

Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

7. Zákony velkých čísel a náhodné posloupnosti



6. Zákony velkých čísel a náhodné posloupnosti

Klíčové pojmy: • autokorelační funkce

Klíčové vztahy:

- různé druhy konvergence posloupnosti náhodných veličin (skoro jistě, v pravděpodobnosti, v distribuci)
- Slabý a silný zákon velkých čísel;
- Čebyševova nerovnost;
- Centrální limitní věta;
- stacionarita procesu (slabá, silná);
- modely AR(k) a MA(n);
- Vyhlazování časové řady, dekompozice;

Náhodná posloupnost

Uvažujme posloupnost náhodných veličin X_1, \dots, X_n, \dots

$$X : \Omega \times N \longrightarrow R$$

System konečněrozměrných distribučních funkcí:

$$F(x_1, \dots, x_n; i_1, \dots, i_n) = P(X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_n} \leq x_n)$$

symetrie: $F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; i_1, \dots, i_n) = F(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}; j_1, \dots, j_n)$
pro libovolnou permutaci (j_1, \dots, j_n) čísel (i_1, \dots, i_n)
(nezáleží na pořadí)

konzistence:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n; i_1, \dots, i_n) = F(x_1, \dots, x_{n-1}; i_1, \dots, i_{n-1})$$

Konvergence posloupnosti náhodných veličin

1) Konvergence skoro jistě: $P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right) = 1$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} X$$

silná konvergence, konvergence skoro všude

2) Konvergence v pravděpodobnosti:

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} P [\|X_n - x\| > \epsilon] = 0$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$$

slabá konvergence, konvergence podle míry

3) Konvergence v distribuci: $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F(x)$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X$$

4) Konvergence podle kvadratického středu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E^2} X$$

konvergence v L_p normě pro $p=2$

Platí

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X$$

Zákony velkých čísel

Slabý zákon velkých čísel:

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje slabý zákon velkých čísel, jestliže platí

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Čebyševova nerovnost:

Pro libovolnou náhodnou veličinu X platí: $\forall \varepsilon > 0 : P(|x - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

Čebyševova věta:

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou nezávislých náhodných veličin, které mají konečné druhé momenty a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = 0.$$

Potom tato posloupnost splňuje slabý zákon velkých čísel.

(Důkaz pomocí Čebyševovy nerovnosti: $\forall \varepsilon > 0 : P(|Y_n - EY_n| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}Y_n}{\varepsilon^2}$.)

Zákony velkých čísel

Označme $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)$

$$EY_n = E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{E(X_i - EX_i)}_{=0} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}Y_n &= \text{Var} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \right] = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \right] \\ &\stackrel{\text{nez.}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i - EX_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}X_i \end{aligned}$$

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) - 0 \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}Y_n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{podle předp.}} 0,$$

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|Y_n - EY_n| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}Y_n}{\varepsilon^2}.$$

Zákony velkých čísel

Bernoulliho věta:

Nechť náhodná veličina Y_n je rovna počtu úspěchů v posloupnosti nezávislých alternativních pokusů délky n , ve které je pravděpodobnost úspěchu rovna číslu $\theta \in (0, 1)$. Potom posloupnost $Z_n = \frac{1}{n}Y_n$ relativních četností úspěchů konverguje podle pravděpodobnosti k θ , tj.

$$Z_n = \frac{1}{n}Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta.$$

Chinčinoва věta (slabý zákon velkých čísel):

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením s konečnou střední hodnotou $EX_i = \mu$. Potom $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje slabý zákon velkých čísel, tj. pro posloupnost průměrů platí

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu.$$

Silný zákon velkých čísel:

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel, jestliže platí

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) = 0 \right) = 1.$$

Centrální limitní věty

Centrální limitní věta (Lindeberg-Lévy):

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením se střední hodnotou μ a nenulovým rozptylem σ^2 . Potom náhodné veličiny

$$U_{\bar{X}_n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sigma \sqrt{n}}$$

konvergují v distribuci k náhodné veličině se standardním normálním rozdělením $N(0,1)$.

Moivre-Laplaceova věta:

Nechť náhodná veličina Y_n je rovna počtu úspěchů v posloupnosti nezávislých alternativních pokusů délky n , ve které je pravděpodobnost úspěchu rovna číslu $\theta \in (0, 1)$. Potom

$$\frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z.$$

kde Z je náhodná veličina se standardním normálním rozdělením $N(0,1)$.

Příklad: Spočtete přibližnou pravděpodobnost toho, že počet šestek, které padnou ve 12.000 hodech homogenní hrací kostkou, bude mezi 1.900 až 2.100.

Centrální limitní věty (příklad)

Řešení: Označme Y_n počet šestek, které padnou v $n=12.000$ hodech; je $Y_n \sim Bi\left(n, \frac{1}{6}\right)$ a hledáme $P(Y_n \in B) = P(1\,900 < Y_n \leq 2\,100)$

Dále je $EY_n = n\theta = 12\,000 \frac{1}{6} = 2\,000$

$$VarY_n = n\theta(1 - \theta) = 12\,000 \frac{1}{6} \frac{5}{6} = 2\,000 \frac{5}{6} = \frac{10\,000}{6}.$$

$$P(1\,900 < Y_n \leq 2\,100) = P(1\,900 - EY_n < Y_n - EY_n \leq 2\,100 - EY_n)$$

$$= P\left(\frac{1\,900 - EY_n}{\sqrt{VarY_n}} < \frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}} \leq \frac{2\,100 - EY_n}{\sqrt{VarY_n}}\right)$$

$$= P\left(\frac{1\,900 - 2\,000}{\sqrt{\frac{10\,000}{6}}} < U_{\bar{X}_n} \leq \frac{2\,100 - 2\,000}{\sqrt{\frac{10\,000}{6}}}\right)$$

$$= P(-2.4495 < U_{\bar{X}_n} \leq 2.4495)$$

$$\approx \Phi(2.4495) - \Phi(-2.4495)$$

$$= 2\Phi(2.4495) - 1 = 0.9857.$$

Náhodná posloupnost

Charakteristiky posloupnosti náhodných veličin

funkce střední hodnoty: $\mu_i = E(X_i), \quad i = 1, \dots$

autokovarianční funkce: $c(i, j) = \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$

autokorelační funkce: $r(i, j) = \rho(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var} X_i \cdot \text{Var} X_j}}$

Pokud je 1) $\mu_i = \mu, \quad i = 1, 2, \dots$ konstantní střední hodnota

2) $c(i, j) = c(j - i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots$

kovarianční funkce závisí jen na rozdílu indexů

potom řekneme, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **kovariančně (slabě) stacionární**.

Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **silně stacionární**, pokud pro libovolnou n -tici i_1, \dots, i_n a libovolné $\delta \in N$ platí

$$F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; i_1, \dots, i_n) = F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; i_1 + \delta, \dots, i_n + \delta)$$

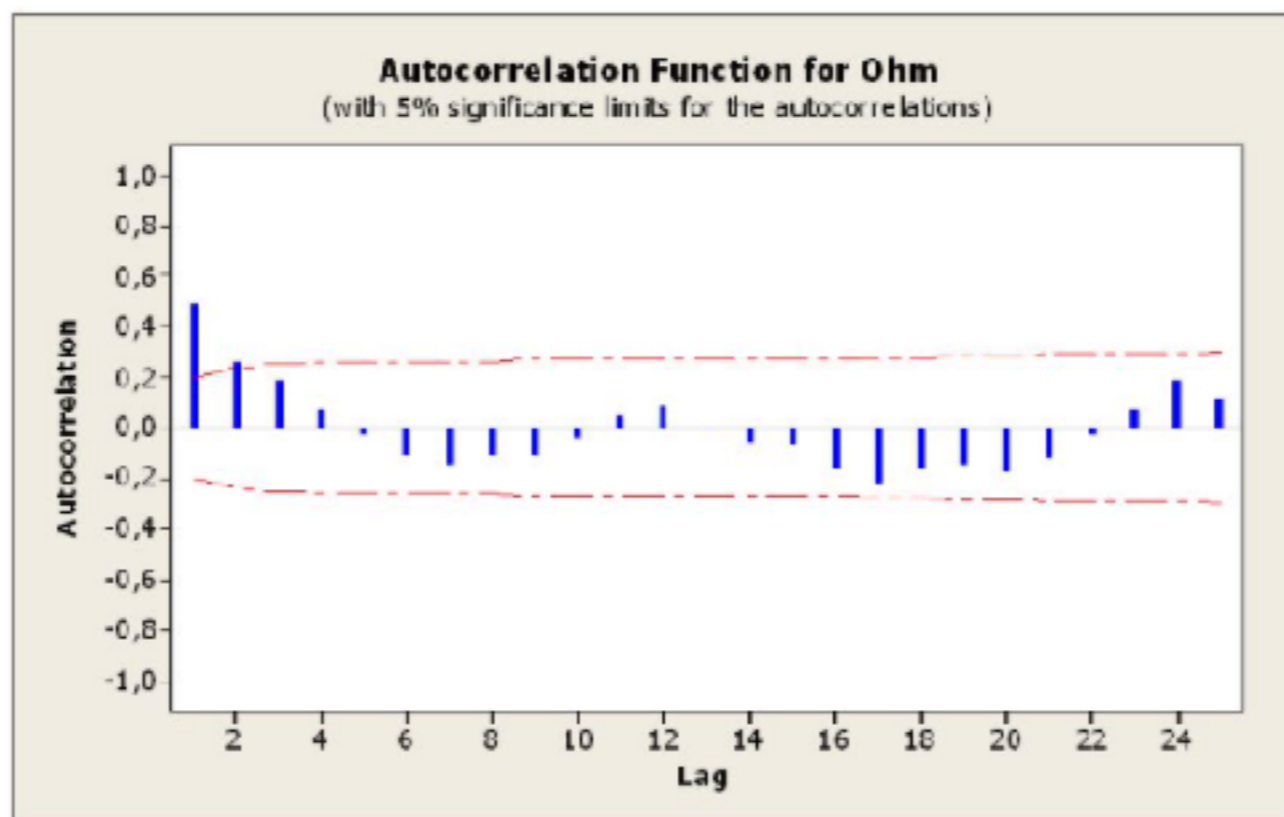
Stacionární náhodná posloupnost

autokovarianční funkce: $c(k) = \text{Cov}(X_1, X_{k+1}) = \text{Cov}(X_i, X_{i+k+1})$
 $= E(X_1 - \mu)(X_{k+1} - \mu) = E(X_1, X_{k+1}) - \mu^2$

zpravidla pracujeme s tzv. “centrovaným” procesem: $Y_i = X_i - \mu$

a pro tento proces je $c(k) = E(Y_i Y_j)$

autokorelační funkce: $r(k) = \frac{c(k)}{c(0)}$ (vždy je $r(0) = 1$)



