

# Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

## D.4 - Testy dobré shody



# D.4 - Testy dobré shody

- Klíčové pojmy:**
- Nulová a alternativní hypotéza
  - Hladina významnosti testu
  - Chyby 1. a 2. druhu
  - p-hodnota

- Klíčové vztahy:**
- Test ANOVA, podmínky
  - Kruskal-Wallis test

# Pravděpodobnostní modely

## 1) Diskrétní:

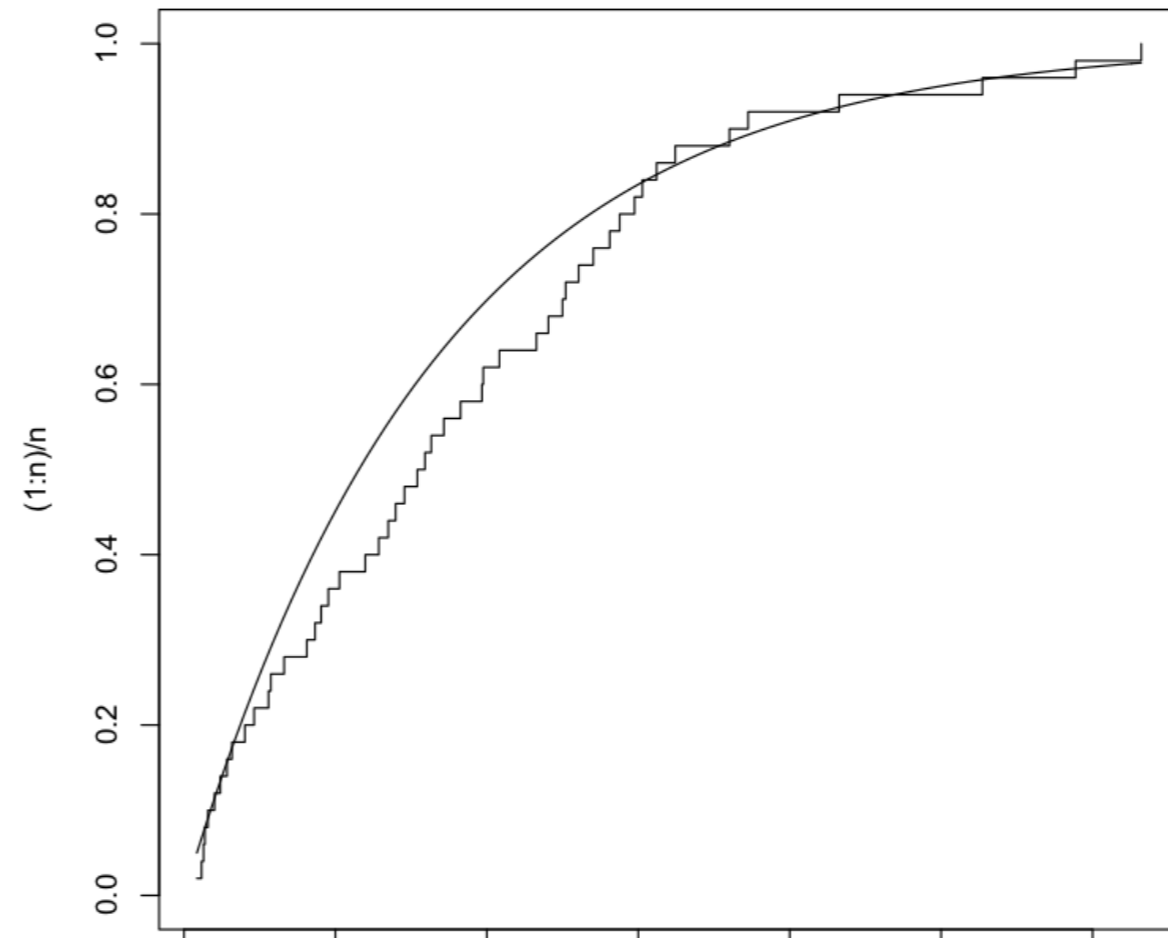
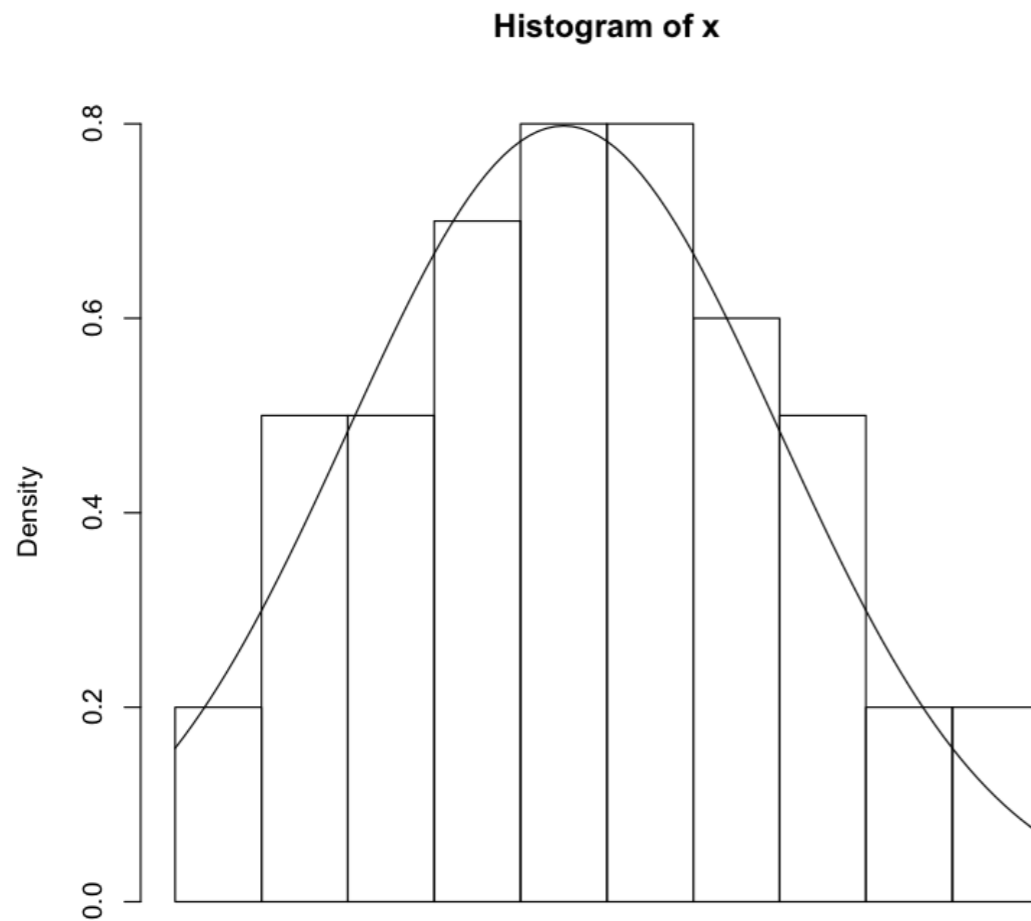
- Rovnoměrný  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$
- Alternativní  $\Omega = \{0, 1\}$
- Binomický  $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$
- Hypergeometrický  $\Omega = \{\max(0, n + M - N), \dots, \min(n, M)\}$
- Geometrický  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Poissonův  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

## 2) Spojité:

- Rovnoměrný  $\Omega = \langle a, b \rangle$
- Normální  $\Omega = (-\infty, \infty)$
- Exponenciální  $\Omega = \langle 0, \infty \rangle$
- Weibullův  $\Omega = \langle 0, \infty \rangle$
- Logaritmicko-normální  $\Omega = \langle 0, \infty \rangle$



# Testy dobré shody



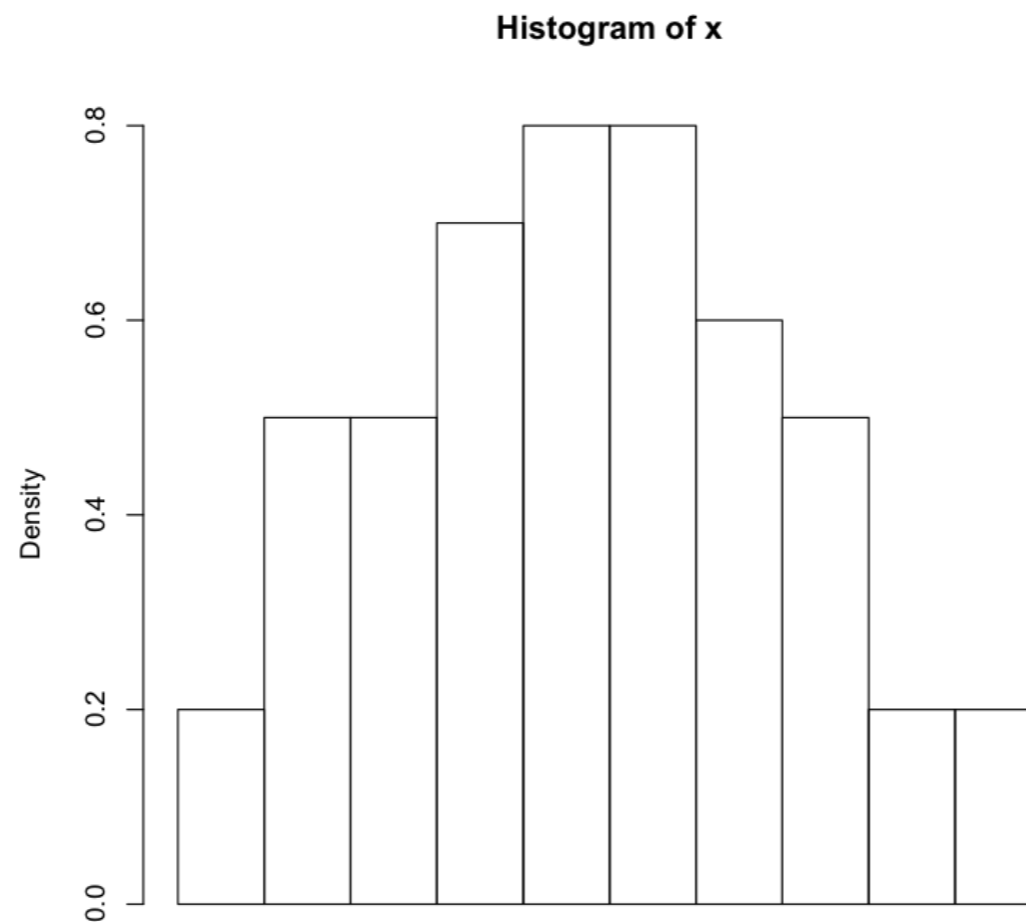
Jaká je shoda pozorovaného experimentu s teoretickým modelem?



