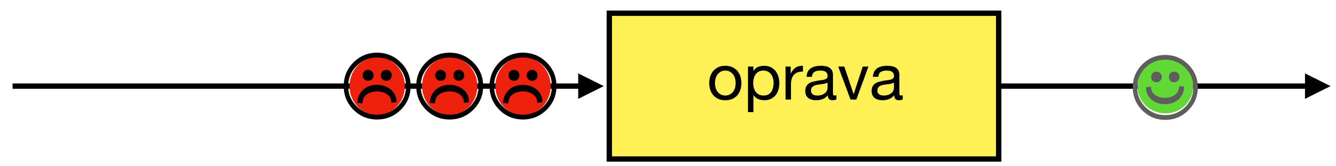


Markovská vlastnost:

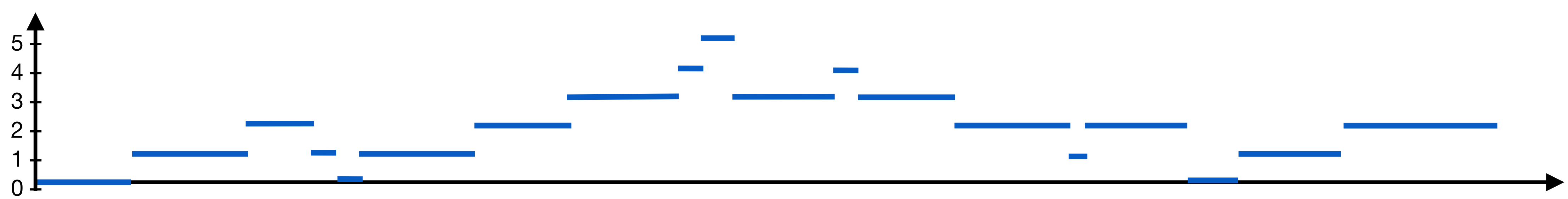
$$P(X(t) = n \,|\, X(t-1) = m,\, X(t-2) = m_2,\, \ldots,\, X(0) = m_0\,) = P(X(t) = n \,|\, X(t-1) = m\,)$$

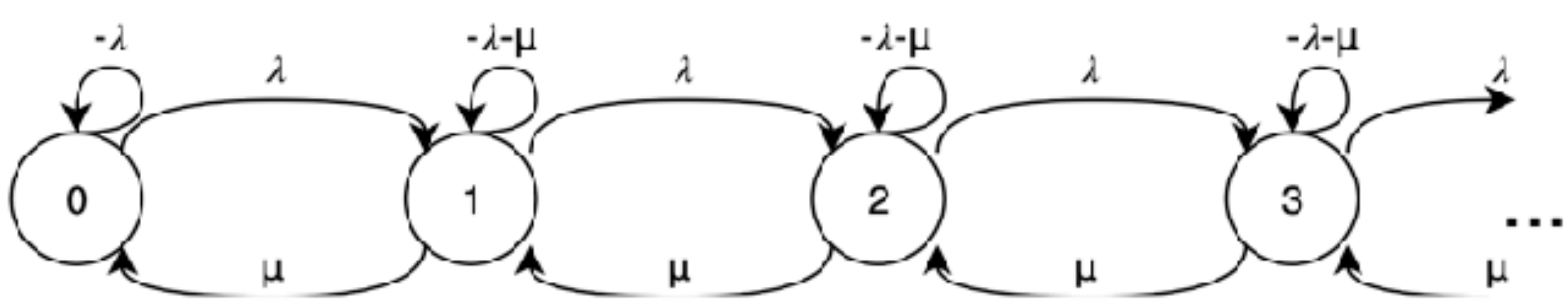
Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)