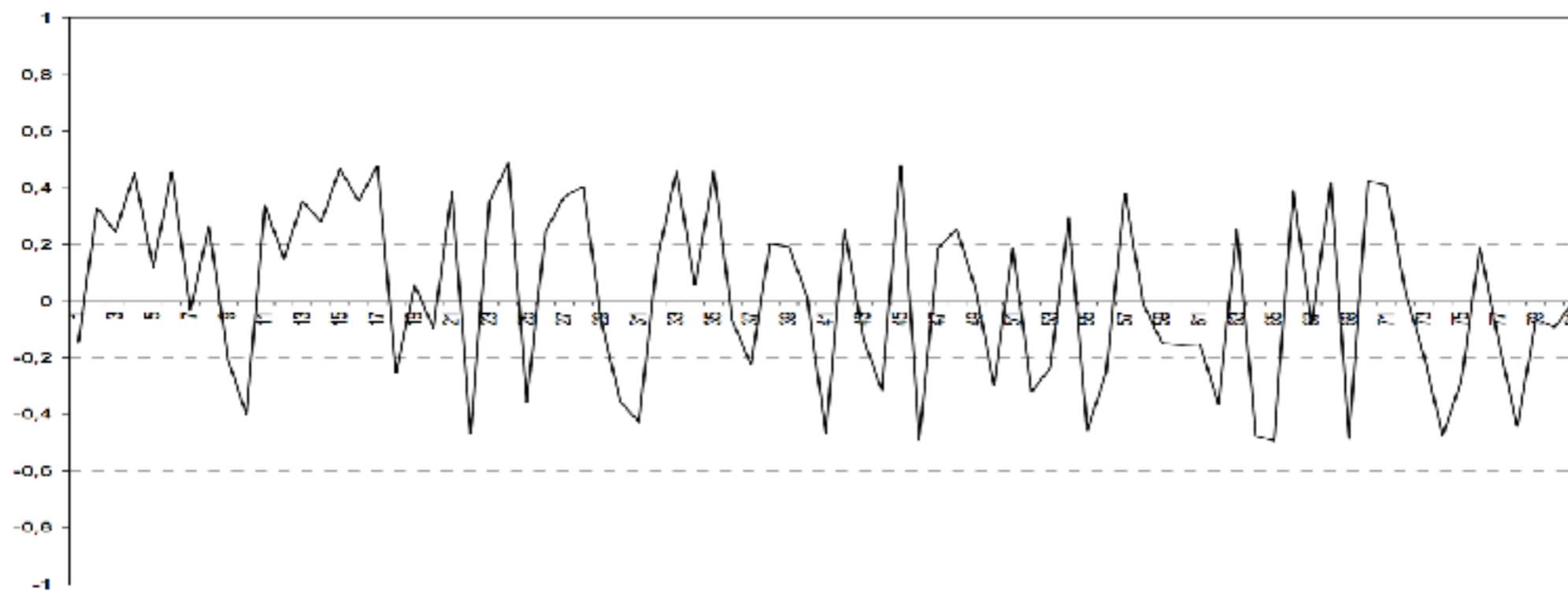
Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost nekorelovaných náhodných veličin $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$

autokorelační funkce: $r(0) = 1, \quad r(k) = 0, \quad k = 1, \dots$

Posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem
= **bílý šum**

Posloupnost nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením $N(0, \sigma^2)$ = **Gaussovský bílý šum**



Stacionární náhodná posloupnost

Autoregresní posloupnost řádu p AR(p)

$$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \dots + \phi_p Y_{k-p} + \epsilon_k$$

kde ϕ_i , $i = 1, \dots, p$ jsou konstanty a ϵ_k je bílý šum.

AR(1): $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$

$$\text{Var}(Y_k) = \phi^2 \text{Var}(Y_{k-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

je-li stacionární, potom musí být $\text{Var}(Y_k) = \text{Var}(Y_{k-1}) = \sigma_Y^2$

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2} \Rightarrow 1 > \phi^2 \Rightarrow |\phi| < 1$$

autokovarianční funkce: $E(Y_k, Y_{k-u}) = \phi E(Y_{k-1}, Y_{k-u}) + E(\epsilon_k Y_{k-u})$

$$c(u) = \phi c(u - 1), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \phi^u c(0), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \frac{\phi^u \sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2}$$

Stacionární náhodná posloupnost

$$\text{AR}(1): Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$$

$$E(Y_k) = 0, \quad \text{Var}(Y_k) = \phi^2 \text{Var}(Y_{k-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

je-li stacionární, potom musí být $\text{Var}(Y_k) = \text{Var}(Y_{k-1}) = \sigma_Y^2$

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2} \Rightarrow 1 > \phi^2 \Rightarrow |\phi| < 1$$

autokovarianční funkce: $E(Y_k, Y_{k-u}) = \phi E(Y_{k-1}, Y_{k-u}) + E(\epsilon_k Y_{k-u})$

$$c(u) = \phi c(u-1), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \phi^u c(0), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \frac{\phi^u \sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2}$$

autokorelační funkce:

$$r(u) = \phi^u, \quad u = 1, 2, \dots$$

Stacionární náhodná posloupnost

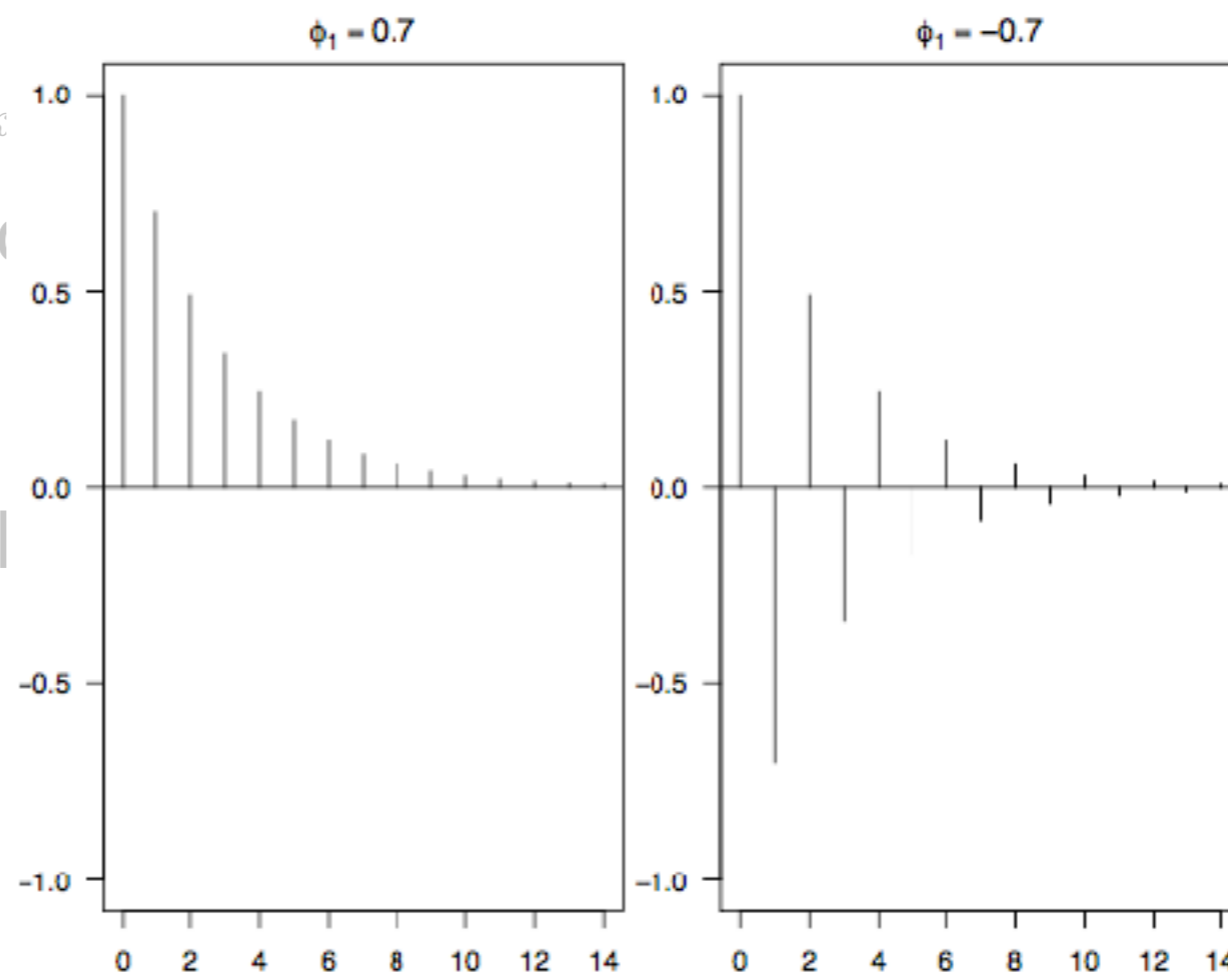
$$\text{AR}(1): Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$$

$$E(Y_k) = 0, \quad \text{Var}(Y_k)$$

je-li stacionární, potom

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \Rightarrow$$

autokovarianční funkce



$$= \sigma_Y^2$$

$$- E(\epsilon_k Y_{k-u})$$

$$, 2, \dots$$

...

autokorelační funkce:

