Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

7. Zákony velkých čísel a náhodné posloupnosti

FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

ak. rok 2024/2025

7. Zákony velkých čísel a náhodné posloupnosti

Klíčové pojmy:

- autokorelační funkce

Klíčové vztahy:

- různé druhy konvergence posloupnosti náhodných veličin (skoro jistě, v pravděpodobnosti, v distribuci)
- Slabý a silný zákon velkých čísel;
- Čebyševova nerovnost;
- Centrální limitní věta;
- stacionarita procesu (slabá, silná);
- modely AR(k) a MA(n);
- Vyhlazování časové řady, dekompozice;

Náhodná posloupnost

Uvažujme posloupnost náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n, \ldots$

$$X : \Omega \times N \longrightarrow R$$

Systém konečněrozměrných distribučních funkcí:

$$F(x_1, \ldots, x_n; i_1, \ldots, i_n) = P(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n)$$

symetrie: $F(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}; i_1, \ldots, i_n) = F(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}; j_1, \ldots, j_n)$

pro libovolnou permutaci $(j_1,\ldots,j_n)$ čísel $(i_1,\ldots,i_n)$

(nezáleží na pořadí)

konzistence:

$$\lim_{x_n \to \infty} F(x_1, \ldots, x_n; i_1, \ldots, i_n) = F(x_1, \ldots, x_{n-1}; i_1, \ldots, i_{n-1})$$

Konvergence posloupnosti náhodných veličin

1) Konvergence skoro jistě: $P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$ $\qquad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} X$

silná konvergence, konvergence skoro všude

2) Konvergence v pravděpodobnosti: $\qquad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left[||X_n - x|| > \epsilon\right] = 0$$

slabá konvergence, konvergence podle míry

3) Konvergence v distribuci: $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(x)$ $\qquad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$

4) Konvergence podle kvadratického středu: $\qquad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{E^2} X$

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

konvergence v L_p normě pro p=2

Platí

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \qquad\qquad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$$

Zákony velkých čísel

Slabý zákon velkých čísel:

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje slabý zákon velkých čísel, jestliže platí

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Čebyševova nerovnost:

Pro libovolnou náhodnou veličinu X platí: $\quad \forall \varepsilon > 0 : P\big(|x - E(X)| > \varepsilon\big) \leq \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

Čebyševova věta:

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou nezávislých náhodných veličin, které mají konečné druhé momenty a platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = 0.$$

Potom tato posloupnost splňuje slabý zákon velkých čísel.

(Důkaz pomocí Čebyševovy nerovnosti: $\forall \varepsilon > 0 : \ P(|Y_n - EY_n| > \varepsilon) \leq \dfrac{VarY_n}{\varepsilon^2}$.)

Zákony velkých čísel

Označme $$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)$$

$$\begin{aligned} EY_n &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{E(X_i - EX_i)}_{=0} = 0 \\ VarY_n &= Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)\right] = \frac{1}{n^2}Var\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)\right] \\ &\overset{nez.}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i - EX_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}VarX_i \end{aligned}$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) - 0\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{VarY_n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}VarX_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{podle předp.}} 0,$$

$$\forall\varepsilon > 0: \;\; P(|Y_n - EY_n| > \varepsilon) \leq \frac{VarY_n}{\varepsilon^2}.$$

Zákony velkých čísel

Bernoulliova věta:

Nechť náhodná veličina Y_n je rovna počtu úspěchů v posloupnosti nezávislých alternativních pokusů délky n, ve které je pravděpodobnost úspěchu rovna číslu $\theta \in (0,1)$. Potom posloupnost $Z_n = \frac{1}{n} Y_n$ relativních četností úspěchů konverguje podle pravděpodobnosti k θ, tj.

$$Z_n = \frac{1}{n} Y_n \quad \xrightarrow[n \to \infty]{P} \quad \theta.$$

Chinčinova věta (slabý zákon velkých čísel):

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením s konečnou střední hodnotou $EX_i = \mu$. Potom $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje slabý zákon velkých čísel, tj. pro posloupnost průměrů platí

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = Y_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} \mu.$$

Silný zákon velkých čísel:

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel, jestliže platí

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) = 0 \right) = 1.$$

Centrální limitní věty

Centrální limitní věta (Lindeberg-Lévy):

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením se střední hodnotou μ a nenulovým rozptylem σ^2. Potom náhodné veličiny

$$U_{\overline{X}_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)}{\sigma\sqrt{n}}$$

konvergují v distribuci k náhodné veličině se standardním normálním rozdělením N(0,1).

Moivre-Laplaceova věta:

Nechť náhodná veličina Y_{n} je rovna počtu úspěchů v posloupnosti nezávislých alternativních pokusů délky n, ve které je pravděpodobnost úspěchu rovna číslu $\theta \in (0,1)$. Potom

$$\frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Z.$$

kde Z je náhodná veličina se standardním normálním rozdělením $\mathrm{N}(0,1)$.

Příklad: Spočtěte přibližnou pravděpodobnost toho, že počet šestek, které padnou ve 12.000 hodech homogenní hrací kostkou, bude mezi 1.900 až 2.100.

Centrální limitní věty (příklad)

Řešení: Označme Y_n počet šestek, které padnou v n=12.000 hodech; je

$Y_n \sim Bi\left(n, \frac{1}{6}\right)$ a hledáme $P(Y_n \in B) = P(1\,900 < Y_n \leq 2\,100)$

Dále je

$$EY_n = n\theta = 12\,000\frac{1}{6} = 2\,000$$

$$VarY_n = n\theta(1-\theta) = 12\,000\frac{1}{6}\frac{5}{6} = 2\,000\frac{5}{6} = \frac{10\,000}{6}.$$

$$\begin{aligned}
P(1\,900 < Y_n \leq 2\,150) &= P(1\,900 - EY_n < Y_n - EY_n \leq 2\,100 - EY_n) \\
&= P\left(\frac{1\,900 - EY_n}{\sqrt{VarY_n}} < \frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}} \leq \frac{2\,100 - EY_n}{\sqrt{VarY_n}}\right) \\
&= P\left(\frac{1\,900 - 2\,000}{\sqrt{\frac{10\,000}{6}}} < U_{\overline{X}_n} \leq \frac{2\,100 - 2\,000}{\sqrt{\frac{10\,000}{6}}}\right) \\
&= P\left(-2.4495 < U_{\overline{X}_n} \leq 2.4495\right) \\
&\approx \Phi(2.4495) - \Phi(-2.4495) \\
&= 2\Phi(2.4495) - 1 = 0.9857.
\end{aligned}$$

Náhodná posloupnost

Charakteristiky posloupnosti náhodných veličin

funkce střední hodnoty: $\mu_i = E(X_i), \quad i = 1, \ldots$

autokovarianční funkce: $c(i,j) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$

autokorelační funkce: $r(i,j) = \rho(X_i, X_j) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{Var X_i . Var X_j}}$

Pokud je 1) $\mu_i = \mu, \; i = 1, 2, \ldots$ konstantní střední hodnota

2) $c(i,j) = c(j-i), \; i = 1, 2, \ldots \; j = 1, 2, \ldots$

kovarianční funkce závisí jen na rozdílu indexů

potom řekneme, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *kovariančně (slabě) stacionární.*

Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *silně stacionární,* pokud pro libovolnou n-tici $i_1, \ldots, i_n$ a libovolné $\delta \in N$ platí

$$F(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}; i_1, \ldots, i_n) = F(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}; i_1 + \delta, \ldots, i_n + \delta)$$

Stacionární náhodná posloupnost

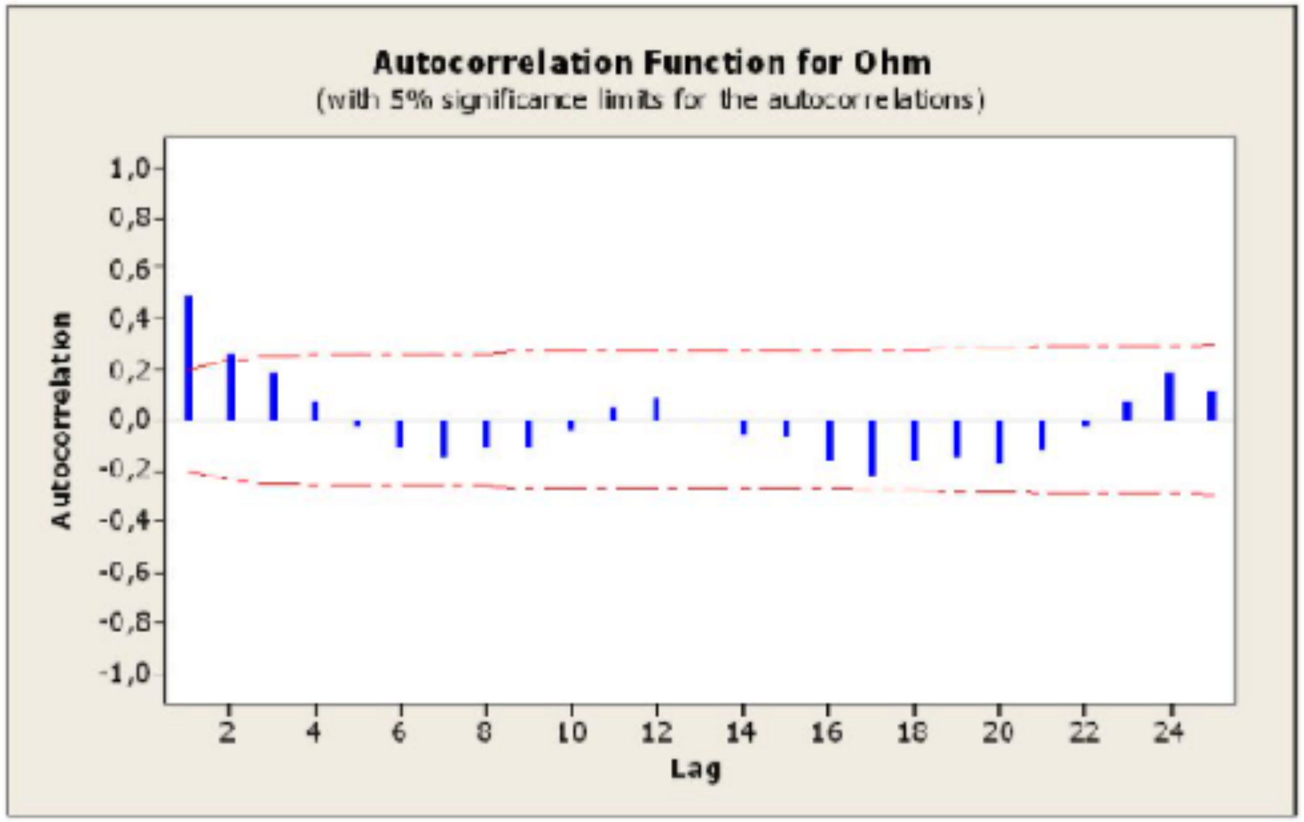
autokovarianční funkce: $c(k) = \mathrm{Cov}(X_1, X_{k+1}) = \mathrm{Cov}(X_i, X_{i+k+1})$

$$= E(X_1 - \mu)(X_{k+1} - \mu) = E(X_1, X_{k+1}) - \mu^2$$

zpravidla pracujeme s tzv. “centrovaným” procesem: $Y_i = X_i - \mu$

a pro tento proces je $c(k) = E(Y_i Y_j)$

autokorelační funkce: $r(k) = \dfrac{c(k)}{c(0)}$ (vždy je $r(0) = 1$)



