

# Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

## G.1 - Zákony velkých čísel a náhodné posloupnosti



# G.1 - Zákony velkých čísel a náhodné posloupnosti

**Klíčové pojmy:** • autokorelační funkce

**Klíčové vztahy:**

- různé druhy konvergence posloupnosti náhodných veličin (skoro jistě, v pravděpodobnosti, v distribuci)
- Slabý a silný zákon velkých čísel;
- Čebyševova nerovnost;
- Centrální limitní věta;
- stacionarita procesu (slabá, silná);
- modely AR(k) a MA(n);
- Vyhlazování časové řady, dekompozice;

# Náhodná posloupnost

Uvažujme posloupnost náhodných veličin  $X_1, \dots, X_n, \dots$

$$X : \Omega \times N \longrightarrow R$$

System konečněrozměrných distribučních funkcí:

$$F(x_1, \dots, x_n; i_1, \dots, i_n) = P(X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_n} \leq x_n)$$

**symetrie:**  $F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; i_1, \dots, i_n) = F(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}; j_1, \dots, j_n)$   
pro libovolnou permutaci  $(j_1, \dots, j_n)$  čísel  $(i_1, \dots, i_n)$   
(nezáleží na pořadí)

**konzistence:**

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n; i_1, \dots, i_n) = F(x_1, \dots, x_{n-1}; i_1, \dots, i_{n-1})$$

# Konvergence posloupnosti náhodných veličin

1) Konvergence skoro jistě:  $P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right) = 1$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} X$$

silná konvergence, konvergence skoro všude

2) Konvergence v pravděpodobnosti:

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} P [ \|X_n - X\| > \epsilon ] = 0$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$$

slabá konvergence, konvergence podle míry

3) Konvergence v distribuci:  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F(x)$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X$$

4) Konvergence podle kvadratického středu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E^2} X$$

konvergence v  $L_p$  normě pro  $p=2$

Platí

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X$$

# Zákony velkých čísel

## Slabý zákon velkých čísel:

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  splňuje slabý zákon velkých čísel, jestliže platí

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

## Čebyševova nerovnost:

Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  platí:  $\forall \varepsilon > 0 : P(|x - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

## Čebyševova věta:

Nechť  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost po dvou nezávislých náhodných veličin, které mají konečné druhé momenty a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = 0.$$

Potom tato posloupnost splňuje slabý zákon velkých čísel.

(Důkaz pomocí Čebyševovy nerovnosti:  $\forall \varepsilon > 0 : P(|Y_n - EY_n| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}Y_n}{\varepsilon^2}$ .)

# Zákony velkých čísel

Označme  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)$

$$EY_n = E \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{E(X_i - EX_i)}_{=0} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}Y_n &= \text{Var} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \right] = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \right] \\ &\stackrel{\text{nez.}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i - EX_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}X_i \end{aligned}$$

$$P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) - 0 \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}Y_n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{podle předp.}} 0,$$

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|Y_n - EY_n| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}Y_n}{\varepsilon^2}.$$

# Zákony velkých čísel

## Bernoulliho věta:

Nechť náhodná veličina  $Y_n$  je rovna počtu úspěchů v posloupnosti nezávislých alternativních pokusů délky  $n$ , ve které je pravděpodobnost úspěchu rovna číslu  $\theta \in (0, 1)$ . Potom posloupnost  $Z_n = \frac{1}{n}Y_n$  relativních četností úspěchů konverguje podle pravděpodobnosti k  $\theta$ , tj.

$$Z_n = \frac{1}{n}Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta.$$

## Chinčinoва věta (slabý zákon velkých čísel):

Nechť  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením s konečnou střední hodnotou  $EX_i = \mu$ . Potom  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  splňuje slabý zákon velkých čísel, tj. pro posloupnost průměrů platí

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu.$$

## Silný zákon velkých čísel:

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  splňuje silný zákon velkých čísel, jestliže platí

$$P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) = 0 \right) = 1.$$

# Centrální limitní věty

## Centrální limitní věta (Lindeberg-Lévy):

Nechť  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením se střední hodnotou  $\mu$  a nenulovým rozptylem  $\sigma^2$ . Potom náhodné veličiny

$$U_{\bar{X}_n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sigma \sqrt{n}}$$

konvergují v distribuci k náhodné veličině se standardním normálním rozdělením  $N(0,1)$ .

## Moivre-Laplaceova věta:

Nechť náhodná veličina  $Y_n$  je rovna počtu úspěchů v posloupnosti nezávislých alternativních pokusů délky  $n$ , ve které je pravděpodobnost úspěchu rovna číslu  $\theta \in (0, 1)$ . Potom

$$\frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z.$$

kde  $Z$  je náhodná veličina se standardním normálním rozdělením  $N(0,1)$ .

**Příklad:** Spočtete přibližnou pravděpodobnost toho, že počet šestek, které padnou ve 12.000 hodech homogenní hrací kostkou, bude mezi 1.900 až 2.100.

# Centrální limitní věty (příklad)

*Řešení:* Označme  $Y_n$  počet šestek, které padnou v  $n=12.000$  hodech; je  $Y_n \sim Bi\left(n, \frac{1}{6}\right)$  a hledáme  $P(Y_n \in B) = P(1\,900 < Y_n \leq 2\,100)$

Dále je  $EY_n = n\theta = 12\,000 \frac{1}{6} = 2\,000$

$$VarY_n = n\theta(1 - \theta) = 12\,000 \frac{1}{6} \frac{5}{6} = 2\,000 \frac{5}{6} = \frac{10\,000}{6}.$$

$$\begin{aligned} P(1\,900 < Y_n \leq 2\,100) &= P(1\,900 - EY_n < Y_n - EY_n \leq 2\,100 - EY_n) \\ &= P\left(\frac{1\,900 - EY_n}{\sqrt{VarY_n}} < \frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}} \leq \frac{2\,100 - EY_n}{\sqrt{VarY_n}}\right) \\ &= P\left(\frac{1\,900 - 2\,000}{\sqrt{\frac{10\,000}{6}}} < U_{\bar{X}_n} \leq \frac{2\,100 - 2\,000}{\sqrt{\frac{10\,000}{6}}}\right) \\ &= P(-2.4495 < U_{\bar{X}_n} \leq 2.4495) \\ &\approx \Phi(2.4495) - \Phi(-2.4495) \\ &= 2\Phi(2.4495) - 1 = \boxed{0.9857}. \end{aligned}$$

# Náhodná posloupnost

## Charakteristiky posloupnosti náhodných veličin

funkce střední hodnoty:  $\mu_i = E(X_i), \quad i = 1, \dots$

**auto**kovarianční funkce:  $c(i, j) = \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$

**auto**korelační funkce:  $r(i, j) = \rho(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var} X_i \cdot \text{Var} X_j}}$

Pokud je 1)  $\mu_i = \mu, \quad i = 1, 2, \dots$  konstantní střední hodnota

2)  $c(i, j) = c(j - i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots$

kovarianční funkce závisí jen na rozdílu indexů

potom řekneme, že posloupnost  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  je **kovariančně (slabě) stacionární**.

Posloupnost  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  je **silně stacionární**, pokud pro libovolnou  $n$ -tici  $i_1, \dots, i_n$  a libovolné  $\delta \in N$  platí

$$F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; i_1, \dots, i_n) = F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; i_1 + \delta, \dots, i_n + \delta)$$

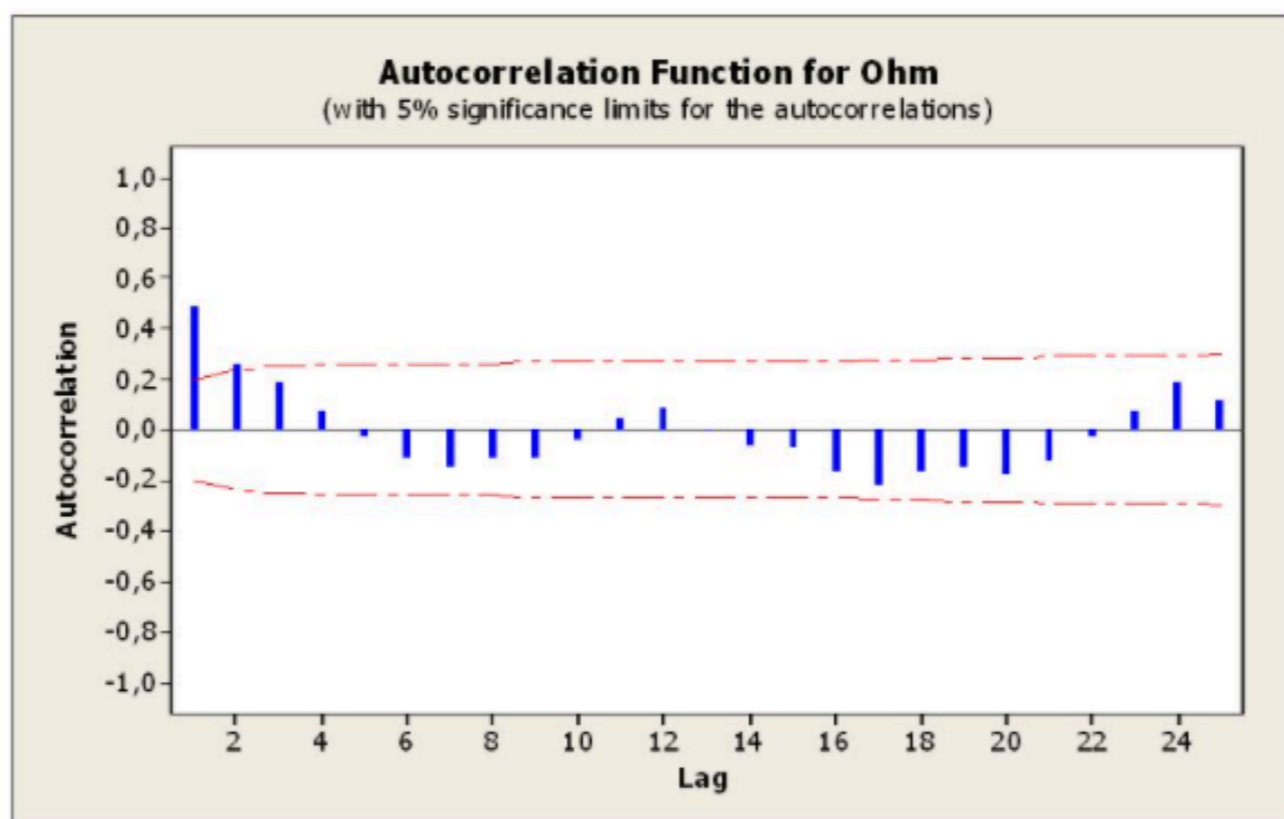
# Stacionární náhodná posloupnost

autokovarianční funkce:  $c(k) = \text{Cov}(X_1, X_{k+1}) = \text{Cov}(X_i, X_{i+k+1})$   
 $= E(X_1 - \mu)(X_{k+1} - \mu) = E(X_1, X_{k+1}) - \mu^2$

zpravidla pracujeme s tzv. “centrovaným” procesem:  $Y_i = X_i - \mu$

a pro tento proces je  $c(k) = E(Y_i Y_{i+k})$

autokorelační funkce:  $r(k) = \frac{c(k)}{c(0)}$  (vždy je  $r(0) = 1$ )



