

# Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

## E. 1 - ANOVA



# E.1 - ANOVA

- Klíčové pojmy:**
- Nulová a alternativní hypotéza
  - Hladina významnosti testu
  - Chyby 1. a 2. druhu
  - p-hodnota

- Klíčové vztahy:**
- Test ANOVA, podmínky
  - Kruskal-Wallis test

# Metoda ANOVA

**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu ( $y$ ).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu:  $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$

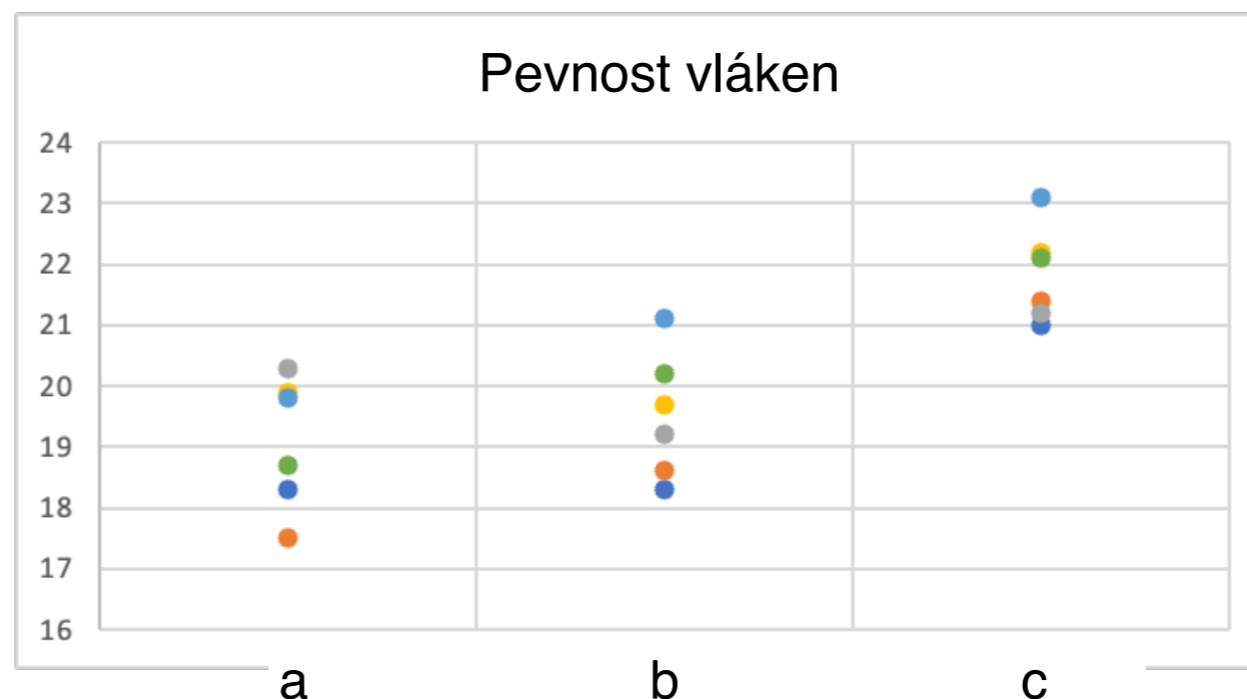
Odezva : pevnost vlákna v tahu

Faktor : výrobce, 3 hodnoty (a,b,c)

Replikace : 6 vzorků od každého výrobce

Počet měření:  $3 \times 6 = 18$

$$X_1^1, X_2^1, \dots, X_{n_1}^1, \quad X_1^2, X_2^2, \dots, X_{n_2}^2, \quad X_1^3, X_2^3, \dots, X_{n_3}^3,$$



# Metoda ANOVA

**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu ( $y$ ).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu:  $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$

Odezva : pevnost vlákna v tahu

Faktor : výrobce, 3 hodnoty (a,b,c)

Replikace : 6 vzorků od každého výrobce

Počet měření:  $3 \times 6 = 18$

$$X_1^1, X_2^1, \dots, X_{n_1}^1, \quad X_1^2, X_2^2, \dots, X_{n_2}^2, \quad X_1^3, X_2^3, \dots, X_{n_3}^3,$$

nulová hypotéza  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

alternativní hypotéza  $H_A: \mu_i \neq \mu_j$  pro některou dvojici  $i, j$  (oboustranná)

hladina významnosti  $\alpha = 5\%$

Jedna z možností je provést  $k(k-1)/2$  porovnání pomocí dvouvýběrových testů.

**ALE: tím se výrazně zvýší hladina významnosti.**



# Metoda ANOVA

**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu ( $y$ ).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu:  $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$

	hladina významnosti v $t$ -testu					
počet porovnávání $k$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
2	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
3	0,41	0,23	0,13	0,05	0,03	0,003
4	0,58	0,36	0,21	0,09	0,05	0,006
5	0,71	0,47	0,23	0,13	0,07	0,009
10	0,96	0,83	0,63	0,37	0,23	0,034
20	1,00	0,98	0,92	0,71	0,52	0,109
$\infty$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,000

Jedna z možností je provést  $k(k-1)/2$  porovnání pomocí dvouvýběrových testů.

**ALE: tím se výrazně zvýší hladina významnosti.**

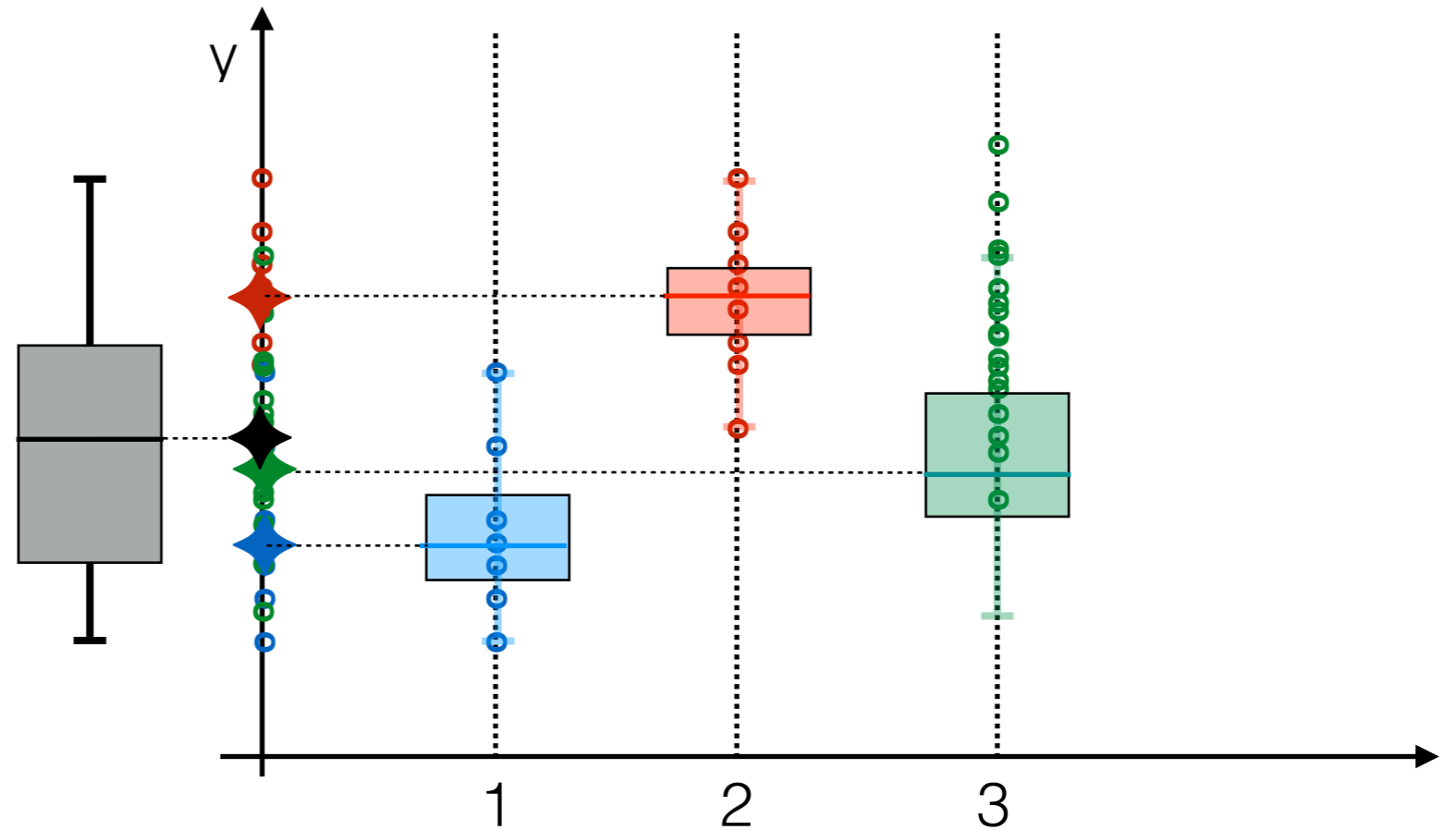
**Tedy je třeba provádět tzv. simultánní test.**



