

Pravděpodobnostní metody ve strojírenství

G.3 - Stacionární náhodné posloupnosti



G.3 - Stacionární náhodné posloupnosti

Klíčové pojmy: • autokorelační funkce

Klíčové vztahy:

- různé druhy konvergence posloupnosti náhodných veličin (skoro jistě, v pravděpodobnosti, v distribuci)
- Slabý a silný zákon velkých čísel;
- Čebyševova nerovnost;
- Centrální limitní věta;
- stacionarita procesu (slabá, silná);
- modely AR(k) a MA(n);
- Vyhlazování časové řady, dekompozice;

Náhodná posloupnost

Uvažujme posloupnost náhodných veličin X_1, \dots, X_n, \dots

$$X : \Omega \times N \longrightarrow R$$

System konečněrozměrných distribučních funkcí:

$$F(x_1, \dots, x_n; i_1, \dots, i_n) = P(X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_n} \leq x_n)$$

symetrie: $F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; i_1, \dots, i_n) = F(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}; j_1, \dots, j_n)$
pro libovolnou permutaci (j_1, \dots, j_n) čísel (i_1, \dots, i_n)
(nezáleží na pořadí)

konzistence:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n; i_1, \dots, i_n) = F(x_1, \dots, x_{n-1}; i_1, \dots, i_{n-1})$$

Náhodná posloupnost

Charakteristiky posloupnosti náhodných veličin

funkce střední hodnoty: $\mu_i = E(X_i), \quad i = 1, \dots$

autokovarianční funkce: $c(i, j) = \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$

autokorelační funkce: $r(i, j) = \rho(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var} X_i \cdot \text{Var} X_j}}$

Pokud je 1) $\mu_i = \mu, \quad i = 1, 2, \dots$ konstantní střední hodnota

2) $c(i, j) = c(j - i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots$

kovarianční funkce závisí jen na rozdílu indexů

potom řekneme, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **kovariančně (slabě) stacionární**.

Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **silně stacionární**, pokud pro libovolnou n -tici i_1, \dots, i_n a libovolné $\delta \in N$ platí

$$F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; i_1, \dots, i_n) = F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; i_1 + \delta, \dots, i_n + \delta)$$