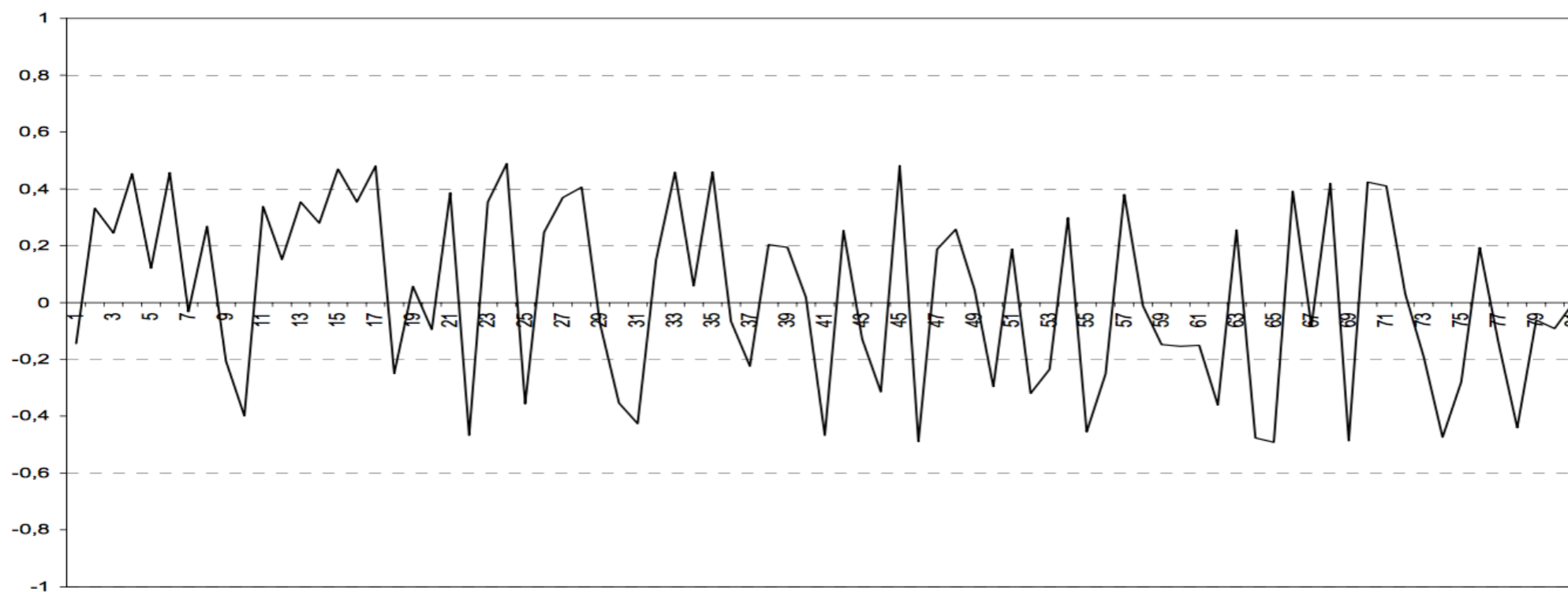
# Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost nekorelovaných náhodných veličin  $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$

autokorelační funkce:  $r(0) = 1, \quad r(k) = 0, \quad k = 1, \dots$

Posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem  
= bílý šum

Posloupnost nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením  $N(0, \sigma^2)$  = Gaussovský bílý šum



# Stacionární náhodná posloupnost

Autoregresní posloupnost řádu  $p$  AR( $p$ )

$$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \dots + \phi_p Y_{k-p} + \epsilon_k$$

kde  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  jsou konstanty a  $\epsilon_k$  je bílý šum.

**AR(1):**  $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$

$$\text{Var}(Y_k) = \phi^2 \text{Var}(Y_{k-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

je-li stacionární, potom musí být  $\text{Var}(Y_k) = \text{Var}(Y_{k-1}) = \sigma_Y^2$

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2} \Rightarrow 1 > \phi^2 \Rightarrow |\phi| < 1$$

autokovarianční funkce:  $E(Y_k, Y_{k-u}) = \phi E(Y_{k-1}, Y_{k-u}) + E(\epsilon_k Y_{k-u})$

$$c(u) = \phi c(u - 1), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \phi^u c(0), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \frac{\phi^u \sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2}$$

# Stacionární náhodná posloupnost

$$\text{AR}(1): Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$$

$$E(Y_k) = 0, \quad \text{Var}(Y_k) = \phi^2 \text{Var}(Y_{k-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

je-li stacionární, potom musí být  $\text{Var}(Y_k) = \text{Var}(Y_{k-1}) = \sigma_Y^2$

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2} \Rightarrow 1 > \phi^2 \Rightarrow |\phi| < 1$$

autokovarianční funkce:  $E(Y_k, Y_{k-u}) = \phi E(Y_{k-1}, Y_{k-u}) + E(\epsilon_k Y_{k-u})$

$$c(u) = \phi c(u-1), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \phi^u c(0), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \frac{\phi^u \sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2}$$

autokorelační funkce:

$$r(u) = \phi^u, \quad u = 1, 2, \dots$$

# Stacionární náhodná posloupnost

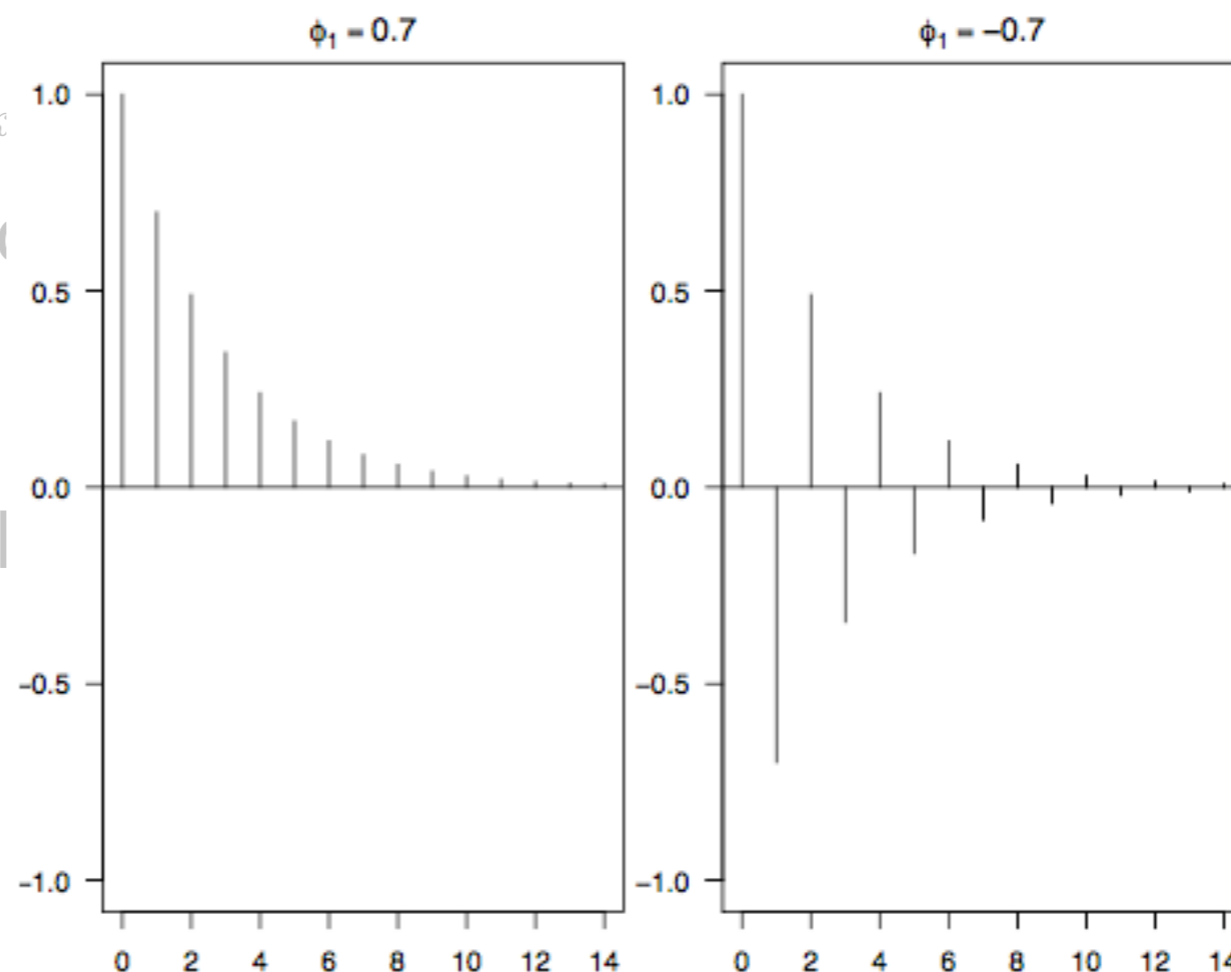
**AR(1):**  $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$

$E(Y_k) = 0, \quad Var(Y_k)$

je-li stacionární, potom

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \Rightarrow$$

autokovarianční funkce



$= \sigma_Y^2$

$- E(\epsilon_k Y_{k-u})$

, 2, ...