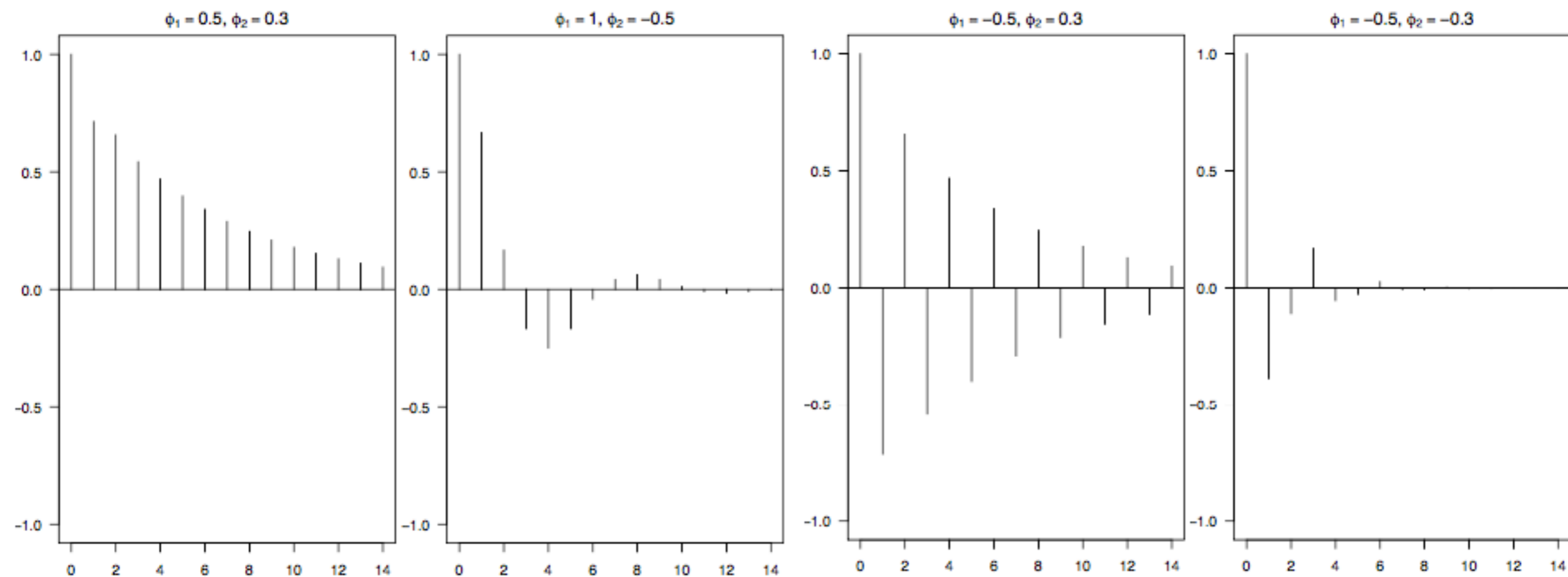
$$r(u) = \phi^u, \quad u = 1, 2, \dots$$

Stacionární náhodná posloupnost

AR(2): $Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \epsilon_k$

autokovarianční funkce: $c(u) = \alpha_1 \gamma_1^u + \alpha_2 \gamma_2^u$

kde γ_1, γ_2 jsou kořeny polynomu $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$

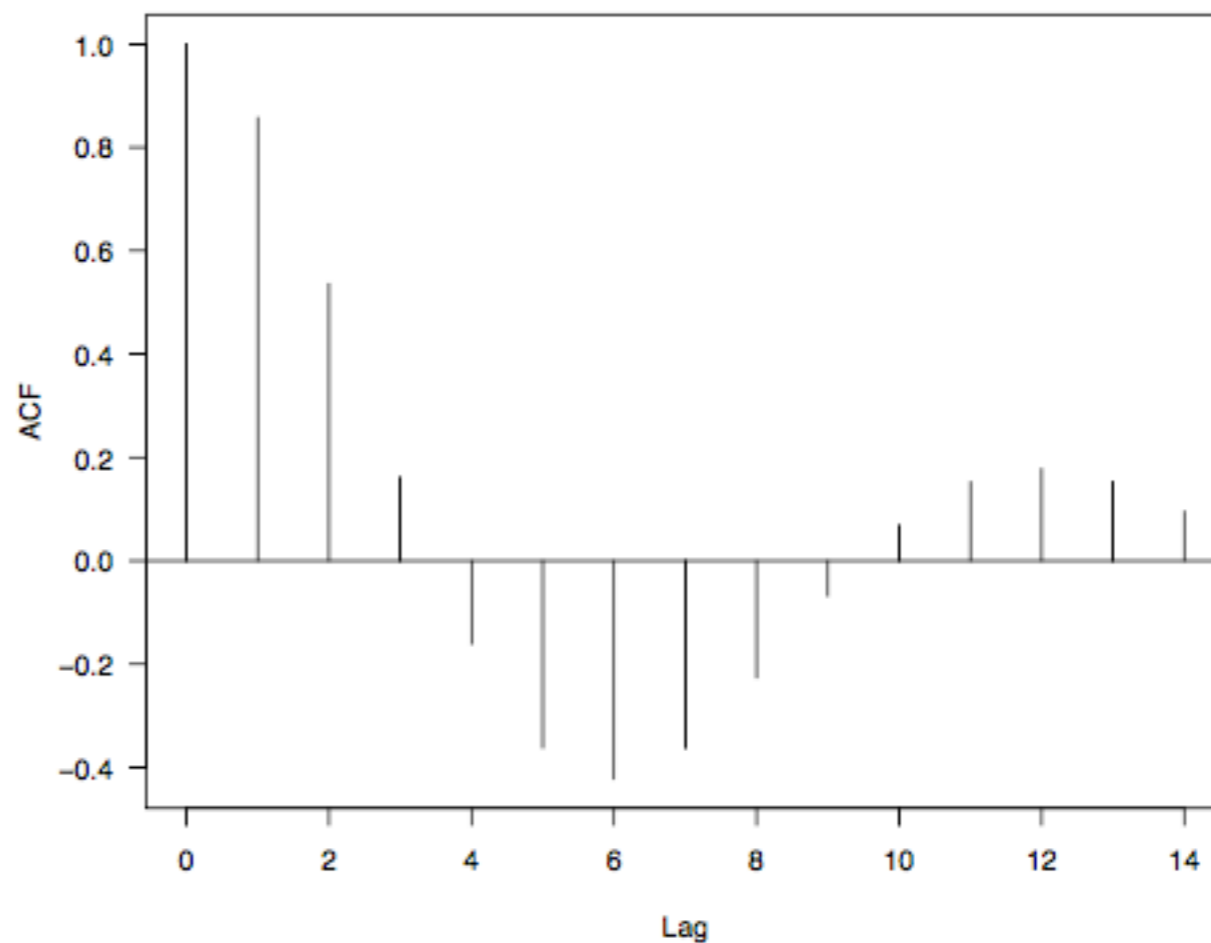
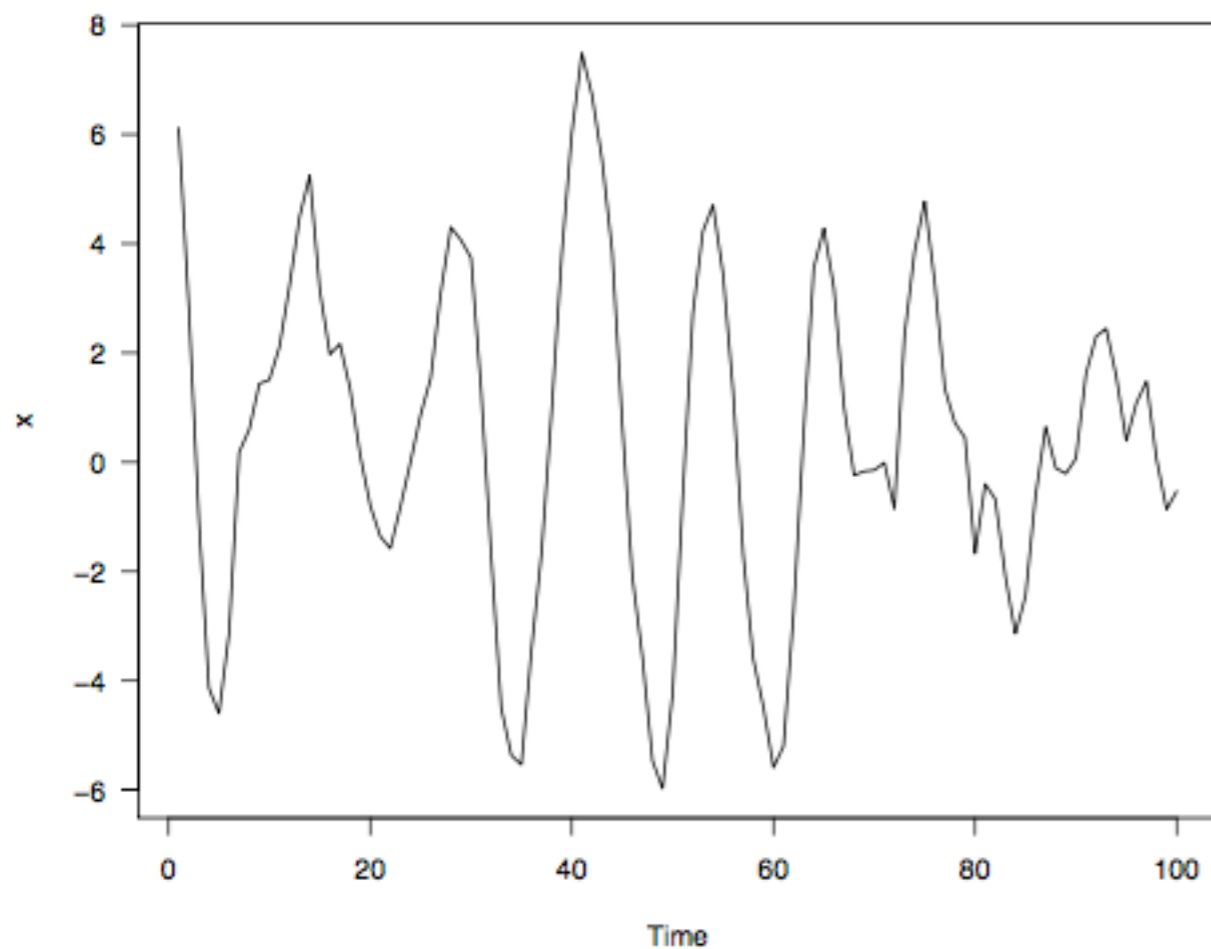


Stacionární náhodná posloupnost

AR(2): $Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \epsilon_k$

autokovarianční funkce: $c(u) = \alpha_1 \gamma_1^u + \alpha_2 \gamma_2^u$

kde γ_1, γ_2 jsou kořeny polynomu $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$



$$Y_k = 1.5Y_{k-1} - 0.75Y_{k-2} + \epsilon_k$$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost klouzavých součtů řádu q MA(q)

$$Y_k = \epsilon_k + \theta_1 \epsilon_{k-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{k-q}$$

kde θ_i , $i = 1, \dots, q$ jsou konstanty a ϵ_k je bílý šum.