# Testy dobré shody

Co máme k dispozici?

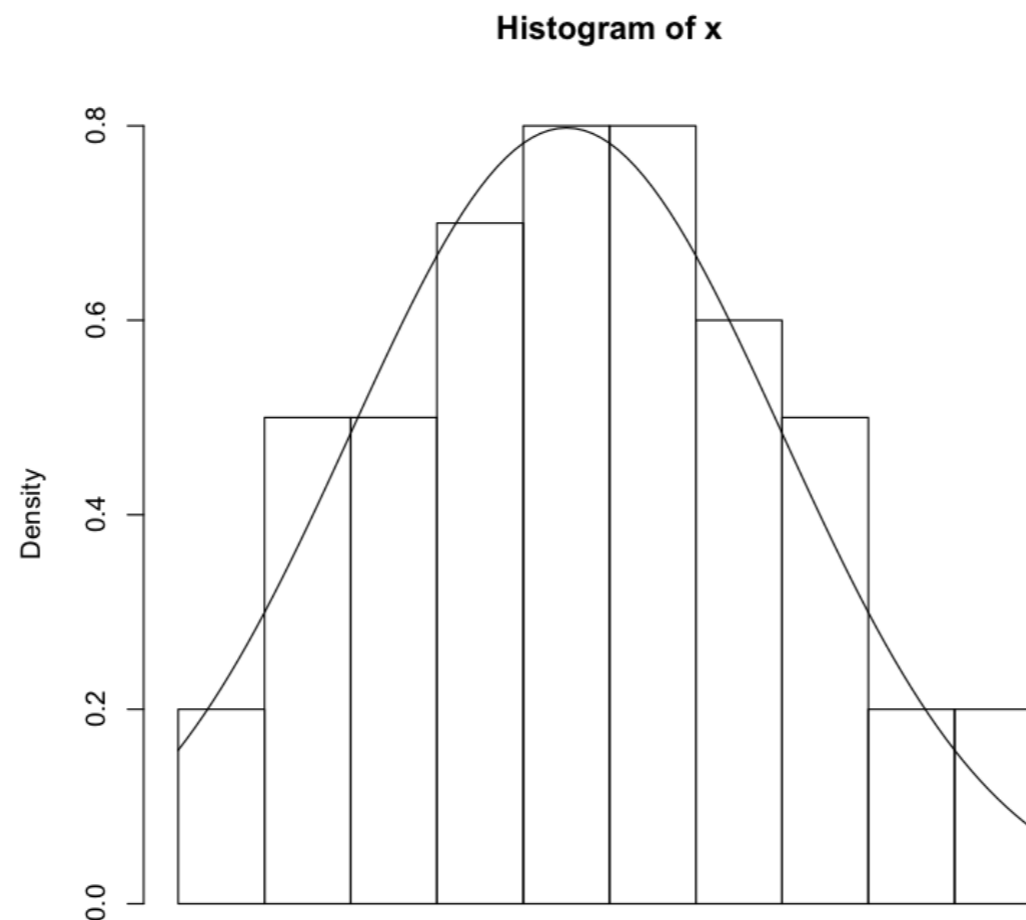
1) Pozorování výsledků experimentu (měření) = data



# Testy dobré shody

Co máme k dispozici?

- 1) Pozorování výsledků experimentu (měření) = data
- 2) Představu o hypotetickém (teoretickém) rozdělení pozorované veličiny



# Testy dobré shody

Co s tím?

1) Základní informaci o rozdělení nám poskytují výběrové momenty:

1. výběrový moment = aritmetický průměr: .....  
(bodový odhad střední hodnoty)  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
2. výběrový centrální moment = výběrový rozptyl .....  $m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
3. výběrový centrální moment .....  
(bodový odhad koeficientu šikmosti:  $S_{kew} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$ )  $m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3$
4. výběrový centrální moment .....  
(bodový odhad koeficientu špičatosti:  $K_{urt} = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$ )  $m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4$

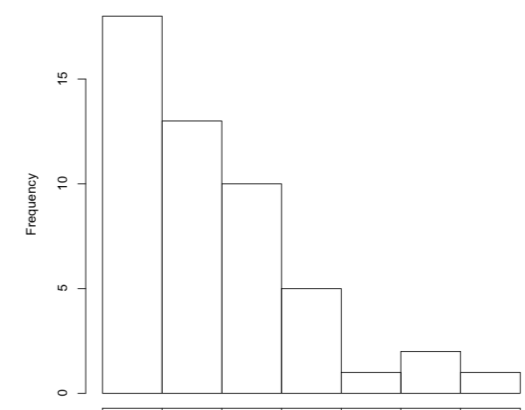
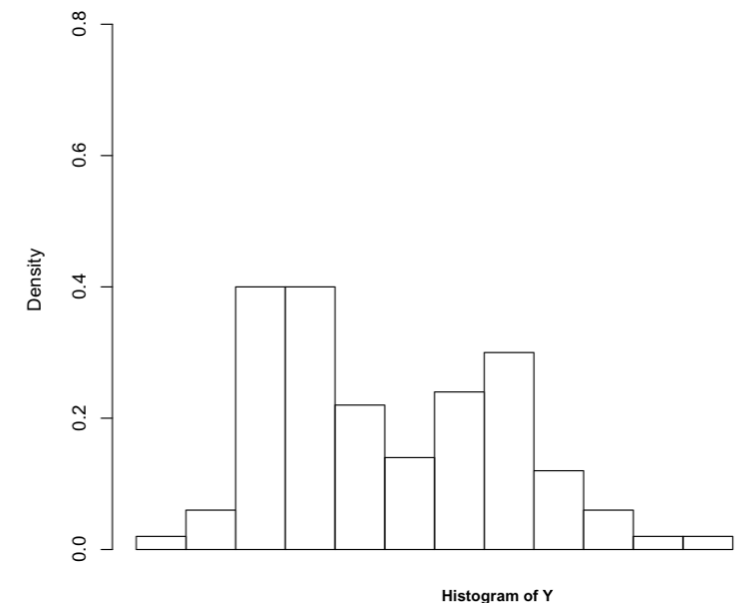
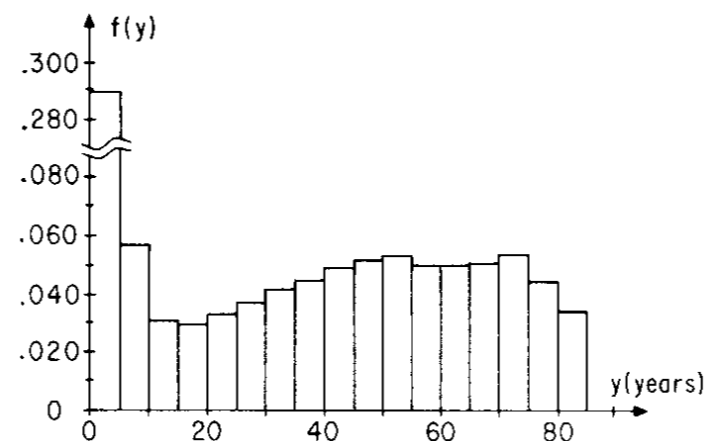
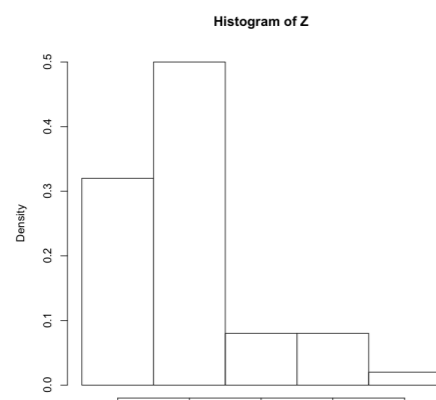
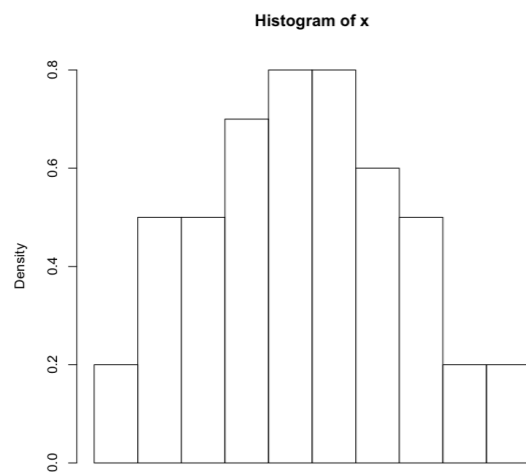


# Testy dobré shody

Co s tím?