...

autokorelační funkce:

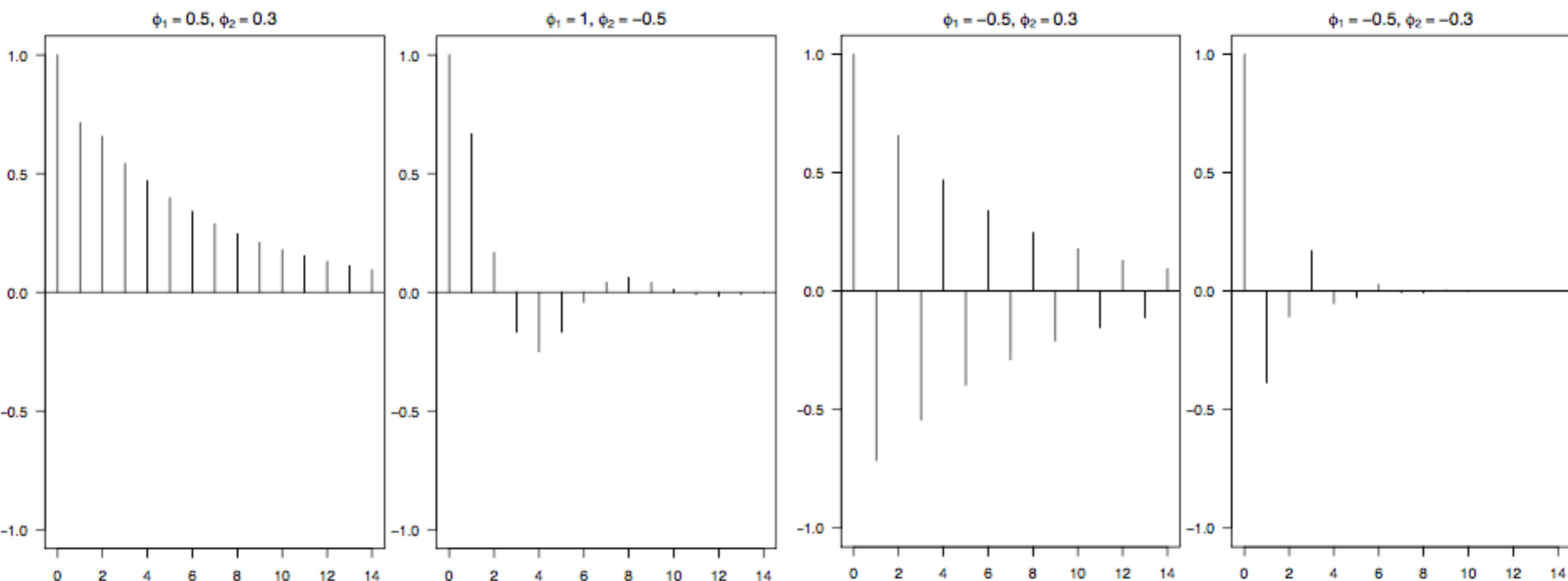
$$r(u) = \phi^u, \quad u = 1, 2, \dots$$

# Stacionární náhodná posloupnost

**AR(2):**  $Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \epsilon_k$

autokovarianční funkce:  $c(u) = \alpha_1 \gamma_1^u + \alpha_2 \gamma_2^u$

kde  $\gamma_1, \gamma_2$  jsou kořeny polynomu  $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$

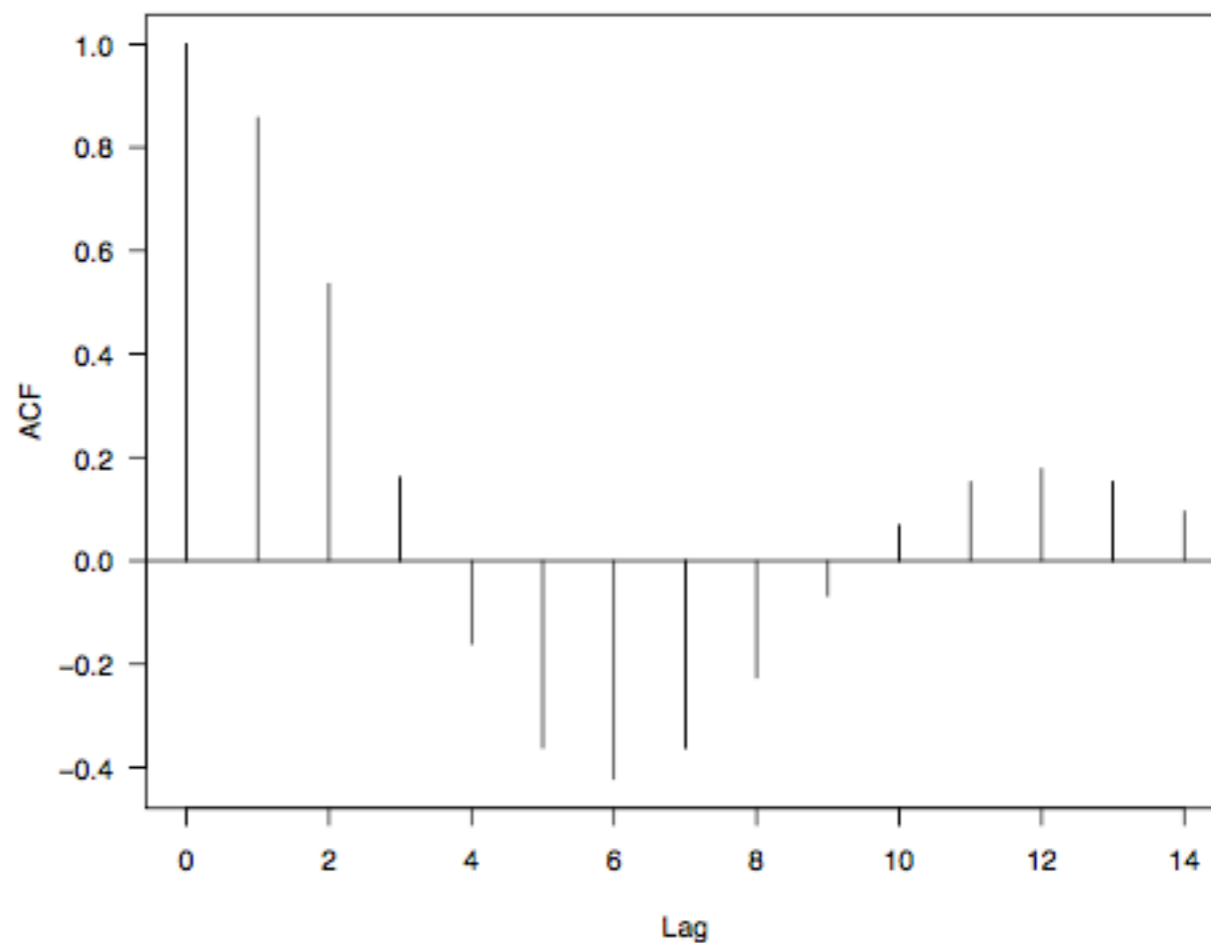
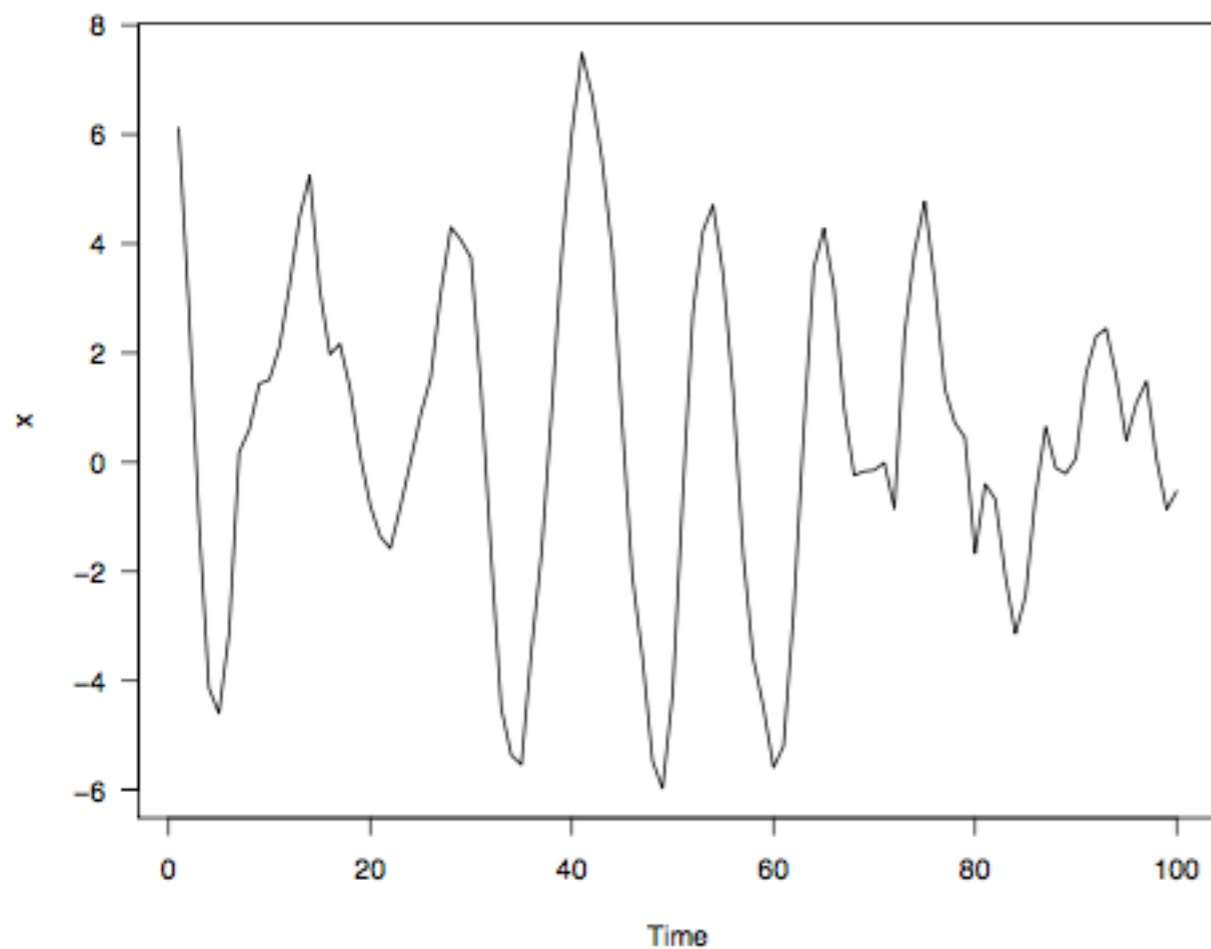


# Stacionární náhodná posloupnost

**AR(2):**  $Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \epsilon_k$

autokovarianční funkce:  $c(u) = \alpha_1 \gamma_1^u + \alpha_2 \gamma_2^u$

kde  $\gamma_1, \gamma_2$  jsou kořeny polynomu  $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$



$$Y_k = 1.5Y_{k-1} - 0.75Y_{k-2} + \epsilon_k$$

# Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost klouzavých součtů řádu  $q$  MA( $q$ )

$$Y_k = \epsilon_k + \theta_1 \epsilon_{k-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{k-q}$$

kde  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, q$  jsou konstanty a  $\epsilon_k$  je bílý šum.