# Srovnání tří a více náhodných veličin

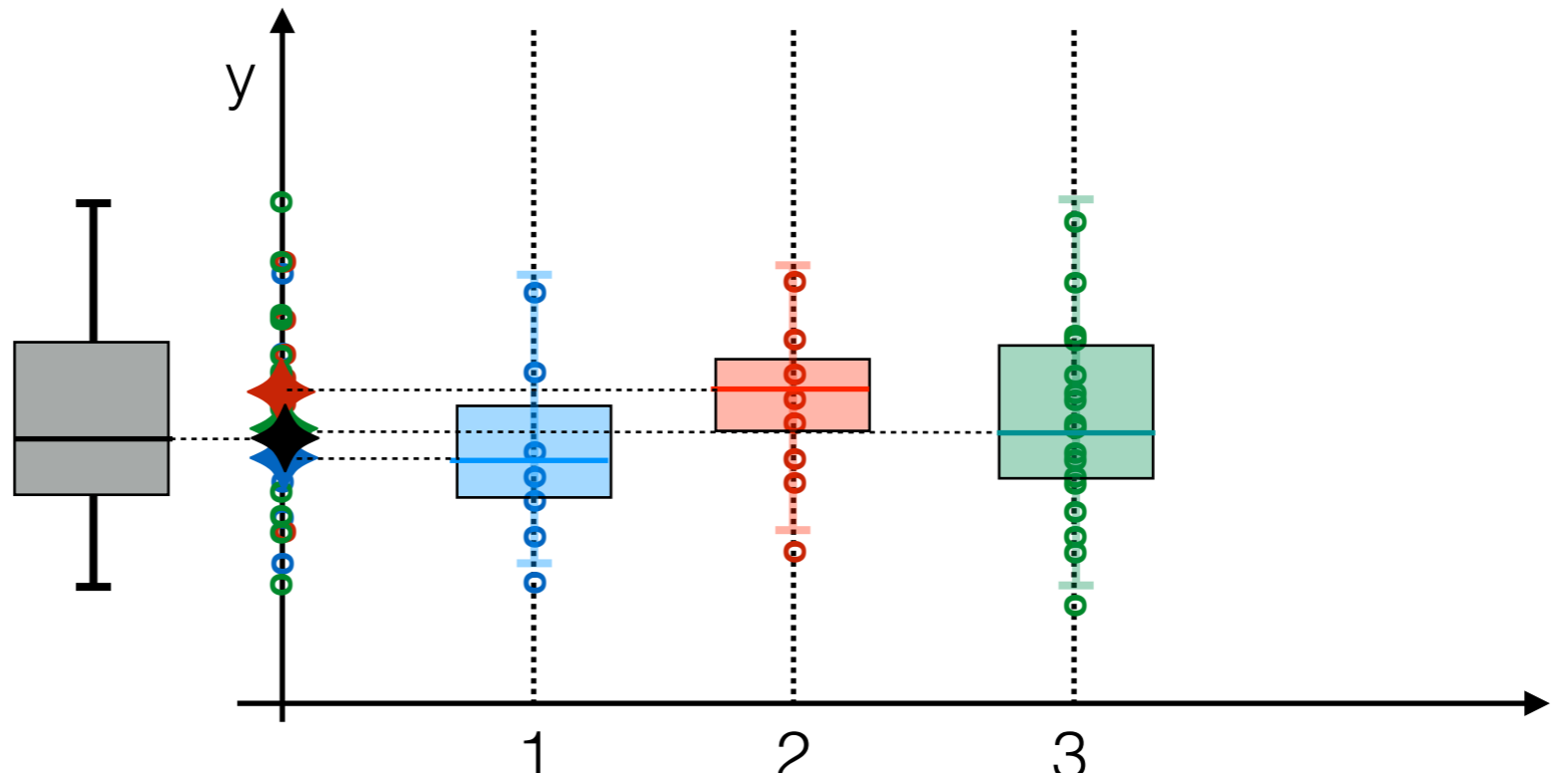
## Situace 1:

Rozptyl mezi skupinami je **velký** vzhledem k součtu rozptylů uvnitř skupin => střední hodnoty **jsou různé** => nulovou hypotézu **zamítáme**



## Situace 2:

Rozptyl mezi skupinami je **malý** vzhledem k součtu rozptylů uvnitř skupin => střední hodnoty lze považovat **za nerozlišitelné** => nulovou hypotézu **nelze zamítnout**



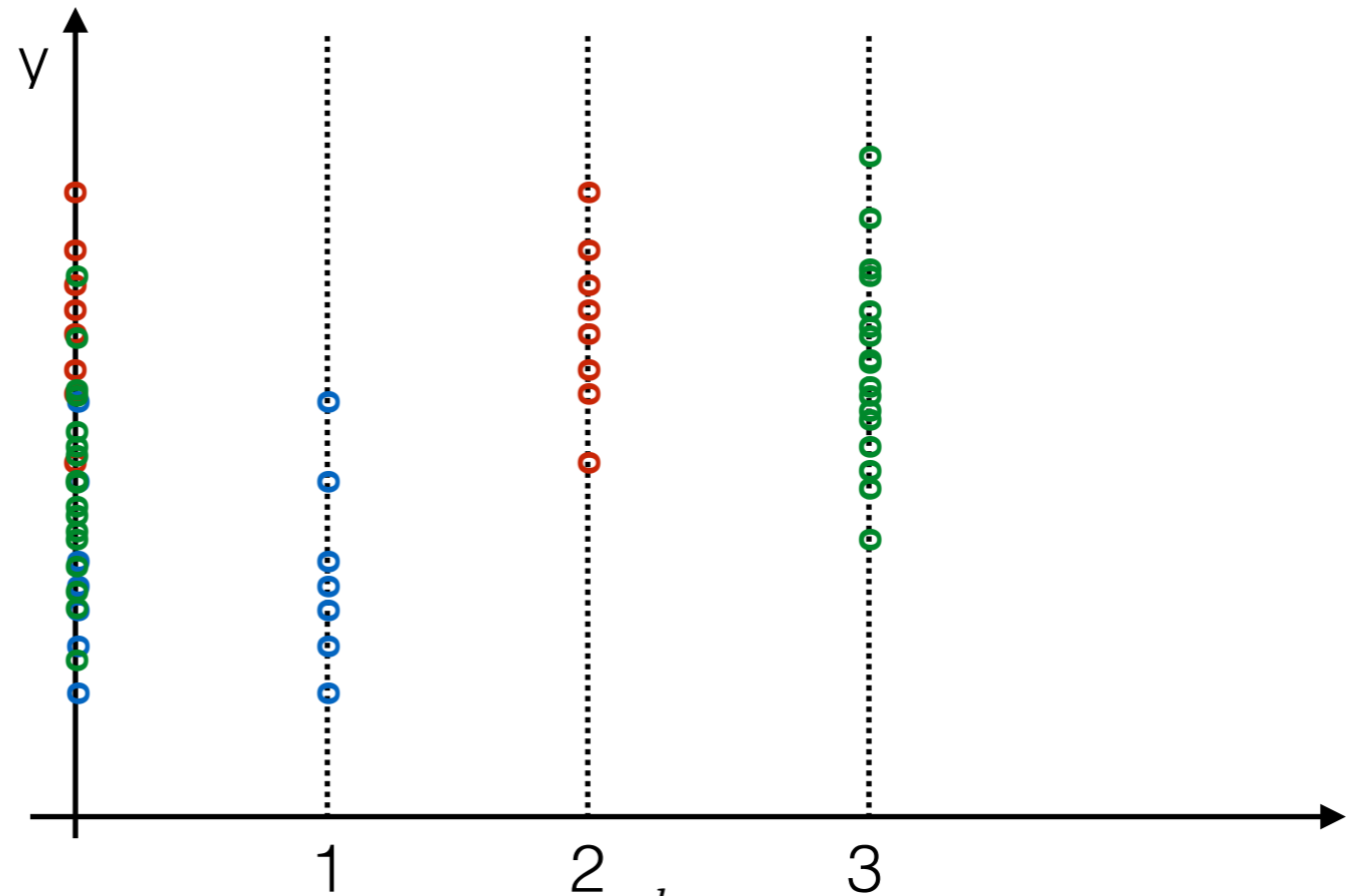
# Metoda ANOVA

## ANalysis Of VAriance = ANOVA

pro 1 faktor = všechna data rozdělíme do skupin podle jednoho hlediska (úrovní jednoho faktoru)

k úrovní = k skupin

v každé skupině n měření



1) celkový průměr všech naměřených hodnot: 
$$\bar{y} = \frac{1}{n \cdot k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}$$

2) průměry v jednotlivých skupinách: 
$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}$$

3) celkový součet čtvercových odchylek: 
$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2$$

4) součet čtvercových odchylek uvnitř skupin 
$$SS_E = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

5) součet čtvercových odchylek mezi skupinami 
$$SS_F = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$



# Metoda ANOVA

## Tabulka analýzy rozptylu:

Zdroj variability	Stupně volnosti	Součet čtverců	Průměrný čtverec	Testová statistika	p-hodnota
faktor (mezi skupinami)	$k-1$	$SS_F$	$MS_F = \frac{SS_F}{k-1}$	$F = \frac{MS_F}{MS_E}$	
rezidua (uvnitř skupin)	$k(n-1)$	$SS_E$	$MS_E = \frac{SS_E}{k(n-1)}$		
celkový	$kn-1$	$SS_T$			

testová statistika  $F = \frac{\frac{SS_F}{k-1}}{\frac{SS_E}{k(n-1)}} = \frac{MS_F}{MS_E}$  má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení o  $(k-1)$  a  $k(n-1)$  stupních volnosti



# Metoda ANOVA

**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu ( $y$ ).

1) Vytvoříme jednofaktorový návrh experimentu:  $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$

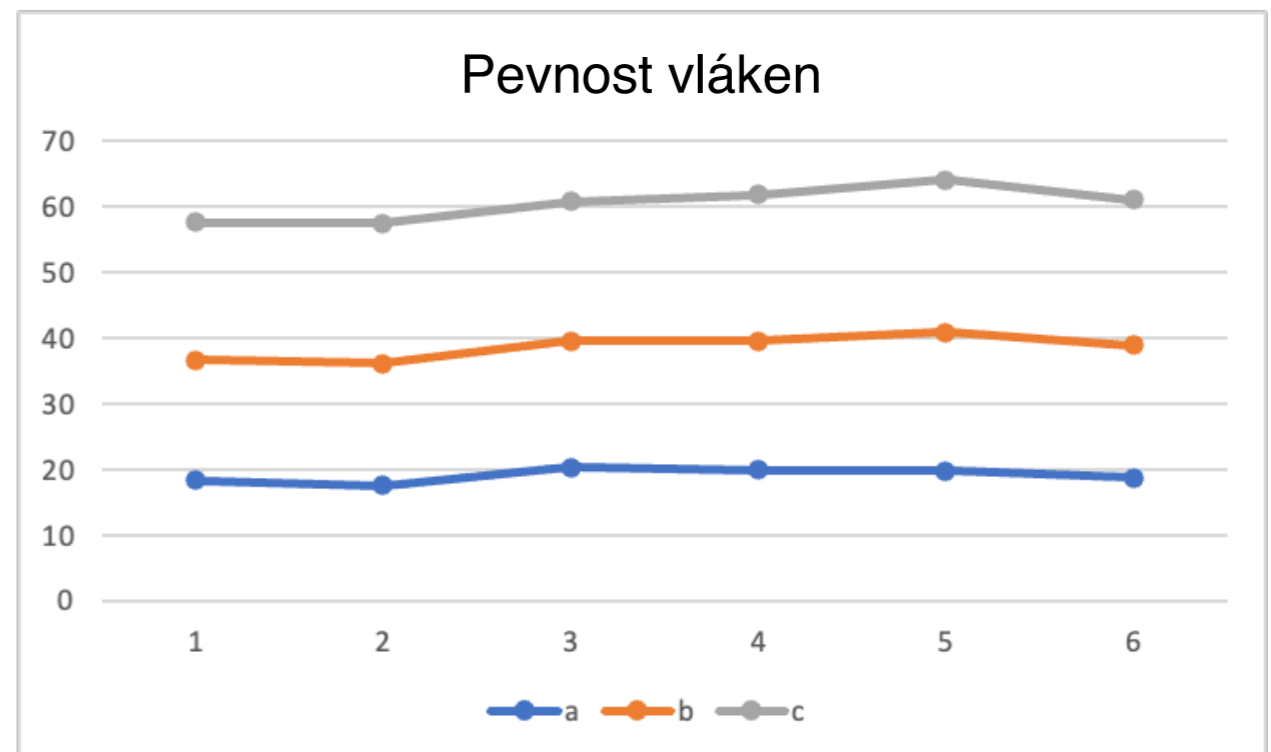
Odezva : pevnost vlákna v tahu

Faktor : výrobce, 3 hodnoty (a,b,c)