## 2) Grafická analýza

- Histogram - poskytuje předběžnou představu o tvaru hustoty



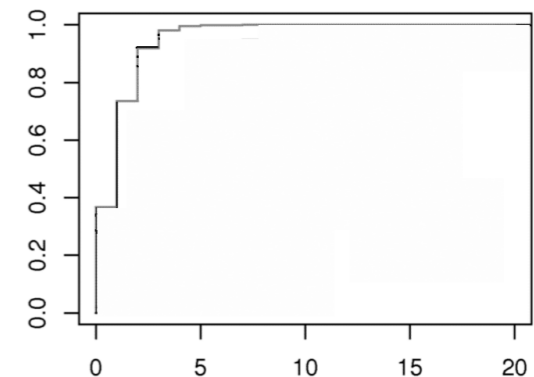
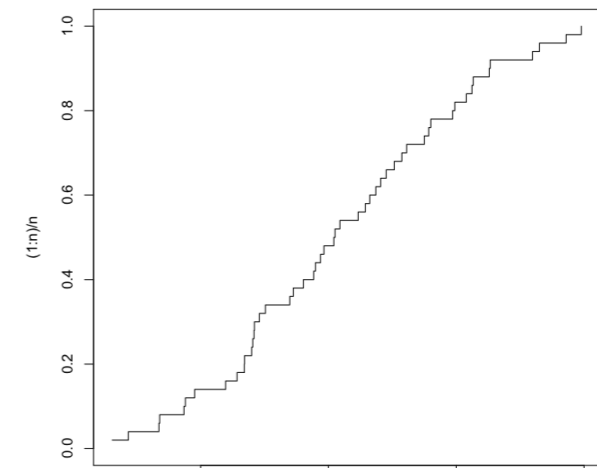
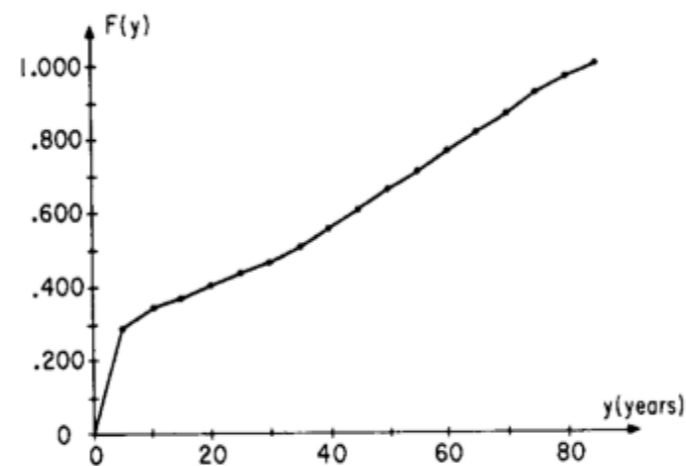
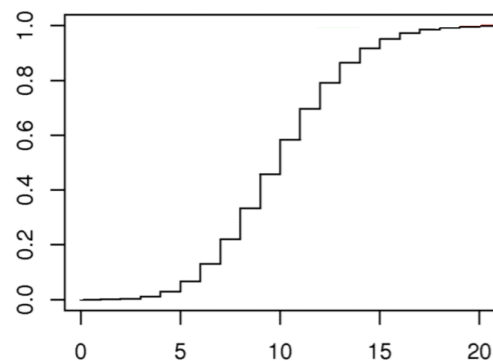
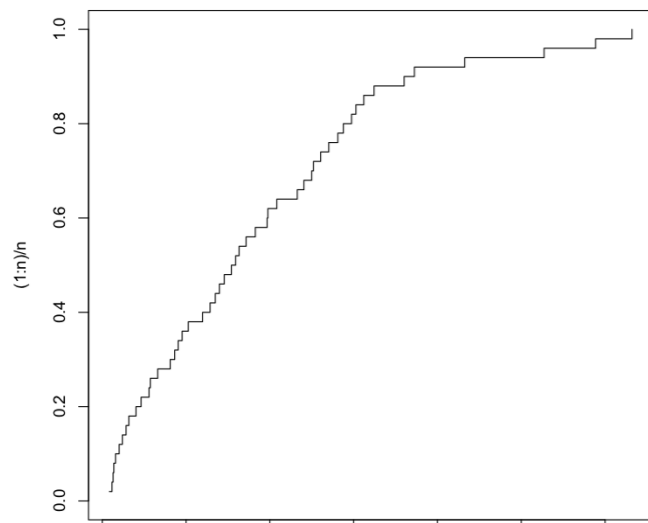
Lze použít například Sturgessovo pravidlo pro volbu počtu tříd:  $k = 1 + \frac{10}{3} \log_{10} N$  →

# Testy dobré shody

Co s tím?

## 2) Grafická analýza

- Histogram - poskytuje předběžnou představu o tvaru hustoty
- Empirická distribuční funkce - poskytuje předběžnou představu o tvaru distribuční funkce

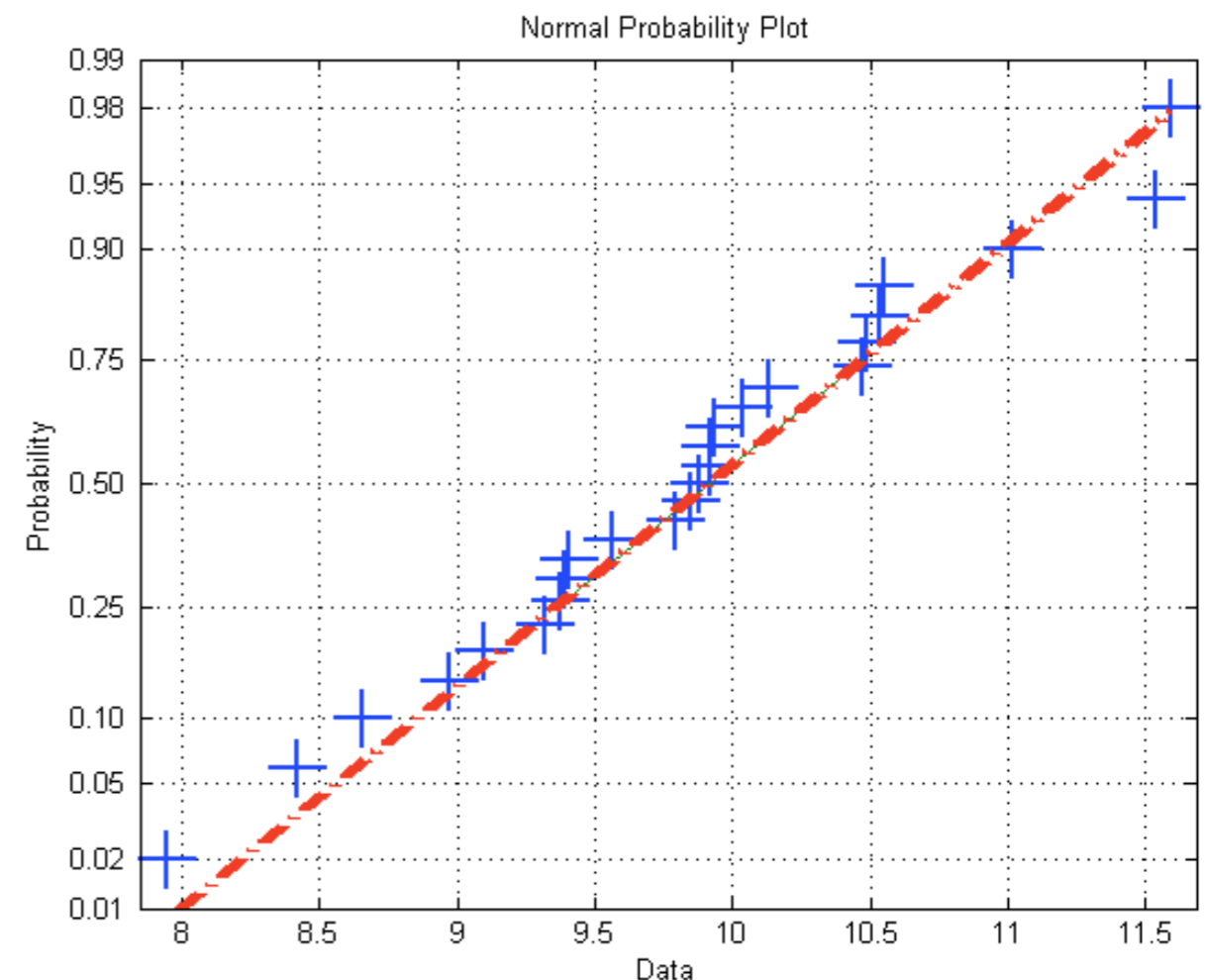


# Testy dobré shody

Co s tím?

## 2) Grafická analýza

- Histogram - poskytuje předběžnou představu o tvaru hustoty
- Empirická distribuční funkce - poskytuje předběžnou představu o tvaru distribuční funkce
- Pravděpodobnostní papír  
osa x: lineární  
osa Y: transformované  
“pravděpodobnostní” měřítko  
  
Zakreslujeme dvojice  $(x_{(i)}, i/n)$



# Testy dobré shody

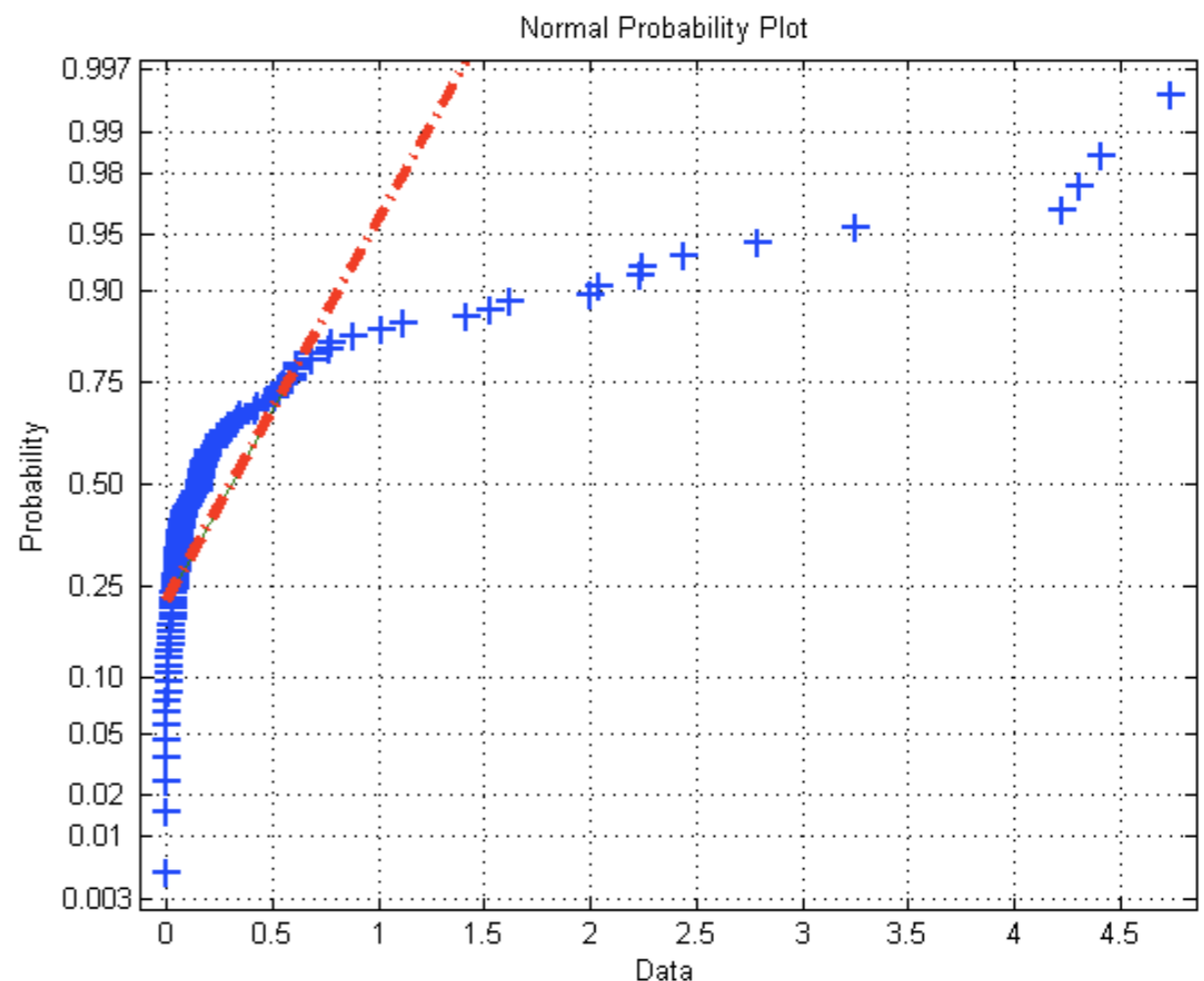
Co s tím?