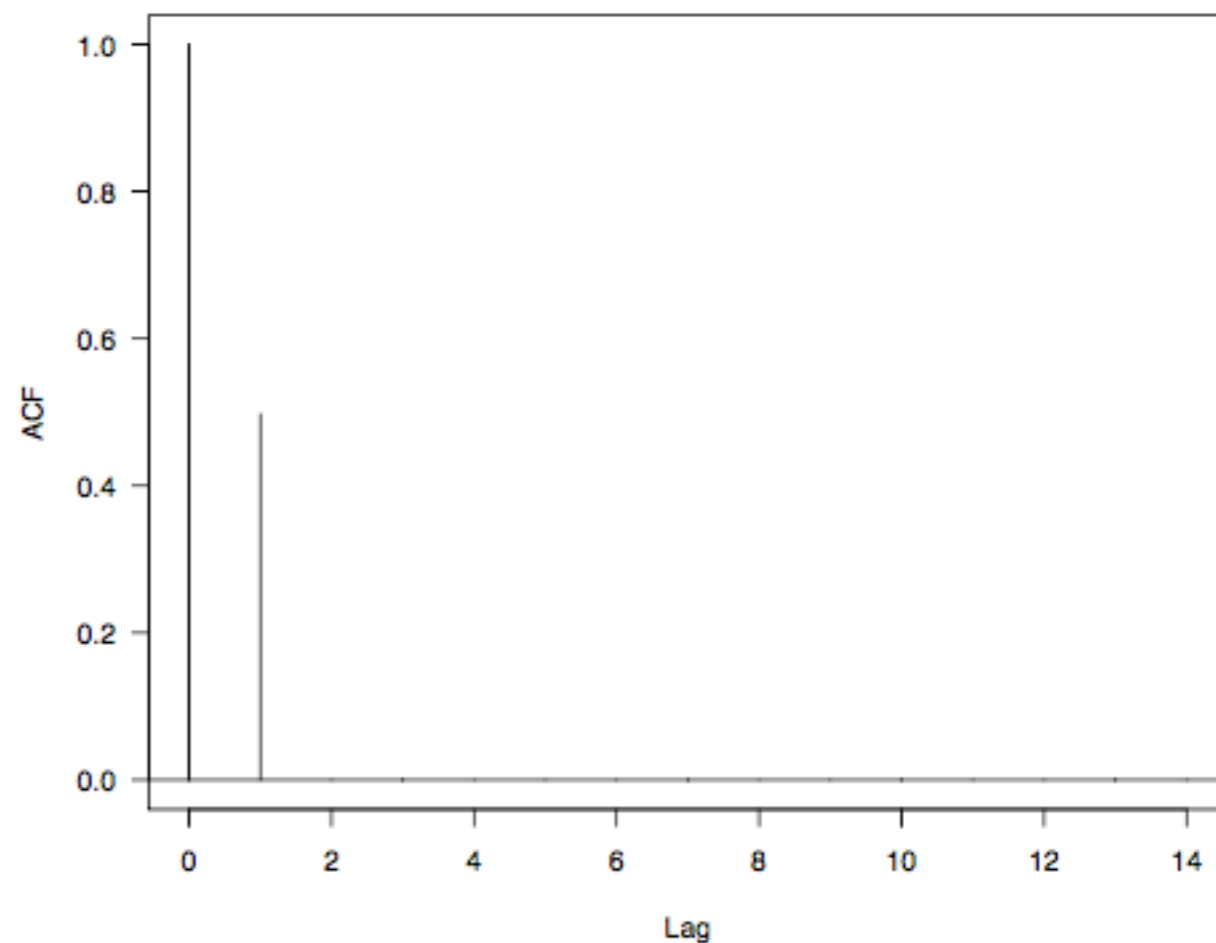
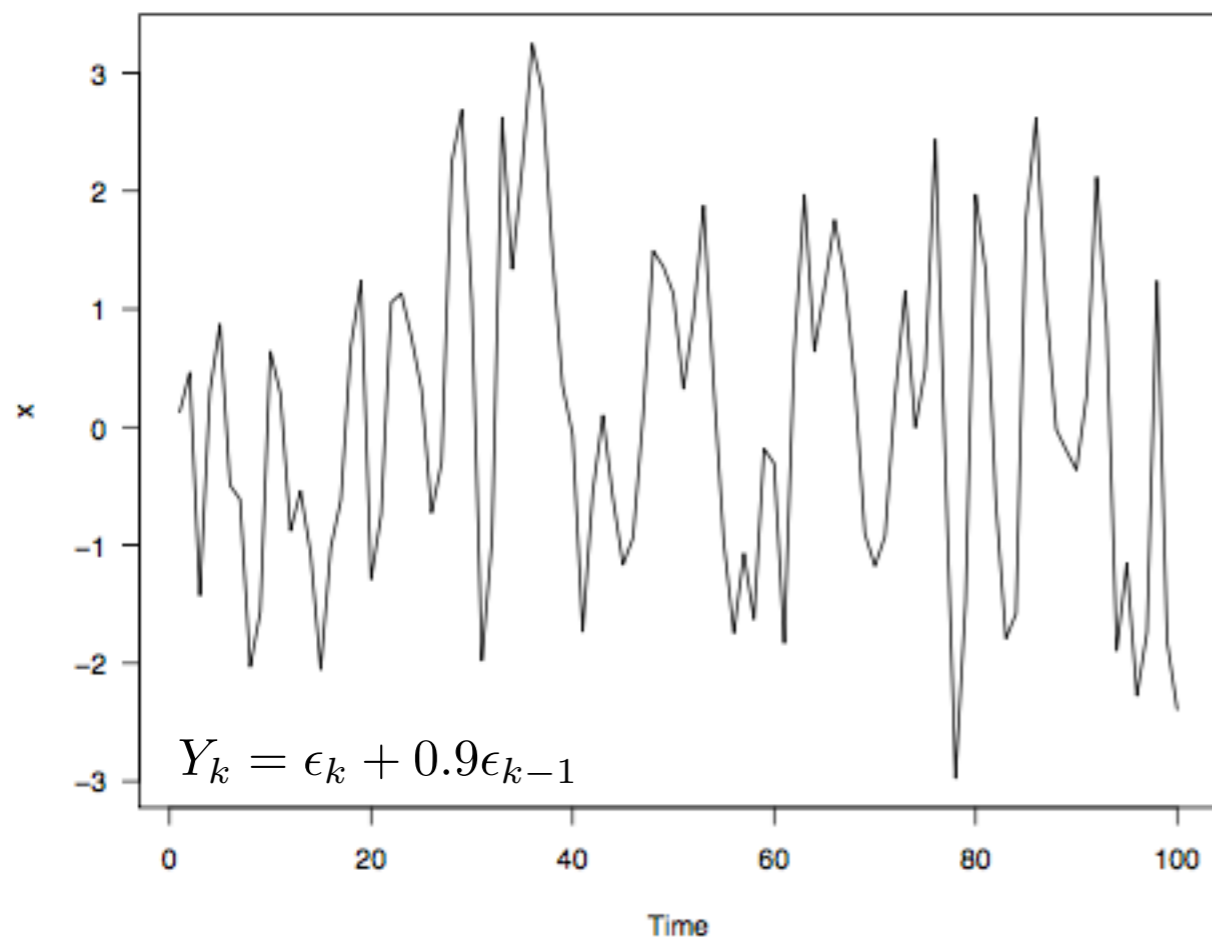
autokovarianční funkce:

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 & u = 0, \\ (\theta_u + \theta_1\theta_{u+1} + \cdots + \theta_{q-u}\theta_q)\sigma^2 & u = 1, \dots, q \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

**MA(1):**  $Y_k = \epsilon_k + \theta\epsilon_{k-1}$

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & u = 0, \\ \theta\sigma^2 & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad r(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{1+\theta^2} & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

# Stacionární náhodná posloupnost



**MA(1):**  $Y_k = \epsilon_k + \theta\epsilon_{k-1}$

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & u = 0, \\ \theta\sigma^2 & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$r(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{1 + \theta^2} & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

# Stacionární náhodná posloupnost

## Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \cdots + \phi_p Y_{k-p} + \epsilon_k + \theta_1 \epsilon_{k-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{k-q}$$

**ARMA(1,1):**  $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1}$

autokovarianční funkce:

$$E(\epsilon_k Y_k) = E(\epsilon_k (\phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1})) = \sigma_\epsilon^2$$

$$E(\epsilon_{k-1} Y_k) = E(\epsilon_{k-1} (\phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1})) = (\phi + \theta) \sigma_\epsilon^2$$