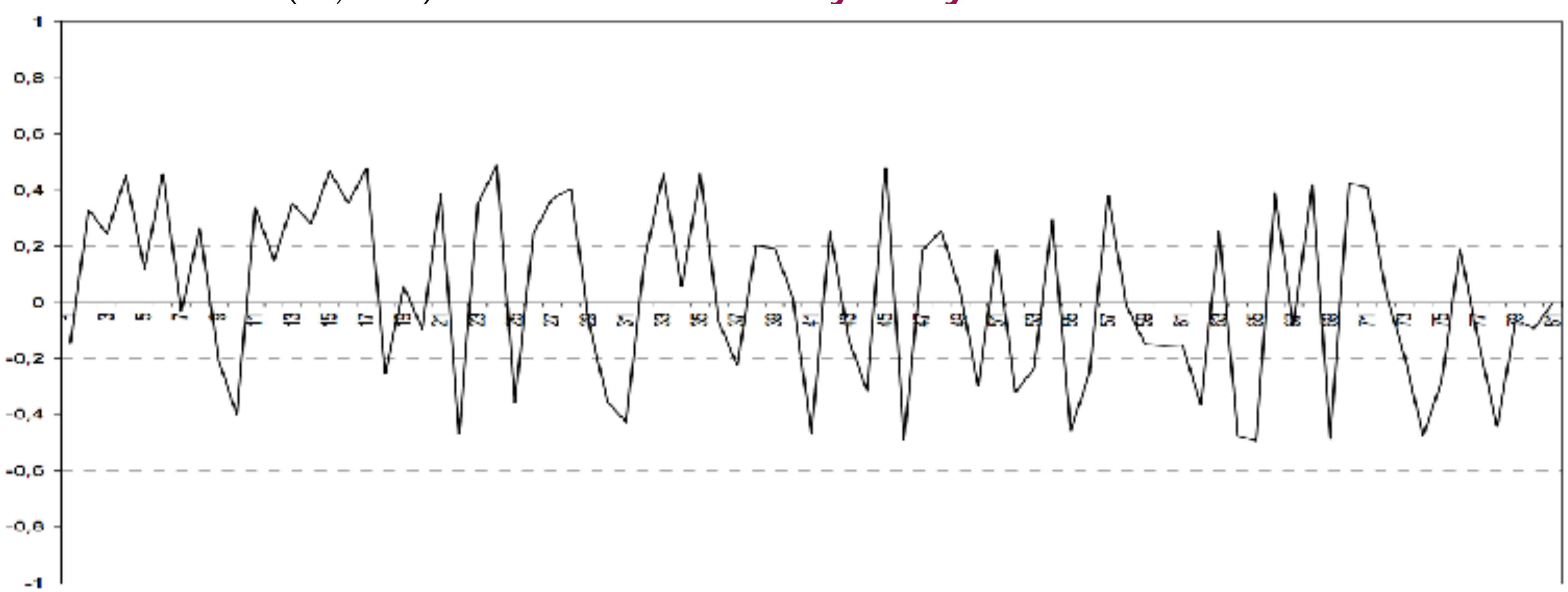
Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost nekorelovaných náhodných veličin $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$

autokorelační funkce: $r(0) = 1, \;\; r(k) = 0, \; k = 1, \dots$

Posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem = bílý šum

Posloupnost nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením $N(0, \sigma^2)$ = Gaussovský bílý šum



Stacionární náhodná posloupnost

Autoregresní posloupnost řádu p AR(p)

$$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \cdots + \phi_p Y_{k-p} + \epsilon_k$$

kde $\phi_i, \;\; i = 1, \ldots, p$ jsou konstanty a ϵ_k je bílý šum.

AR(1): $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$

$$Var(Y_k) = \phi^2 Var(Y_{k-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

je-li stacionární, potom musí být $Var(Y_k) = Var(Y_{k-1}) = \sigma_Y^2$

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \;\Rightarrow\; \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \;\Rightarrow\; 1 > \phi^2 \;\Rightarrow\; |\phi| < 1$$

autokovarianční funkce: $E(Y_k, Y_{k-u}) = \phi E(Y_{k-1}, Y_{k-u}) + E(\epsilon_k Y_{k-u})$

$$c(u) = \phi c(u-1), \quad u = 1, 2, \ldots$$

$$c(u) = \phi^u c(0), \quad u = 1, 2, \ldots$$

$$c(u) = \frac{\phi^u \sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}$$

Stacionární náhodná posloupnost

AR(1): $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$

$E(Y_k) = 0, \qquad Var(Y_k) = \phi^2 Var(Y_{k-1}) + \sigma_\epsilon^2$

je-li stacionární, potom musí být $\quad Var(Y_k) = Var(Y_{k-1}) = \sigma_Y^2$

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \;\Rightarrow\; \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \;\Rightarrow\; 1 > \phi^2 \;\Rightarrow\; |\phi| < 1$$

autokovarianční funkce: $\quad E(Y_k, Y_{k-u}) = \phi E(Y_{k-1}, Y_{k-u}) + E(\epsilon_k Y_{k-u})$