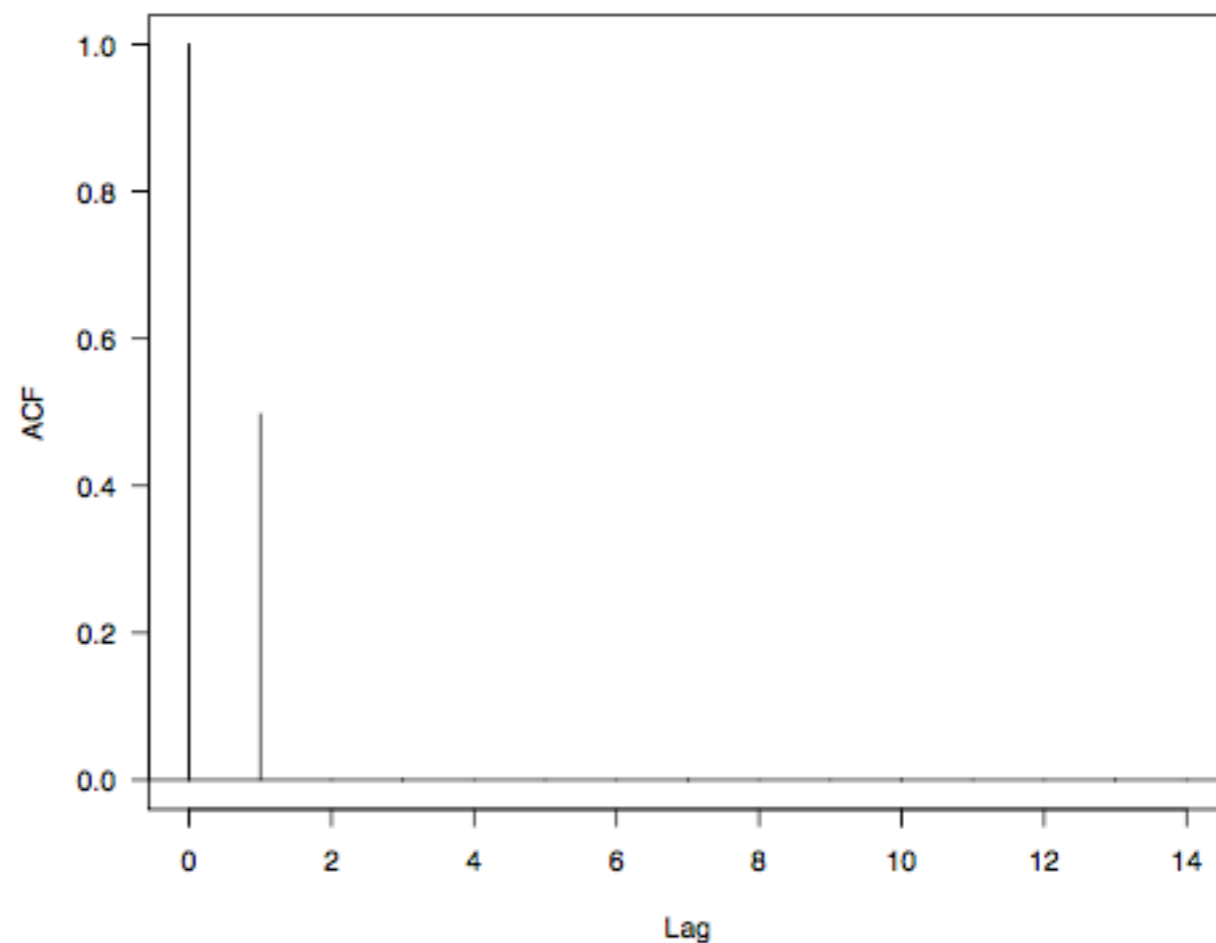
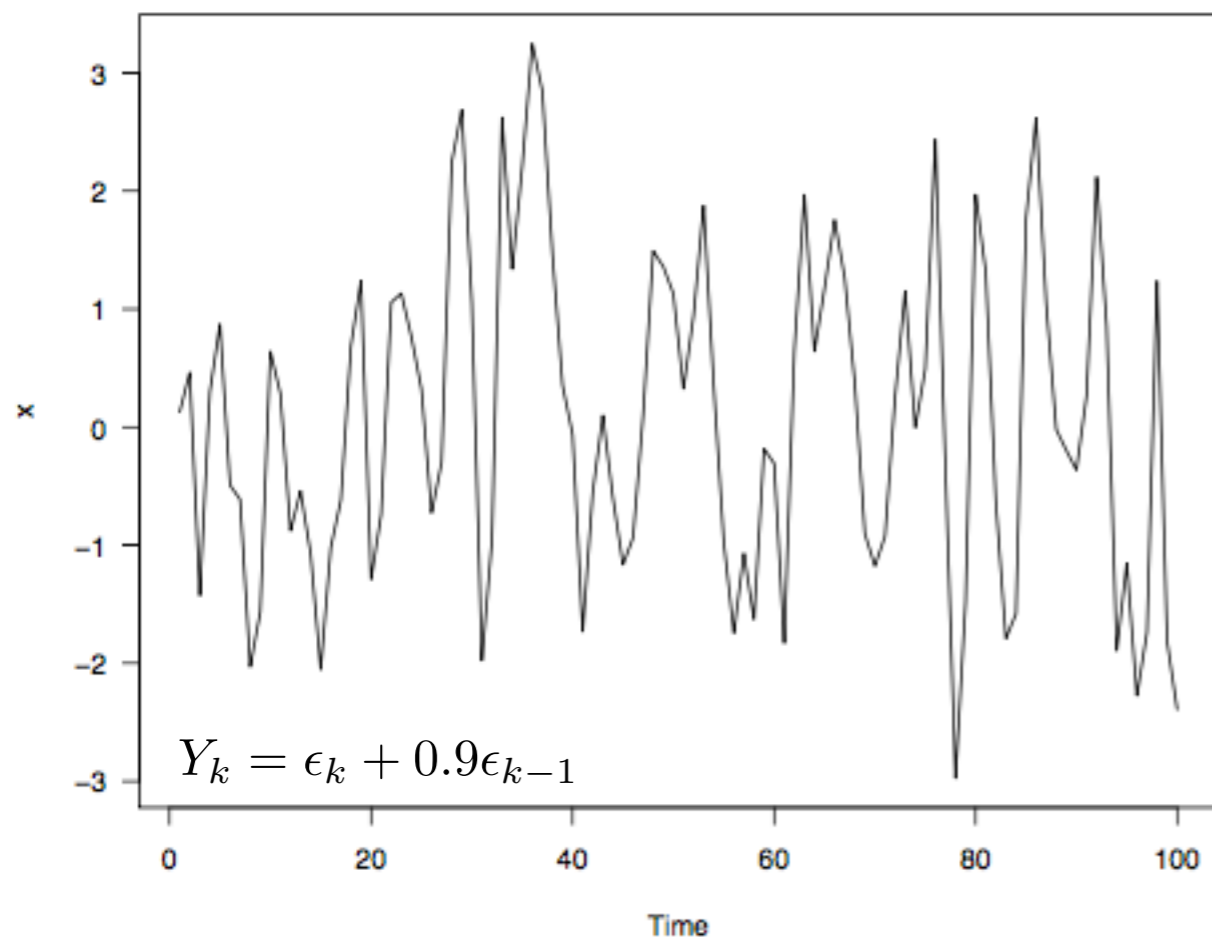
autokovarianční funkce:

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2 & u = 0, \\ (\theta_u + \theta_1\theta_{u+1} + \dots + \theta_{q-u}\theta_q)\sigma^2 & u = 1, \dots, q \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

MA(1): $Y_k = \epsilon_k + \theta\epsilon_{k-1}$

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & u = 0, \\ \theta\sigma^2 & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad r(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{1+\theta^2} & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stacionární náhodná posloupnost



MA(1): $Y_k = \epsilon_k + \theta\epsilon_{k-1}$

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & u = 0, \\ \theta\sigma^2 & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$r(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{1 + \theta^2} & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \cdots + \phi_p Y_{k-p} + \epsilon_k + \theta_1 \epsilon_{k-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{k-q}$$

$$\text{ARMA(1,1): } Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1}$$

autokovarianční funkce:

$$E(\epsilon_k Y_k) = E(\epsilon_k (\phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1})) = \sigma_\epsilon^2$$

$$E(\epsilon_{k-1} Y_k) = E(\epsilon_{k-1} (\phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1})) = (\phi + \theta) \sigma_\epsilon^2$$