·  
·  
·

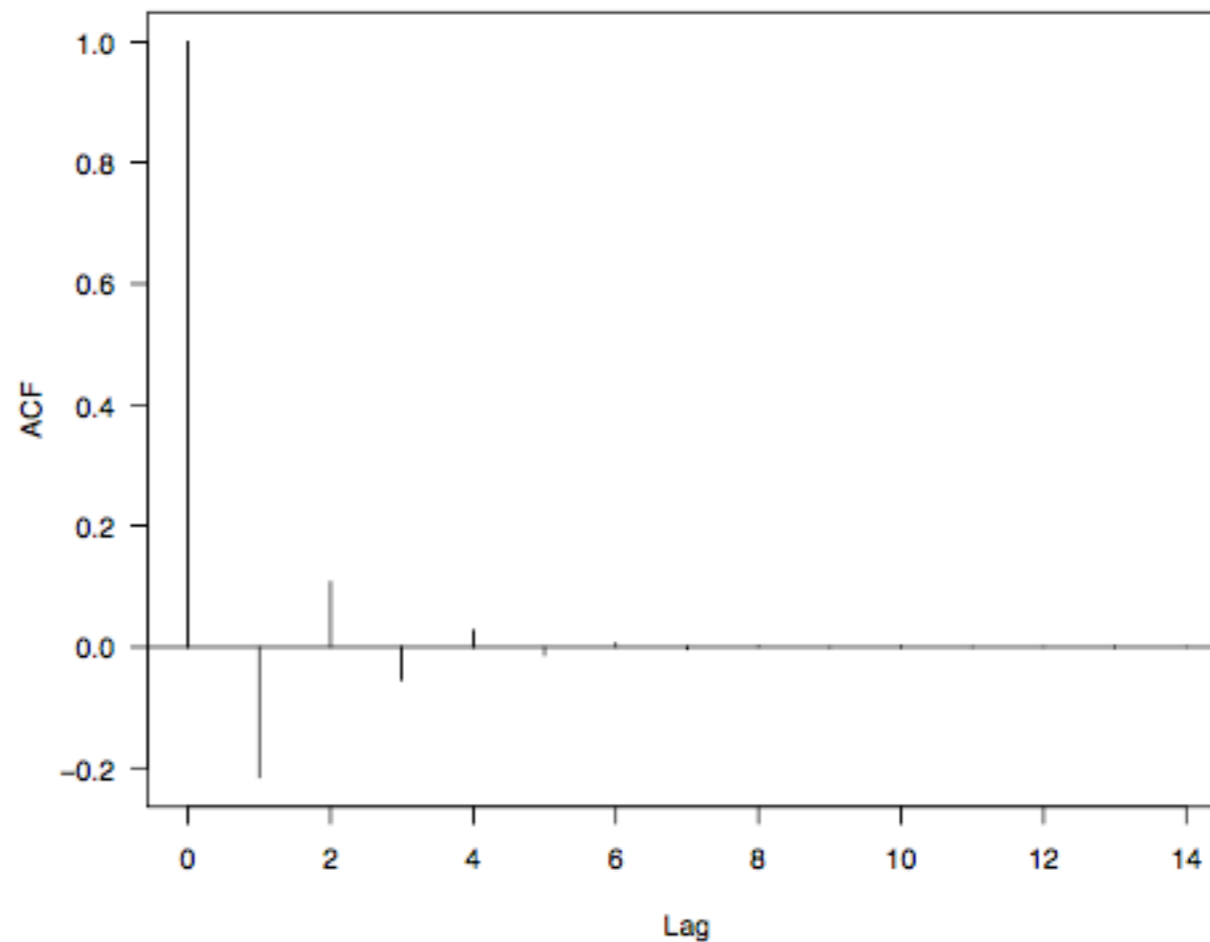
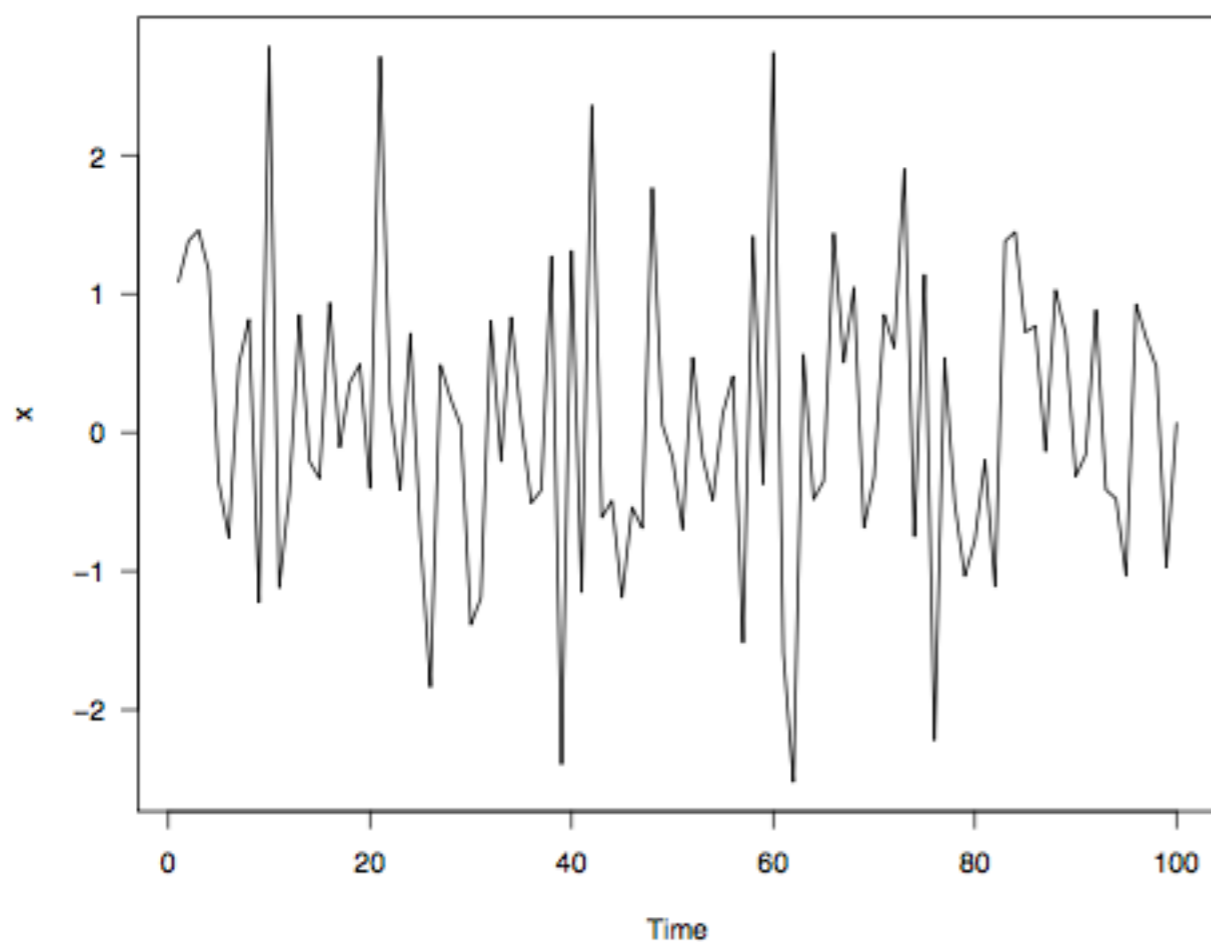
$$c(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1} \sigma_\epsilon^2, \quad v \geq 1$$

$$r(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1}, \quad v \geq 1$$

# Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = -0.5Y_{k-1} + \epsilon_k + 0.3\epsilon_{k-1}$$



$$c(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1} \sigma_\epsilon^2, \quad v \geq 1$$

$$r(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1}, \quad v \geq 1$$

# Stacionární náhodná posloupnost

## Parciální autokorelační funkce (PACF)

$$a(u) = \rho(Y_k, Y_{k-u} \mid Y_{k-1}, \dots, Y_{k-u+1})$$

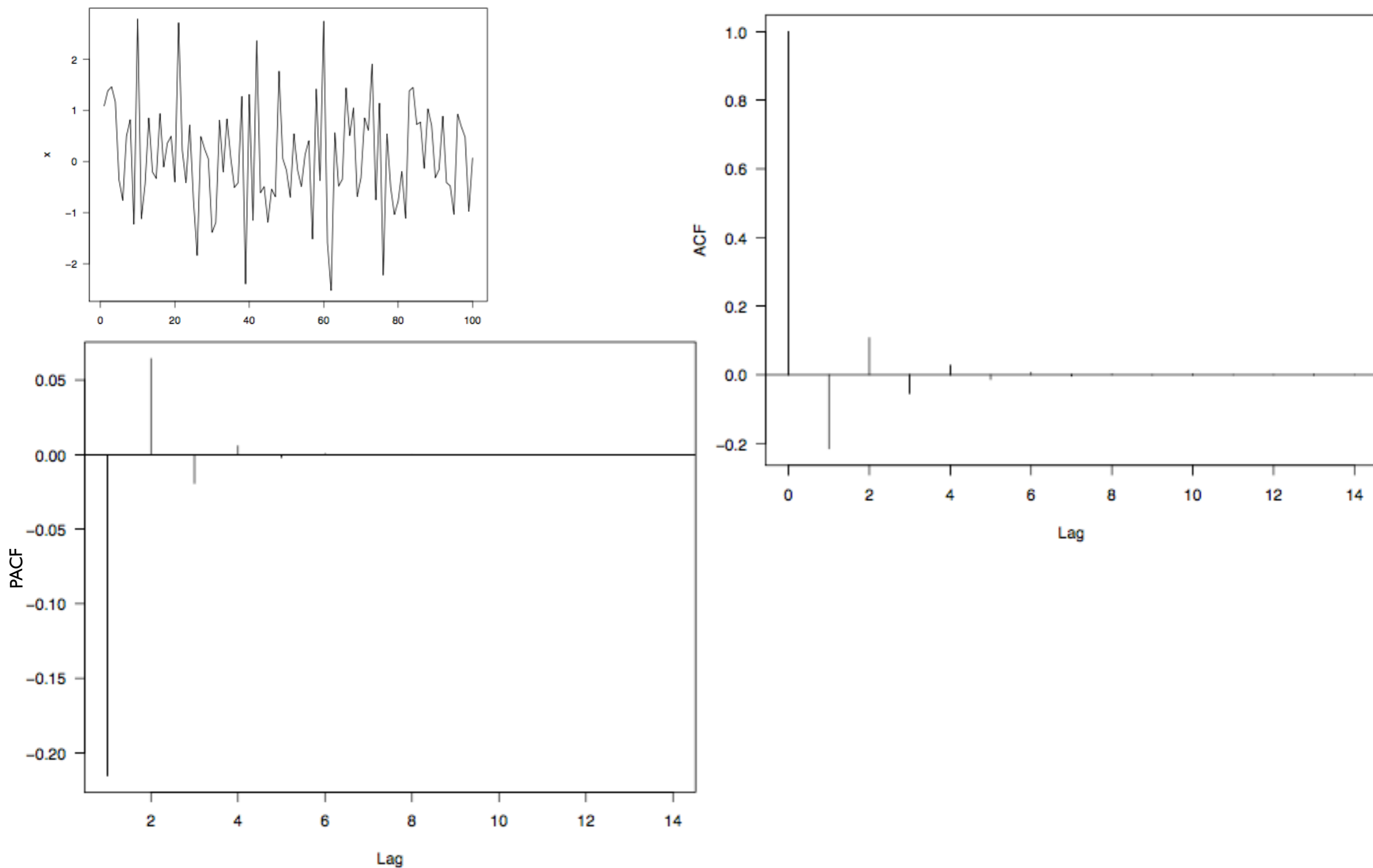
**AR(1):**  $r(u) = \phi^u, u \geq 1, \quad a(1) = \phi, \quad a(u) = 0, u \geq 2.$