$$c(u) = \phi c(u-1), \quad u = 1, 2, \ldots$$

$$c(u) = \phi^u c(0), \quad u = 1, 2, \ldots$$

$$c(u) = \frac{\phi^u \sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}$$

autokorelační funkce: $\quad r(u) = \phi^u, \quad u = 1, 2, \ldots$

Stacionární náhodná posloupnost

AR(1): $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$

$E(Y_k) = 0, \qquad Var(Y_k$

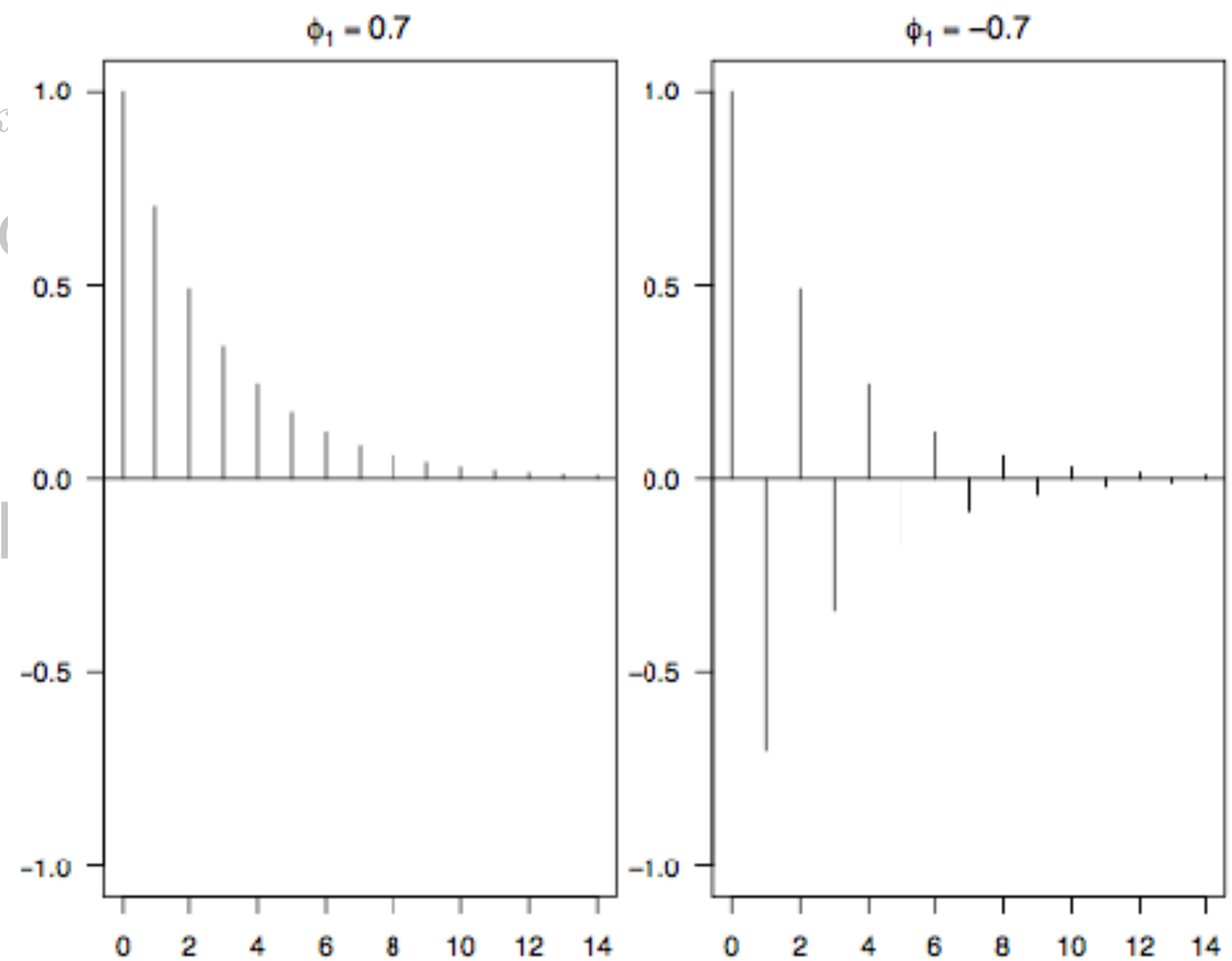
je-li stacionární, pot $= \sigma_Y^2$

$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \;\Rightarrow$

autokovarianční funl - $E(\epsilon_k Y_{k-u})$

$, 2, \ldots$

$\ldots$



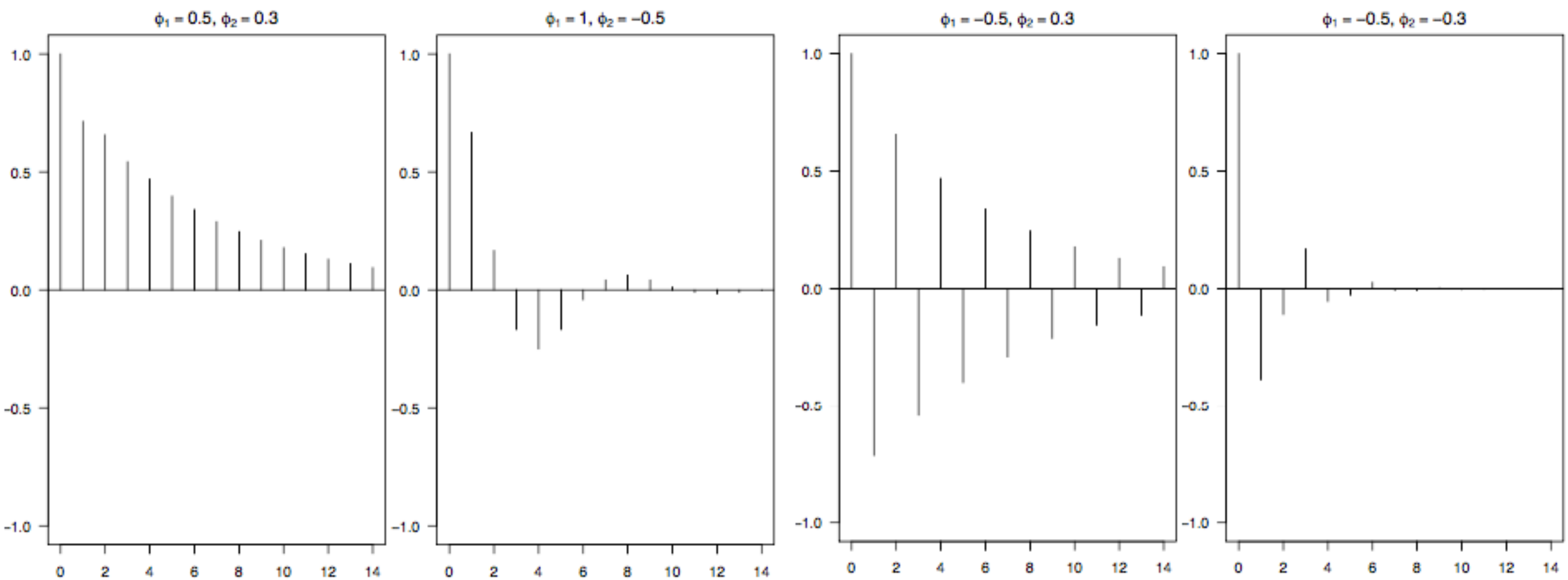
autokorelační funkce: $r(u) = \phi^u, \quad u = 1, 2, \ldots$

Stacionární náhodná posloupnost

AR(2): $$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \epsilon_k$$

autokovarianční funkce: $$c(u) = \alpha_1 \gamma_1^u + \alpha_2 \gamma_2^u$$

kde $\gamma_1,\ \gamma_2$ jsou kořeny polynomu $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$

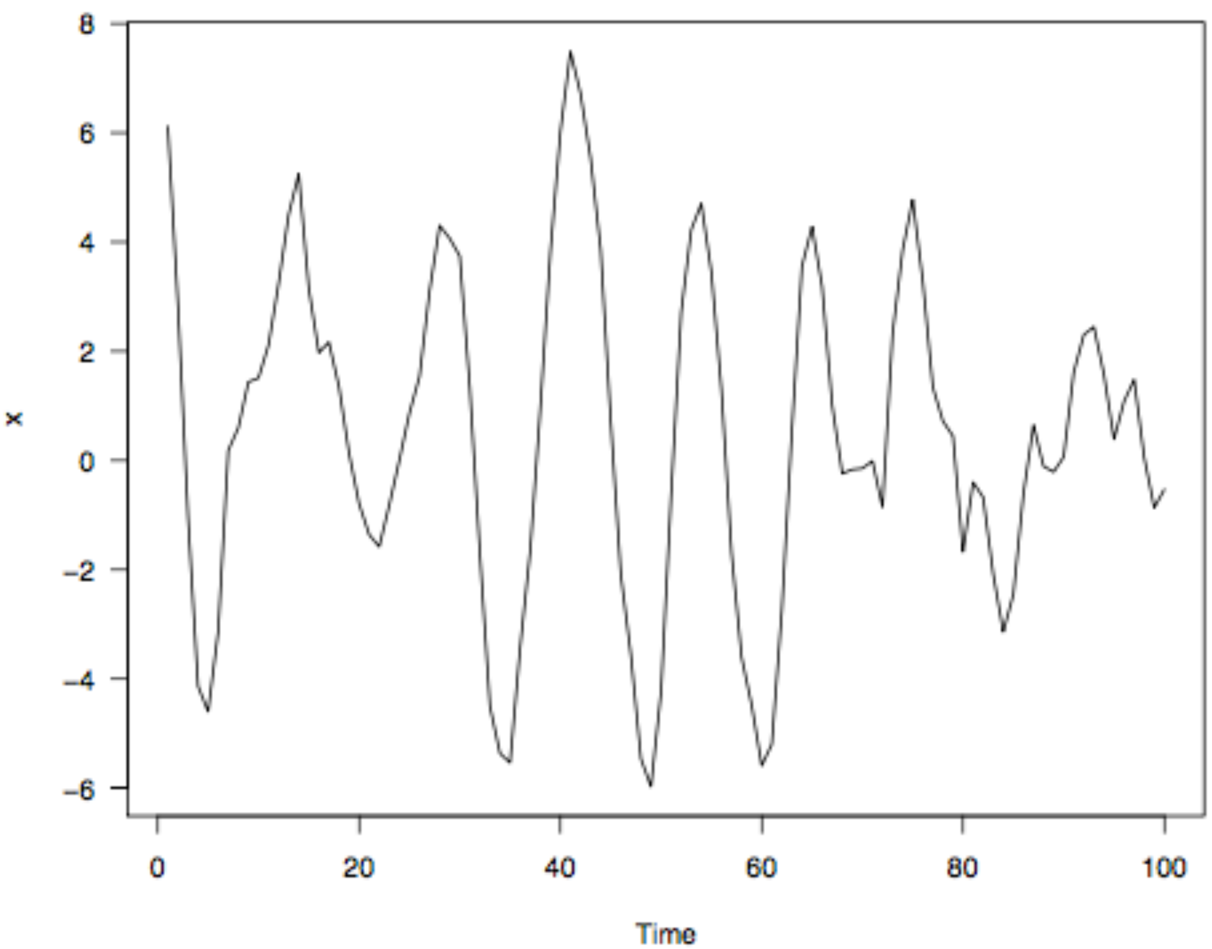


Stacionární náhodná posloupnost

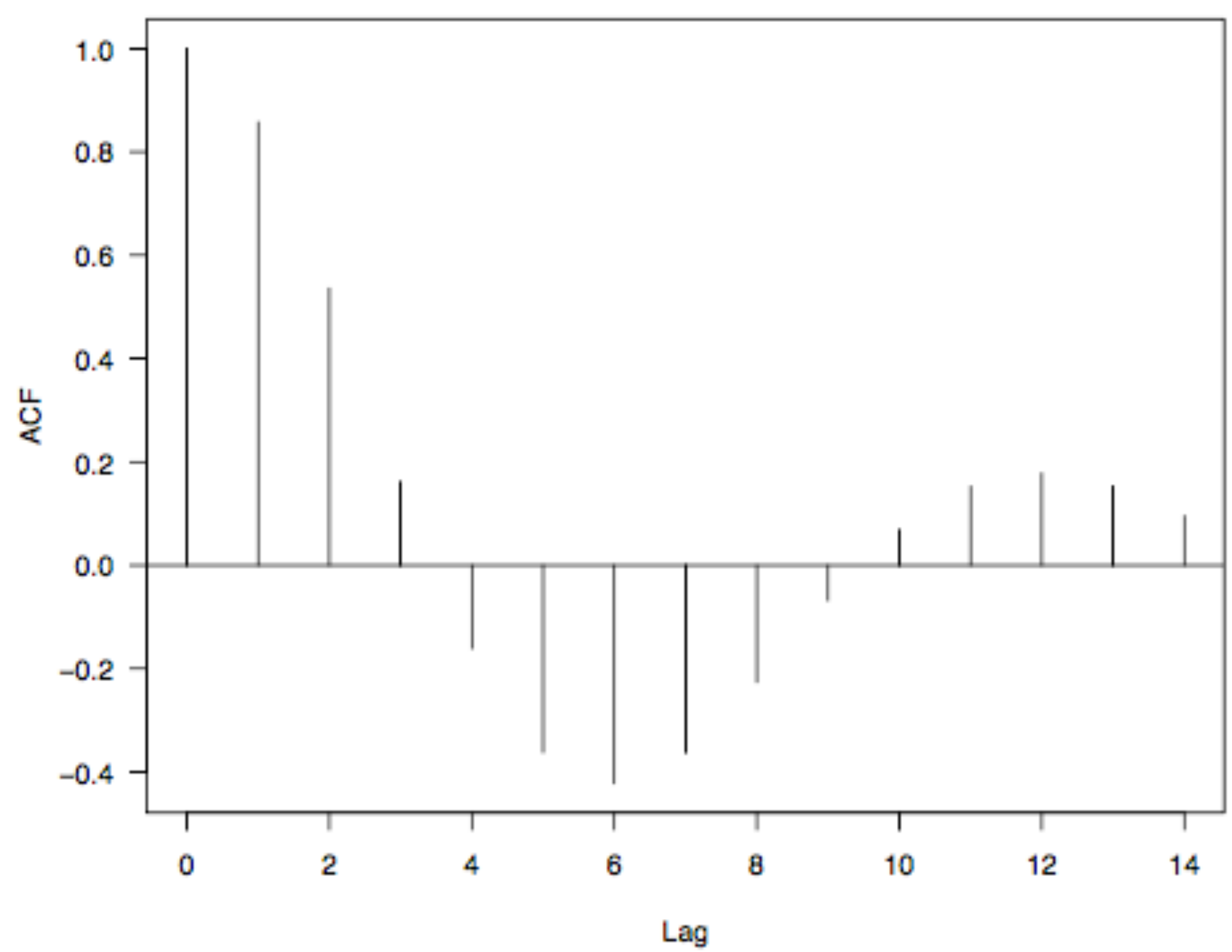
AR(2): $$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \epsilon_k$$

autokovarianční funkce: $c(u) = \alpha_1 \gamma_1^u + \alpha_2 \gamma_2^u$

kde $\gamma_1,\ \gamma_2$ jsou kořeny polynomu $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$



$Y_k = 1.5Y_{k-1} - 0.75Y_{k-2} + \epsilon_k$



Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost klouzavých součtů řádu q MA(q)

$$Y_k = \epsilon_k + \theta_1 \epsilon_{k-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{k-q}$$

kde $\theta_i, \; i = 1, \ldots, q$ jsou konstanty a ϵ_k je bílý šum.