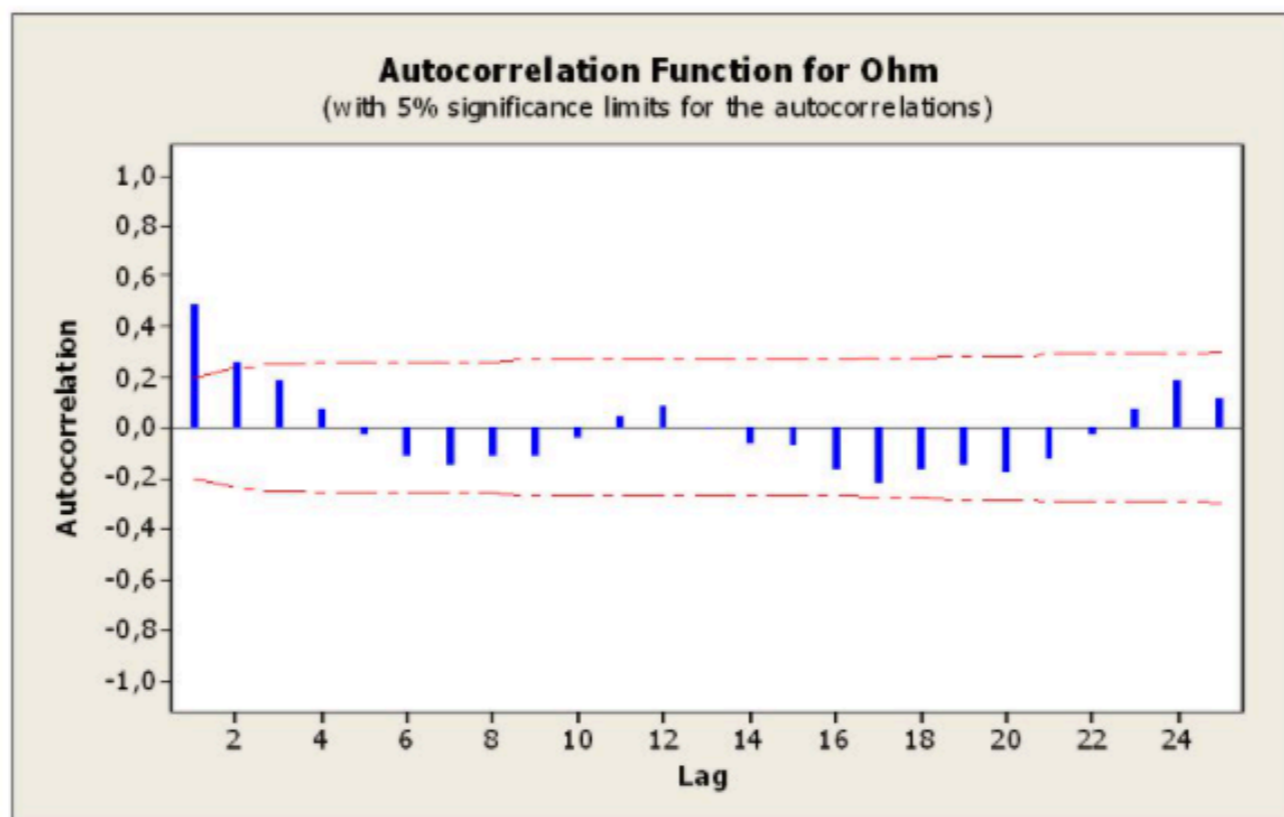
Stacionární náhodná posloupnost

autokovarianční funkce: $c(k) = \text{Cov}(X_1, X_{k+1}) = \text{Cov}(X_i, X_{i+k+1})$
 $= E(X_1 - \mu)(X_{k+1} - \mu) = E(X_1, X_{k+1}) - \mu^2$

zpravidla pracujeme s tzv. “centrovaným” procesem: $Y_i = X_i - \mu$

a pro tento proces je $c(k) = E(Y_i Y_j)$

autokorelační funkce: $r(k) = \frac{c(k)}{c(0)}$ (vždy je $r(0) = 1$)



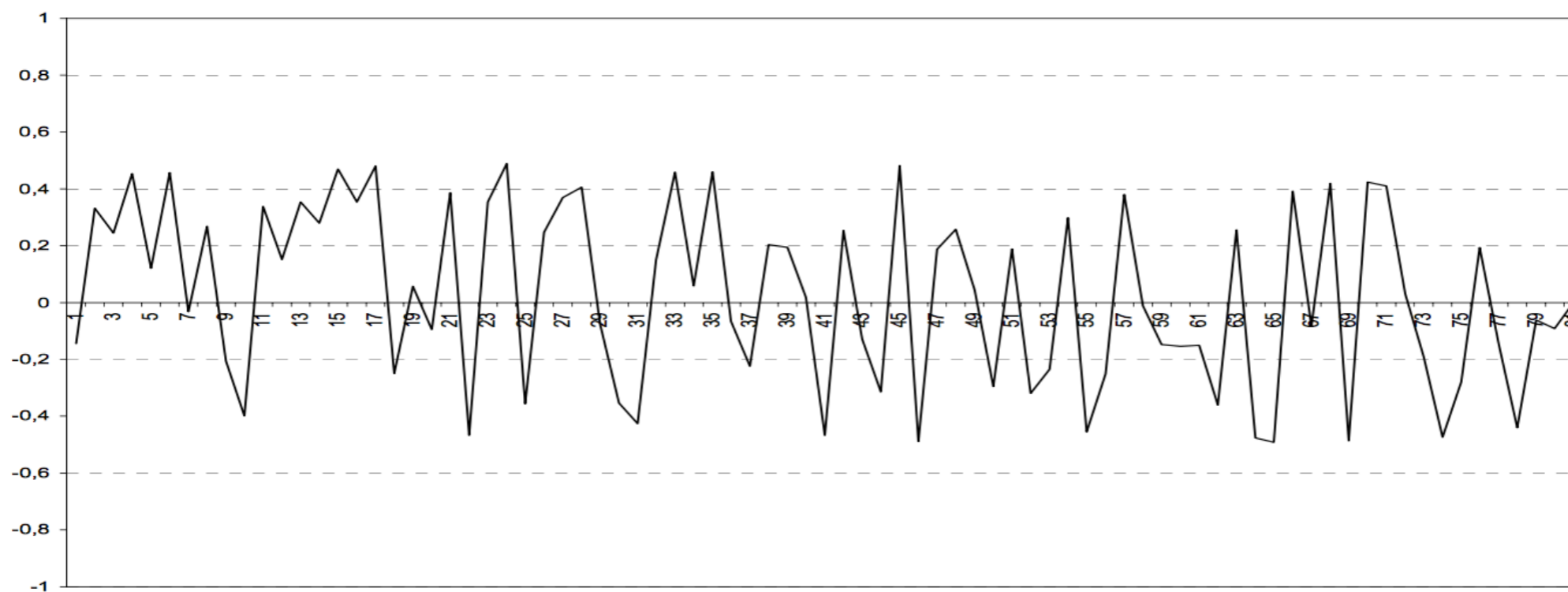
Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost nekorelovaných náhodných veličin $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$

autokorelační funkce: $r(0) = 1, \quad r(k) = 0, \quad k = 1, \dots$

Posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem
= bílý šum

Posloupnost nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením $N(0, \sigma^2)$ = Gaussovský bílý šum



Stacionární náhodná posloupnost

Autoregresní posloupnost řádu p AR(p)

$$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \dots + \phi_p Y_{k-p} + \epsilon_k$$

kde ϕ_i , $i = 1, \dots, p$ jsou konstanty a ϵ_k je bílý šum.