**MA(1):**  $r(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, r(u) = 0, u \geq 2, \quad a(u) = \frac{-\theta^u(1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(r+1)}}, u \geq 0.$

# Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = -0.5Y_{k-1} + \epsilon_k + 0.3\epsilon_{k-1}$$



# Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Regresní křivka (trend):

$$Y_k = \beta_0 + \epsilon_k$$

$$Y_k = \beta_0 + \beta_1 k + \epsilon_k$$

$$Y_k = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \epsilon_k$$

$$Y_k = \beta_0 \cdot \beta^k + \epsilon_k$$

**Příklad** - lineární trend:

$$f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$$

parametry  $\beta_0, \beta_1$  odhadneme metodou nejmenších čtverců

- minimalizujeme funkci kvadratických odchylek členů posloupnosti a hodnot funkce trendu v nějakém okně  $k=1, \dots, n$  ve tvaru

$$g(k; \beta_0, \beta_1) = \sum_{k=1}^n (Y_k - f(k; \beta_0, \beta_1))^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(k; \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = 0 & \quad \beta_0 n + \beta_1 \sum_{k=1}^n t_k = \sum_{k=1}^n y_k \\ \frac{\partial g(k; \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = 0 & \quad \beta_0 \sum_{k=1}^n t_k + \beta_1 \sum_{k=1}^n t_k^2 = \sum_{k=1}^n t_k y_k \end{aligned}$$

Odhady parametrů: 
$$b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n \bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

# Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

**Příklad** - lineární trend:

$$f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$$

Odhady parametrů: 
$$b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

má-li  $\epsilon_k$  normální rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ , potom můžeme vyhodnotit i **spolehlivost takového odhadu**:

- odhad rozptylu  $\sigma^2$ : 
$$s^2 = \frac{1}{n-2} \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 - b_0 \sum_{k=1}^n y_k - b_1 \sum_{k=1}^n t_k y_k \right)$$

- odhad rozptylu  $b_0$ : 
$$S_0^2 = \frac{s^2 \sum_{k=1}^n t_k^2}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}$$

- odhad rozptylu  $b_1$ : 
$$S_1^2 = \frac{s^2}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}$$

a tedy **100(1- $\alpha$ )%-interval spolehlivosti** pro koeficienty  $\beta_0$  a  $\beta_1$  lze vyjádřit jako

$$b_i - S_i t_{1-\alpha/2}(n-2) \leq \beta_i \leq b_i + S_i t_{1-\alpha/2}(n-2), \quad i = 0, 1$$

# Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

**Příklad** - lineární trend:

$$f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$$

Odhady parametrů: 
$$b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n \bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

má-li  $\epsilon_k$  normální rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ , potom můžeme provést **predikci pro nějakou budoucí hodnotu  $T$** :

100(1- $\alpha$ )%-interval spolehlivosti pro predikci má potom tvar

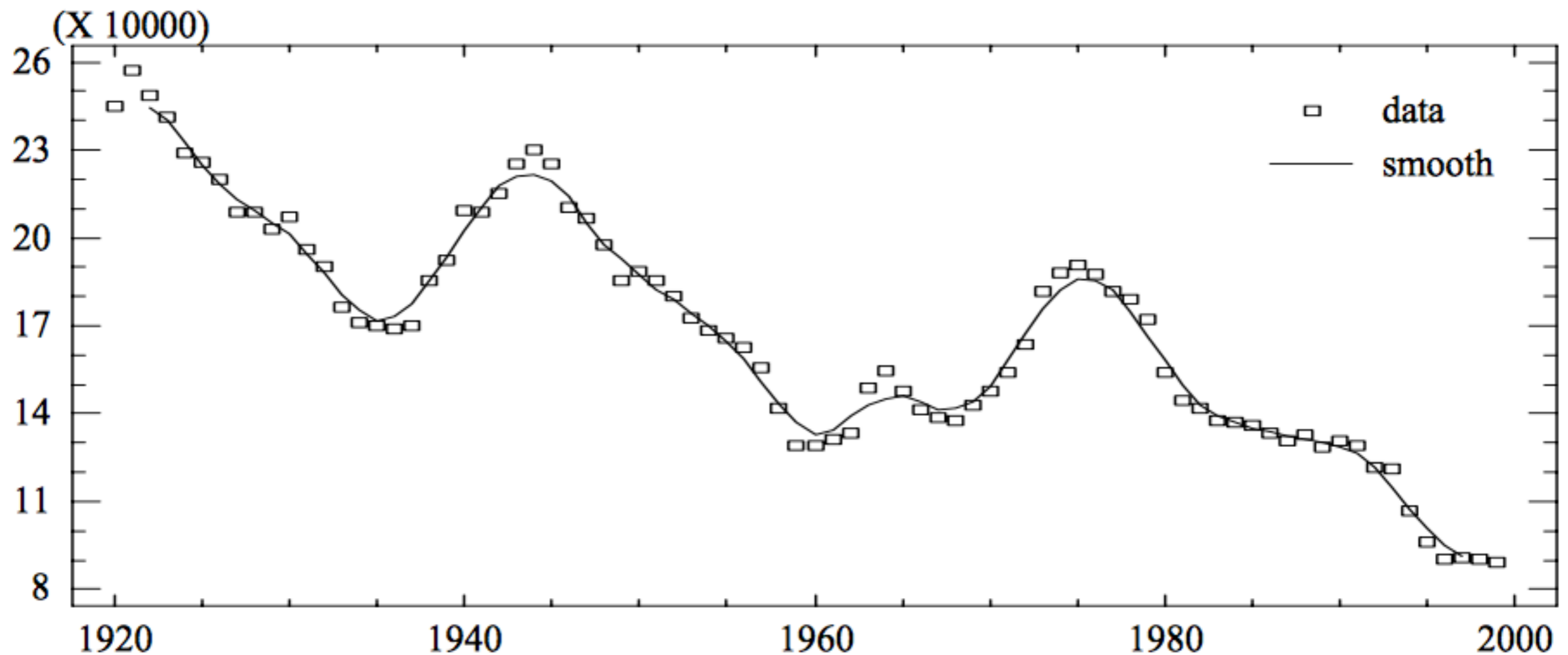
$$\tilde{y}_T - t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot F_T \leq Y_T \leq \tilde{y}_T + t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot F_T$$

kde 
$$F_T = s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(T - \bar{t})^2}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n \bar{t}^2}}$$

# Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry:

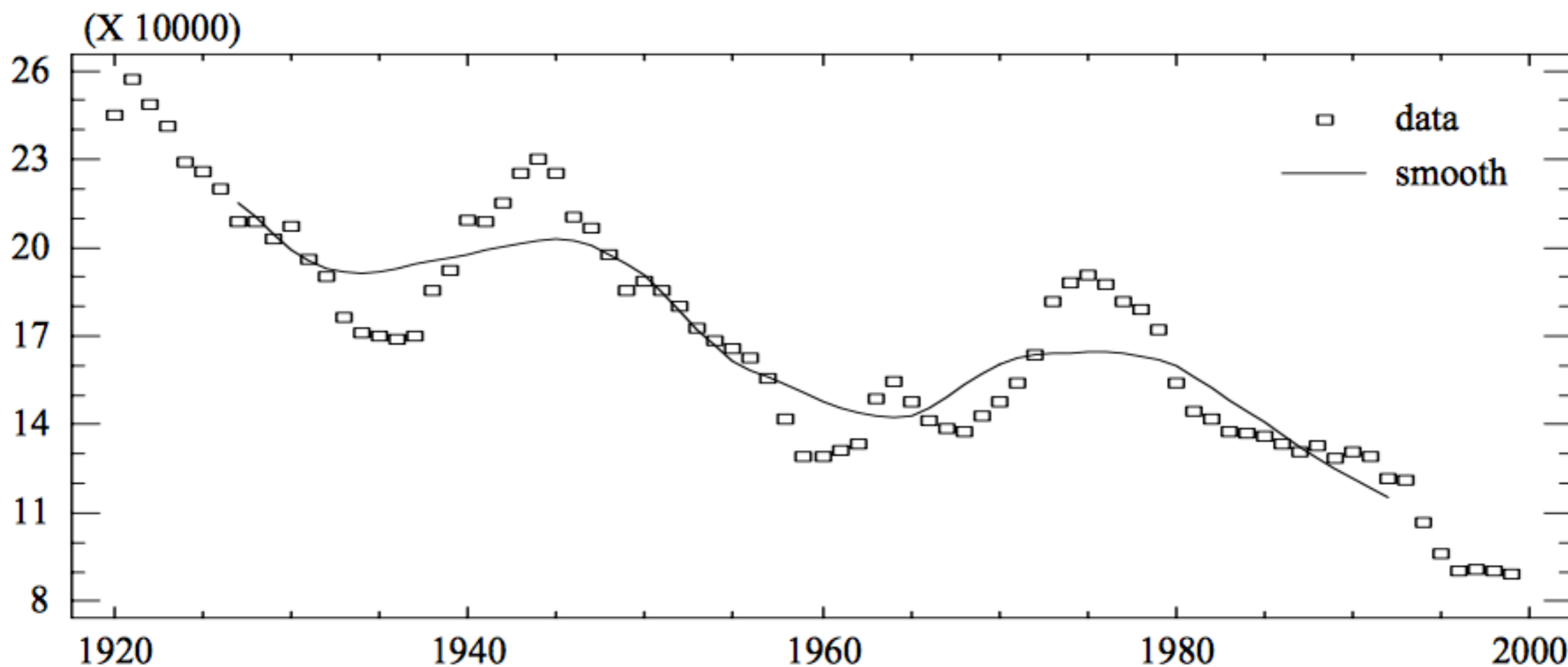
$$y_k^* = \frac{1}{m + n + 1} \sum_{i=-m}^n y_{k+i}$$



klouzavé průměry délky 5 ( $m=2, n=2$ )

# Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry: 
$$y_k^* = \frac{1}{m + n + 1} \sum_{i=-m}^n y_{k+i}$$



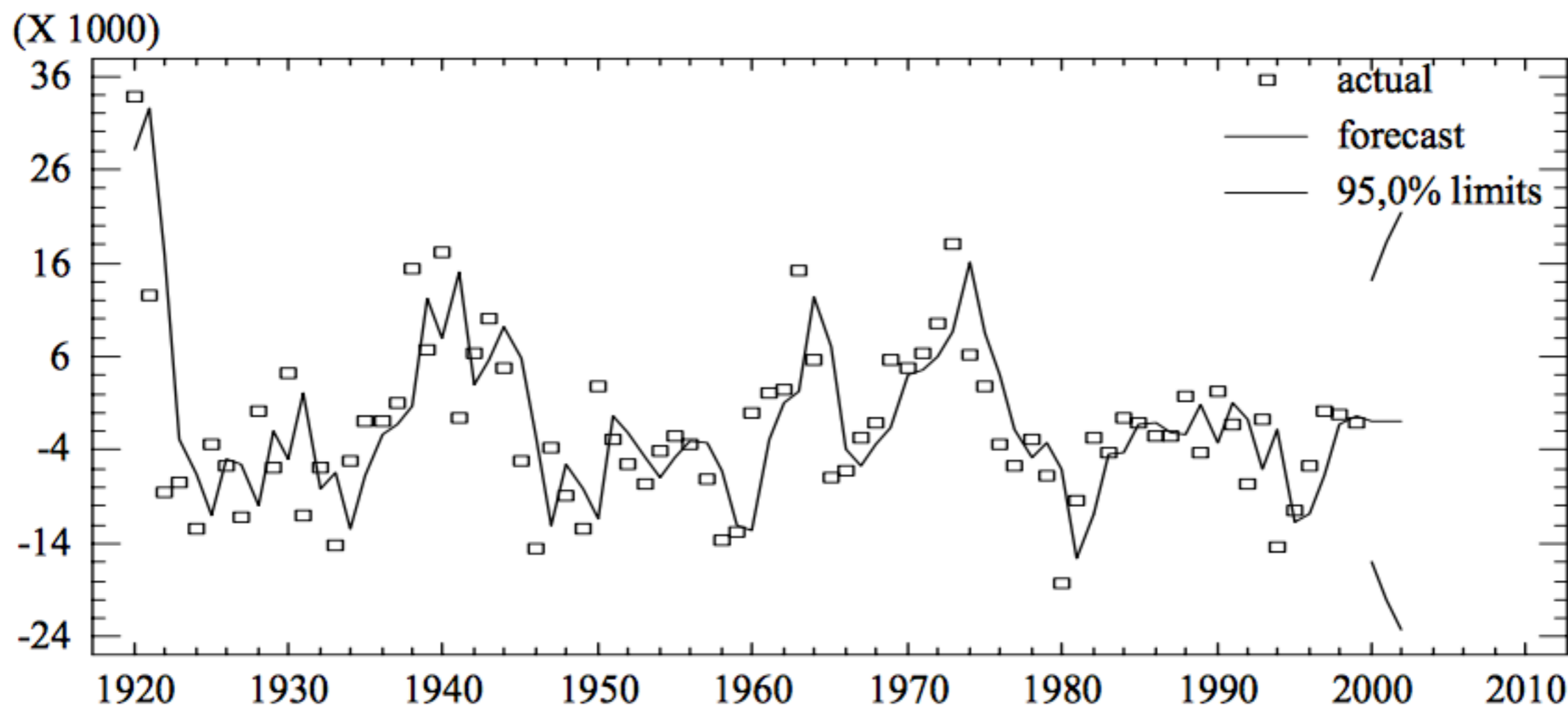
klouzavé průměry délky 15 ( $m=7, n=7$ )

# Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry: 
$$y_k^* = \frac{1}{m + n + 1} \sum_{i=-m}^n y_{k+i}$$