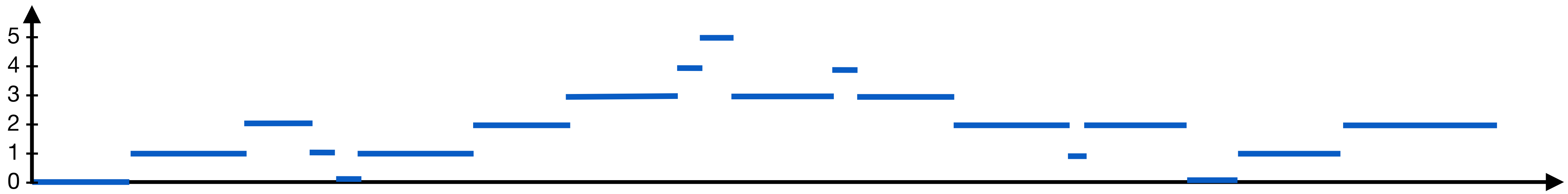


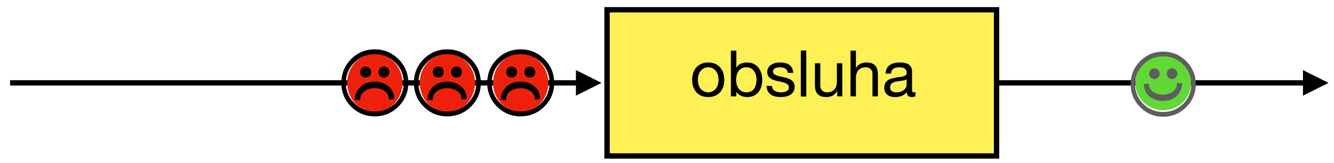
- zakázky přicházejí v náhodném proudu (Poissonův proces) s intenzitou λ
- řadí se do fronty podle nějakého frontového režimu (FIFO, LIFO, Random)
- postupně jsou zpracovávány v obslužné stanici a po zpracování opouštějí systém
- doba zpracování má exponenciální rozdělení s intenzitou μ
- počet zakázek v systému má Markovskou vlastnost





Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)





- zakázky přicházejí v náhodném proudu (Poissonův proces) s intenzitou λ
- řadí se do fronty podle nějakého frontového režimu (FIFO, LIFO, Random)
- postupně jsou zpracovávány v obslužné stanici a po zpracování opouštějí systém
- doba zpracování má exponenciální rozdělení s intenzitou μ
- počet zakázek v systému má Markovskou vlastnost

$$P(N=n) = p_n = \frac{\mu-\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1-\rho)\rho^n \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$ intenzita obsluhy

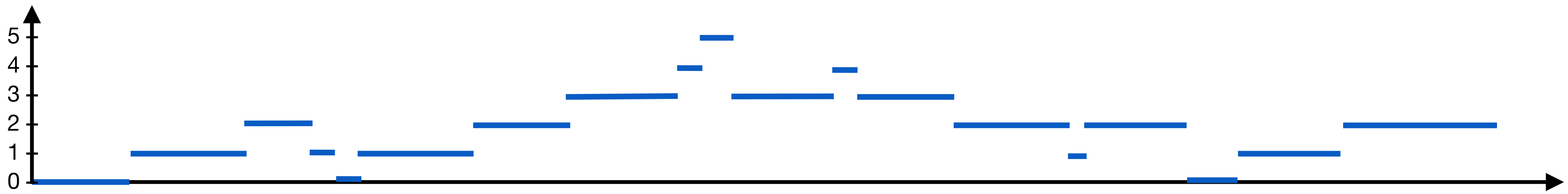
$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho < 1$$ - střední počet požadavků v systému

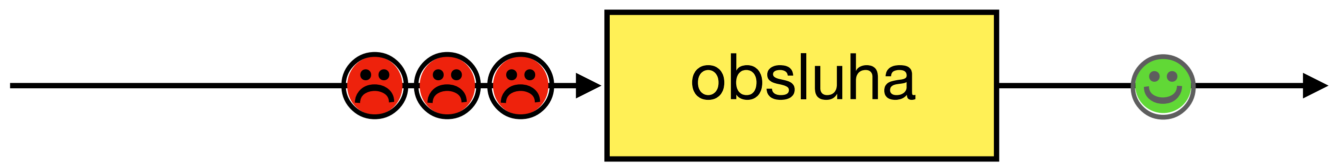
$$E(N_Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) p_n = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$ - střední počet požadavků ve frontě

$$E(N_S) = E(N) - E(N_Q) = \rho$$ - střední počet požadavků v obsluze

$$P(N_Q > 0) = \rho, \quad P(N_Q = 0) = 1-\rho$$ - pravděpodobnost čekání

Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)