AR(1): $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$

$$\text{Var}(Y_k) = \phi^2 \text{Var}(Y_{k-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

je-li stacionární, potom musí být $\text{Var}(Y_k) = \text{Var}(Y_{k-1}) = \sigma_Y^2$

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2} \Rightarrow 1 > \phi^2 \Rightarrow |\phi| < 1$$

autokovarianční funkce: $E(Y_k, Y_{k-u}) = \phi E(Y_{k-1}, Y_{k-u}) + E(\epsilon_k Y_{k-u})$

$$c(u) = \phi c(u - 1), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \phi^u c(0), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \frac{\phi^u \sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2}$$

Stacionární náhodná posloupnost

$$\text{AR(1): } Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$$

$$E(Y_k) = 0, \quad \text{Var}(Y_k) = \phi^2 \text{Var}(Y_{k-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

je-li stacionární, potom musí být $\text{Var}(Y_k) = \text{Var}(Y_{k-1}) = \sigma_Y^2$

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2} \Rightarrow 1 > \phi^2 \Rightarrow |\phi| < 1$$

autokovarianční funkce: $E(Y_k, Y_{k-u}) = \phi E(Y_{k-1}, Y_{k-u}) + E(\epsilon_k Y_{k-u})$

$$c(u) = \phi c(u-1), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \phi^u c(0), \quad u = 1, 2, \dots$$

$$c(u) = \frac{\phi^u \sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2}$$

autokorelační funkce:

$$r(u) = \phi^u, \quad u = 1, 2, \dots$$

Stacionární náhodná posloupnost

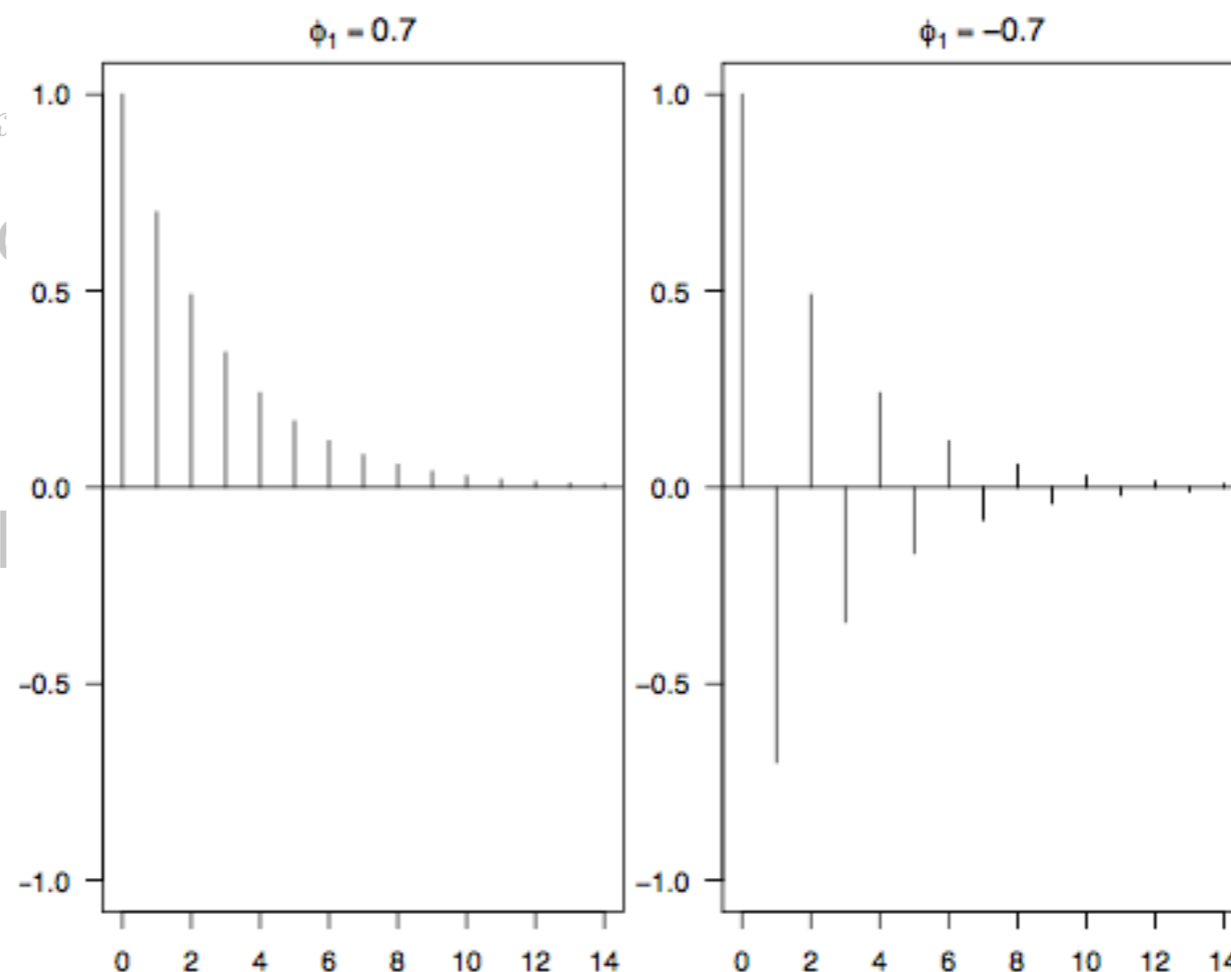
AR(1): $Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k$