## 2) Grafická analýza

- Histogram - poskytuje předběžnou představu o tvaru hustoty
- Empirická distribuční funkce - poskytuje předběžnou představu o tvaru distribuční funkce

- Pravděpodobnostní papír  
osa x: lineární  
osa Y: transformované  
“pravděpodobnostní” měřítko

Zakreslujeme dvojice  $(x_{(i)}, i/n)$

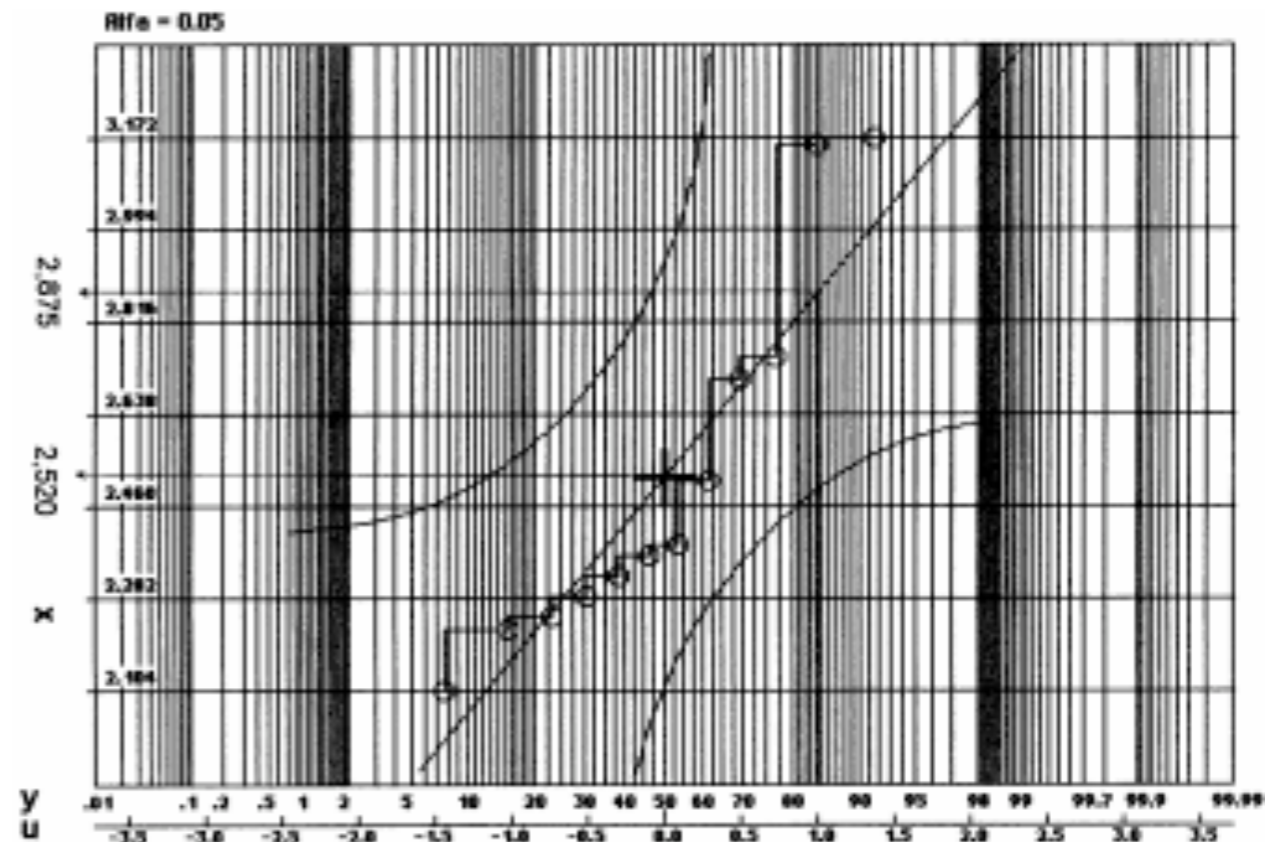


# Testy dobré shody

Co s tím?

## 2) Grafická analýza

- Histogram - poskytuje předběžnou představu o tvaru hustoty
- Empirická distribuční funkce - poskytuje předběžnou představu o tvaru distribuční funkce
- Pravděpodobnostní papír  
osa x: lineární  
osa Y: transformované  
“pravděpodobnostní” měřítko  
Zakreslujeme dvojice  $(x_{(i)}, i/n)$



# Testy dobré shody

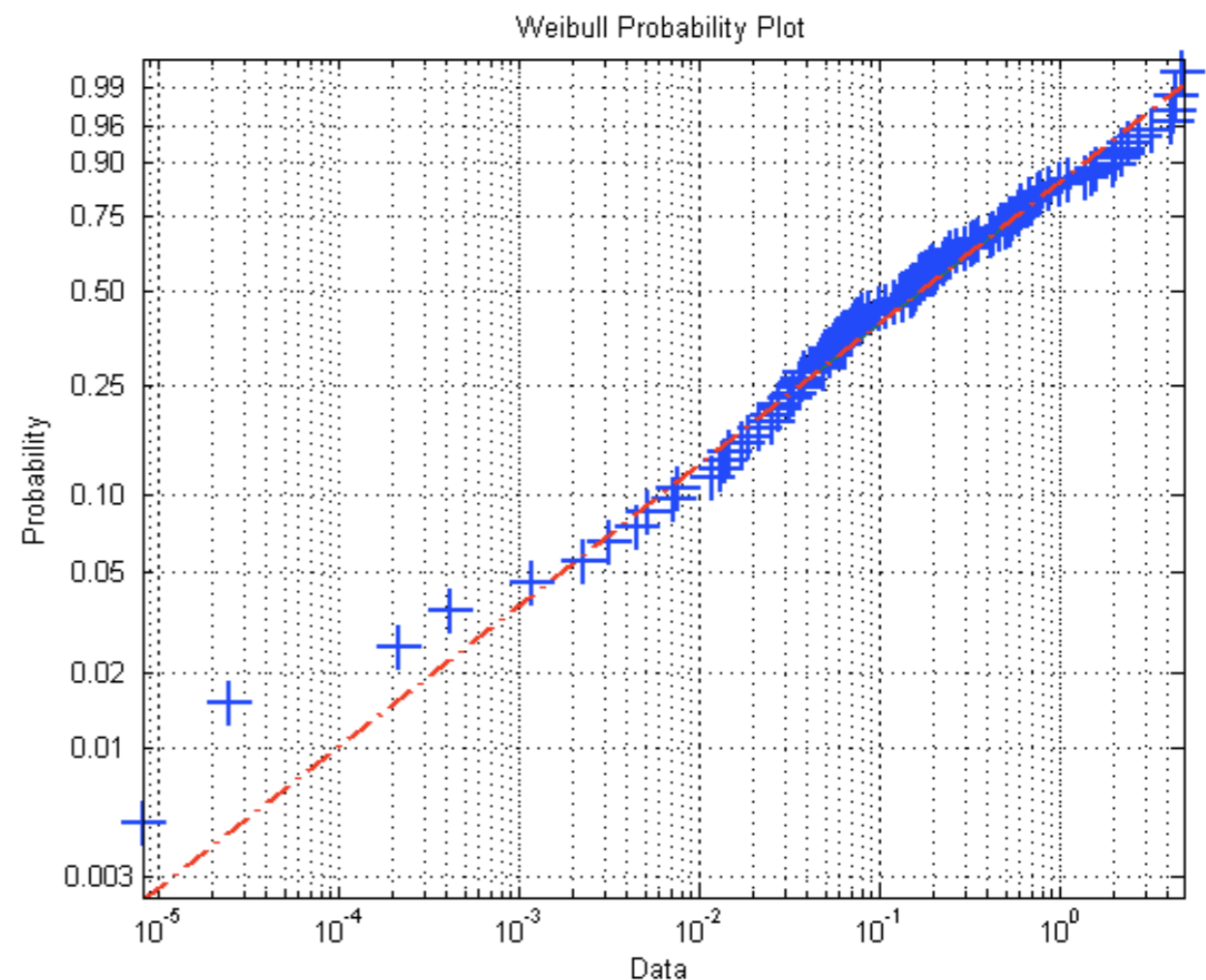
Co s tím?

## 2) Grafická analýza

- Histogram - poskytuje předběžnou představu o tvaru hustoty
- Empirická distribuční funkce - poskytuje předběžnou představu o tvaru distribuční funkce

- Pravděpodobnostní papír  
osa x: lineární  
osa Y: transformované  
“pravděpodobnostní” měřítko

Zakreslujeme dvojice  $(x_{(i)}, i/n)$



# Testy dobré shody

Co s tím?