·
·
·

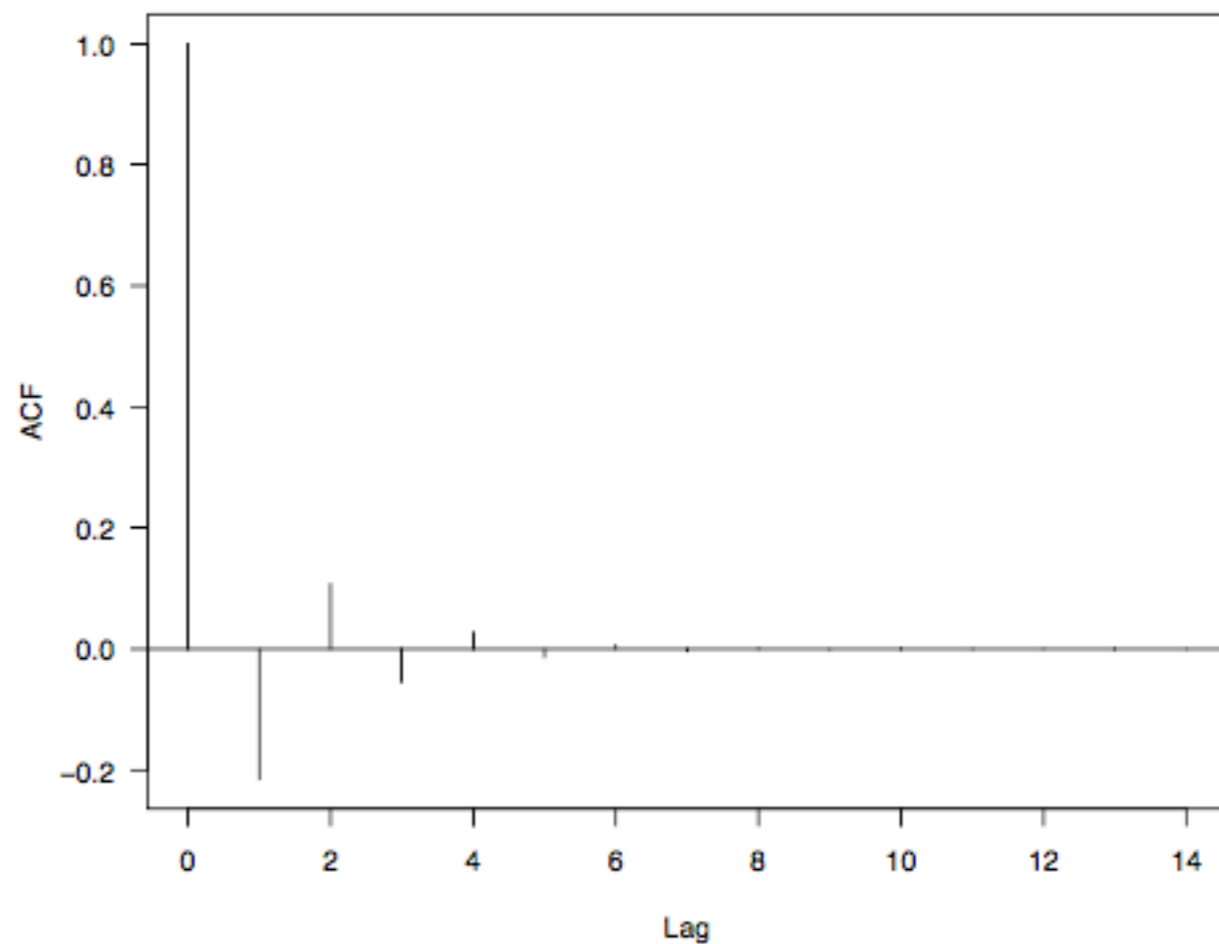
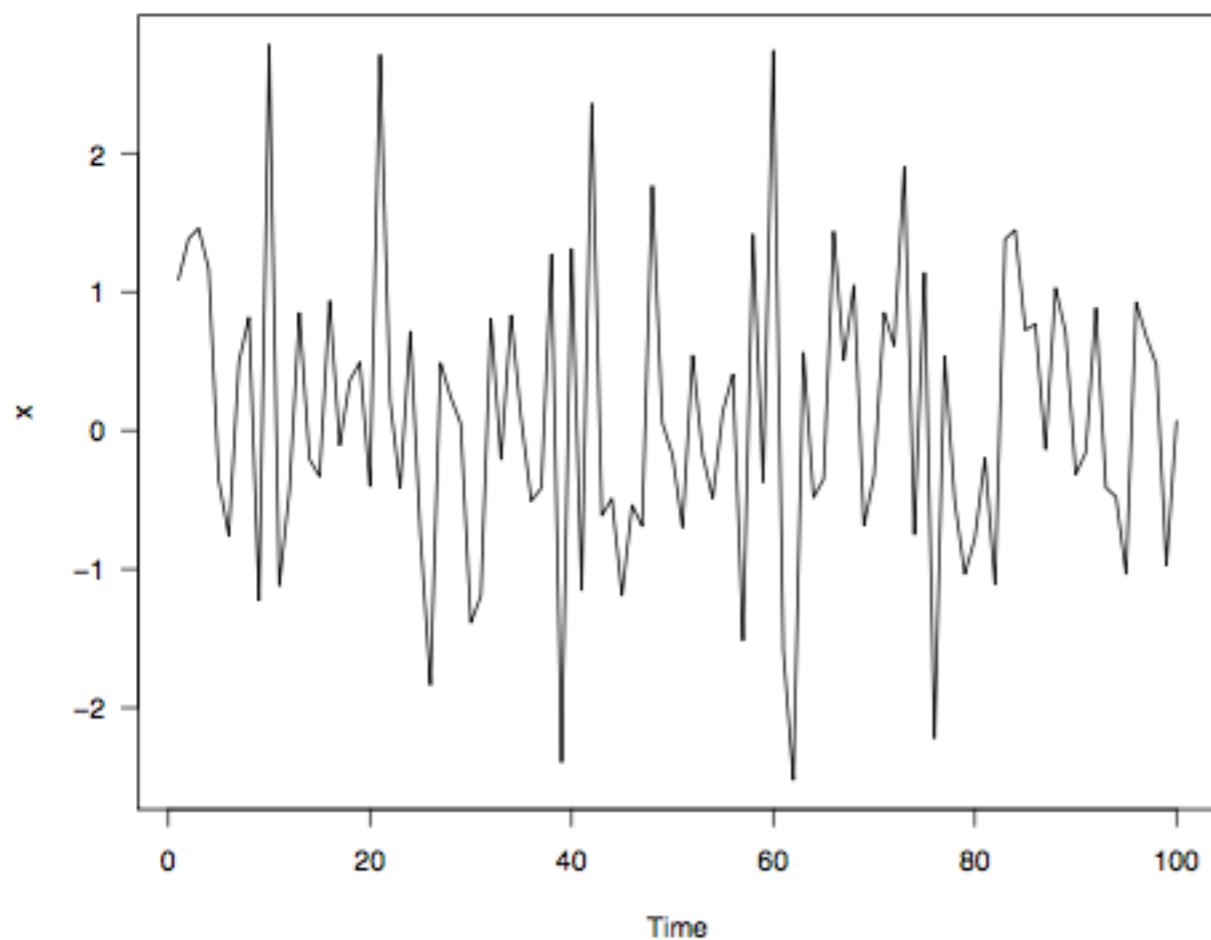
$$c(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1} \sigma_\epsilon^2, \quad v \geq 1$$

$$r(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1}, \quad v \geq 1$$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = -0.5Y_{k-1} + \epsilon_k + 0.3\epsilon_{k-1}$$



$$c(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1} \sigma_\epsilon^2, \quad v \geq 1$$

$$r(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1}, \quad v \geq 1$$

Stacionární náhodná posloupnost

Parciální autokorelační funkce (PACF)

$$a(u) = \rho(Y_k, Y_{k-u} \mid Y_{k-1}, \dots, Y_{k-u+1})$$

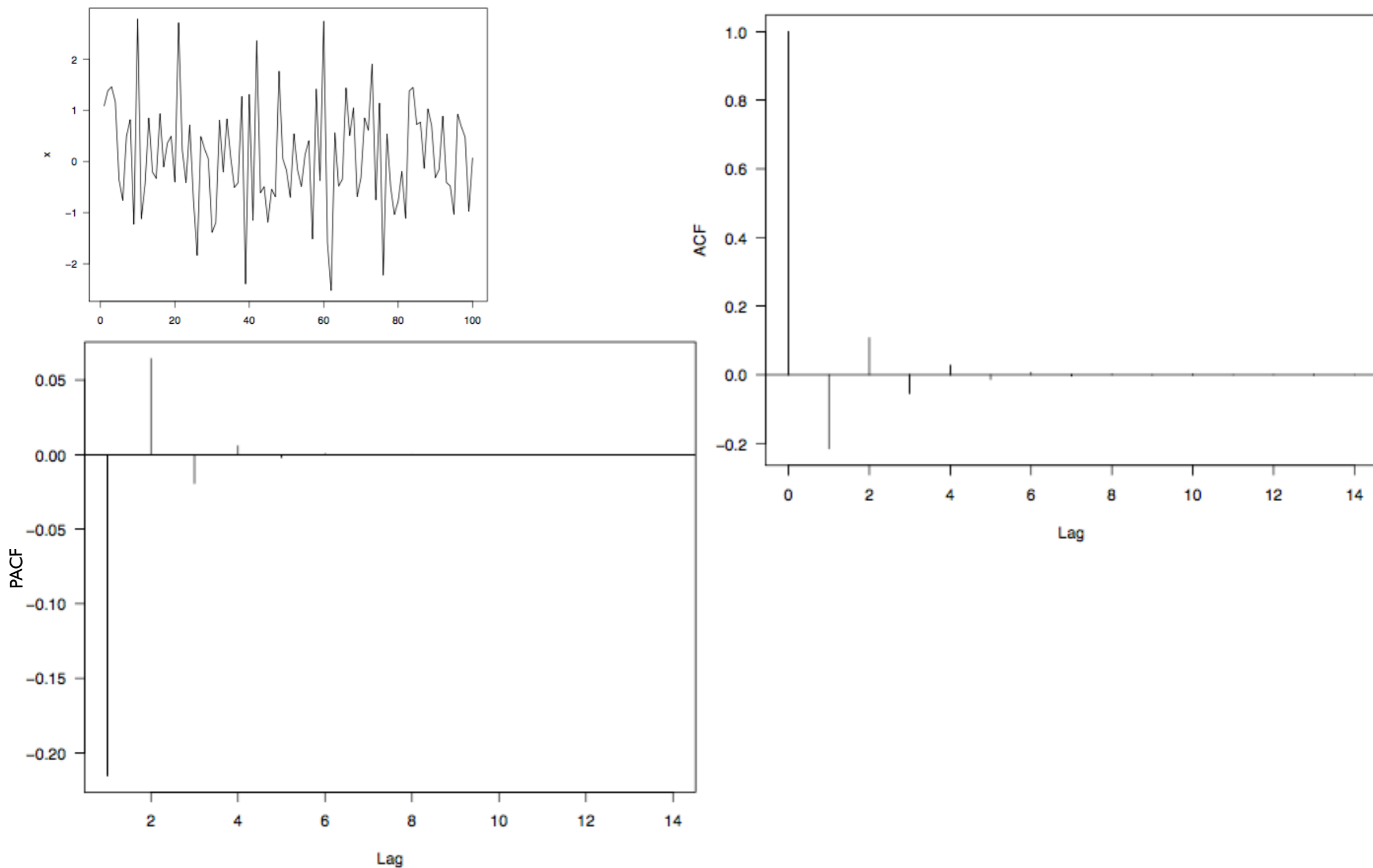
AR(1): $r(u) = \phi^u, u \geq 1, \quad a(1) = \phi, \quad a(u) = 0, u \geq 2.$