$E(Y_k) = 0, \quad Var(Y_k)$

je-li stacionární, potom

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\epsilon^2 \Rightarrow$$

autokovarianční funkce



$= \sigma_Y^2$

$- E(\epsilon_k Y_{k-u})$

, 2, ...

...

autokorelační funkce:

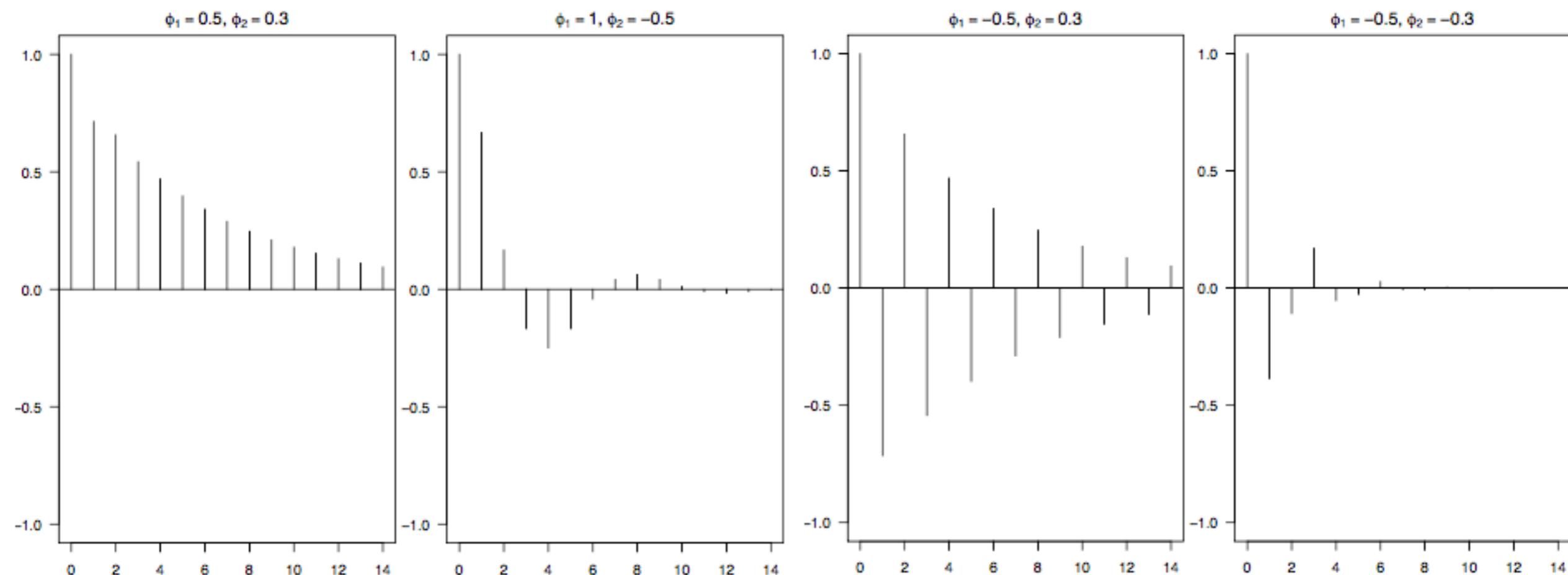
$$r(u) = \phi^u, \quad u = 1, 2, \dots$$

Stacionární náhodná posloupnost

AR(2): $Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \epsilon_k$

autokovarianční funkce: $c(u) = \alpha_1 \gamma_1^u + \alpha_2 \gamma_2^u$

kde γ_1, γ_2 jsou kořeny polynomu $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$