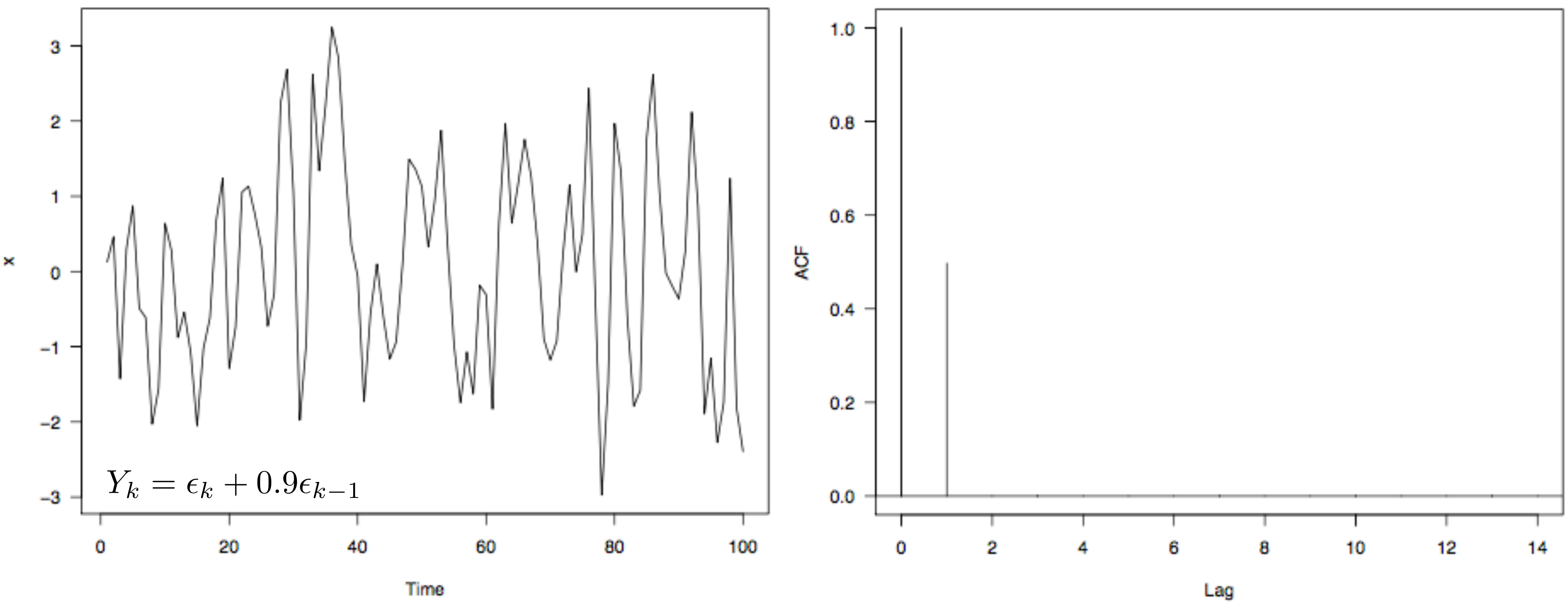
autokovarianční funkce:

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 & u = 0, \\ (\theta_u + \theta_1 \theta_{u+1} + \cdots + \theta_{q-u}\theta_q)\sigma^2 & u = 1, \ldots, q \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

MA(1): $$Y_k = \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1}$$

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & u = 0, \\ \theta\sigma^2 & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad r(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{1+\theta^2} & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stacionární náhodná posloupnost



MA(1): $$Y_k = \epsilon_k + \theta\epsilon_{k-1}$$

$$c(u) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & u = 0, \\ \theta\sigma^2 & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad r(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{1+\theta^2} & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \cdots + \phi_p Y_{k-p} + \epsilon_k + \theta_1 \epsilon_{k-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{k-q}$$

ARMA(1,1): $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1}$

autokovarianční funkce:

$$E(\epsilon_k Y_k) = E(\epsilon_k(\phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1})) = \sigma_\epsilon^2$$

$$E(\epsilon_{k-1} Y_k) = E(\epsilon_{k-1}(\phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1})) = (\phi + \theta)\sigma_\epsilon^2$$

$$\vdots$$

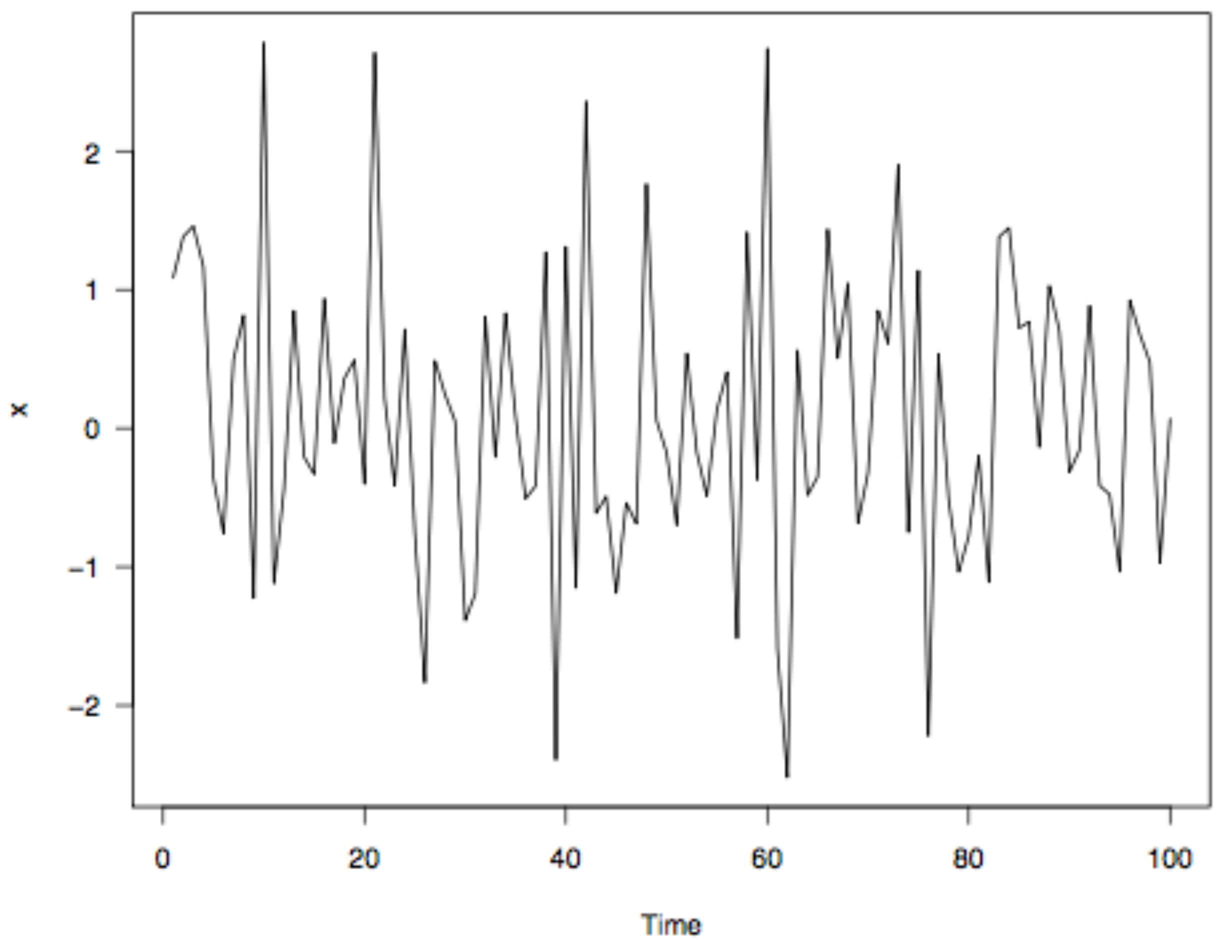
$$c(u) = \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{1+2\theta\phi+\theta^2)}\phi^{u-1}\sigma_\epsilon^2, \;\; v \geq 1$$