MA(1): $r(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, r(u) = 0, u \geq 2, \quad a(u) = \frac{-\theta^u(1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(r+1)}}, u \geq 0.$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = -0.5Y_{k-1} + \epsilon_k + 0.3\epsilon_{k-1}$$



Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Regresní křivka (trend):

$$Y_k = \beta_0 + \epsilon_k$$

$$Y_k = \beta_0 + \beta_1 k + \epsilon_k$$

$$Y_k = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \epsilon_k$$

$$Y_k = \beta_0 \cdot \beta^k + \epsilon_k$$

Příklad - lineární trend:

$$f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$$

parametry β_0, β_1 odhadneme metodou nejmenších čtverců

- minimalizujeme funkci kvadratických odchylek členů posloupnosti a hodnot funkce trendu v nějakém okně $k=1, \dots, n$ ve tvaru

$$g(k; \beta_0, \beta_1) = \sum_{k=1}^n (Y_k - f(k; \beta_0, \beta_1))^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(k; \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = 0 & \quad \beta_0 n + \beta_1 \sum_{k=1}^n t_k = \sum_{k=1}^n y_k \\ \frac{\partial g(k; \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = 0 & \quad \beta_0 \sum_{k=1}^n t_k + \beta_1 \sum_{k=1}^n t_k^2 = \sum_{k=1}^n t_k y_k \end{aligned}$$

Odhady parametrů:
$$b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n \bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Příklad - lineární trend:

$$f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$$

Odhady parametrů:
$$b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

má-li ϵ_k normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$, potom můžeme vyhodnotit i **spolehlivost takového odhadu**:

- odhad rozptylu σ^2 :
$$s^2 = \frac{1}{n-2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 - b_0 \sum_{k=1}^n y_k - b_1 \sum_{k=1}^n t_k y_k \right)$$

- odhad rozptylu b_0 :
$$S_0^2 = \frac{s^2 \sum_{k=1}^n t_k^2}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}$$

- odhad rozptylu b_1 :
$$S_1^2 = \frac{s^2}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}$$

a tedy **100(1- α)%-interval spolehlivosti** pro koeficienty β_0 a β_1 lze vyjádřit jako

$$b_i - S_i t_{1-\alpha/2}(n-2) \leq \beta_i \leq b_i + S_i t_{1-\alpha/2}(n-2), \quad i = 0, 1$$

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Příklad - lineární trend:

$$f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$$

Odhady parametrů:
$$b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

má-li ϵ_k normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$, potom můžeme provést **predikci pro nějakou budoucí hodnotu T** :

100(1- α)%-interval spolehlivosti pro predikci má potom tvar

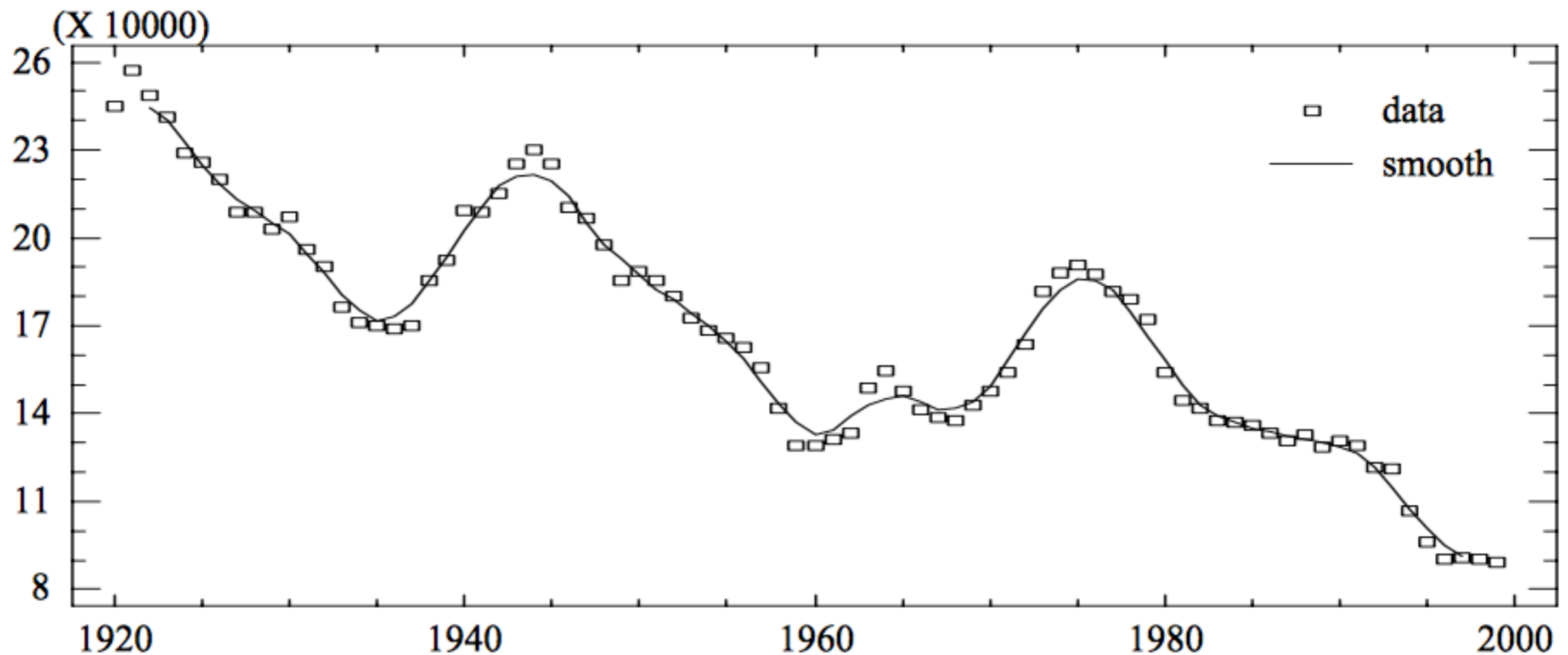
$$\tilde{y}_T - t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot F_T \leq Y_T \leq \tilde{y}_T + t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot F_T$$

kde
$$F_T = s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(T - \bar{t})^2}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}}$$

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry:

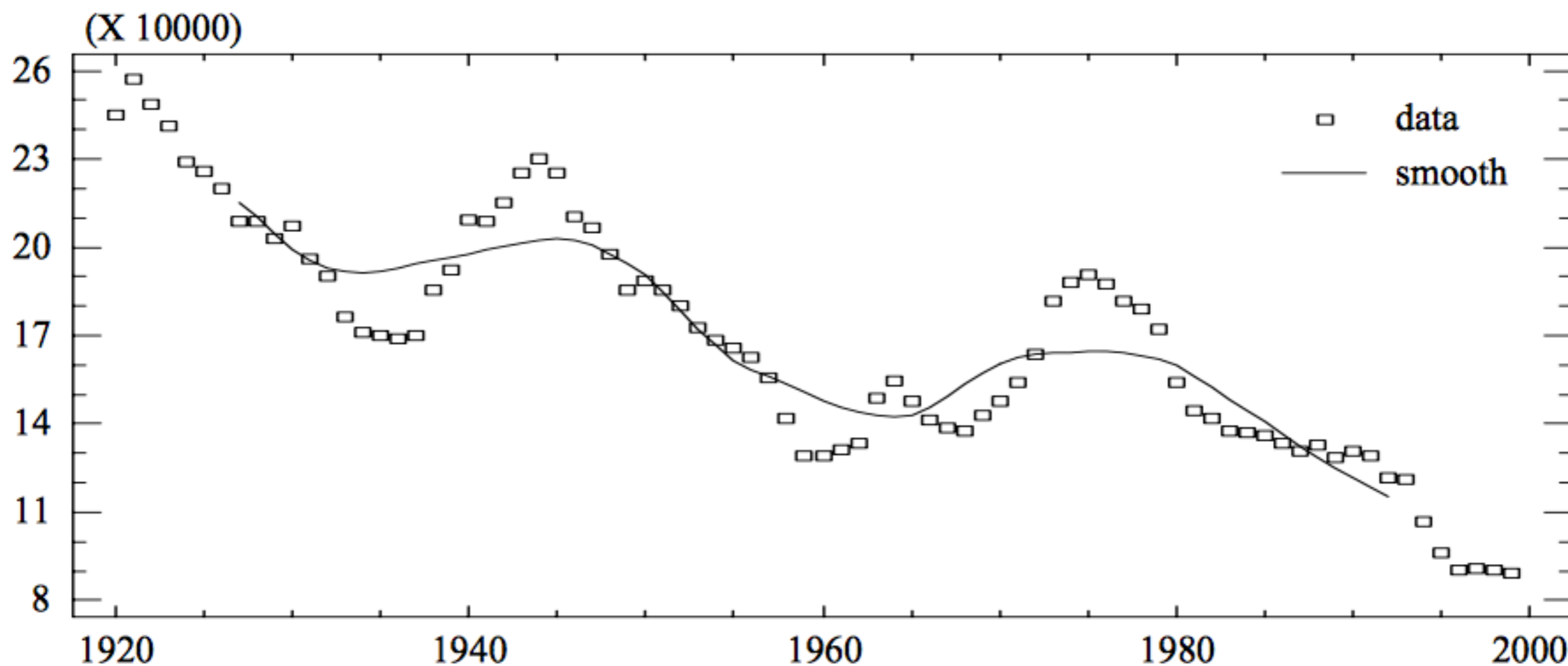
$$y_k^* = \frac{1}{m + n + 1} \sum_{i=-m}^n y_{k+i}$$



klouzavé průměry délky 5 ($m=2, n=2$)