## 2) Grafická analýza

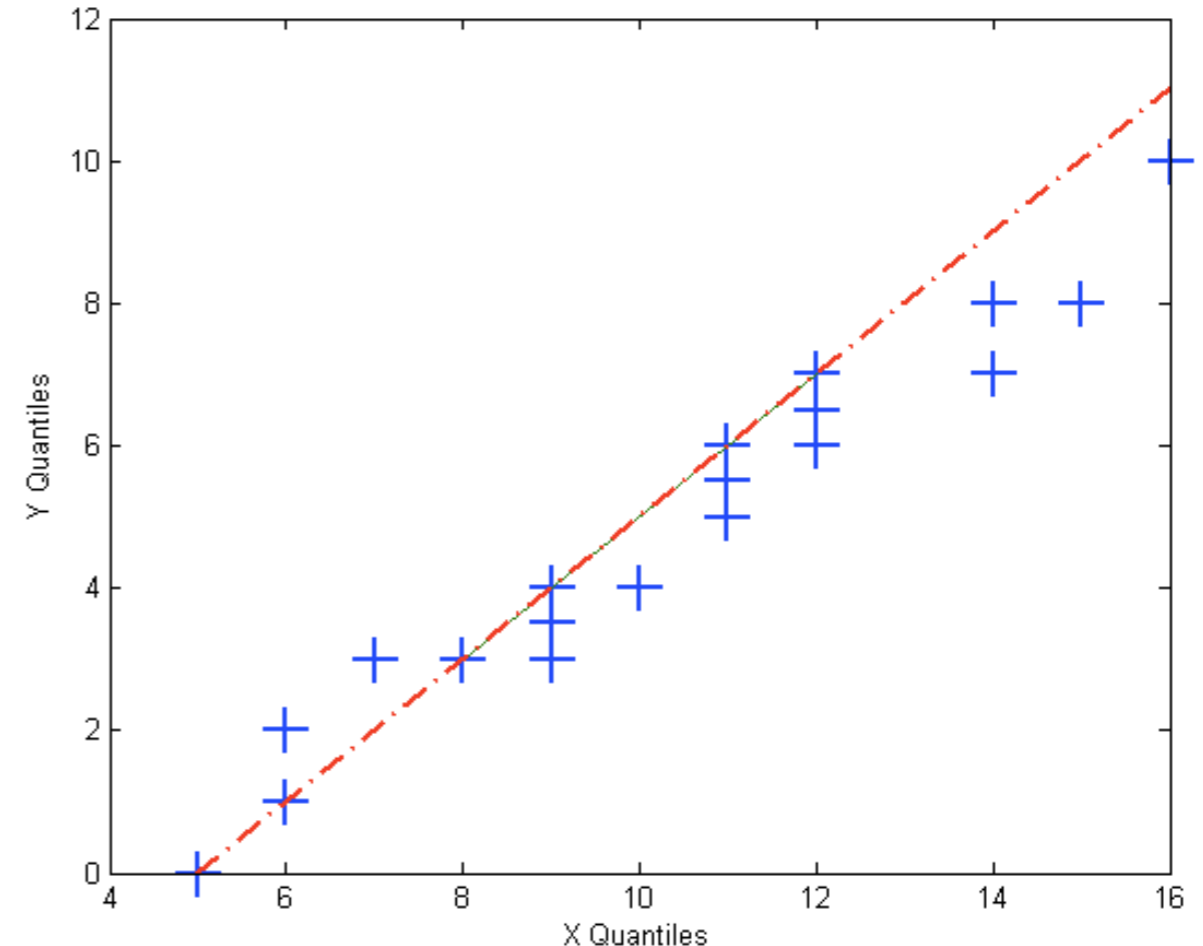
- Histogram - poskytuje předběžnou představu o tvaru hustoty
- Empirická distribuční funkce - poskytuje předběžnou představu o tvaru distribuční funkce

- Pravděpodobnostní papír  
osa x: lineární  
osa Y: transformované  
“pravděpodobnostní” měřítko

Zakreslujeme dvojice  $(x_{(i)}, i/n)$

- Q-Q graf  
osa x: měření  
osa y: kvantily hypotetické d.f.

Zakreslujeme dvojice  $(x_{(i)}, F^{-1}(i/n))$



# Testy dobré shody

Co s tím?

Pomocí grafické analýzy  
můžeme metodou srovnání se  
standardními modely pouze  
odhadnout typ rozdělení

## 2) Grafická analýza

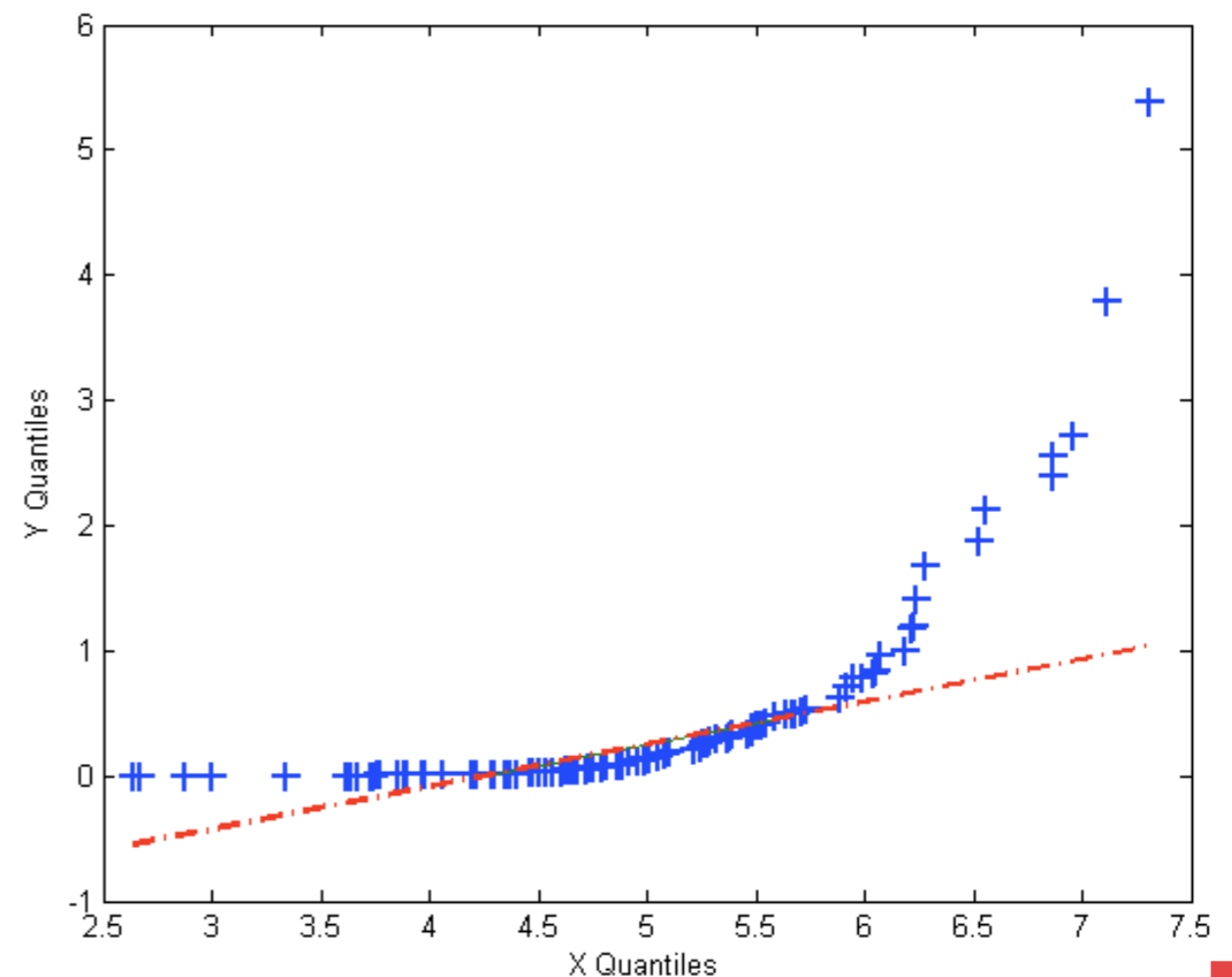
- Histogram - poskytuje předběžnou představu o tvaru hustoty
- Empirická distribuční funkce - poskytuje předběžnou představu o tvaru distribuční funkce

- Pravděpodobnostní papír  
osa x: lineární  
osa Y: transformované  
“pravděpodobnostní” měřítko

Zakreslujeme dvojice  $(x_{(i)}, i/n)$

- Q-Q graf  
osa x: měření  
osa y: kvantily hypotetické d.f.

Zakreslujeme dvojice  $(x_{(i)}, F^{-1}(i/n))$



# Testy dobré shody

Co můžeme dělat dál?

## 3) Kvantitativní testy hypotéz o daném typu rozdělení

- poskytnou nám objektivní míru shody dat s teoretickým modelem

nulová hypotéza :  $H_0 : F(x) = F_0(x)$

alternativní hypotéza:  $H_A : F(x) \neq F_0(x)$

testová statistika :  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$

hladina významnosti:  $\alpha$

chyba 1. druhu: zamítneme hypotézu, která platí

chyba 2. druhu: nezamítneme hypotézu, která neplatí

hladina významnosti testu: pravděpodobnost chyby 1. druhu

síla testu: pravděpodobnost zamítnutí hypotézy, když neplatí

p-hodnota: nejmenší hladina významnosti, při které bychom ještě zamítli nulovou hypotézu.



# Testy dobré shody

Co můžeme dělat dál?

## 3) Kvantitativní testy hypotéz o daném typu rozdělení

- poskytnou nám objektivní míru shody dat s teoretickým modelem

nulová hypotéza :  $H_0 : F(x) = F_0(x)$

alternativní hypotéza:  $H_A : F(x) \neq F_0(x)$

testová statistika :  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$

hladina významnosti:  $\alpha$

- Chí-kvadrát test dobré shody
- Kolmogorov-Smirnovův test
- Testy normality (Shapiro-Wilkův test, testy na základě šikmosti a špičatosti, Lilieforsův, Anderson-Darlingův test)



# Chí-kvadrát test dobré shody

Test srovnává empirické a teoretické četnosti při zadaném třídění:

- i) provedeme roztrídění naměřených hodnot do  $k$  tříd
- ii) napočítáme empirické četnosti  $n_1, n_2, \dots, n_k$
- iii) napočítáme pravděpodobnosti tříd  $p_1, p_2, \dots, p_k$  při hypotetickém rozdělení (kde  $p_j = F(x_{j+1}) - F(x_j)$ )
- iv) napočítáme teoretické četnosti  $np_1, np_2, \dots, np_k$
- v) pokud pro všechna  $j = 1, 2, \dots, k$  platí  $np_j > 5$ , spočítáme hodnotu testové statistiky
$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$$
- vi) neplatí-li podmínka v bodě (v), provedeme úpravu třídních intervalů (nemusejí být stejně velké)
- vii) známe-li parametry hypotetického rozdělení předem, bude mít testová statistika rozdělení  $\chi^2(k-1)$  a nulovou hypotézu zamítneme, pokud  $\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1)$ , kde  $\chi_{1-\alpha}^2(k-1)$  je  $(1-\alpha)$ -kvantil chí-kvadrát rozdělení o  $(k-1)$  stupních volnosti.
- viii) pokud neznáme parametry hypotetického rozdělení odhadujeme z naměřených dat, bude mít testová statistika chí-kvadrát rozdělení o  $(k-r-1)$  stupních volnosti, kde  $r$  je počet odhadovaných parametrů. Nulovou hypotézu v tomto případě zamítneme, pokud bude  $\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(k-r-1)$ .