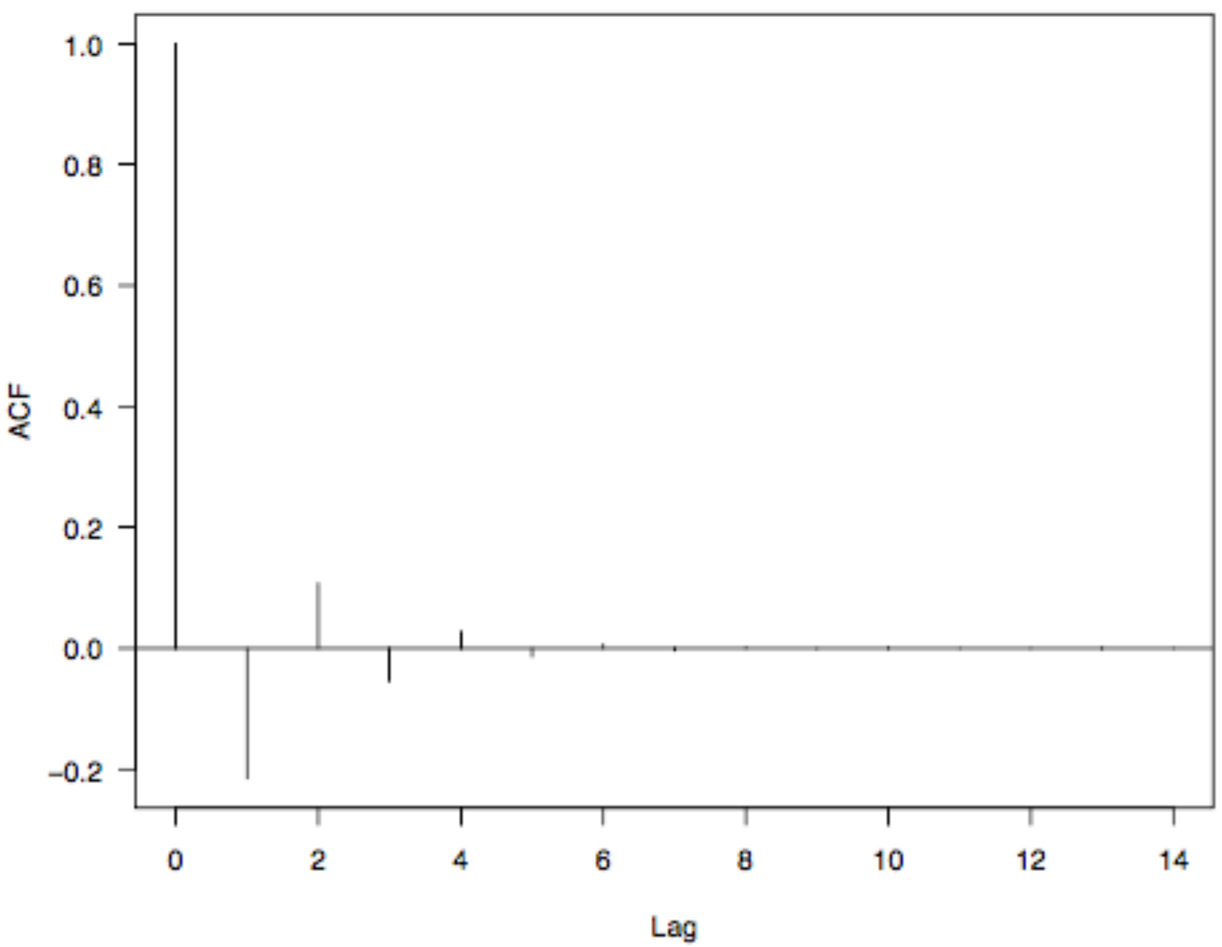
$$r(u) = \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{1+2\theta\phi+\theta^2)}\phi^{u-1}, \;\; v \geq 1$$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = -0.5Y_{k-1} + \epsilon_k + 0.3\epsilon_{k-1}$$





$$c(u) = \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{1+2\theta\phi+\theta^2)}\phi^{u-1}\sigma_\epsilon^2,\ v \geq 1$$

$$r(u) = \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{1+2\theta\phi+\theta^2)}\phi^{u-1},\ v \geq 1$$

Stacionární náhodná posloupnost

Parciální autokorelační funkce (PACF)

$$a(u) = \rho(Y_k, Y_{k-u} \,|\, Y_{k-1}, \ldots, Y_{k-u+1})$$

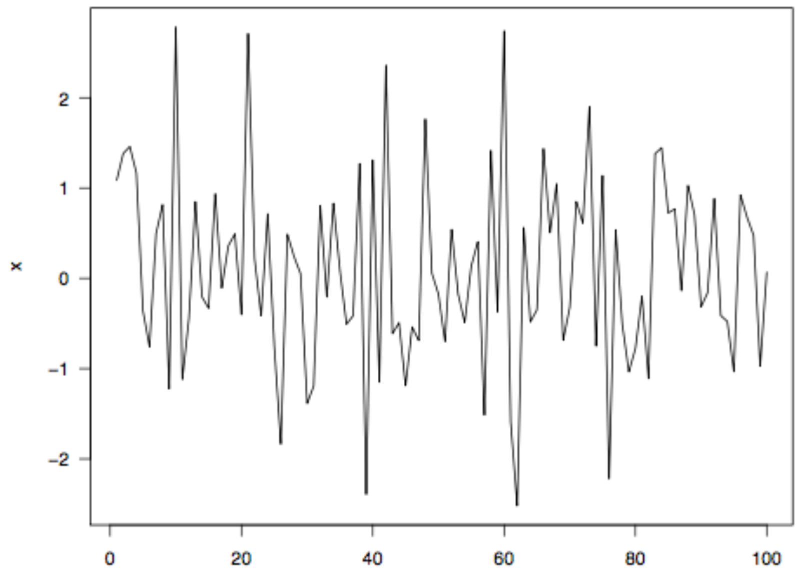
AR(1): $r(u) = \phi^u, \; u \geq 1, \qquad a(1) = \phi, \;\; a(u) = 0, \; u \geq 2.$

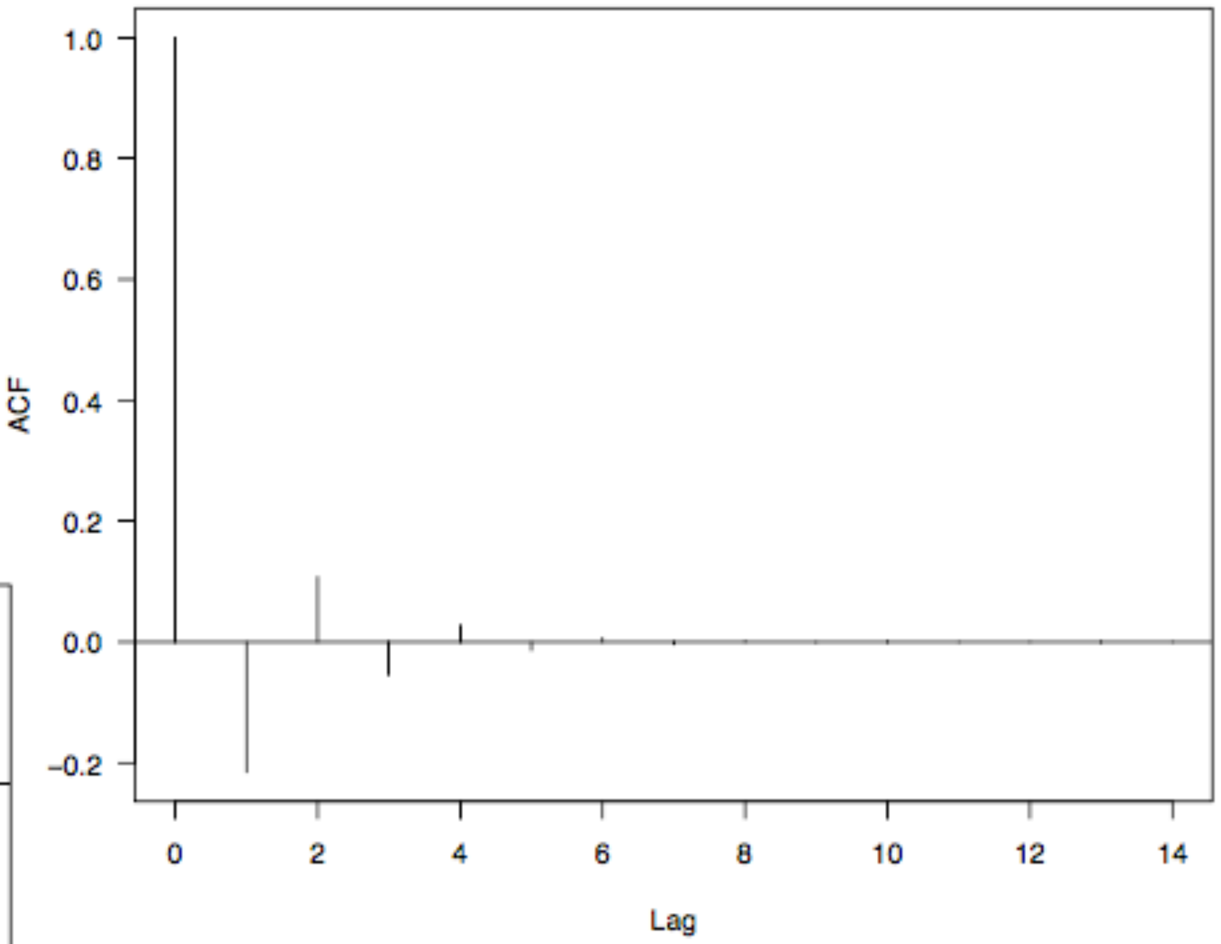
MA(1): $r(1) = \dfrac{\theta}{1+\theta^2}, \; r(u) = 0, \; u \geq 2, \qquad a(u) = \dfrac{-\theta^u(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(r+1)}}, \; u \geq 0.$