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry:
$$y_k^* = \frac{1}{m + n + 1} \sum_{i=-m}^n y_{k+i}$$



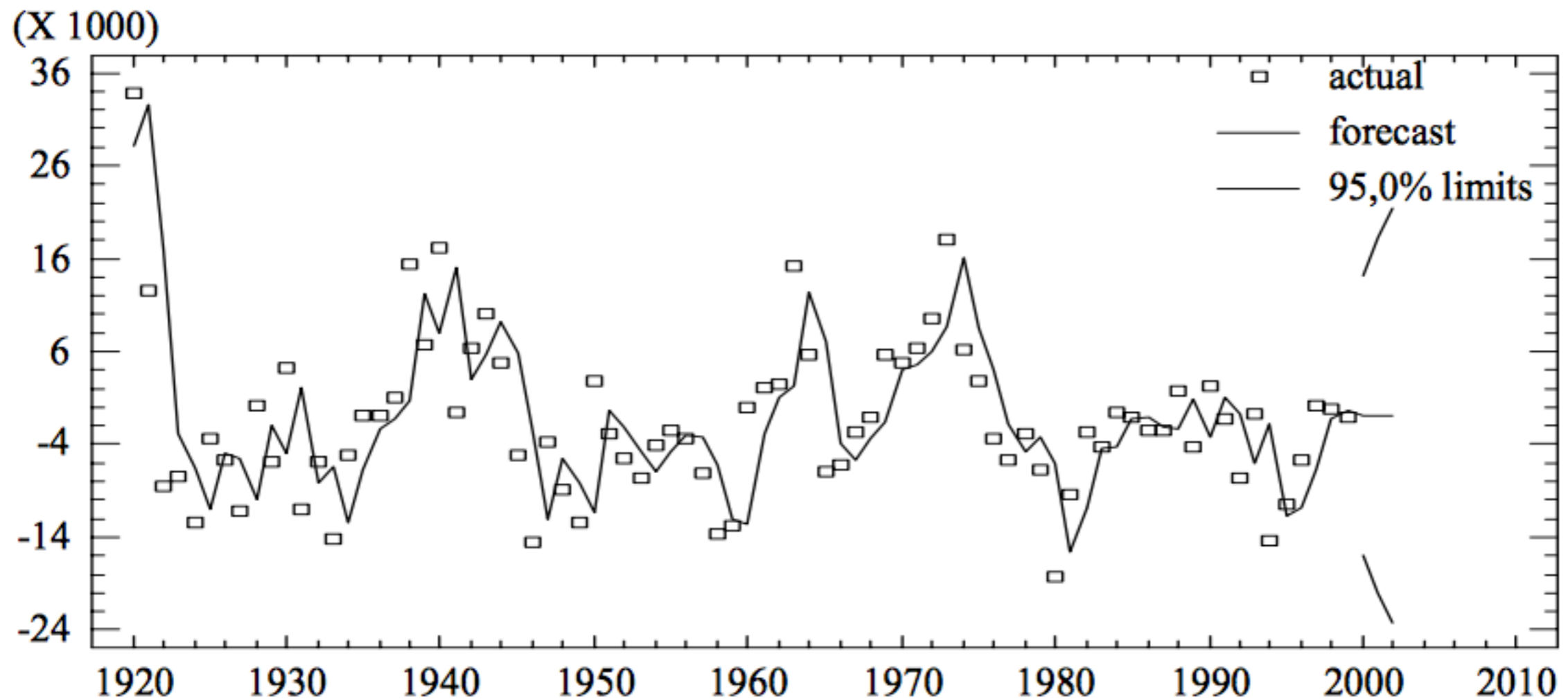
klouzavé průměry délky 15 ($m=7, n=7$)

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry:
$$y_k^* = \frac{1}{m + n + 1} \sum_{i=-m}^n y_{k+i}$$