Replikace : 6 vzorků od každého výrobce

Počet měření:  $3 \times 6 = 18$

	A	B	C
1	a	b	c
2	18,3	18,3	21
3	17,5	18,6	21,4
4	20,3	19,2	21,2
5	19,9	19,7	22,2
6	19,8	21,1	23,1
7	18,7	20,2	22,1



# Metoda ANOVA

**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

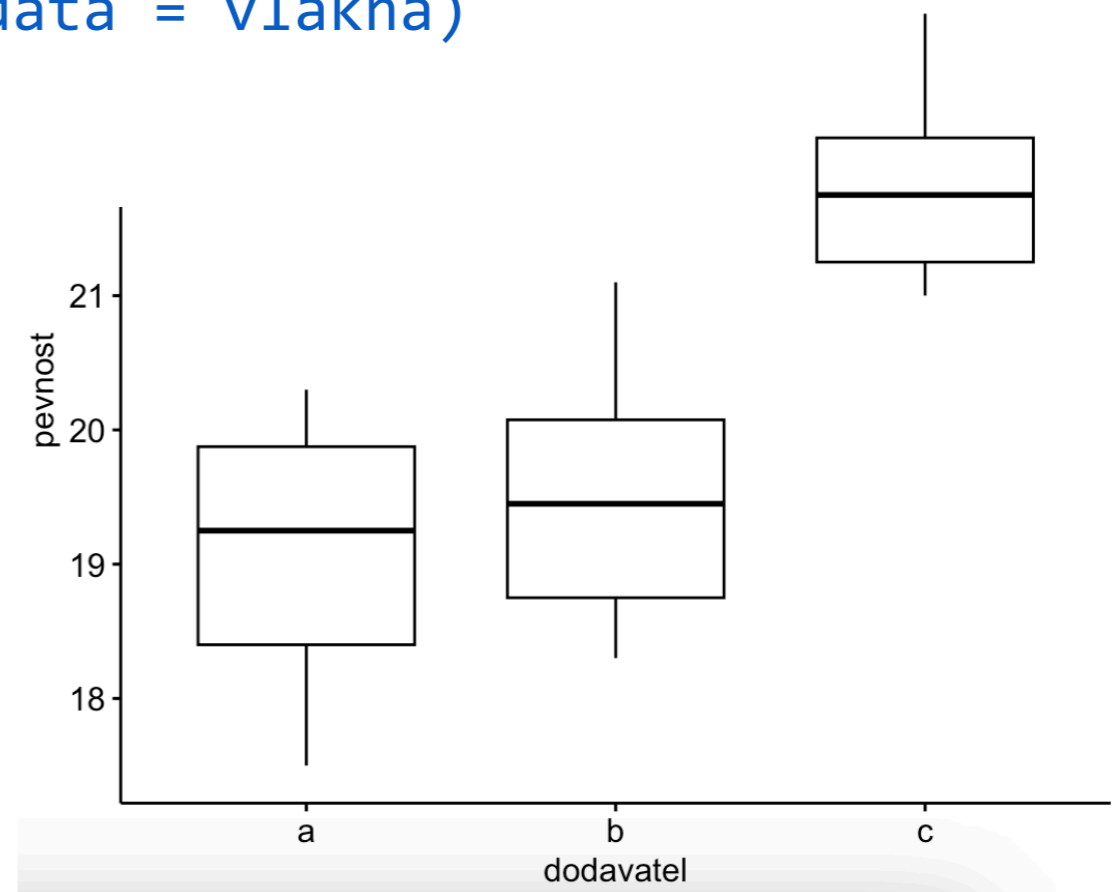
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	a	b	c								
2	18,3	18,3	21		Anova: Single Factor						
3	17,5	18,6	21,4								
4	20,3	19,2	21,2		SUMMARY						
5	19,9	19,7	22,2		<i>Groups</i>	<i>Count</i>	<i>Sum</i>	<i>Average</i>	<i>Variance</i>		
6	19,8	21,1	23,1		a	6	114,5	19,08333333	1,185666667		
7	18,7	20,2	22,1		b	6	117,1	19,51666667	1,085666667		
8					c	6	131	21,83333333	0,618666667		
9											
10											
11					ANOVA						
12					<i>Source of Variat</i>	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>P-value</i>	<i>F crit</i>
13					Between Gro	26,23444444	2	13,11722222	13,6164937	0,00042491	3,68232034
14					Within Group	14,45	15	0,963333333			
15											
16					Total	40,68444444	17				
17											
18											



# Metoda ANOVA

**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

```
> vlakna<- data.frame(read.table("pevnost_vlaken.txt", header=T))  
> library(ggplot2)  
> ggboxplot(vlakna, x="dodavatel", y="pevnost")  
> anadat<- aov(pevnost~dodavatel, data = vlakna)
```



# Metoda ANOVA

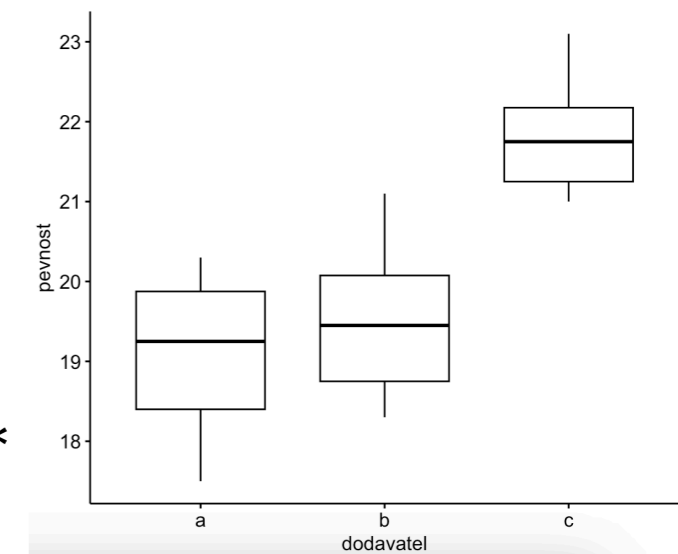
**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

```
> vlakna<- data.frame(read.table("pevnost_vlaken.txt", header=T))
> library(ggplot2)
> ggboxplot(vlakna, x="dodavatel", y="pevnost")
> anadat<- aov(pevnost~dodavatel, data = vlakna)
> summary(anadat)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
dodavatel	2	26.23	13.117	13.62	0.000425 ***
Residuals	15	14.45	0.963		

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1



**Závěr:** nulovou hypotézu zamítáme. Pevnost vláken různých dodavatelů se statisticky významně liší.

**Jak se liší dodavatelé mezi sebou?**

**Pokud zamítneme nulovou hypotézu v ANOVA, měli bychom provést tzv. Mnohonásobné porovnání**



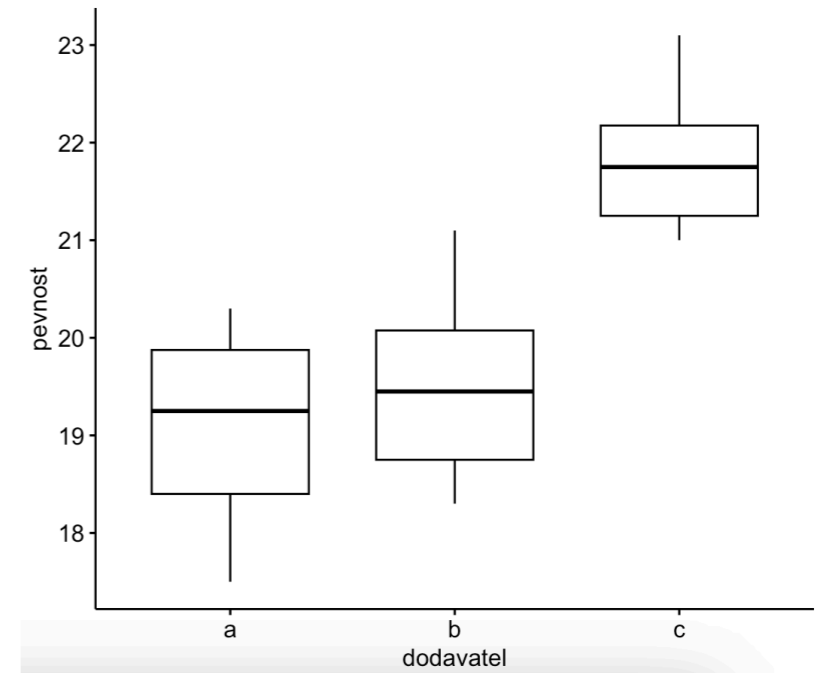
# Metoda ANOVA

**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

## Metody mnohonásobného srovnávání:

- Tukeyova metoda
- Scheffého metoda
- Bonferroniho metoda
- Duncanova metoda
- ...

$$T = \frac{|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j|}{S_*}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \quad i \neq j$$



[https://is.muni.cz/th/151390/prif\\_m/diplomova\\_prace\\_ed.pdf](https://is.muni.cz/th/151390/prif_m/diplomova_prace_ed.pdf)



# Metoda ANOVA

**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

## Metody mnohonásobného srovnávání:

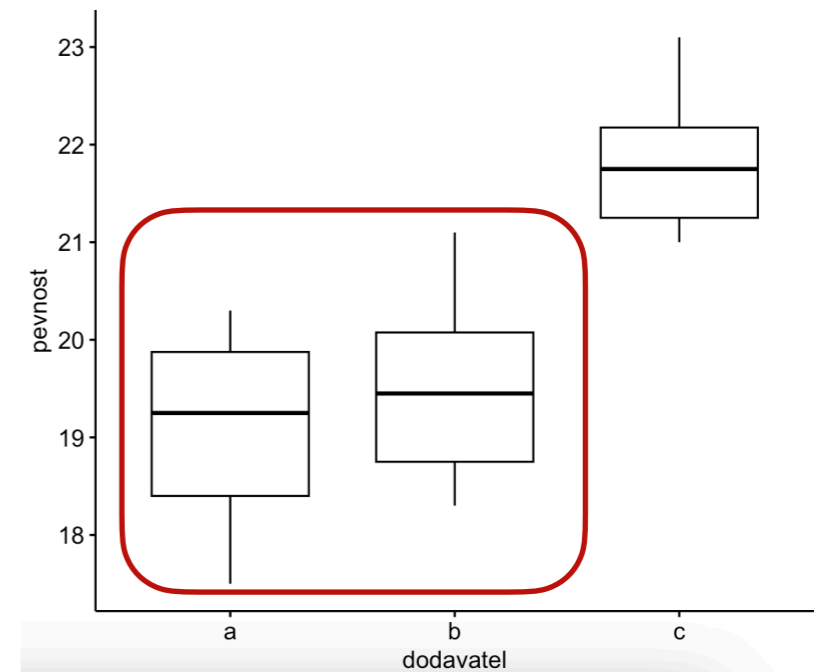
- Tukeyova metoda
  - > `srovnani.vlakna <- TukeyHSD(anadat)`
  - > `srovnani.vlakna`

Tukey multiple comparisons of means  
95% family-wise confidence level