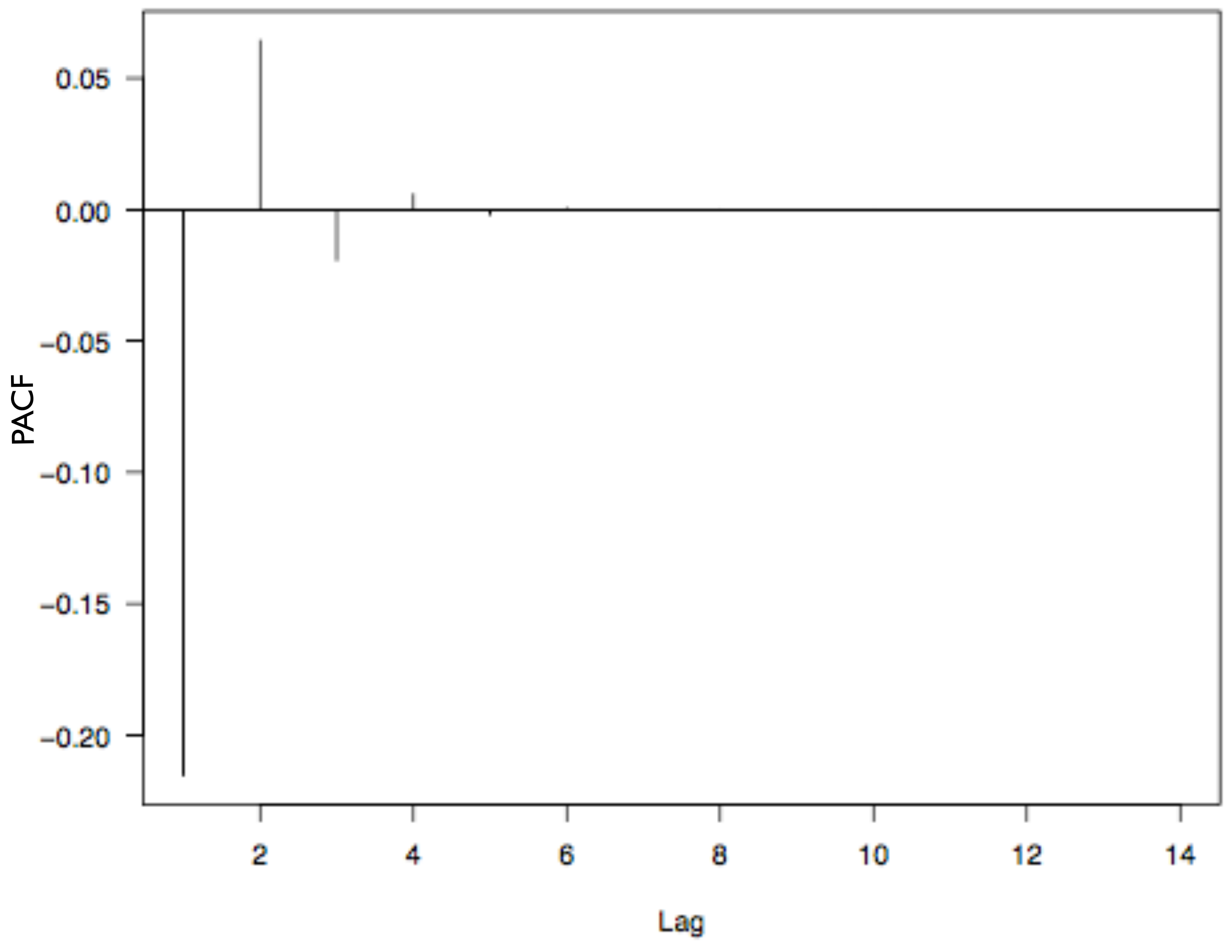
Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = -0.5Y_{k-1} + \epsilon_k + 0.3\epsilon_{k-1}$$







Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Regresní křivka (trend):

$$Y_k = \beta_0 + \epsilon_k$$
$$Y_k = \beta_0 + \beta_1 k + \epsilon_k$$
$$Y_k = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \epsilon_k$$
$$Y_k = \beta_0 . \beta^k . \epsilon_k$$

Příklad - lineární trend: $f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$

parametry $\beta_0,\ \beta_1$ odhadneme metodou nejmenších čtverců
- minimalizujeme funkci kvadratických odchylek členů posloupnosti a hodnot funkce trendu v nějakém okně k=1, …, n ve tvaru

$$g(k; \beta_0, \beta_1) = \sum_{k=1}^{n} (Y_k - f(k; \beta_0, \beta_1))^2$$

$$\frac{\partial g(k; \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = 0 \qquad \qquad \beta_0 n + \beta_1 \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$=$$

$$\frac{\partial g(k; \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = 0 \qquad \qquad \beta_0 \sum_{k=1}^{n} t_k + \beta_1 \sum_{k=1}^{n} t_k^2 = \sum_{k=1}^{n} t_k y_k$$

Odhady parametrů: $b_1 = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} t_k^2 - n\bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Příklad - lineární trend: $f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$

Odhady parametrů: $b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$

má-li ε_k normální rozdělení $N(0,\sigma^2)$, potom můžeme vyhodnotit i spolehlivost takového odhadu:

- odhad rozptylu σ^2: $$s^2 = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{k=1}^n y_k^2 - b_0 \sum_{k=1}^n y_k - b_1 \sum_{k=1}^n t_k y_k\right)$$
- odhad rozptylu b_0: $$S_0^2 = \frac{s^2 \sum_{k=1}^n t_k^2}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}$$
- odhad rozptylu b_1: $$S_1^2 = \frac{s^2}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}$$

a tedy 100(1-α)%-interval spolehlivosti pro koeficienty β_0 a β_1 lze vyjádřit jako

$$b_i - S_i t_{1-\alpha/2}(n-2) \le \beta_i \le b_i + S_i t_{1-\alpha/2}(n-2), \quad i = 0, 1$$

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Příklad - lineární trend: $f(k;\beta_0,\beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$

Odhady parametrů: $b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t}\sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{t}$

má-li ε_k normální rozdělení $N(0,\sigma^2)$, potom můžeme provést predikci pro nějakou budoucí hodnotu T:

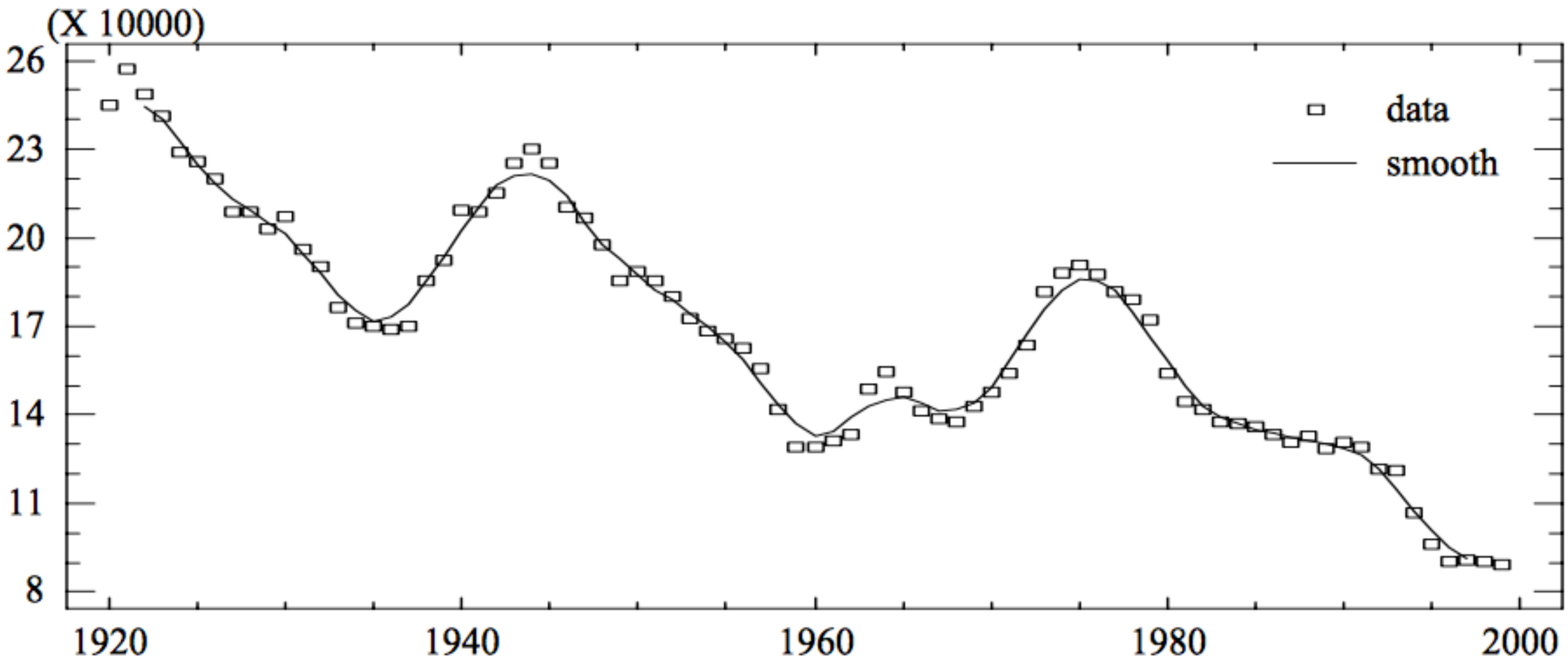
100(1-α)%-interval spolehlivosti pro predikci má potom tvar

$$\tilde{y}_T - t_{1-\alpha/2}(n-2).F_T \leq Y_T \leq \tilde{y}_T + t_{1-\alpha/2}(n-2).F_T$$

kde $$F_T = s.\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(T-\bar{t})^2}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}}$$

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

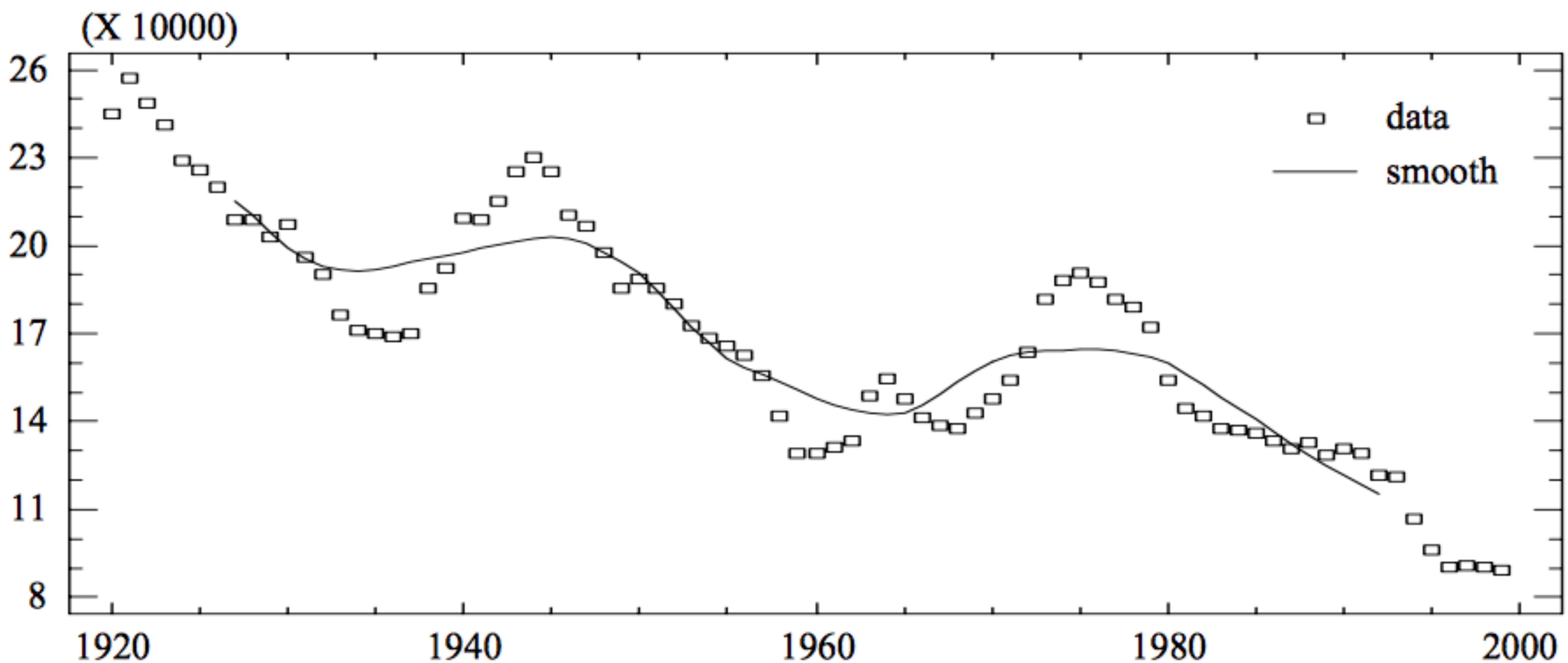
Klouzavé průměry: $$y_k* = \frac{1}{m+n+1}\sum_{i=-m}^{n} y_{k+i}$$



klouzavé průměry délky 5 (m=2, n=2)