- zakázky přicházejí v náhodném proudu (Poissonův proces) s intenzitou λ
- řadí se do fronty podle nějakého frontového režimu (FIFO, LIFO, Random)
- postupně jsou zpracovávány v obslužné stanici a po zpracování opouštějí systém
- doba zpracování má exponenciální rozdělení s intenzitou μ
- počet zakázek v systému má Markovskou vlastnost

$$P(N=n) = p_n = \frac{\mu-\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho \; < 1$$

$$E(W) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

- střední doba strávená v systému

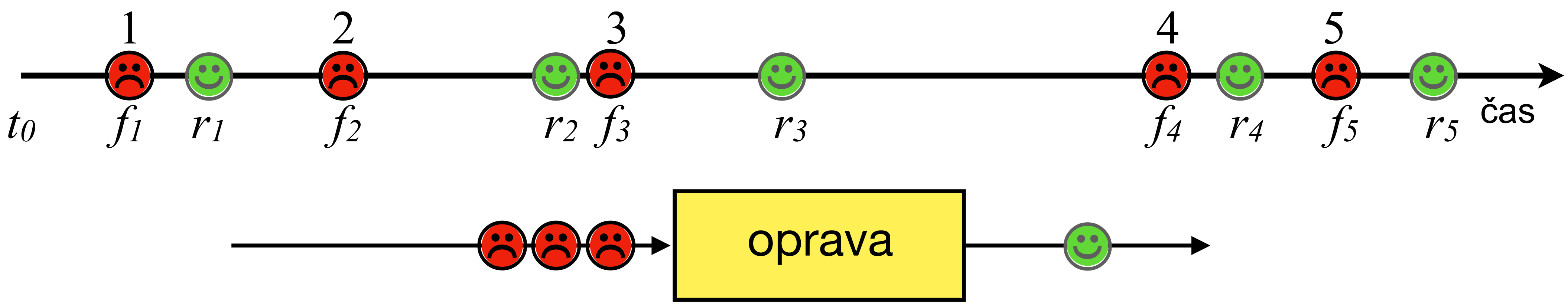
$$E(W_Q) = \frac{E(N_Q)}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

- střední doba čekání ve frontě

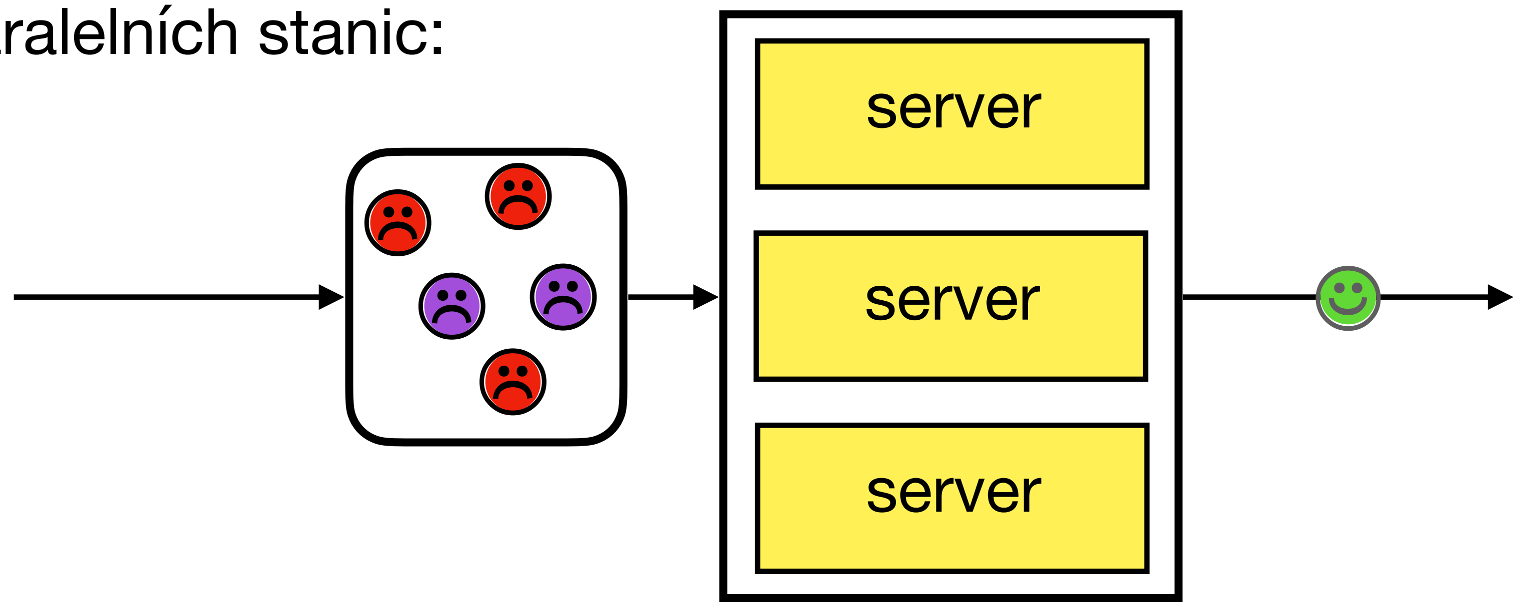
$$E(W_S) = E(W) - E(W_Q) = \frac{1}{\mu}$$