Klouzavé mediány:
$$y_k^* = \text{med}(y_{k-m}, \dots, y_k, \dots, y_{k+n})$$

Exponenciální vyhlazování:
$$y_k^* = (1 - \lambda)y_{k-1}^* + \lambda y_k$$



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

trendová složka

sezónní složka

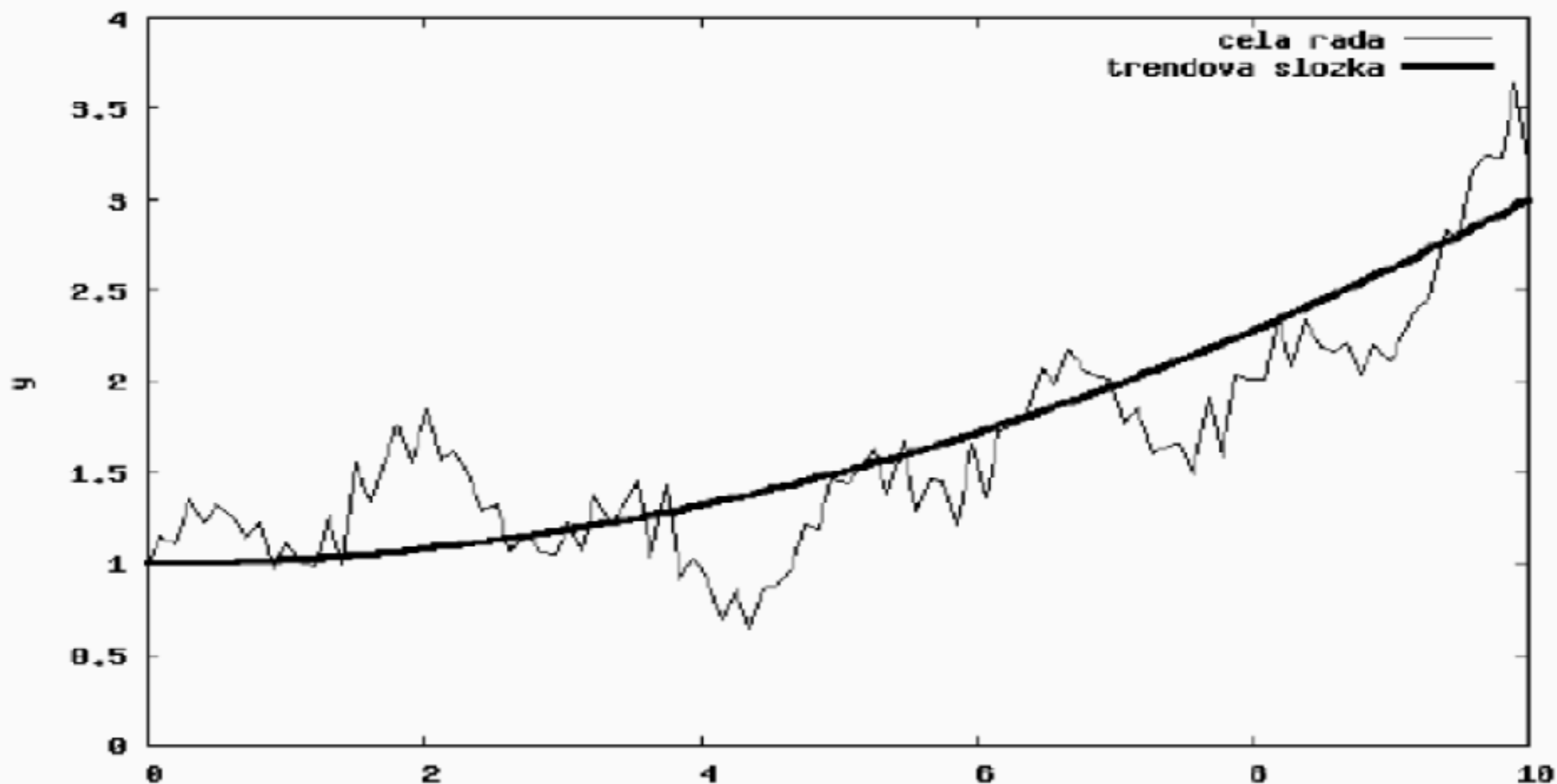
cyklická složka

náhodná složka

Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

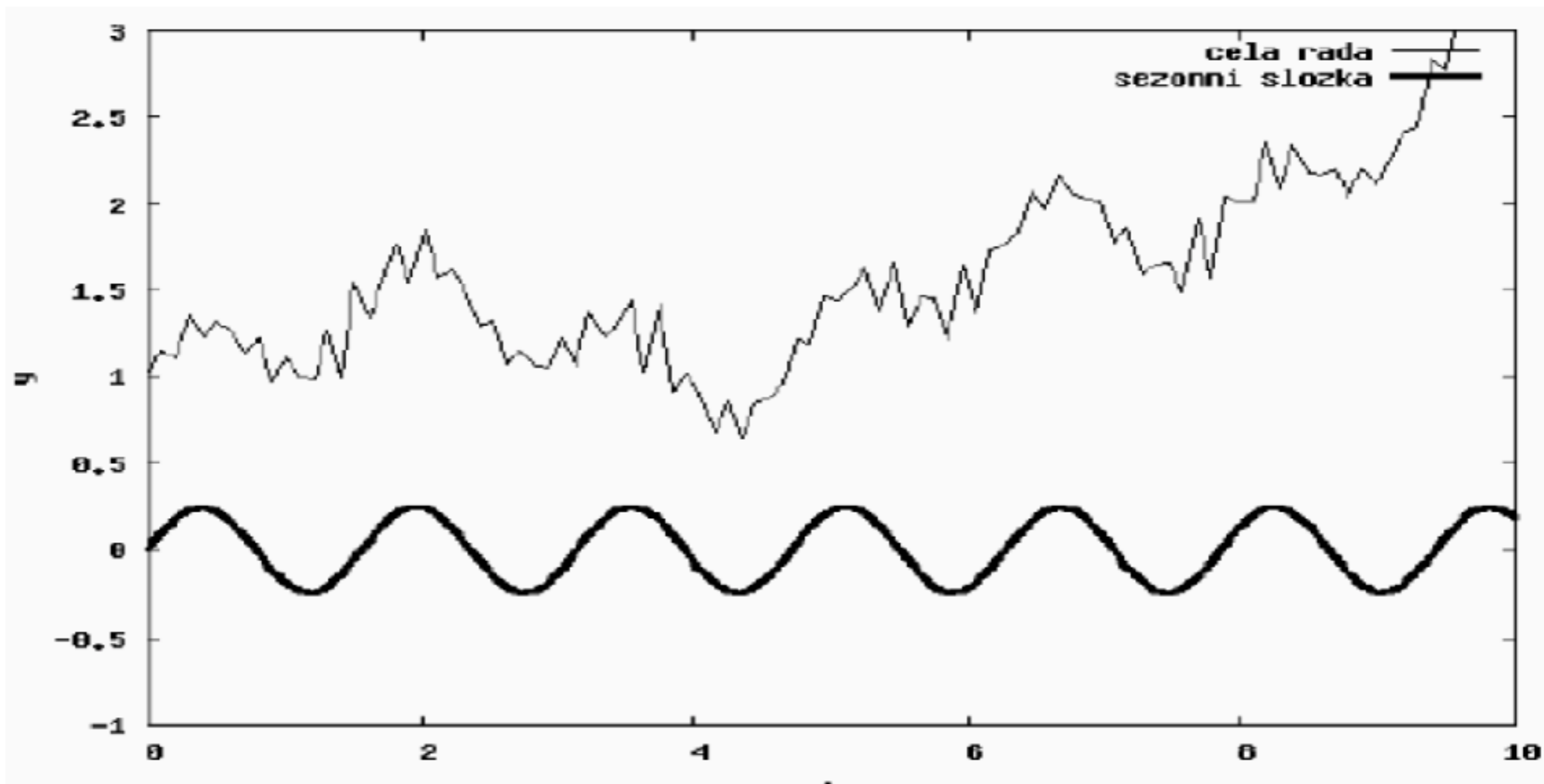
trendová složka



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

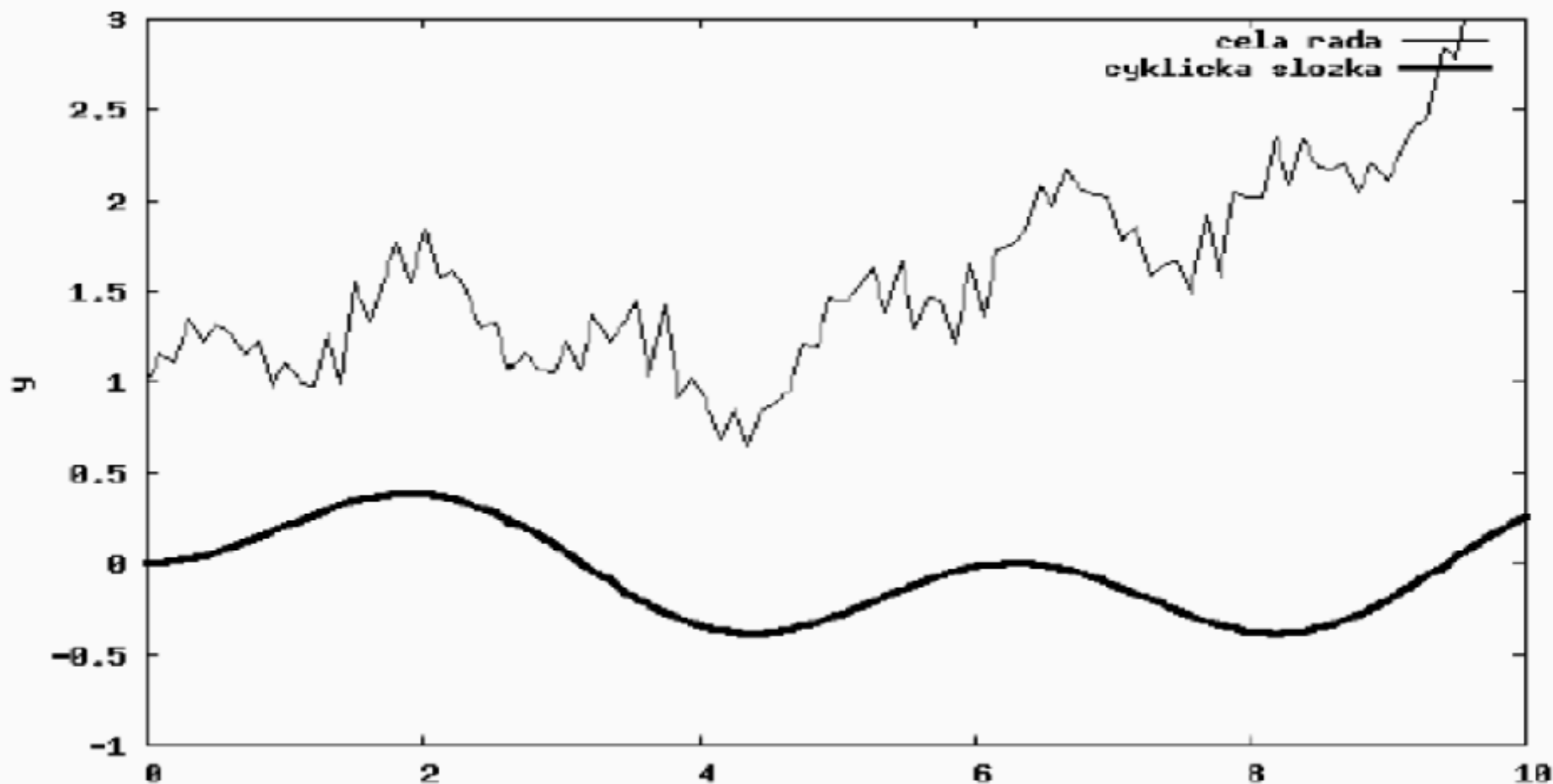
sezónní složka



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

cyklická složka

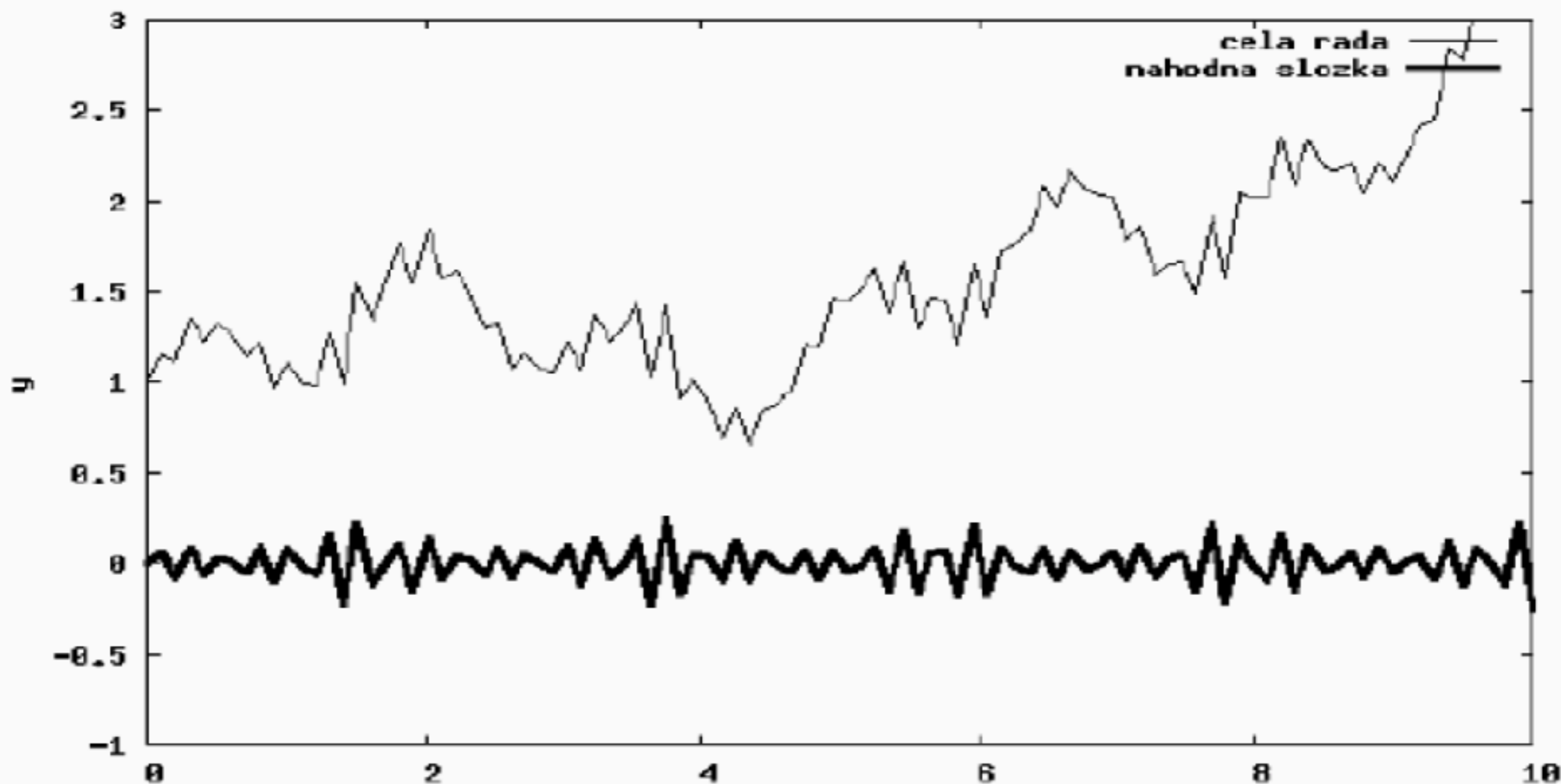


Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

Očištěná řada

náhodná složka



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