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry: $$y_k* = \frac{1}{m+n+1} \sum_{i=-m}^{n} y_{k+i}$$



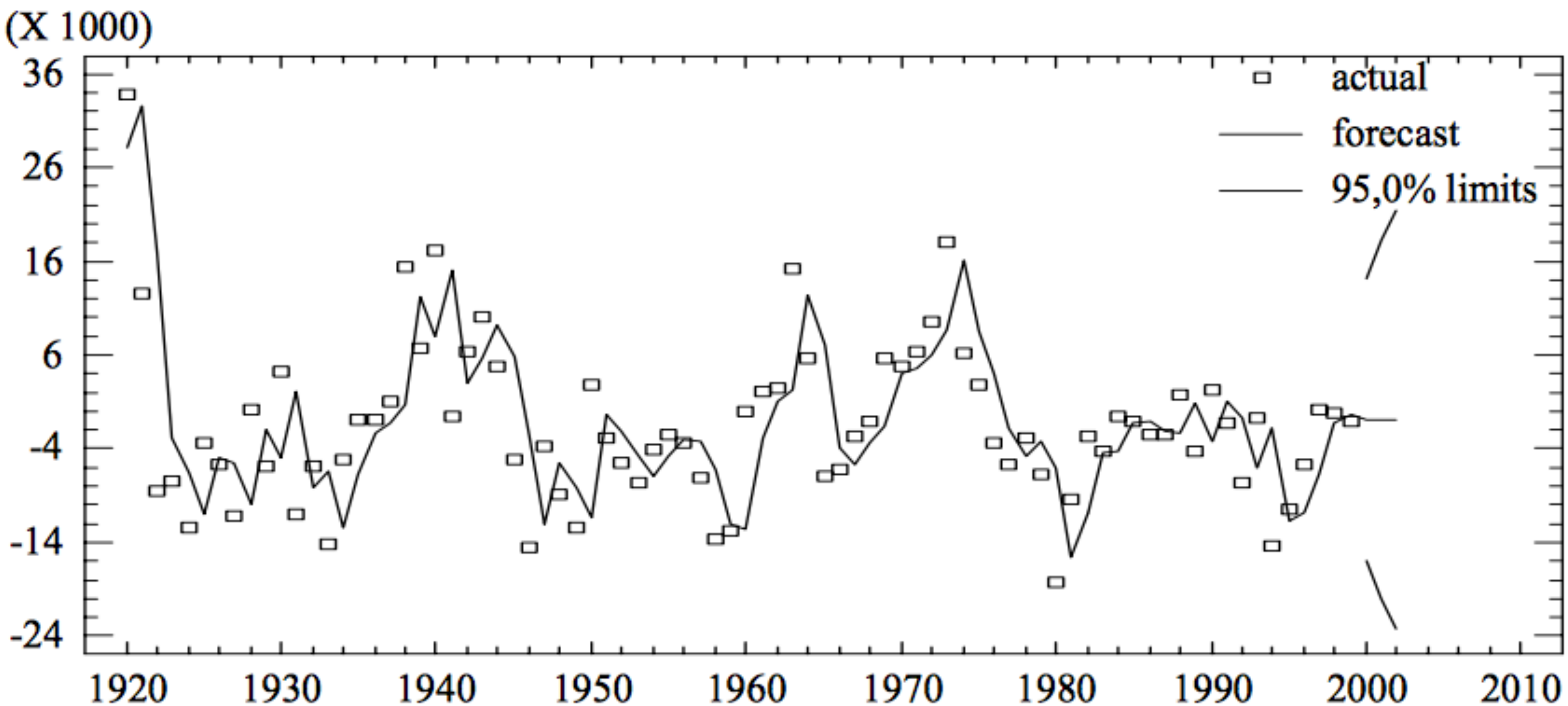
klouzavé průměry délky 15 (m=7, n=7)

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry: $$y_k* = \frac{1}{m+n+1}\sum_{i=-m}^{n} y_{k+i}$$