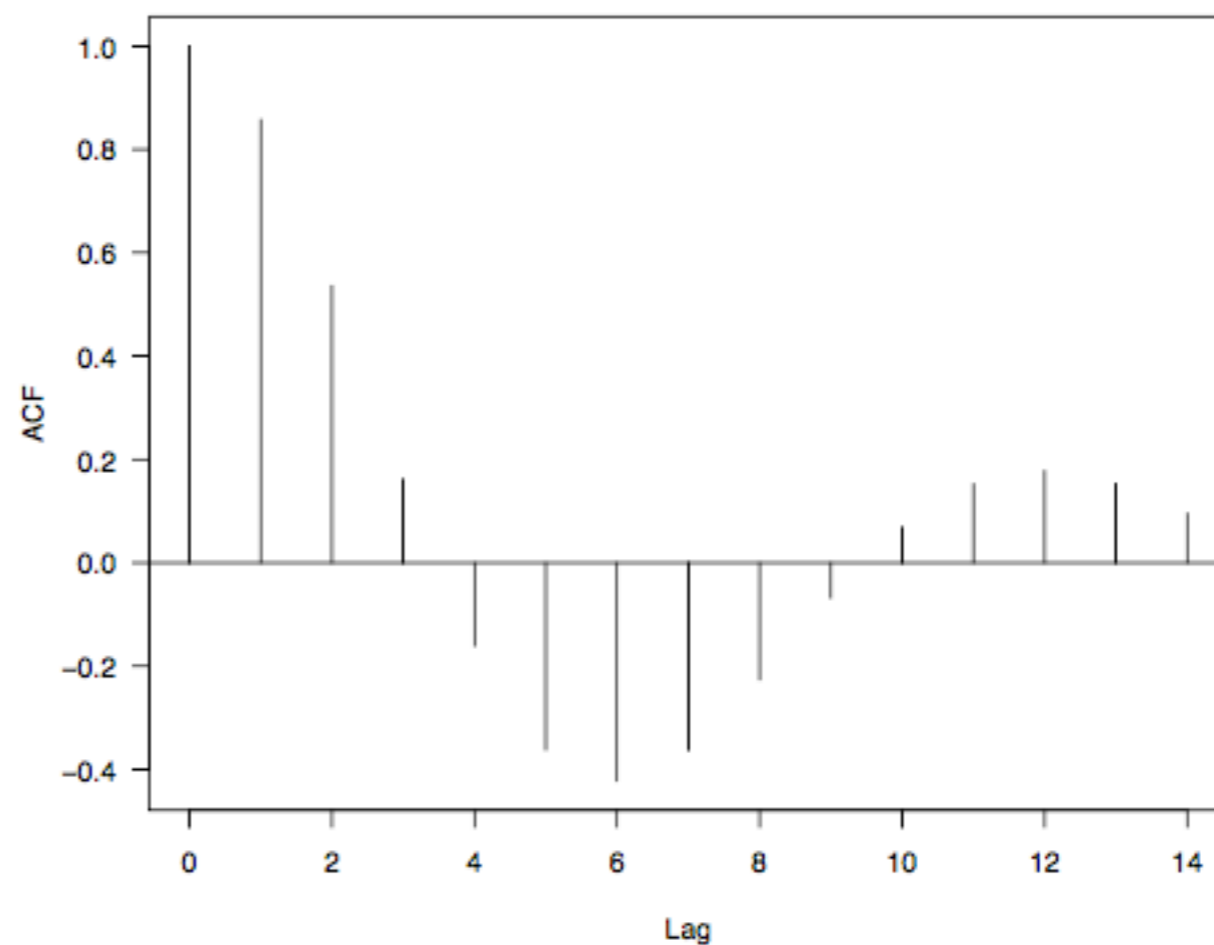
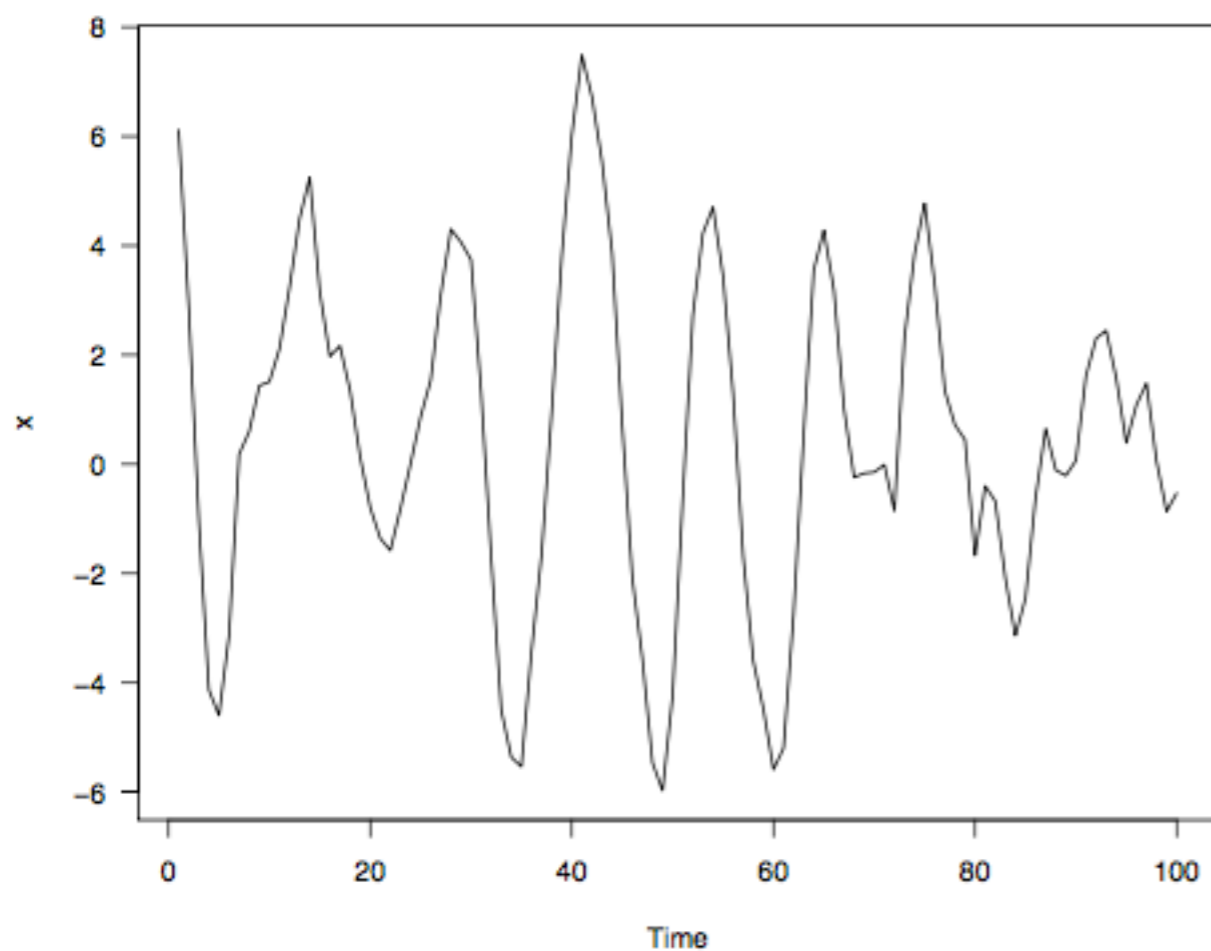