# Chí-kvadrát test dobré shody

24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455	24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721	24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405	23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285	24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777	24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906

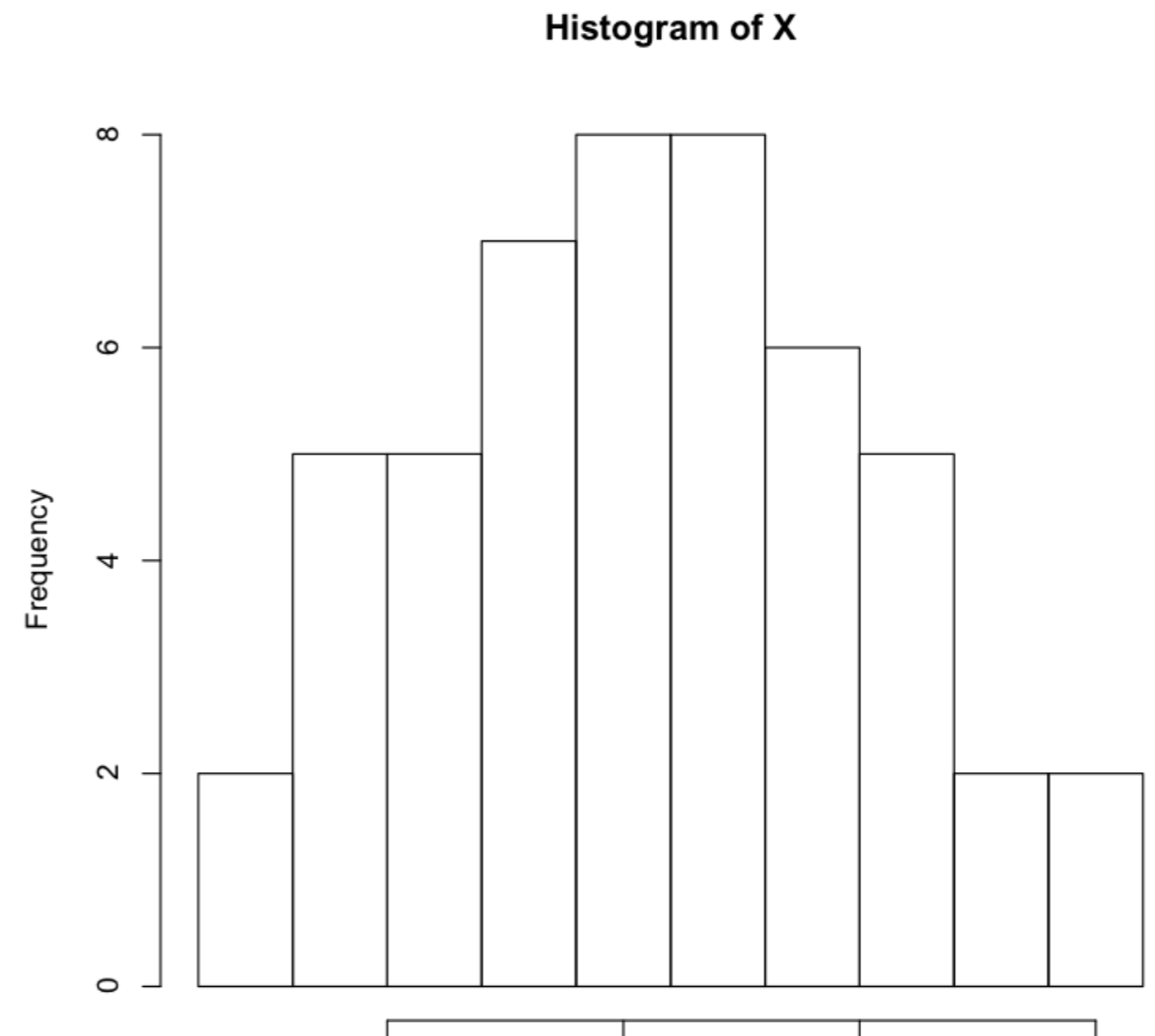
$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = 24.54689$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 0,2102477$$

$$s = \sqrt{0,2102477} = 0,4585$$

$$N(24,55; 0,2102)$$

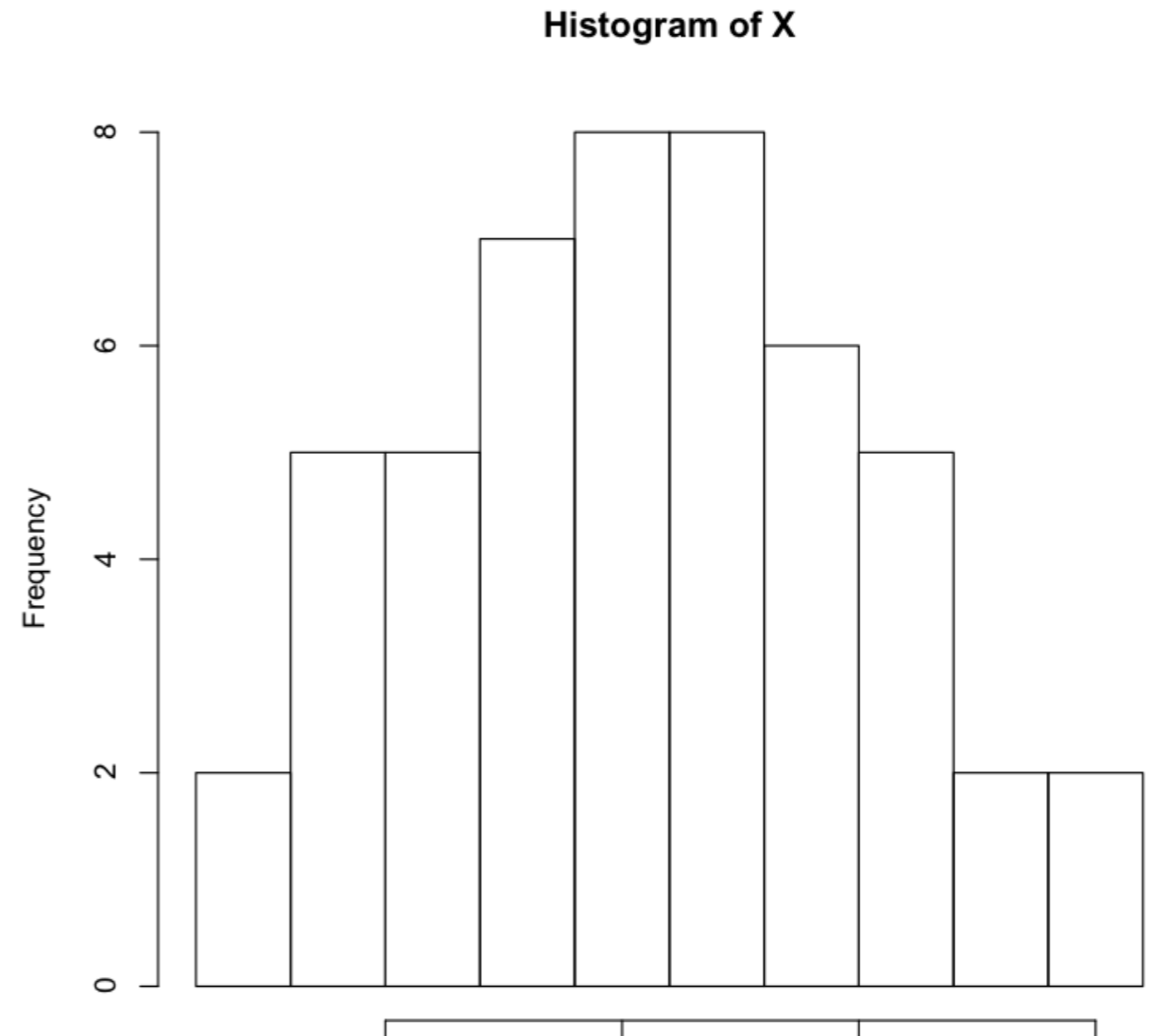
$$H_0 : F(x) = F_{N(24,55;0,21024)}(x)$$



# Chí-kvadrát test dobré shody

24.52586 24.17119 24.54486 24.44240 23.93455 24.20389 24.19974 24.34851 23.94024 24.21022  
 24.87474 25.06155 25.48924 25.32572 23.71721 24.61622 25.06676 24.90055 24.36213 24.98580  
 24.80591 24.20853 24.72623 24.64437 24.70405 23.97645 25.29837 24.46910 24.99453 25.42994  
 24.66147 24.75773 25.03970 24.44901 25.13285 24.40205 24.78721 23.83656 24.17186 23.65390  
 24.48244 24.68550 24.22988 23.83956 24.09777 24.52098 24.89240 24.25332 24.14259 25.12906

	i	ni	pi	npi	(ni-npi) <sup>2</sup> /npi
23,6	23,8	2	0,0634	3,17	0,4323
23,8	24	5	0,0743	3,72	0,4433
24	24,2	4	0,1187	5,94	0,6312
24,2	24,4	8	0,1572	7,86	0,0025
24,4	24,6	8	0,1727	8,63	0,0463
24,6	24,8	8	0,1572	7,86	0,0025
24,8	25	6	0,1187	5,94	0,0007
25	25,2	5	0,0743	3,72	0,4433
25,2	25,4	2	0,0386	1,93	0,0026
25,4	26	2	0,0248	1,24	0,4636
	suma	50	1,0000	50,00	2,4684