```
Fit: aov(formula = pevnost ~ dodavatel, data = vlakna)
```

```
$dodavatel
```

	diff	lwr	upr	p adj
b-a	0.4333333	-1.0385665	1.905233	0.7296030
c-a	2.7500000	1.2781002	4.221900	0.0005817
c-b	2.3166667	0.8447669	3.788566	0.0026211



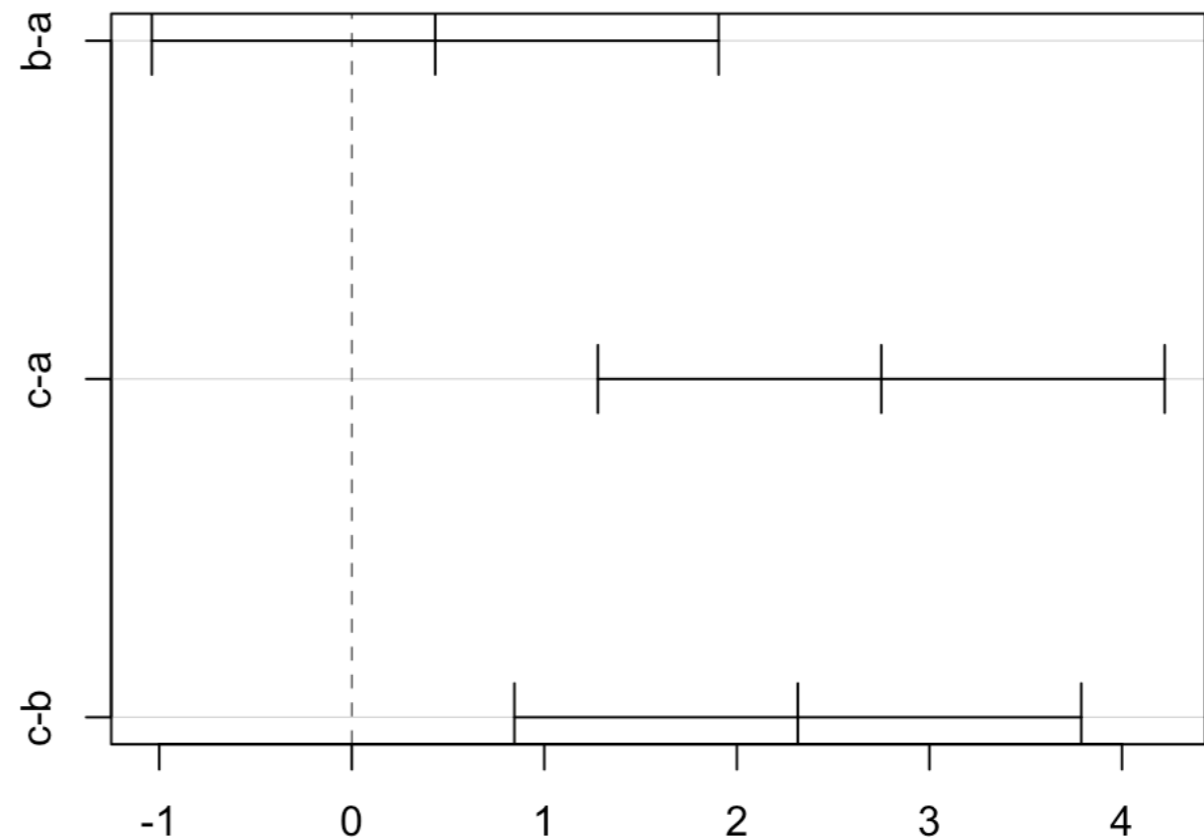
# Metoda ANOVA

**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.

## Metody mnohonásobného srovnávání:

- Tukeyova metoda
  - > `srovnani.vlakna <- TukeyHSD(anadat)`
  - > `srovnani.vlakna`
  - > `plot(srovnani.vlakna)`

95% family-wise confidence level

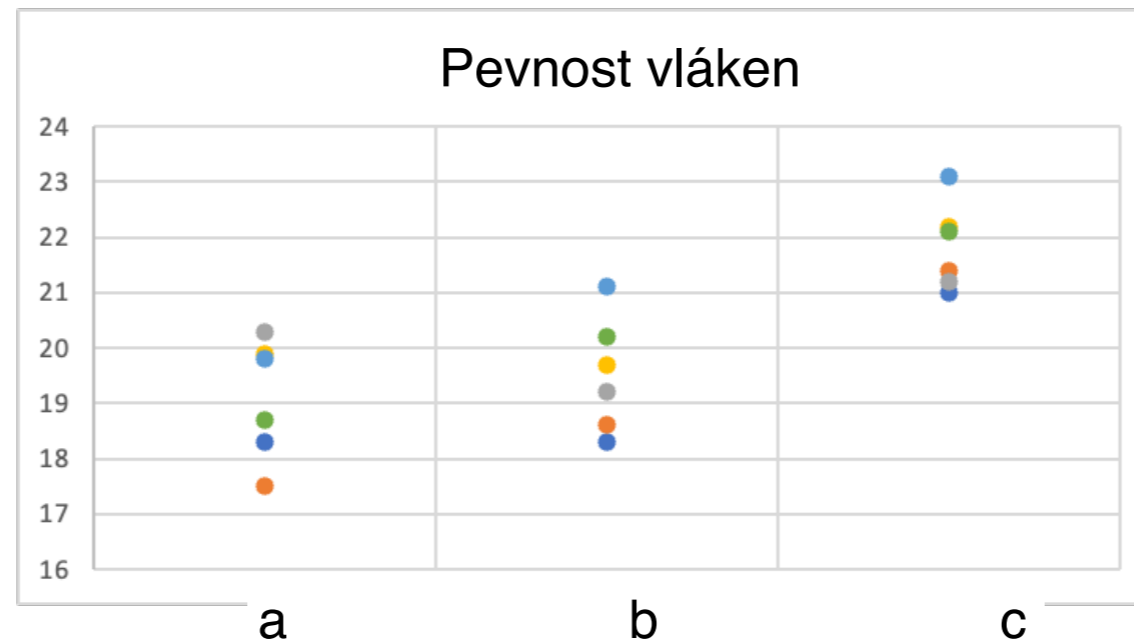


Differences in mean levels of dodavatel



# Metoda ANOVA

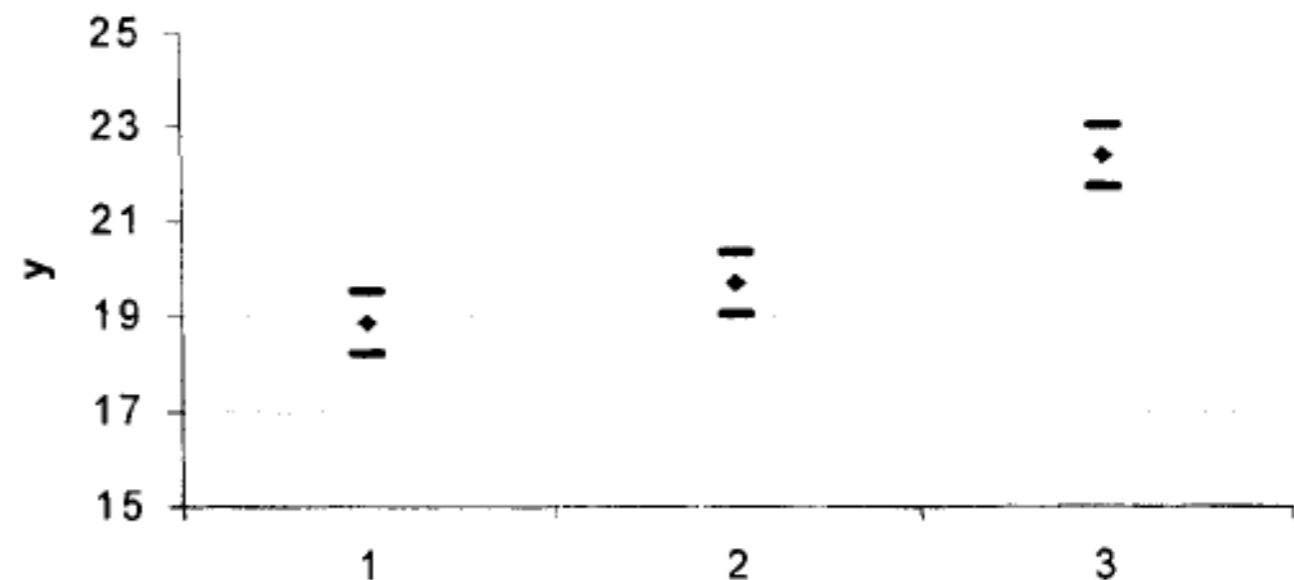
**Příklad:** Chceme porovnat kvalitu vláken dodávaných třemi různými výrobci. Jako kritérium kvality je zvolena pevnost vláken v tahu.



**Bonferroniho metoda mnohonásobného srovnání úrovní faktorů:**  $\bar{y}_i \pm t_{1-\alpha/2p} \cdot \sqrt{\frac{MS_E}{2 \cdot a}}$

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A <sub>1</sub>	18,867	18,217	19,516
A <sub>2</sub>	19,700	19,051	20,349
A <sub>3</sub>	22,383	21,734	23,033

=> dodavatele 1 a 2 nelze statisticky odlišit, dodavatel 3 je významně lepší (jeho vlákna dosahují statisticky významně vyšší pevnosti než od dodavatelů 1 a 2)



# Metoda ANOVA

## Ověření podmínek pro použití ANOVA

- Reprezentativnost výběru, náhodnost
- Nezávislost pozorování
- Normalita dat
- Stejné rozptyly (homoskedasticita)

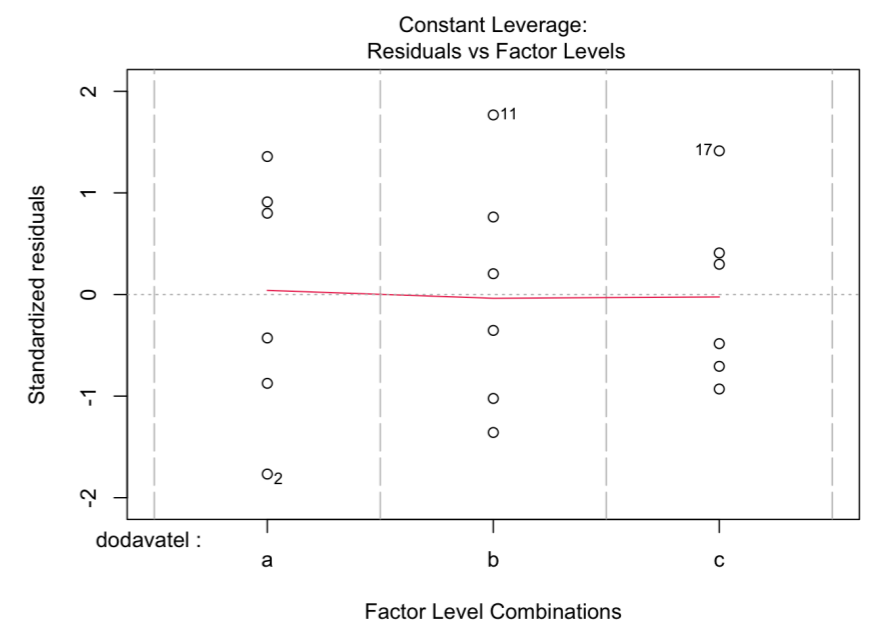
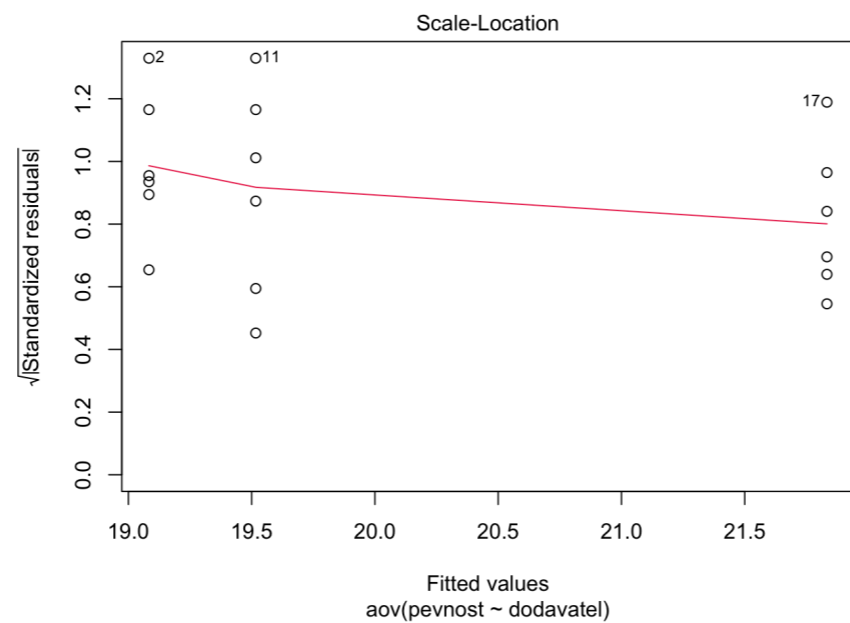
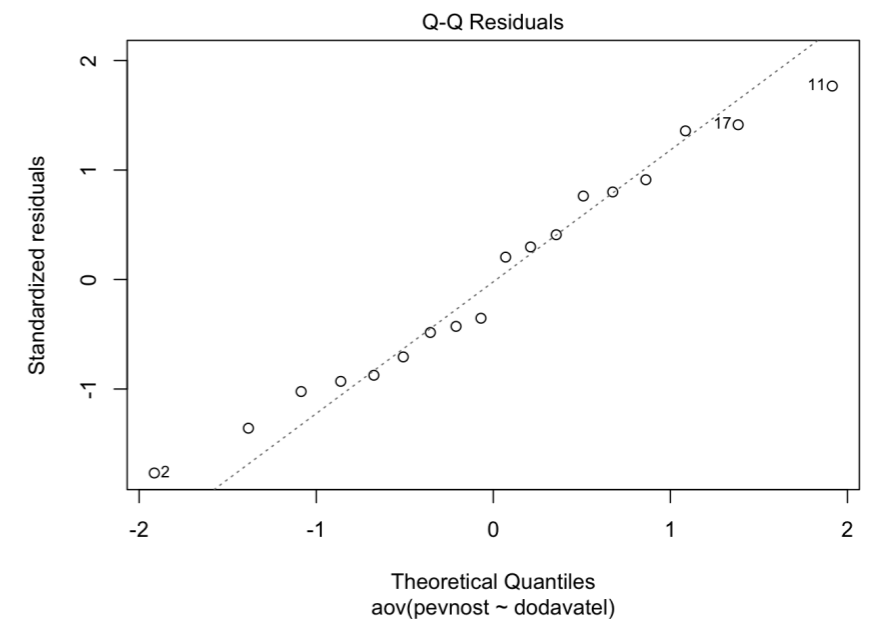
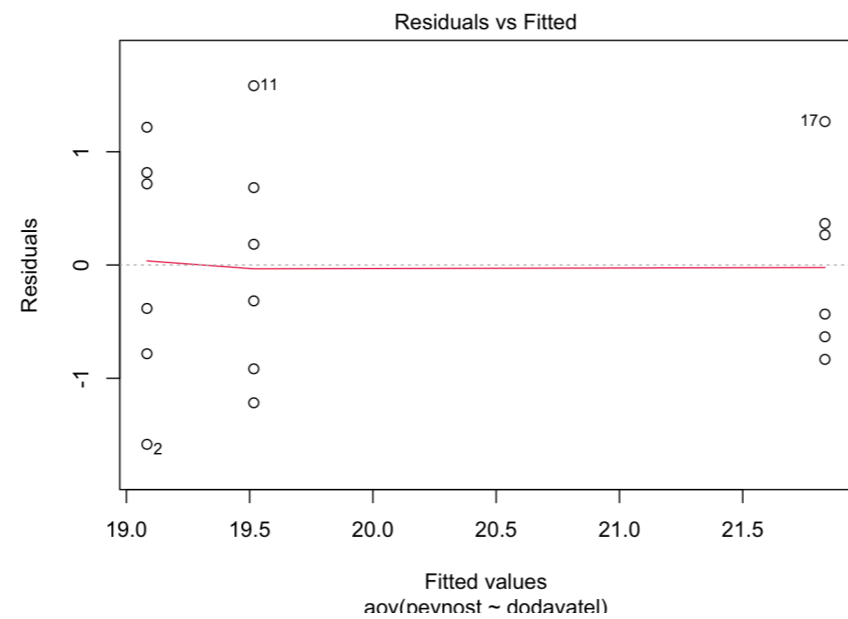


# Metoda ANOVA

## Ověření podmínek pro použití ANOVA - analýza reziduí

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

> plot(anadat)



# Metoda ANOVA - ověření podmínek

## Nezávislost měření

### Co se stane, když jsou data závislá?

- Největší změnou je to, že rozptyly průměrů se stávají vychýlené (velikost vychýlení závisí na typu závislosti). To způsobí vychýlenost odhadů pro jednotlivé skupiny a pro efekty faktorů a jejich interakcí.
- Vliv randomizace může být na závislých datech různý účinek. Na stejných datech může jedno znáhodnění pořadí zvýšit pravděpodobnost chyby I. druhu, jiné naopak snížit.
- Náhodné seřazení kombinací v blocích také nepomůže, pokud není znáhodněno pořadí měření.

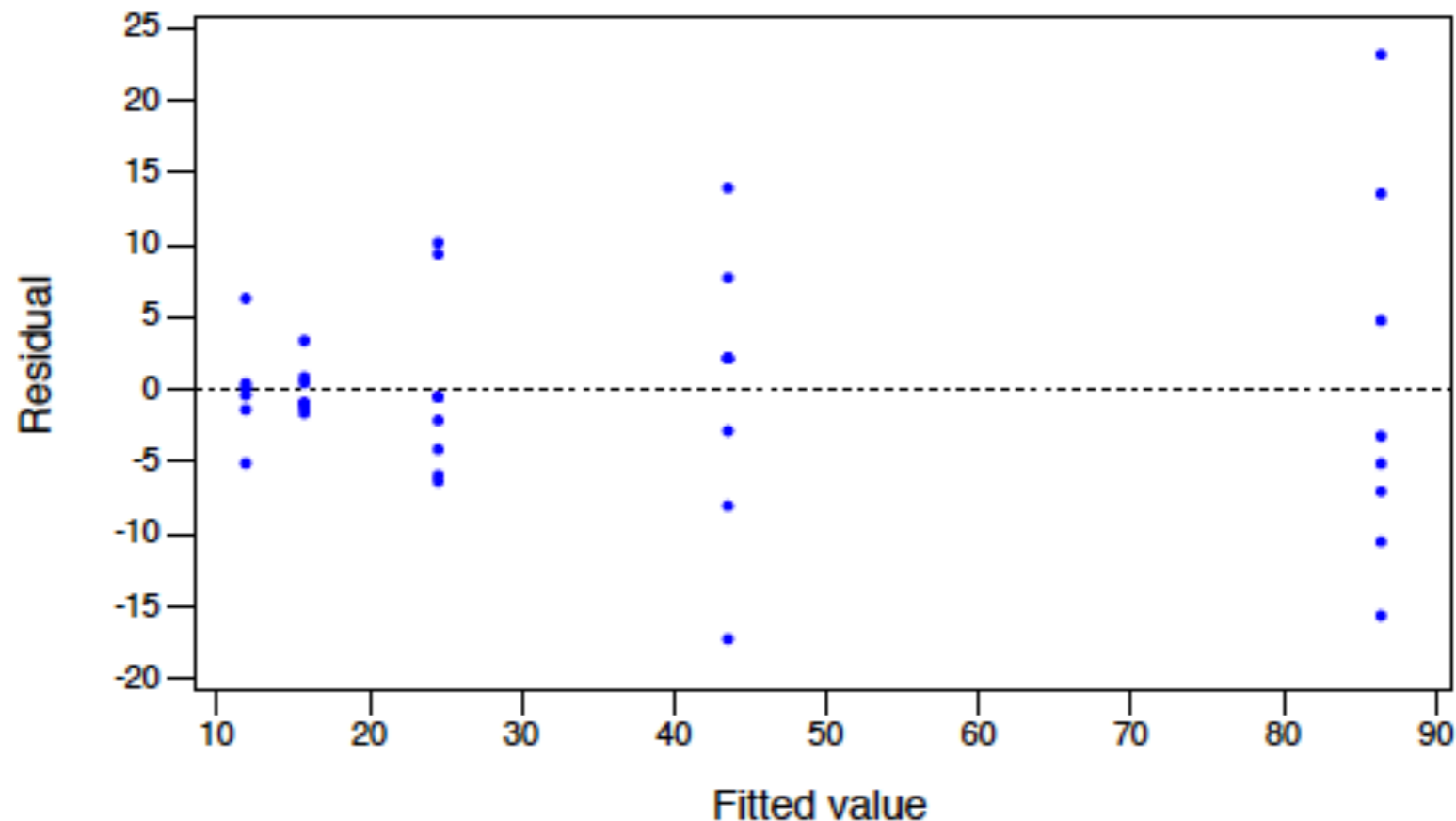
### Jak se vypořádat se závislostí dat?

- Použít analýzu časových řad ke zjištění trendu a případné periodicity časové řady měření
- Pomocí autokorelační (parciální autokorelační) funkce zjistit závislosti v čase a určit ARMA model pro časovou řadu měření
- Na základě předchozích kroků provést "očistění" časové řady měření a dále pracovat pouze s rezidui, která by už měla být nezávislá



# Metoda ANOVA - ověření podmínek

## Homoskedasticita (konstantní rozptyl)



- O'Brienův test
- Brown-Forsythův test      první tři jsou založeny na transformaci veličiny  $z_{ij}$  a použití ANOVA
- Levenův test
- Bartlettův test              vyžaduje předpoklad normality!

### Jak lze nehomogenitu rozptylů odstranit?

V podstatě jediný způsob "napravení" nehomogenity rozptylů je transformace.

Alternativou je použití neparametrického testu (Kruskal-Wallis) namísto F-testu v ANOVA



# Metoda ANOVA - ověření podmínek

## Homoskedasticita (konstantní rozptyl)

Grp 1	Grp 2	Grp 3	Grp 4	Grp 5	Grp 6
95	112				
123	107				
74	67				
145	98				
64	105				
84	95				
128	79				
79	.				
.	.				
.	.				
.	.				
.	.				

### Test for Homogeneity of Variances

Number of Observations = 40  
Number of Groups = 6

#### Group Statistics:

Group	Median	Mean	Std.Dev	N
1	89.5000	99.0000	29.3355	8
2	98.0000	94.7143	16.2349	7
3	96.0000	100.8333	17.7551	12
4	106.0000	108.2857	10.8737	7
5	115.0000	118.3333	8.5049	3
6	134.0000	140.6667	28.5890	3

The p-value for rejecting = .05

Test	F-Ratio	p-value	
Levene	3.0079	0.0236	Reject H0
Brown-Forsythe	2.1035	0.0890	Accept H0
O'Brien	2.0498	0.0963	Accept H0
Bartlett Chi2 = 8.1337	1.6267	0.1490	Accept H0

Bartlett's test is chi-square with df = 5

All F tests are done with df = 5 and 34

**Welch 1 way ANOVA** 2.4737 0.1120 Accept H0

Here, the variances may be unequal. The df are 5, 10.112

# Metoda ANOVA - ověření podmínek

## Homoskedasticita (konstantní rozptyl)

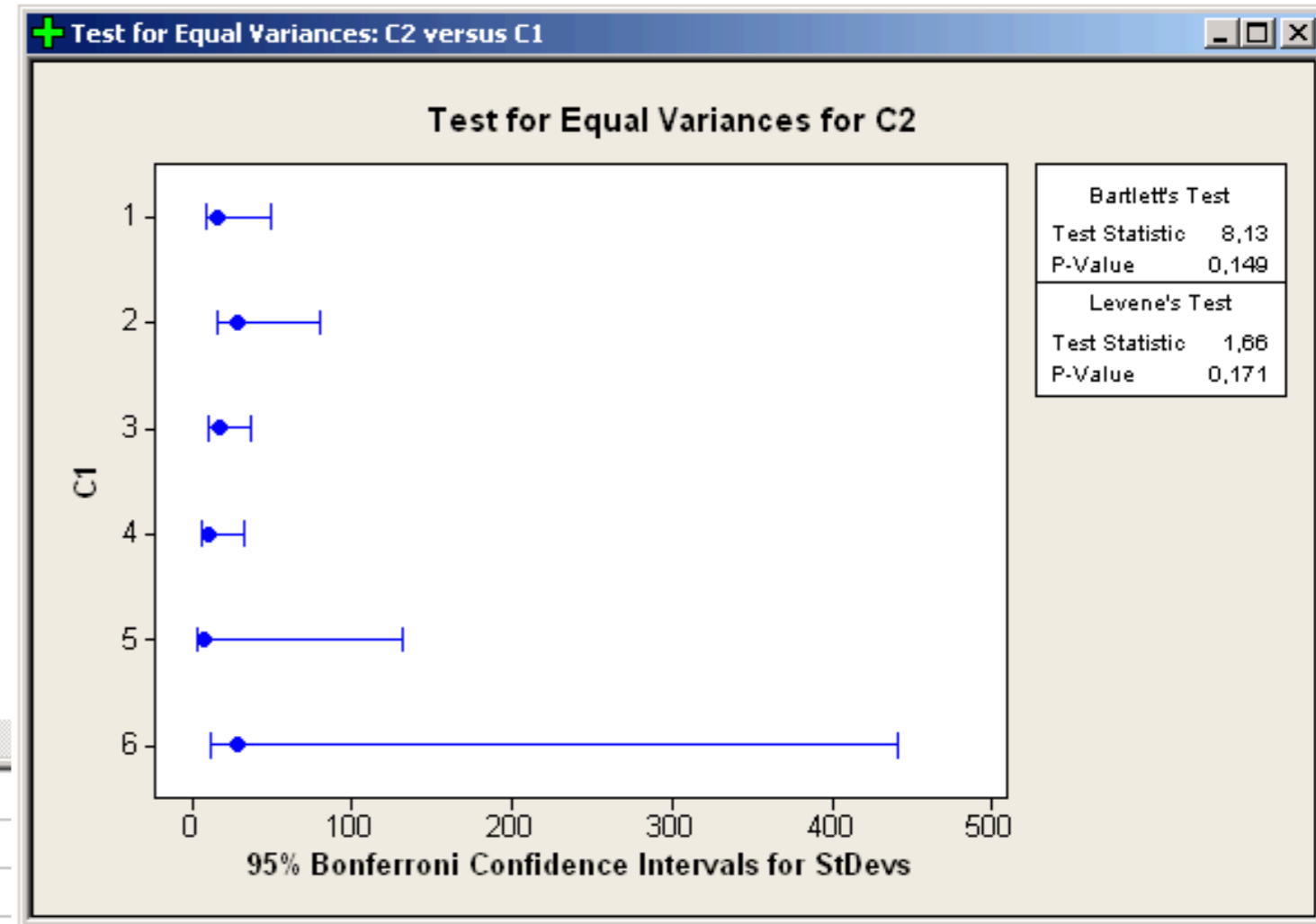