Klouzavé mediány: $$y_k* = med(y_{k-m}, \ldots, y_k, \ldots, y_{k+n})$$

Exponenciální vyhlazování: $$y_k* = (1-\lambda)y_{k-1} * + \lambda y_k$$



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

trendová složka

sezónní složka

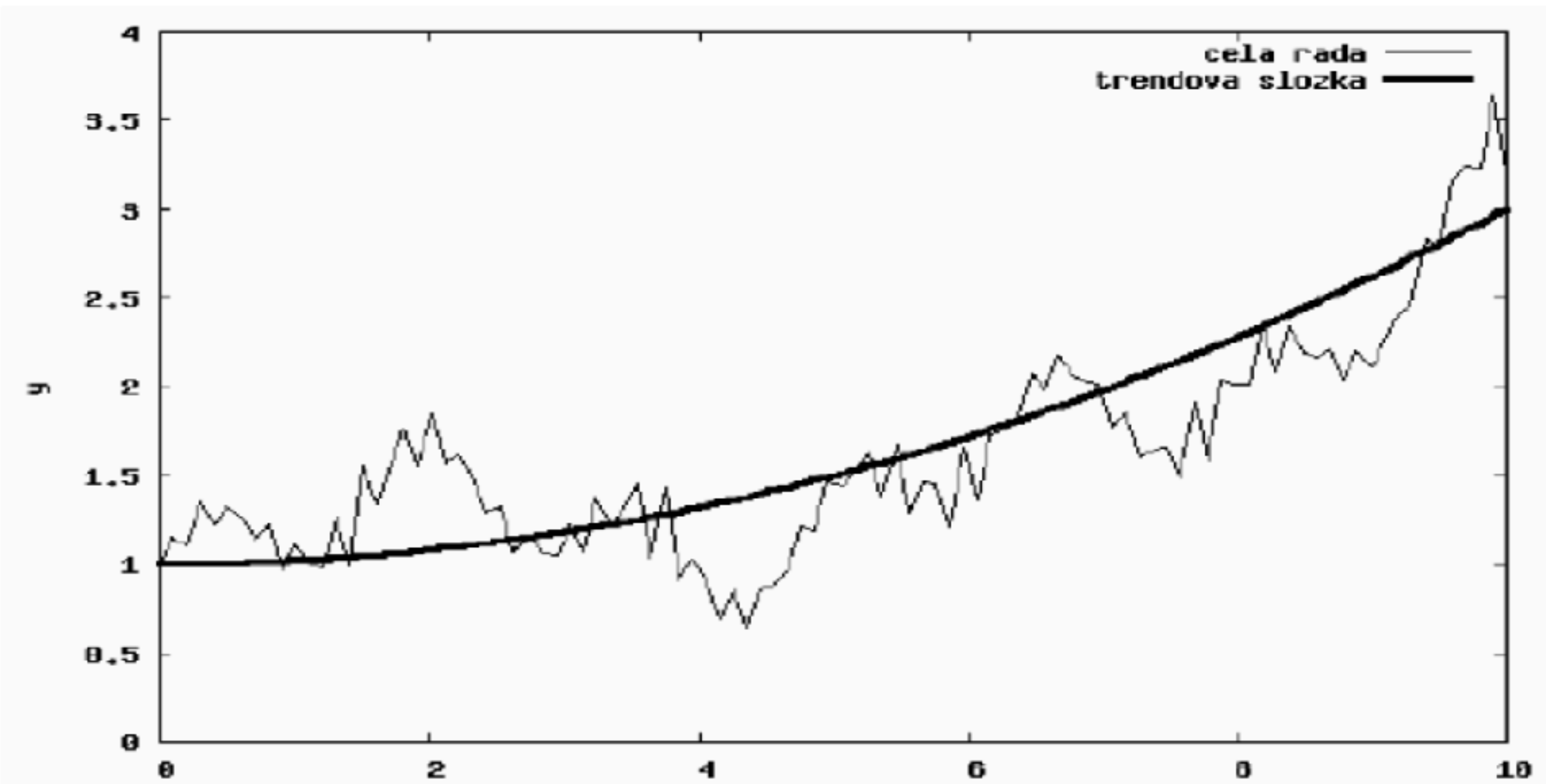
cyklická složka

náhodná složka

Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

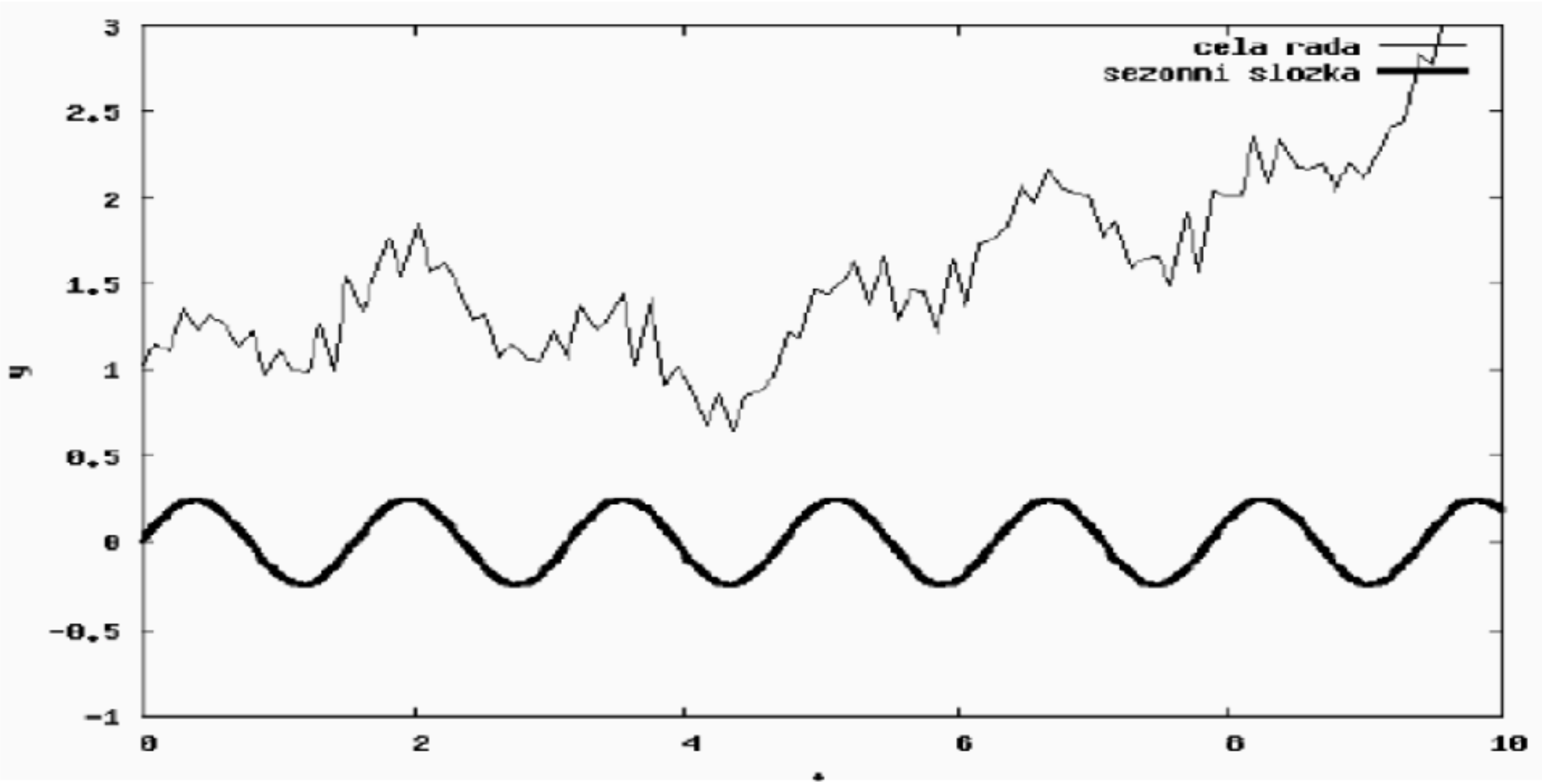
trendová složka



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

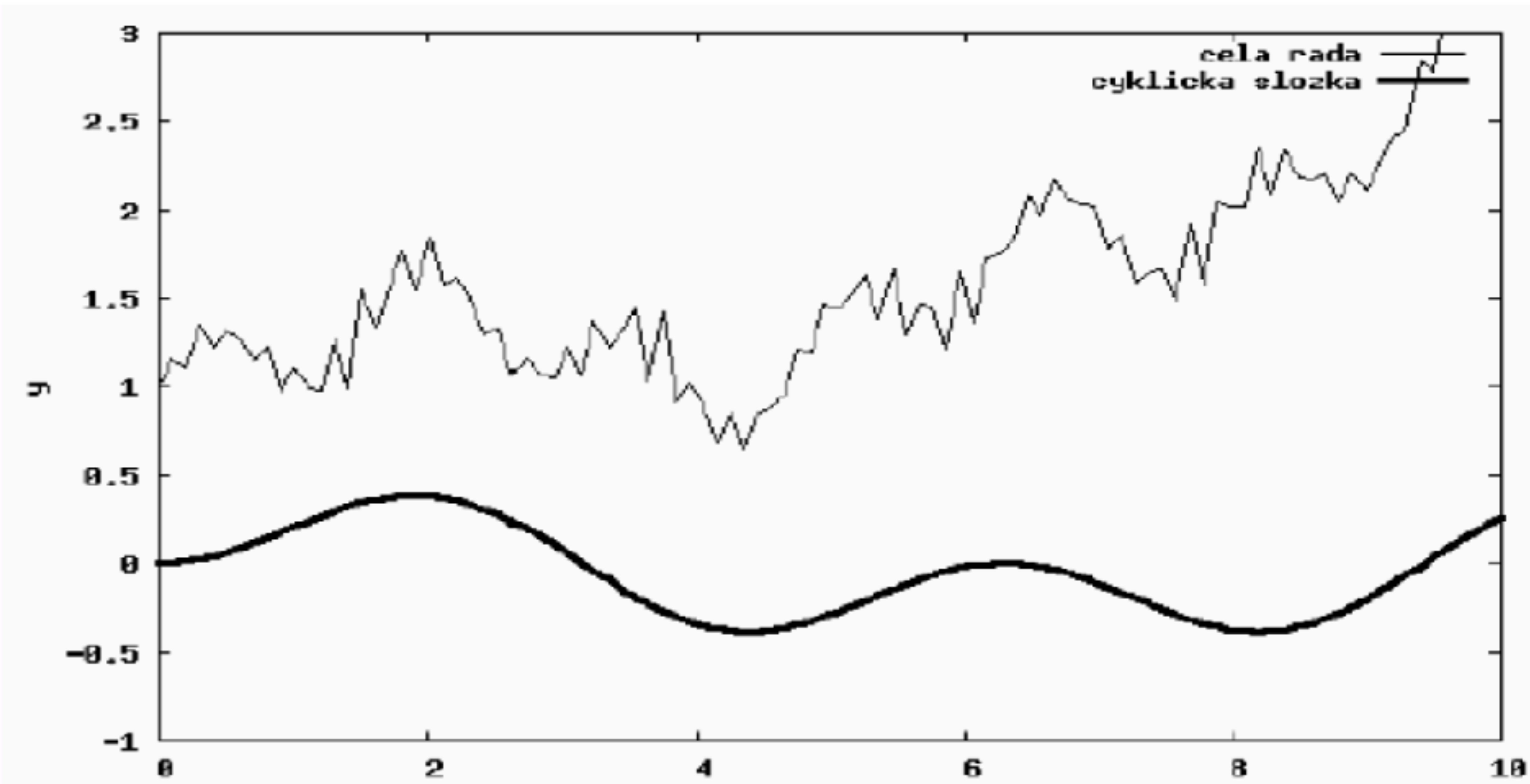
sezónní složka



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

cyklická složka

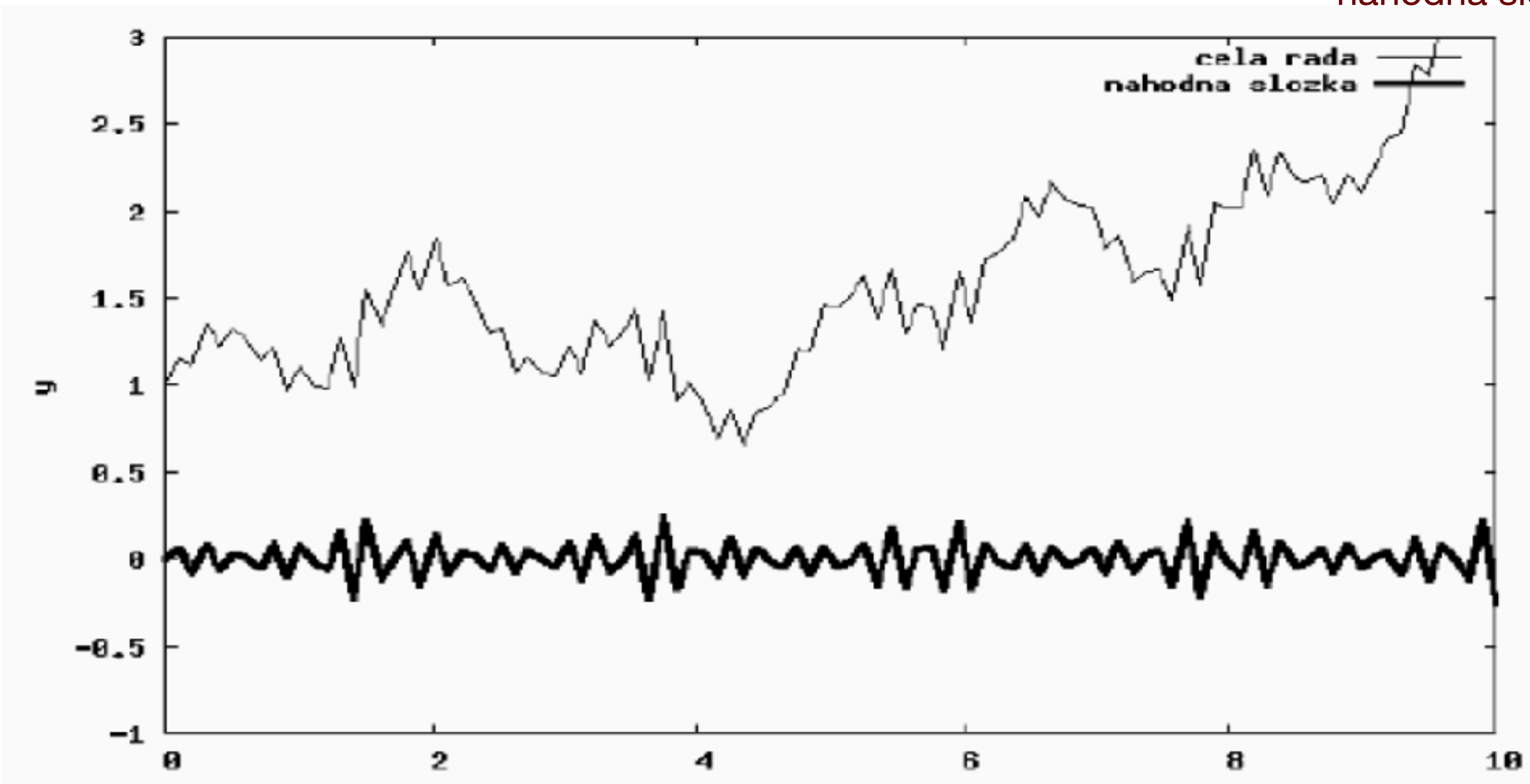


Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

náhodná složka

Očištěná řada



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$