$$H_0 : F(x) = F_{N(24,55;0,21024)}(x)$$



# Chí-kvadrát test dobré shody

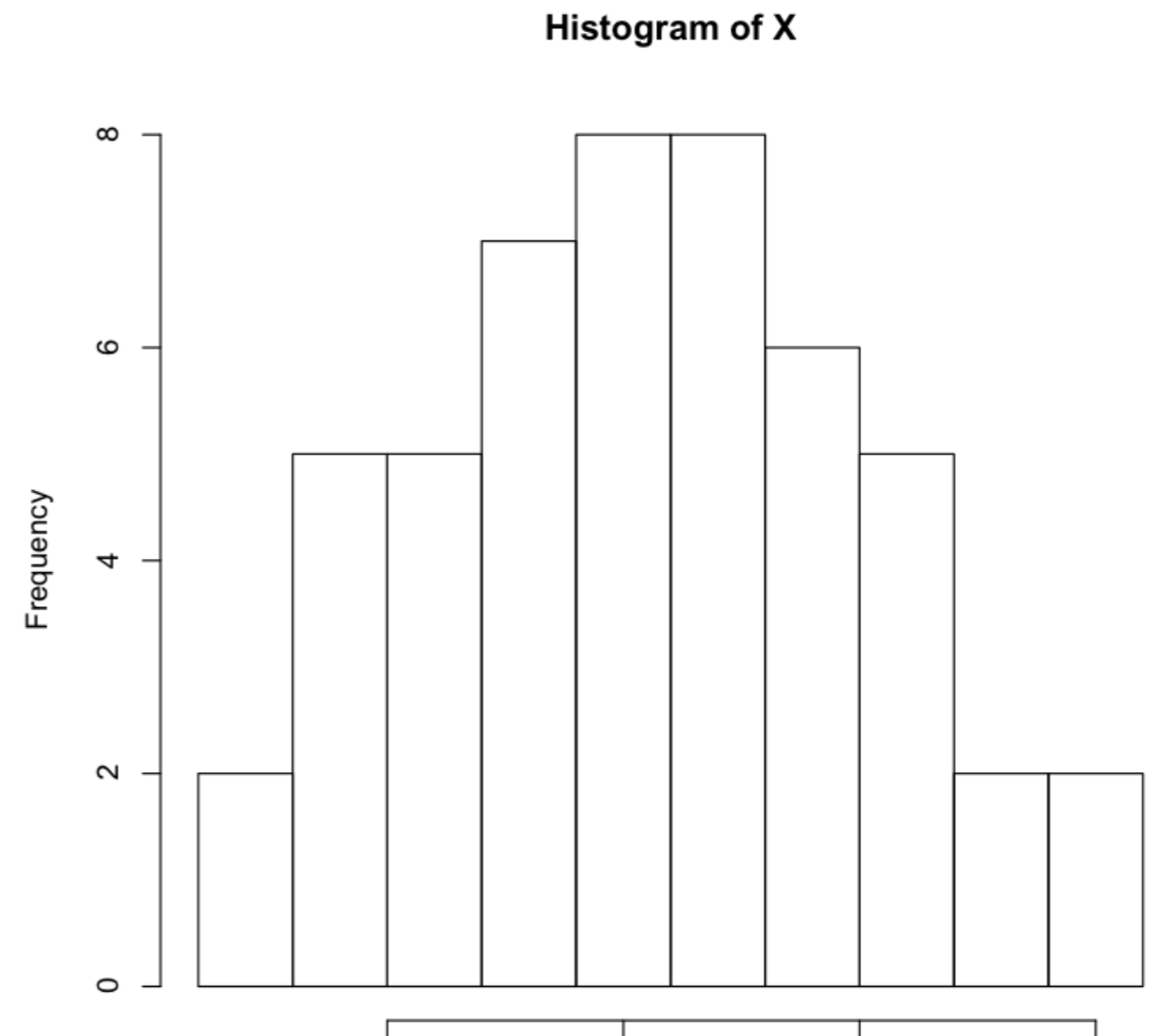
24.52586 24.17119 24.54486 24.44240 23.93455 24.20389 24.19974 24.34851 23.94024 24.21022  
 24.87474 25.06155 25.48924 25.32572 23.71721 24.61622 25.06676 24.90055 24.36213 24.98580  
 24.80591 24.20853 24.72623 24.64437 24.70405 23.97645 25.29837 24.46910 24.99453 25.42994  
 24.66147 24.75773 25.03970 24.44901 25.13285 24.40205 24.78721 23.83656 24.17186 23.65390  
 24.48244 24.68550 24.22988 23.83956 24.09777 24.52098 24.89240 24.25332 24.14259 25.12906

	i	ni	pi	npi	(ni-npi) <sup>2</sup> /npi
23,6	24	7	0,1377	6,89	0,0018
24	24,2	4	0,1187	5,94	0,6312
24,2	24,4	8	0,1572	7,86	0,0025
24,4	24,6	8	0,1727	8,63	0,0463
24,6	24,8	8	0,1572	7,86	0,0025
24,8	25	6	0,1187	5,94	0,0007
25	26	9	0,1377	6,89	0,6482
	suma	50	1,0000	50,00	1,3332

$$\chi^2 = 1,3332 \leq \chi_{0.95}(5) = 11,0705$$

$$H_0 : F(x) = F_{N(24,55;0,21024)}(x)$$

Nulovou hypotézu nezamítáme, a tedy data lze považovat za normálně rozdělená na hladině významnosti 5 %.



# Kolmogorov-Smirnovův test dobré shody

Test srovnává empirickou a teoretickou distribuční funkci pomocí maximálního rozdílu hodnot.

i) seřadíme  $n$  naměřených hodnot podle velikosti od nejmenší do největší

ii) pro každou hodnotu  $x_{(i)}$  spočteme rozdíly  $\left|F_0(x_{(i)}) - \frac{i}{n}\right|$ ,  $\left|F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n}\right|$

iii) největší z těchto rozdílů je hodnota testové statistiky  $D(n)$

iv) pokud je hypotetické rozdělení známé včetně parametrů, použijeme krok (v). Jinak musíme použít některou z modifikací K-S testu (Liliefors, Anderson-Darling)

v) pro malá  $n$  tuto hodnotu porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou  $d_{1-\alpha}(n)$  pro K-S-test. Pro velká  $n$  můžeme použít aproximaci

$$d_{1-\alpha}(n) = \sqrt{(1/2n) \ln(2/\alpha)}$$

vi) Pokud je  $D(n) \geq d_{1-\alpha}(n)$ , nulovou hypotézu zamítáme.



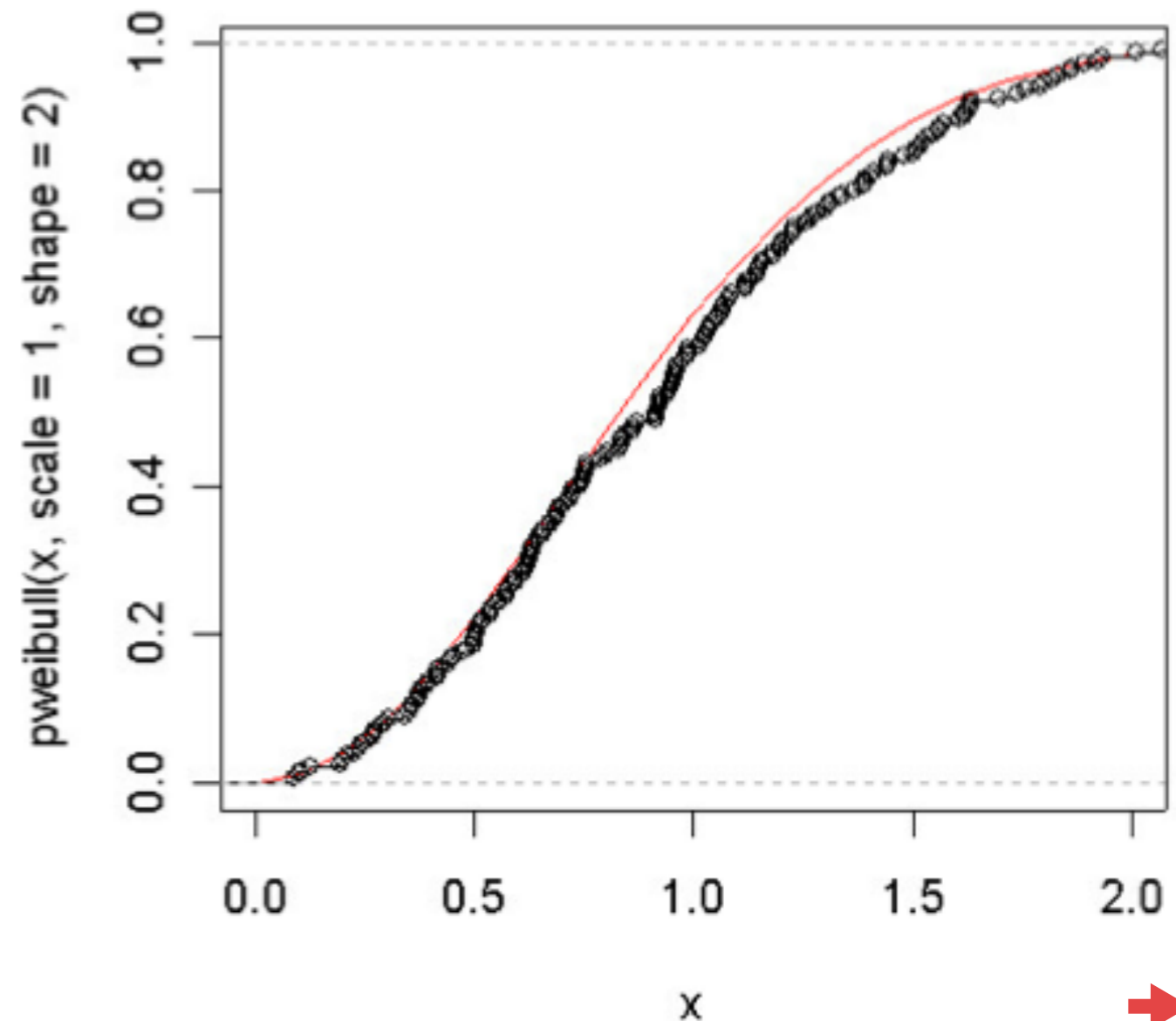
# Kolmogorov-Smirnovův test dobré shody

```
> ks.test(x.wei,"pweibull", shape=2,scale=1)
```

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: x.wei D = 0.0623, p-value = 0.4198  
alternative hypothesis: two.sided

```
> x<-seq(0,2,0.1)  
> plot(x,pweibull(x,scale=1,shape=2),type="l",col="red")  
> plot(ecdf(x.wei),add=TRUE)
```



# Testy normality

## Testy na základě šikmosti a špičatosti

- Za předpokladu, že výběr pochází z normálního rozdělení, platí pro index šikmosti:  $E(S_{kew}^{norm}) = 0$  a  $Var(S_{kew}^{norm}) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$ .

- Pro index špičatosti platí vztahy:  $E(K_{urt}^{norm}) = -\frac{6}{n+1}$  a  $Var(K_{urt}^{norm}) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$ .

- Máme-li dostatečný počet pozorování (řádově stovky), mají statistiky

$$T_3 = \frac{S_{kew}^{norm}}{\sqrt{Var(S_{kew}^{norm})}} \quad T_4 = \frac{K_{urt}^{norm} - E(K_{urt}^{norm})}{\sqrt{Var(K_{urt}^{norm})}}$$

přibližně standardní normální rozdělení pravděpodobnosti.