### Test for Equal Variances: C2 versus C1

95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

C1	N	Lower	StDev	Upper
1	7	9,1236	16,2349	50,002
2	8	17,0400	29,3343	80,335
3	12	11,2743	17,7551	37,252
4	7	6,1108	10,8737	33,490
5	3	3,6329	8,5049	131,620
6	3	12,2119	28,5890	442,438

Bartlett's Test (normal distribution)  
Test statistic = 8,13; p-value = 0,149

Levene's Test (any continuous distribution)  
Test statistic = 1,66; p-value = 0,171



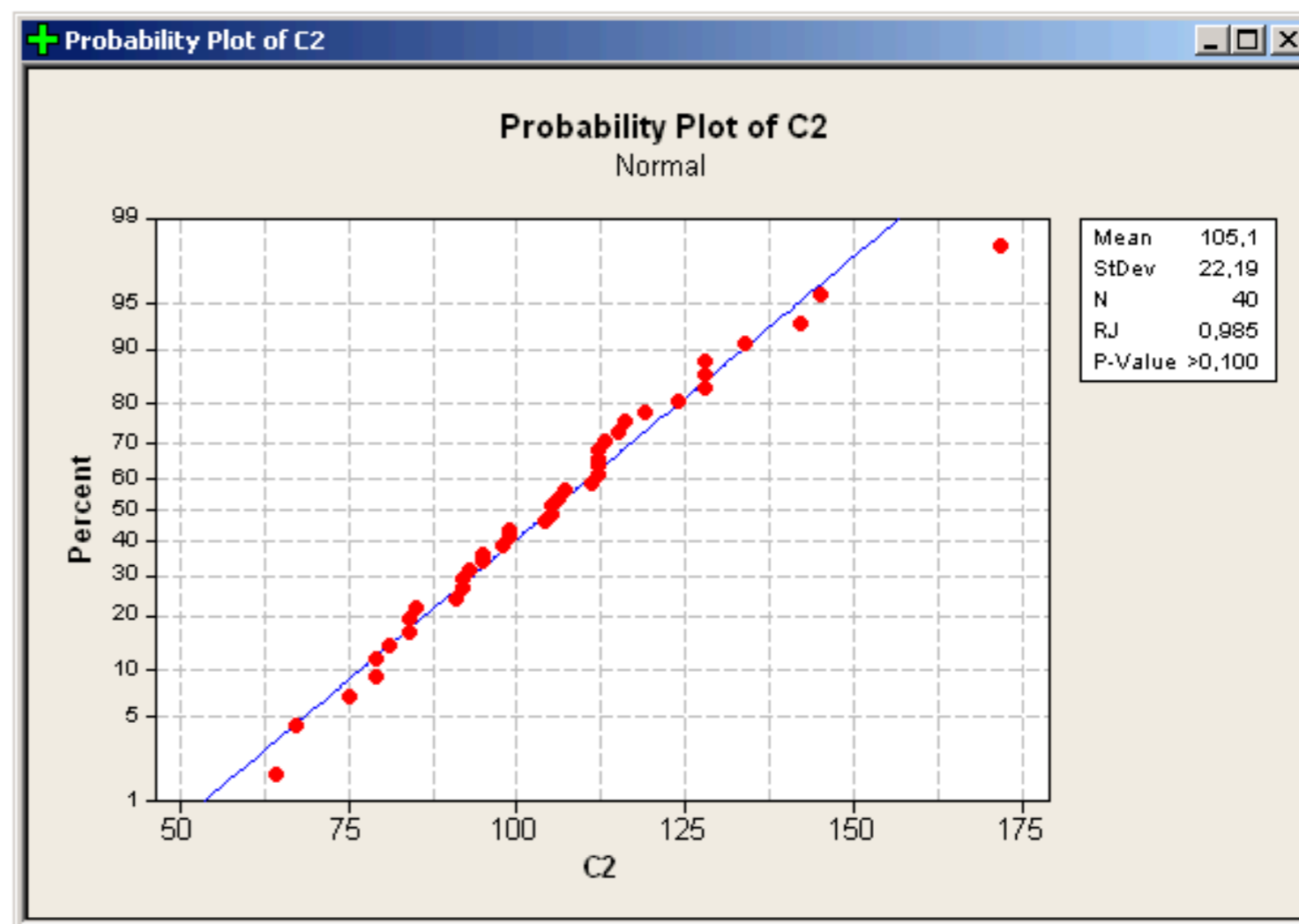
12	2	84							
13	2	64							
14	2	128							
15	2	79							
16	3	81							
17	3	91							
18	3	142							
19	3	84							
20	3	85							
21	3	93							
22	3	99							
23	3	119							
24	3	92							

# Metoda ANOVA - ověření podmínek

## Normalita reziduí

Testy normality:

- Chí-kvadrát test
- Anderson-Darling
- Shapiro-Wilk (Ryan-Joiner)
- Test normality založený na šikmosti a špičatosti



# Metoda ANOVA - ověření podmínek

## Normalita reziduí

Testy normality:

- Chí-kvadrát test
- Anderson-Darling
- Shapiro-Wilk (Ryan-Joiner)
- Test normality založený na šikmosti a špičatosti

výběrový koeficient šikmosti:

$$S_k = \frac{M_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^3}{\left( \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2} \right)^3}$$

$$ES_k = 0$$

$$DS_k = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

výběrový koeficient špičatosti:

$$E_k = \frac{M_4}{s^4} - 3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 \right)^2} - 3$$

$$EE_k = \frac{-6}{n+1}$$

$$DE_k = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

Hypotézu o normalitě zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$ , pokud platí alespoň jedna z následujících nerovností:

$$\frac{|S_k|}{\sqrt{DS_k}} \geq u_{1-\alpha/2}, \quad \frac{|E_k - EE_k|}{\sqrt{DE_k}} \geq u_{1-\alpha},$$

kde  $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ .



# Metoda ANOVA - ověření podmínek

## Normalita reziduí

**Co se stane, když jsou data nenormální?**

Změní se hladina významnosti.

**Jak data "znormalizovat"?**

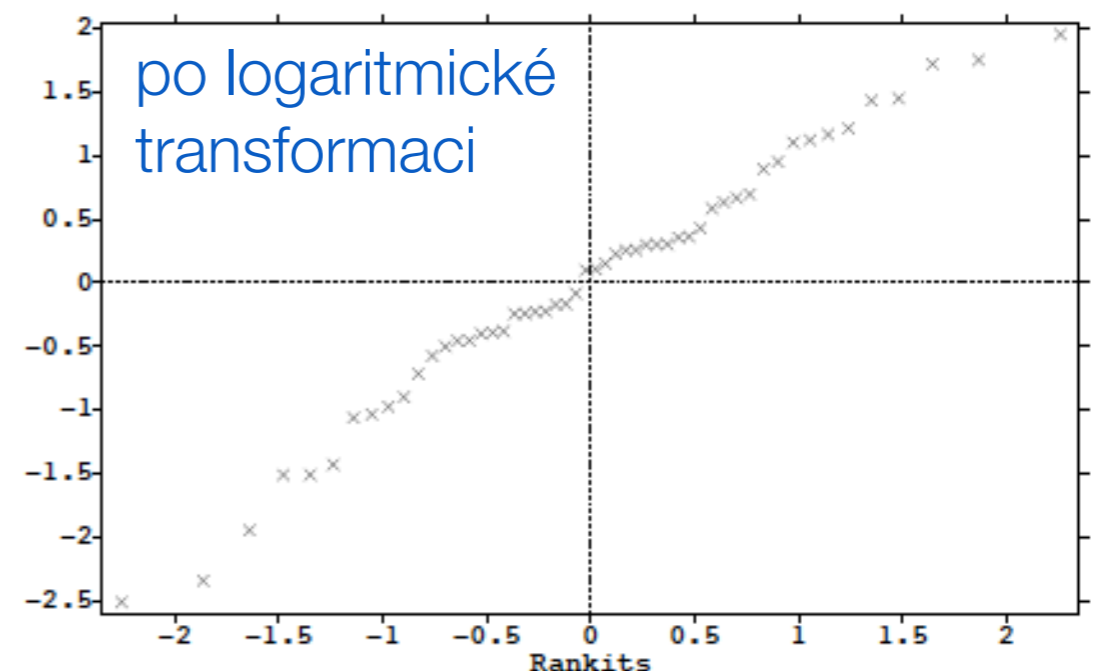
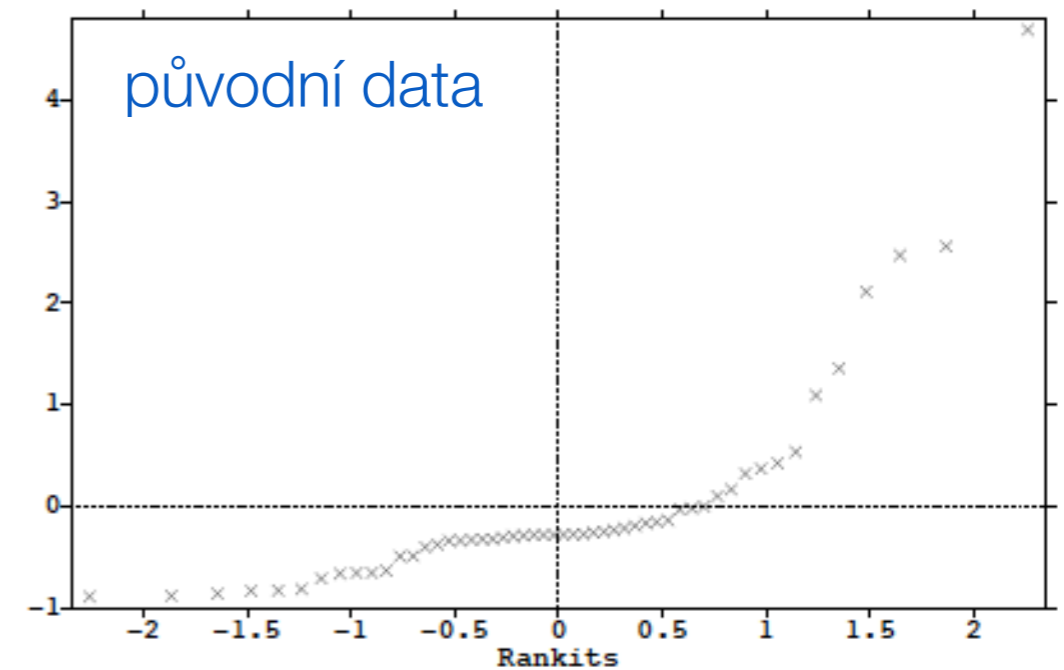
Nejčastější způsob je transformace.

Nejjednodušší je transformace v případě zešikmení původních dat:

- zešikmení napravo: transformace odmocninou, logaritmem nebo jinou mocninou transformací s exponentem menším než 1.
- zešikmení doleva: mocninná transformace s exponentem větším než 1.

Problematický je případ symetrického rozdělení se špičatostí různou od 3.

Zvláštní přístup je třeba zaujmout k odlehlým měřením.



# Neparametrická analýza rozptylu

Odezva  $X_1, X_2, \dots, X_n$  se neřídí normálním rozdělením => nelze použít ANOVA.

## Kruskal – Wallisův test

- Je neparametrickou obdobou analýzy rozptylu jednoduchého třídění.
- Slouží k ověření nulové hypotézy  $H_0$ , že  $k > 2$  nezávislých náhodných výběrů o rozsazích  $n_1, n_2, \dots, n_k$  pochází z jednoho základního souboru.
- Předpokládáme, že tyto náhodné výběry byly pořízeny ze základních souborů se spojitými distribučními funkcemi  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$ .
- Nulovou hypotézu  $H_0$  můžeme pro všechna  $x$  zapsat takto  $H_0: F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_k(x)$ .

## Postup při stanovení testového kritéria:

- 1) Máme k dispozici  $k$  výběrových souborů o četnostech  $n_1, n_2, \dots, n_k$ .
- 2) Všechny výběrové soubory sloučíme do jediného souboru.
- 3) Každé hodnotě souboru přiřadíme vzestupně pořadové číslo, stejným hodnotám pak pořadí průměrné.
- 4) Následně sečteme pořadová čísla jednotlivých pozorování pro každý původní výběrový soubor zvlášť a získáme součty  $T_1, T_2, \dots, T_k$  ( $T_i; i = 1, \dots, k$ , je tedy součet pořadových čísel pro  $i$ -tý výběr)

Testová statistika má tvar  $KW = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$  kde  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

KW má za platnosti  $H_0$  při  $n_i \rightarrow \infty$  asymptoticky  $\chi^2$  – rozdělení o  $k-1$  stupních volnosti.



# Neparametrická analýza rozptylu

Odezva  $X_1, X_2, \dots, X_n$  se neřídí normálním rozdělením => nelze použít ANOVA.

## Kruskal – Wallisův test

Testová statistika má tvar: 
$$KW = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$
  