- střední doba strávená v obsluze

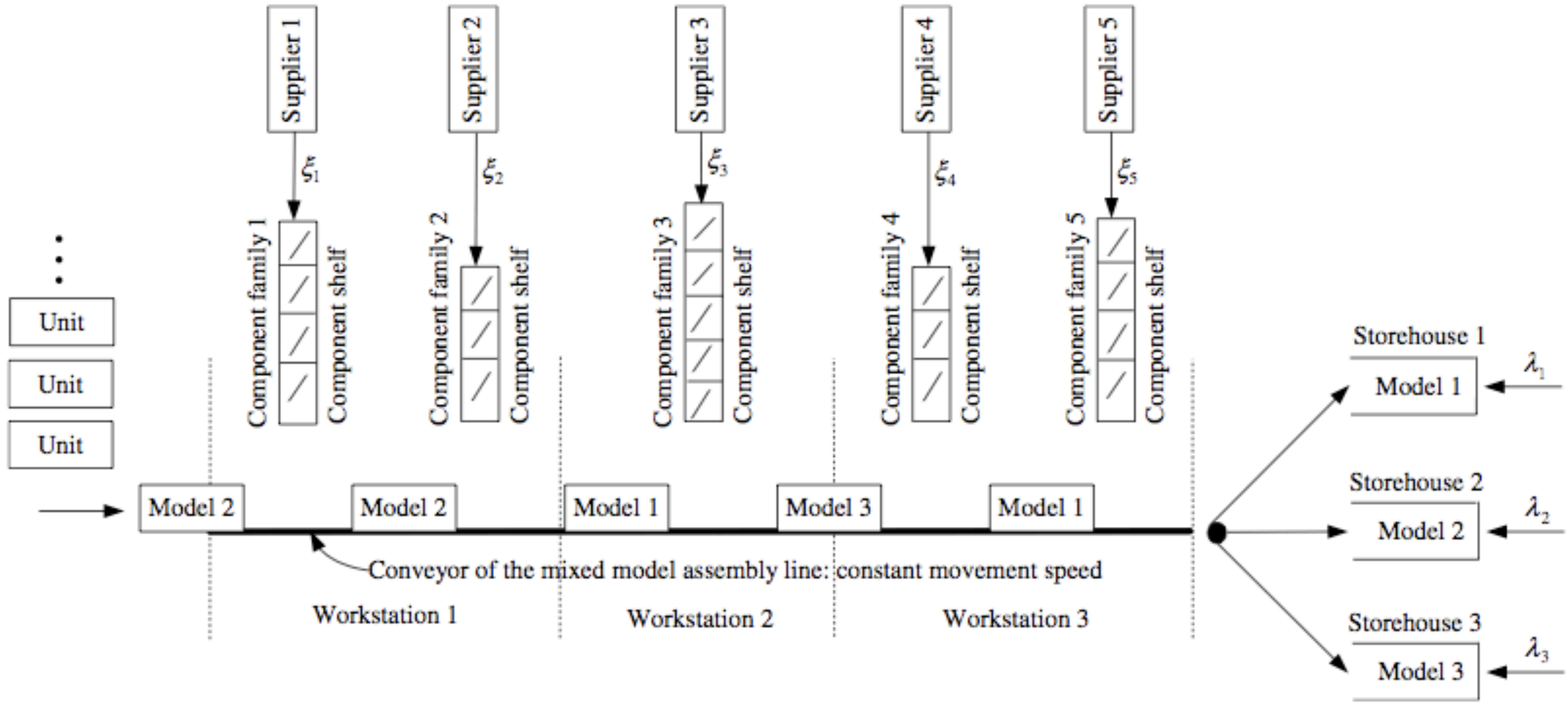
Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)



k paralelních stanic:



Tandemová síť (montážní linka)


Supplier 1
Supplier 2
Supplier 3
Supplier 4
Supplier 5
ξ_1
ξ_2
ξ_3
ξ_4
ξ_5
Component family 1
Component family 2
Component family 3
Component family 4
Component family 5
Component shelf
Unit
Unit
Unit
Model 2
Model 2
Model 1
Model 3
Model 1
Conveyor of the mixed model assembly line: constant movement speed
Workstation 1
Workstation 2
Workstation 3
Storehouse 1
Model 1
λ_1
Storehouse 2
Model 2
λ_2
Storehouse 3
Model 3
λ_3