- Tedy hypotézu o normalitě na základě šikmosti zamítáme, pokud bude platit  $|T_3| \geq u_\alpha$ , nebo pokud bude  $p \leq \alpha$ , kde  $p = 2 \min\{\Phi(T_3), 1 - \Phi(T_3)\}$ .
- Hypotézu o normalitě na základě špičatosti zamítáme, pokud bude platit  $|T_4| \geq u_\alpha$ , nebo pokud bude  $p \leq \alpha$ , kde  $p = 2 \min\{\Phi(T_4), 1 - \Phi(T_4)\}$ .
- Oba testy by se měly používat současně, proto se často používá kombinovaný test s testovou statistikou  $T_{34} = T_3^2 + T_4^2$ , která má  $\chi^2$ -rozdělení o 2 stupních volnosti. Hypotézu o normalitě potom zamítáme, když  $T_{34} \geq \chi_\alpha^2(2)$ .



# Testy normality

## Shapirův-Wilkův test

Jeden z nejsilnějších testů normality

$$SW = \frac{\left[ \sum_{i=1}^n a_{(i)} x_{(i)} \right]^2}{\sum_{i=1}^n a_{(i)}^2 \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2}$$

kde  $a_{(i)} = \Phi^{-1}\left(\frac{8i-3}{8n+2}\right)$  a kritické hodnoty jsou tabelovány.

> `shapiro.test(x.norm)`

```
Shapiro-Wilk normality test
```

```
data: x.norm W = 0.9938, p-value = 0.5659
```

## Lilieforsův test

Testová statistika je totožná s Kolmogorov-Smirnovovým testem, parametry hypotetického rozdělení odhadujeme z dat a kritické hodnoty hledáme v tabulkách



# Testy normality

## Anderson-Darlingův test

Test je modifikací Kolmogorovova-Smirnovova testu (používá empirickou distribuční funkce a uspořádaný výběr) s testovou statistikou

$$AD = - \frac{\sum_{i=1}^n (2i - 1) (\ln F_0(x_{(i)}) + \ln(1 - F_0(x_{(n-i+1)})))}{n} - n$$

Kritické hodnoty jsou pro malá  $n$  tabelovány, pro velká  $n$  lze použít aproximaci:

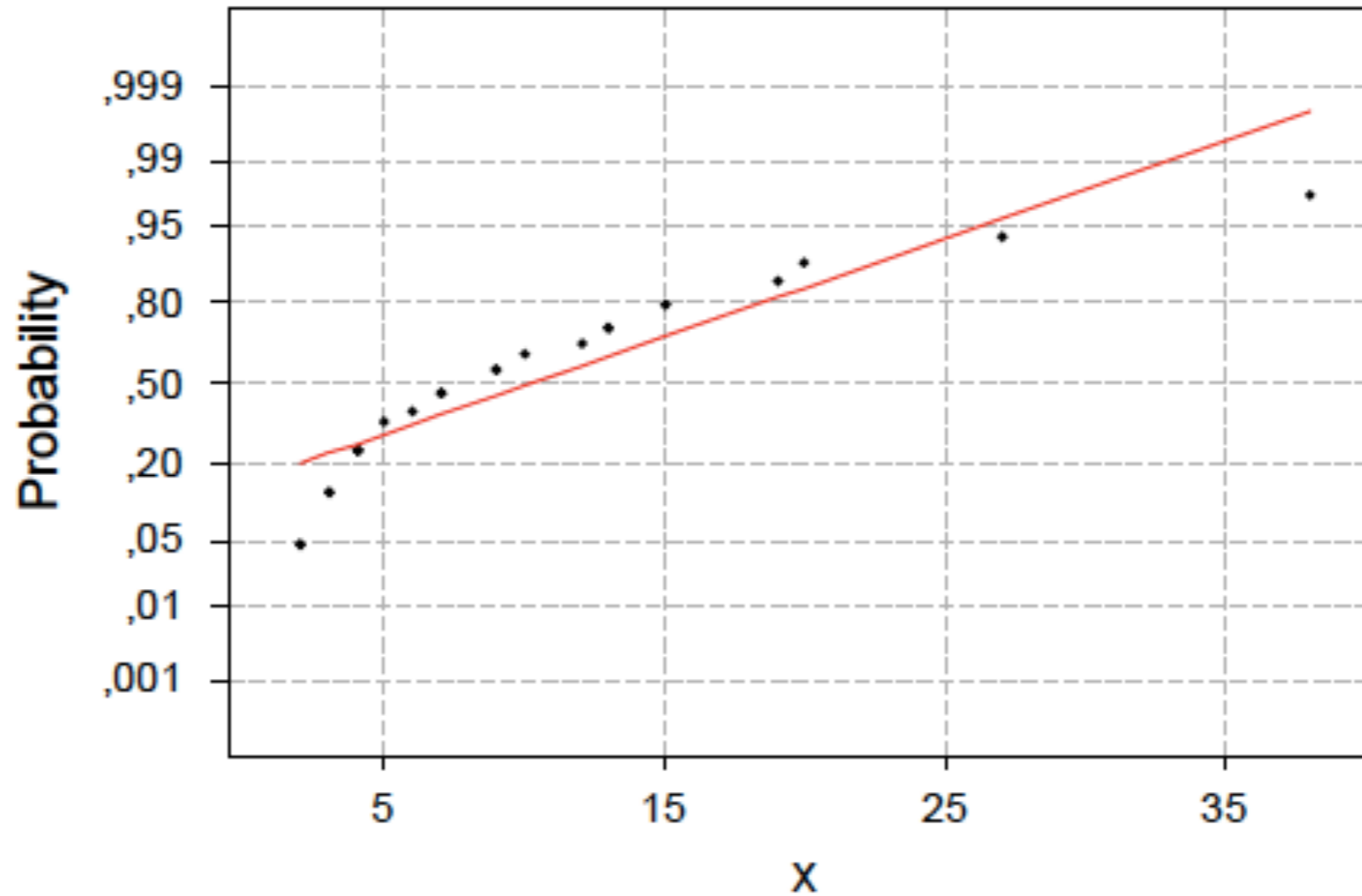
$$ad_{0,95} = 1,0348(1 - 1,013/n - 0,93/n^2)$$



# Testy normality

## Anderson-Darlingův test

Normal Probability Plot



Average: 10,32  
StDev: 8,57185  
N: 25

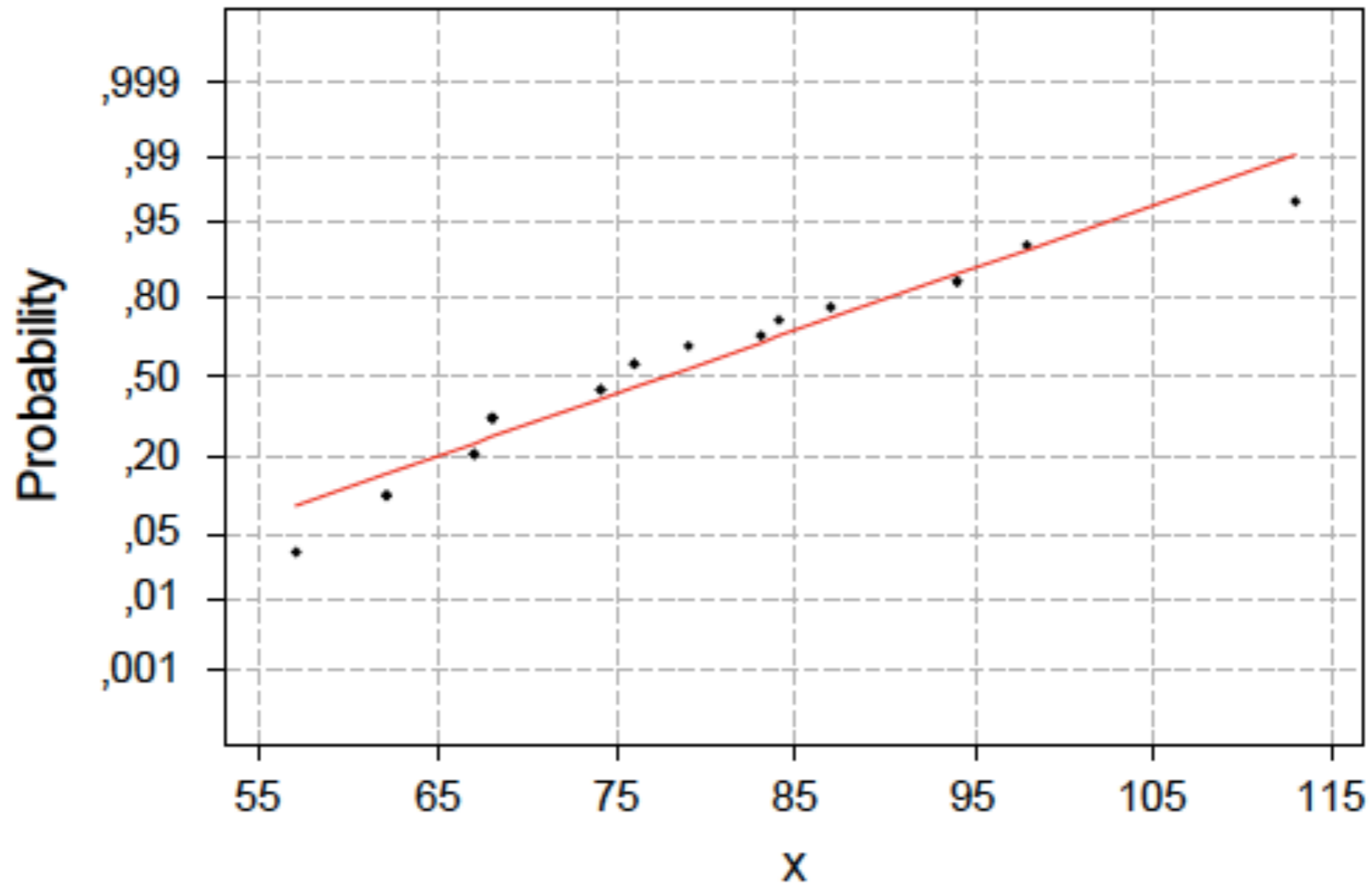
Anderson-Darling Normality Test  
A-Squared: 1,276  
P-Value: 0,002



# Testy normality

## Anderson-Darlingův test

Normal Probability Plot



Average: 77,55  
StDev: 14,1625  
N: 20

Anderson-Darling Normality Test  
A-Squared: 0,455  
P-Value: 0,240