Klouzavé mediány: 
$$y_k^* = \text{med}(y_{k-m}, \dots, y_k, \dots, y_{k+n})$$

Exponenciální vyhlazování: 
$$y_k^* = (1 - \lambda)y_{k-1}^* + \lambda y_k$$



# Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

trendová složka

sezónní složka

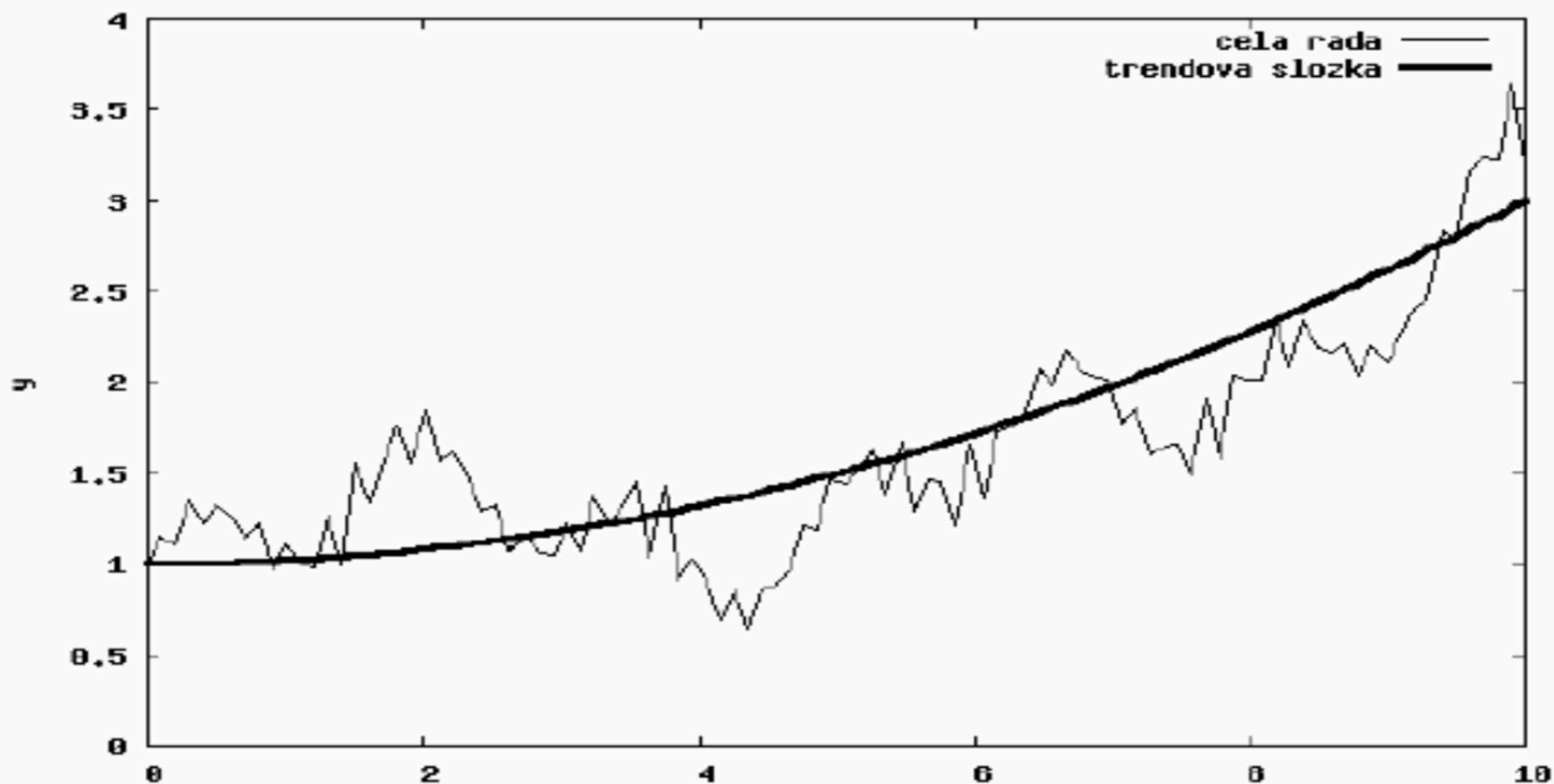
cyklická složka

náhodná složka

# Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

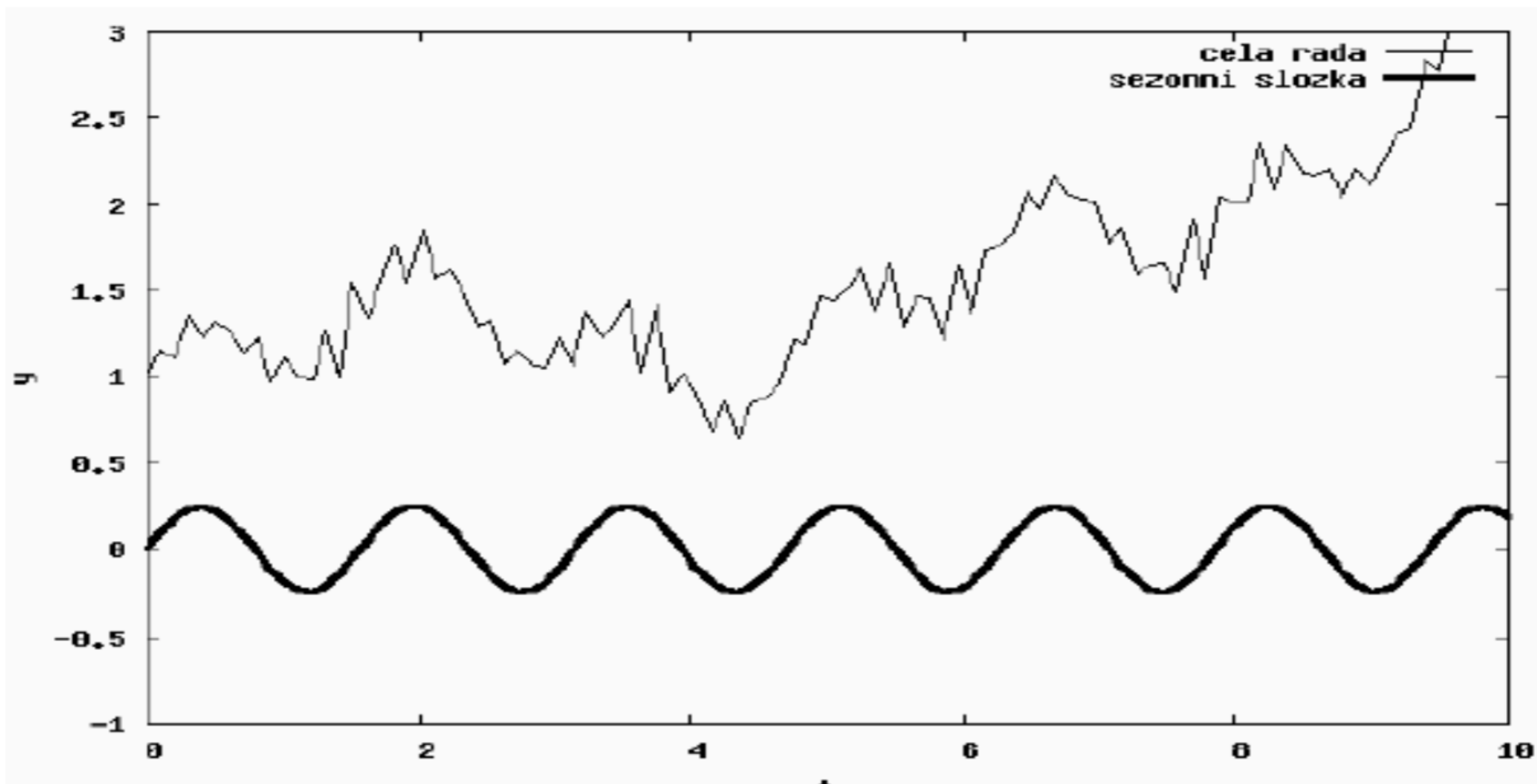
trendová složka



# Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

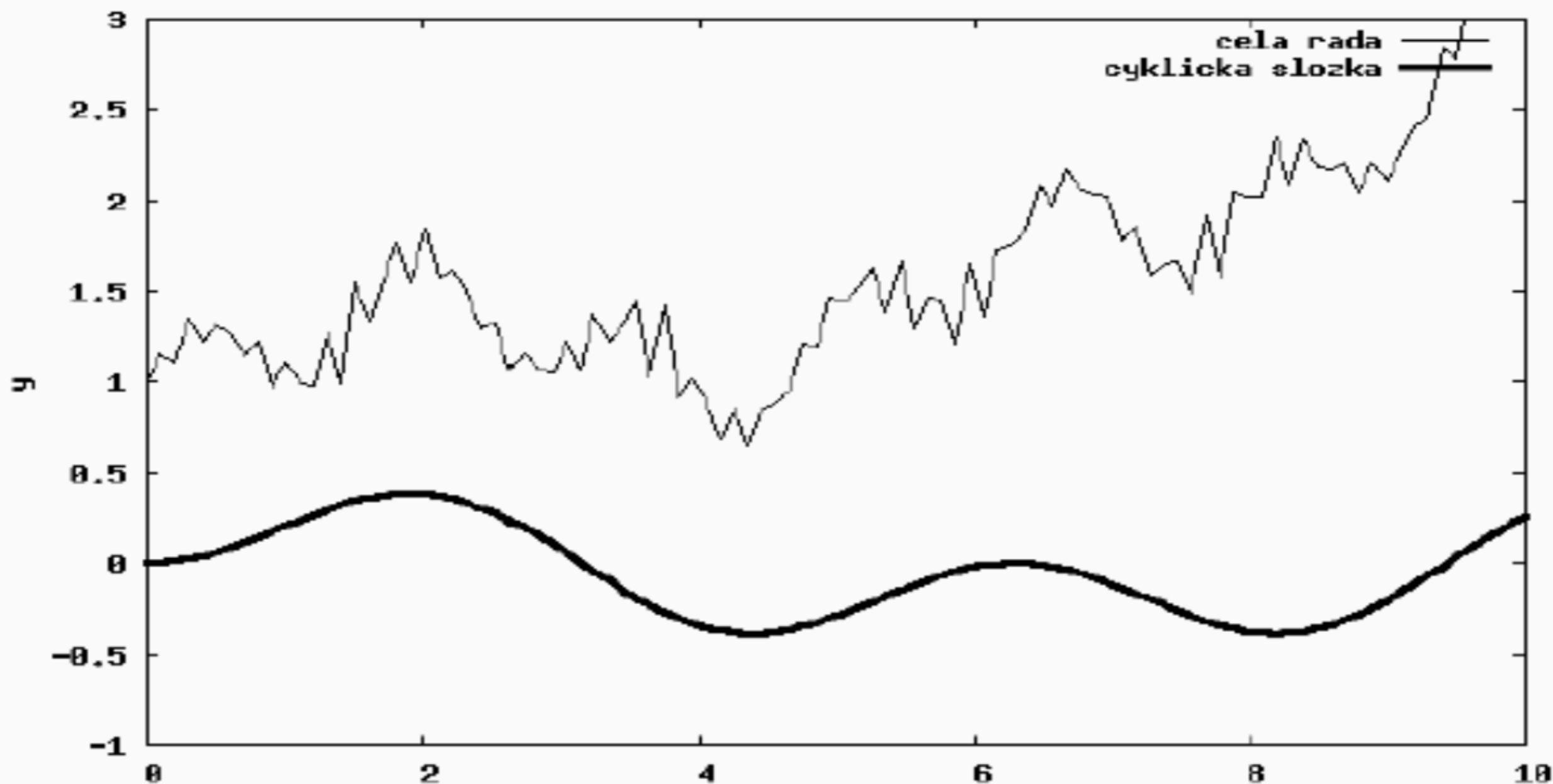
sezónní složka



# Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

cyklická složka

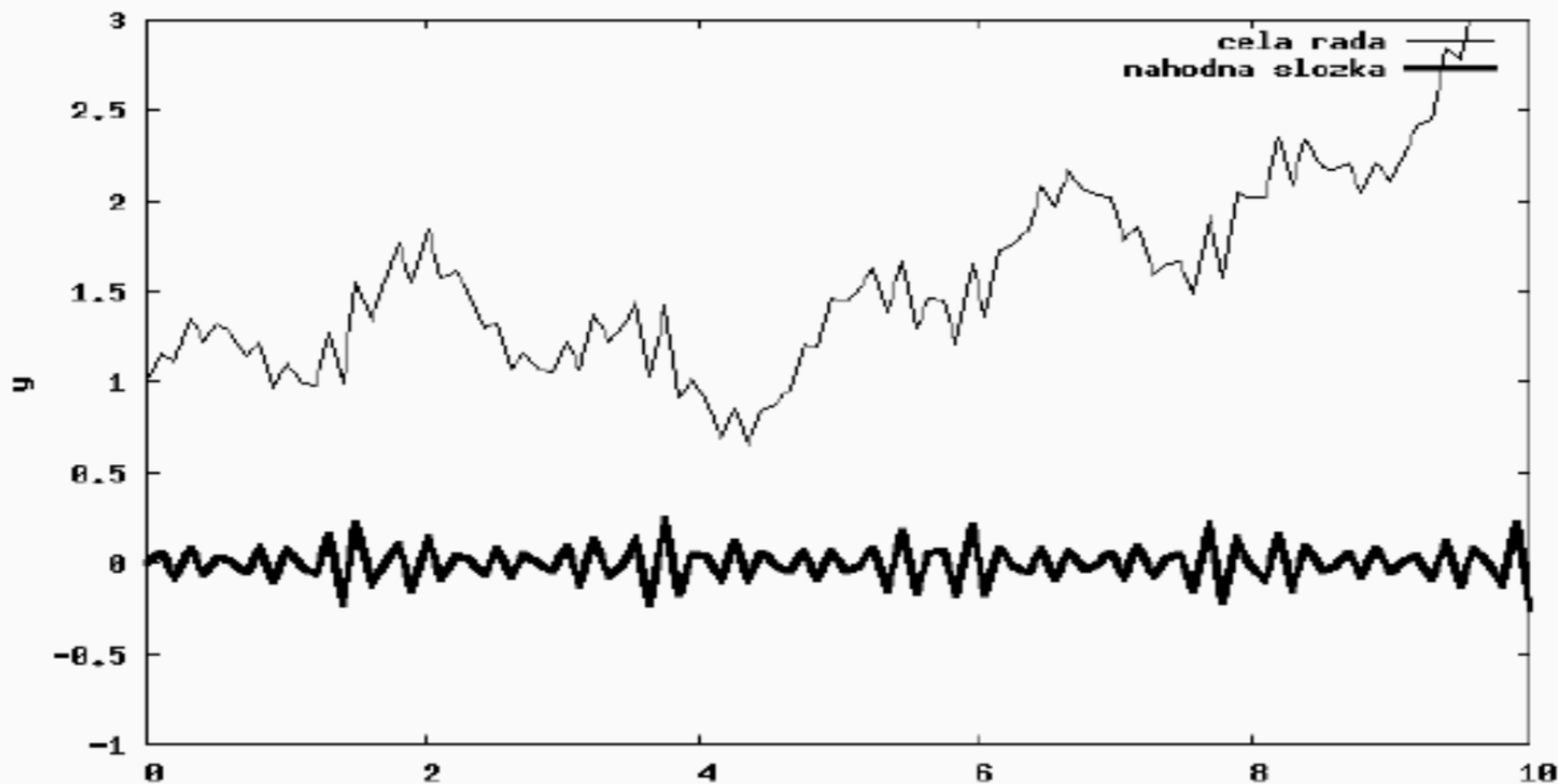


# Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

Očištěná řada

náhodná složka



# Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