kde  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

Statistika KW má za platnosti  $H_0$  při  $n_i \rightarrow \infty$  asymptoticky  $\chi^2$  – rozdělení o  $k-1$  stupních volnosti.

Pokud  $KW > \chi_{\alpha}^2(n-1)$ , přijímáme hypotézu alternativní, podle které se hodnoty nejméně dvou porovnávaných výběrových souborů od sebe statisticky významně liší.

Jestliže se v posloupnosti zjištěných údajů vyskytnou shodné hodnoty, kterým se přiřazuje průměrné pořadí, je nutno hodnotu KW dělit korekčním faktorem

$$K = 1 - \frac{1}{n^3 - n} \sum_{j=1}^p (t_j^3 - t_j)$$

kde  $p$  je počet tříd se stejným pořadím a  $t_i$  počet pořadí v  $i$ -té třídě.

Opravené testové kritérium se stanoví jako 
$$KW_{opr} = \frac{KW}{K}$$

I v tomto případě je třeba použít neparametrické metody mnohonásobného porovnávání (Neményi, Dunna, ...)



# Neparametrická analýza rozptylu

The screenshot shows the Minitab software interface. The 'Stat' menu is open, and 'Nonparametrics' is selected. The 'Kruskal-Wallis...' option is highlighted in the submenu. The 'Kruskal-Wallis' dialog box is open, showing 'C1', 'C2', and 'C3' in the list of variables. The 'Response' field is set to 'C1' and the 'Factor' field is set to 'C3'. The 'Select' button is visible at the bottom of the dialog box.

**Stat** menu options:

- Basic Statistics
- Regression
- ANOVA
- DOE
- Control Charts
- Quality Tools
- Reliability/Survival
- Multivariate
- Time Series
- Tables
- Nonparametrics**
- EDA
- Power and Sample Size

**Nonparametrics** submenu options:

- 1-Sample Sign...
- 1-Sample Wilcoxon...
- Mann-Whitney...
- Kruskal-Wallis...**
- Mood's Median Test...
- Friedman...
- Runs Test...
- Pairwise Averages...
- Pairwise Differences...
- Pairwise Slopes...

**Kruskal-Wallis** dialog box:

Response: C1  
Factor: C3

Select  
Help OK Cancel



# Neparametrická analýza rozptylu

**Úloha:** Ověřit, zda výnosy silážní kukuřice jsou ovlivněny rozdílnou dávkou NPK v hnojivu.

- Odezva: výnos v t/ha
- Faktor: způsob hnojení (4 úrovně lišící se dávkou NPK)

Provedeme polní experiment, v němž budeme sledovat výnosy pro čtyři varianty hnojení silážní kukuřice rozdílnou dávkou NPK v hnojivech, označené jako  $V_1$  až  $V_4$ . Každá varianta bude ověřována na 8 parcelách a budou měřeny výnosy sklizené hmoty v tunách na hektar.

$H_0$ : výnosy jednotlivých variant jsou shodné

$H_1$ : výnosy jednotlivých variant jsou rozdílné

Hypotéza o normalitě napozorovaných dat byla zamítnuta. Proto použijeme Kruskal-Wallisův test.



# Neparametrická analýza rozptylu

varianta	Výnos kukuřice v t z hektaru na parcele číslo:								součet T <sub>i</sub>
	1	2	3	4	5	6	7	8	
V <sub>1</sub> pořadí	1,29 23,5	1,19 8,5	1,23 15	1,33 28,5	1,27 20	1,29 23,5	1,31 27	1,20 11,5	157,5
V <sub>2</sub> pořadí	1,30 26	1,33 28,5	1,29 23,5	1,37 31	1,35 30	1,25 18,5	1,38 32	1,29 23,5	213
V <sub>3</sub> pořadí	1,20 11,5	1,24 16,5	1,25 18,5	1,24 16,5	1,20 11,5	1,21 14	1,28 21	1,17 7	116,5
V <sub>4</sub> pořadí	1,03 2	1,14 6	1,09 5	1,20 11,5	1,07 4	1,19 8,5	1,01 1	1,05 3	41

- $$KW = \frac{12}{32 \cdot 33} \left( \frac{157,5^2}{8} + \frac{213^2}{8} + \frac{116,5^2}{8} + \frac{41^2}{8} \right) - 3 \cdot 33 = 22,3473$$
- Vzhledem k výskytu stejných údajů (bylo použito průměrné pořadí) použijeme korekční faktor:  $K = 1 - \frac{(2^3 - 2) + (4^3 - 4) + (2^3 - 2) + (2^3 - 2) + (4^3 - 4) + (2^3 - 2)}{32^3 - 32} = 0,9956$
- $$KW_{opr.} = \frac{22,3473}{0,9956} = 22,446 \quad \chi_{0,05(3)}^2 = 7,815 \quad \chi_{0,01(3)}^2 = 11,34$$

Opravené testové kritérium  $KW = 22,446 > \chi^2 \Rightarrow$  na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  i  $0,01$  přijímáme alternativní hypotézu, podle které se průkazně liší hodnoty výnosu nejméně ve 2 třídách.



# Neparametrická analýza rozptylu

varianta	Výnos kukuřice v t z hektaru na parcele číslo:								součet $T_i$
	1	2	3	4	5	6	7	8	
V <sub>1</sub> pořadí	1,29 23,5	1,19 8,5	1,23 15	1,33 28,5	1,27 20	1,29 23,5	1,31 27	1,20 11,5	157,5
V <sub>2</sub> pořadí	1,30 26	1,33 28,5	1,29 23,5	1,37 31	1,35 30	1,25 18,5	1,38 32	1,29 23,5	213
V <sub>3</sub> pořadí	1,20 11,5	1,24 16,5	1,25 18,5	1,24 16,5	1,20 11,5	1,21 14	1,28 21	1,17 7	116,5
V <sub>4</sub> pořadí	1,03 2	1,14 6	1,09 5	1,20 11,5	1,07 4	1,19 8,5	1,01 1	1,05 3	41

```
> vynosy <- data.frame(read.table("vynosy.txt", header=T))  
> kruskal.test(vynos ~ varianta, data=vynosy)
```

Kruskal-Wallis rank sum test

data: vynos by varianta

Kruskal-Wallis chi-squared = 22.446, df = 3, p-value = 5.268e-05

Opravené testové kritérium  $KW = 22,446 > \chi^2 \Rightarrow$  na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  i  $0,01$  přijímáme alternativní hypotézu, podle které se průkazně liší hodnoty výnosu nejméně ve 2 třídách.



# Neparametrická analýza rozptylu

Podrobnější vyhodnocení Neményiho metodou:

Spočteme tabulku diferencí mezi součty pořadí pro výnosy kukuřice při jednotlivých variantách hnojení  $T_i - T_j$

Kritické hodnoty:

$$D_{0,05} = 96,4 \quad (N = 8, K = 4)$$

$$D_{0,01} = 116,8 \quad (N = 8, K = 4)$$

třída $T_i$ \ třída $T_j$	diference $T_i - T_j$		
	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$V_1$	55,5	41	116,5 <sup>x</sup>
$V_2$		96,5 <sup>x</sup>	172 <sup>xx</sup>
$V_3$			75,5

Statisticky významně se liší hodnoty výnosů kukuřice mezi variantami hnojení  $V_2, V_4$  a to na hladině významnosti  $\alpha = 0,01$  (diference  $T_i - T_j$  jsou označeny <sup>xx</sup>). Na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  se dále statisticky významně liší hodnoty výnosů kukuřice mezi variantami hnojení  $V_1, V_4$  a  $V_2, V_3$ .



# Neparametrická analýza rozptylu

```
> pairwise.wilcox.test(vynosy$vynos, vynosy$varianta)
```

Pairwise comparisons using Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data: vynosy\$vynos and vynosy\$varianta

	V1	V2	V3
V2	0.1133	-	-
V3	0.1544	0.0079	-
V4	0.0079	0.0056	0.0080

Statisticky významně se neliší hodnoty výnosů kukuřice pouze mezi variantami hnojení  $V_1, V_2$  a  $V_1, V_3$ . Statisticky významně se liší varianta  $V_4$  od všech ostatních a varianty  $V_2, V_3$ . To vše už na hladině významnosti  $\alpha = 0,008$ .



# Neparametrická analýza rozptylu

## Test extrémních odchylek hodnot odezvy

V řadě pozorovaných hodnot se někdy objeví hodnota extrémně se lišící od ostatních, tzn. výrazně vybočuje z rozpětí ostatních naměřených hodnot.

Je třeba posoudit, zda je tato odchylka pouze náhodná nebo zda je uvedená hodnota zatížena „hrubou chybou“.

Pro objektivní posouzení této otázky existuje skupina testů, které se nazývají „testy extrémních odchylek“.

### Dixonův test

Pozorovaná hodnota, která se extrémně liší od ostatních, je zřejmě buď nejmenší hodnotou ( $x_{(1)}$ ) nebo největší hodnotou ( $x_{(n)}$ ).

Nulová hypotéza  $H_0$  tvrdí, že ( $x_{(1)}$ ), resp. ( $x_{(n)}$ ), je vybrána ze stejného normálně rozděleného základního souboru jako ostatní hodnoty.

Pro posouzení, zda hodnota ( $x_{(1)}$ ) nebo hodnota ( $x_{(n)}$ ) je zatížena hrubou chybou, užíváme testovacího kritéria

$$Q_1 = \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}} \quad \text{nebo} \quad Q_n = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$$

Jestliže vypočtená hodnota  $Q_1$ , resp.  $Q_n$ , překročí kritickou hodnotu  $Q_{1\alpha} = Q_{n\alpha}$  (nalezenou v tabulkách pro Dixonův test, hladinu významnosti  $\alpha$  a rozsah souboru  $n$ ), zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti  $\alpha$  a hodnotu ( $x_{(1)}$ ), resp. ( $x_{(n)}$ ), jako údaj zkreslený hrubou chybou, ze souboru vyloučíme.

Tzn. že nulová hypotéza se zamítá, pokud platí  $Q_1 > Q_{\alpha(n)}$  nebo  $Q_n > Q_{\alpha(n)}$ .



# Neparametrická analýza rozptylu

Odezva  $X_1, X_2, \dots, X_n$  se neřídí normálním rozdělením => nelze použít ANOVA.

## Friedmanův test

- Je neparametrickou obdobou analýzy rozptylu dvojného třídění (pro dva faktory - například pro jeden hlavní a druhý blokový).
- Předpokládejme, že máme měření  $y_{ij}$ , kde  $i$  je označení bloku,  $j$  je označení úrovně faktoru (ošetření). Pro každou dvojici  $(i,j)$  máme jedno měření.

- Označme

$k$  - počet úrovní faktoru

$n$  - počet bloků

$r_{ij}$  - pořadí naměřené hodnoty odezvy  $y_{ij}$  v bloku  $i$

$\bar{r}_j$  - průměrné pořadí odezvy při úrovni  $j$  přes všechny bloky

$\bar{r}$  - průměrné pořadí přes všechny úrovně a přes všechny bloky

$$\bar{r}_{\cdot j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{ij} \quad \bar{r} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k r_{ij}$$

Položme  $SS_t = n \sum_{j=1}^k (\bar{r}_{\cdot j} - \bar{r})^2$  a  $SS_e = \frac{1}{n(k-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (r_{ij} - \bar{r})^2$

Testová statistika má tvar  $Q = \frac{SS_t}{SS_e}$

(Pro velká  $n$  a  $k$  ( $n > 15$ ,  $k > 4$ ) má přibližně chí-kvadrát rozdělení o  $k-1$  stupních volnosti)



# Neparametrická analýza rozptylu

The screenshot displays the Minitab software interface. The main window shows the results of a Kruskal-Wallis Test and a Friedman Test. The Kruskal-Wallis Test results are as follows:

C3	N	Medi
1	2	16,
2	2	16,
3	2	17,
4	2	16,
5	2	16,
Overall	10	5,5

Statistical values:  $H = 6,44$   $DF = 4$   $P = 0,169$   
\* NOTE \* One or more small samples

The Friedman Test results are as follows:

C3	N	Est Median	Ranks
1	4	16,747	9,0
2	4	16,460	6,0
3	4	16,778	9,0

Statistical values:  $S = 1,50$   $DF = 2$   $P = 0,472$   
Grand median = 16,662

The 'Stat' menu is open, showing the 'Nonparametrics' sub-menu with 'Friedman...' selected. The 'Friedman' dialog box is also open, showing the following settings:

- Response: C1
- Treatment: C3
- Blocks: C2
- Store residuals:
- Store fits:

The 'Select' button is highlighted in the dialog box.