Stacionární náhodná posloupnost

AR(2): $Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \epsilon_k$

autokovarianční funkce: $c(u) = \alpha_1 \gamma_1^u + \alpha_2 \gamma_2^u$

kde γ_1, γ_2 jsou kořeny polynomu $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$



$$Y_k = 1.5Y_{k-1} - 0.75Y_{k-2} + \epsilon_k$$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost klouzavých součtů řádu q MA(q)

$$Y_k = \epsilon_k + \theta_1 \epsilon_{k-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{k-q}$$

kde θ_i , $i = 1, \dots, q$ jsou konstanty a ϵ_k je bílý šum.

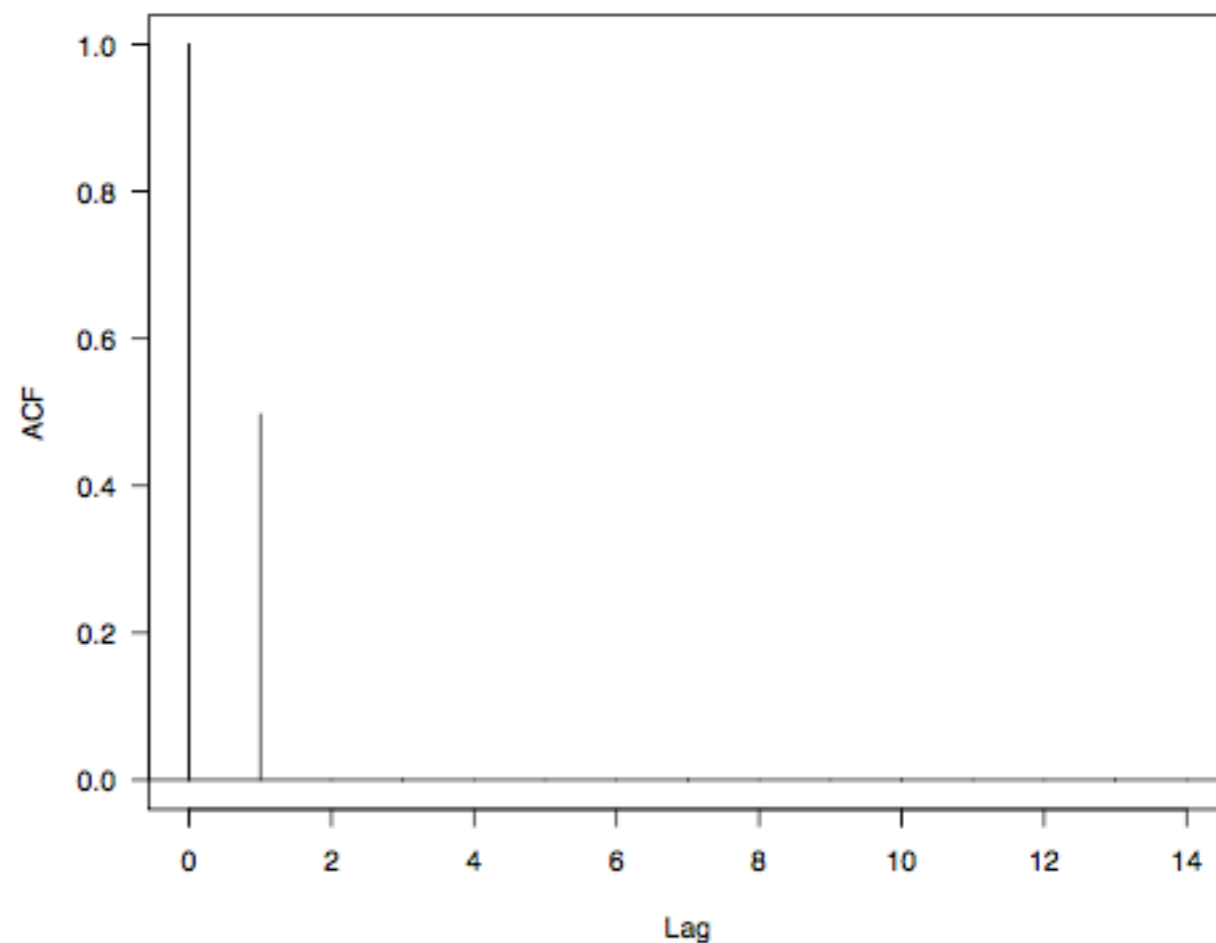
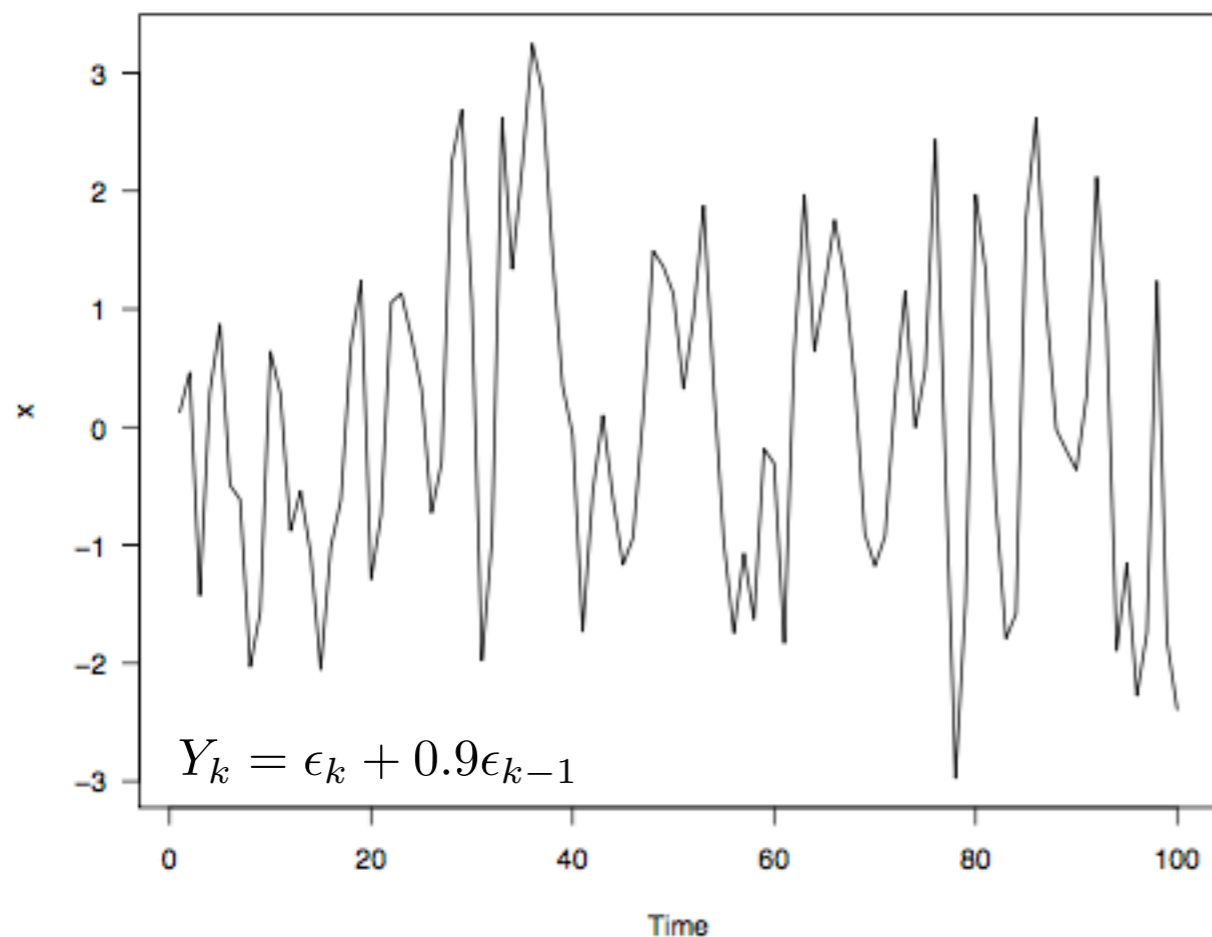
autokovarianční funkce:

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 & u = 0, \\ (\theta_u + \theta_1\theta_{u+1} + \cdots + \theta_{q-u}\theta_q)\sigma^2 & u = 1, \dots, q \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

MA(1): $Y_k = \epsilon_k + \theta\epsilon_{k-1}$

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & u = 0, \\ \theta\sigma^2 & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad r(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{1+\theta^2} & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stacionární náhodná posloupnost



MA(1): $Y_k = \epsilon_k + \theta\epsilon_{k-1}$

$$c(u) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & u = 0, \\ \theta\sigma^2 & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$r(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{1 + \theta^2} & u = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = \phi_1 Y_{k-1} + \cdots + \phi_p Y_{k-p} + \epsilon_k + \theta_1 \epsilon_{k-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{k-q}$$

$$\text{ARMA}(1,1): Y_k = \phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1}$$

autokovarianční funkce:

$$E(\epsilon_k Y_k) = E(\epsilon_k (\phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1})) = \sigma_\epsilon^2$$

$$E(\epsilon_{k-1} Y_k) = E(\epsilon_{k-1} (\phi Y_{k-1} + \epsilon_k + \theta \epsilon_{k-1})) = (\phi + \theta) \sigma_\epsilon^2$$

·
·
·

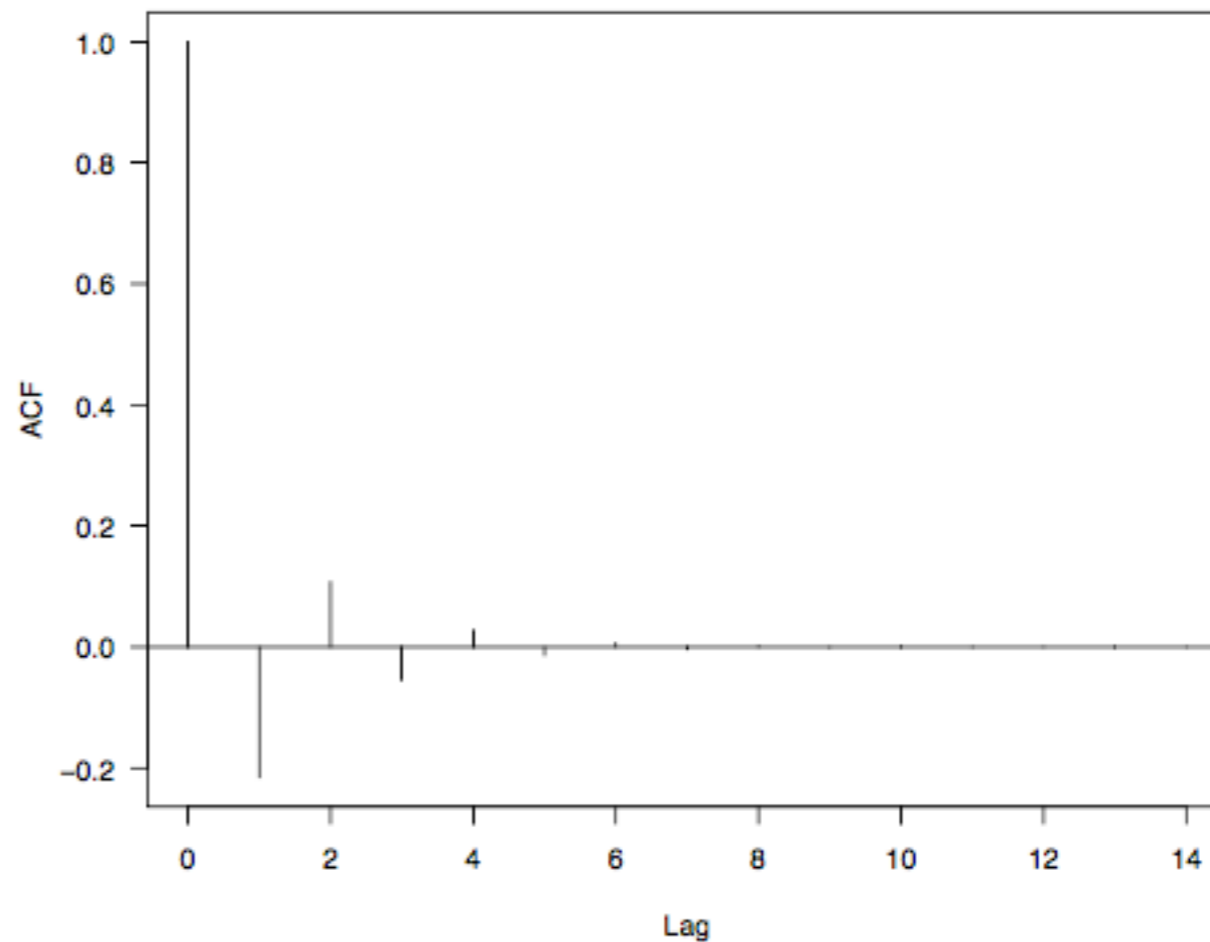
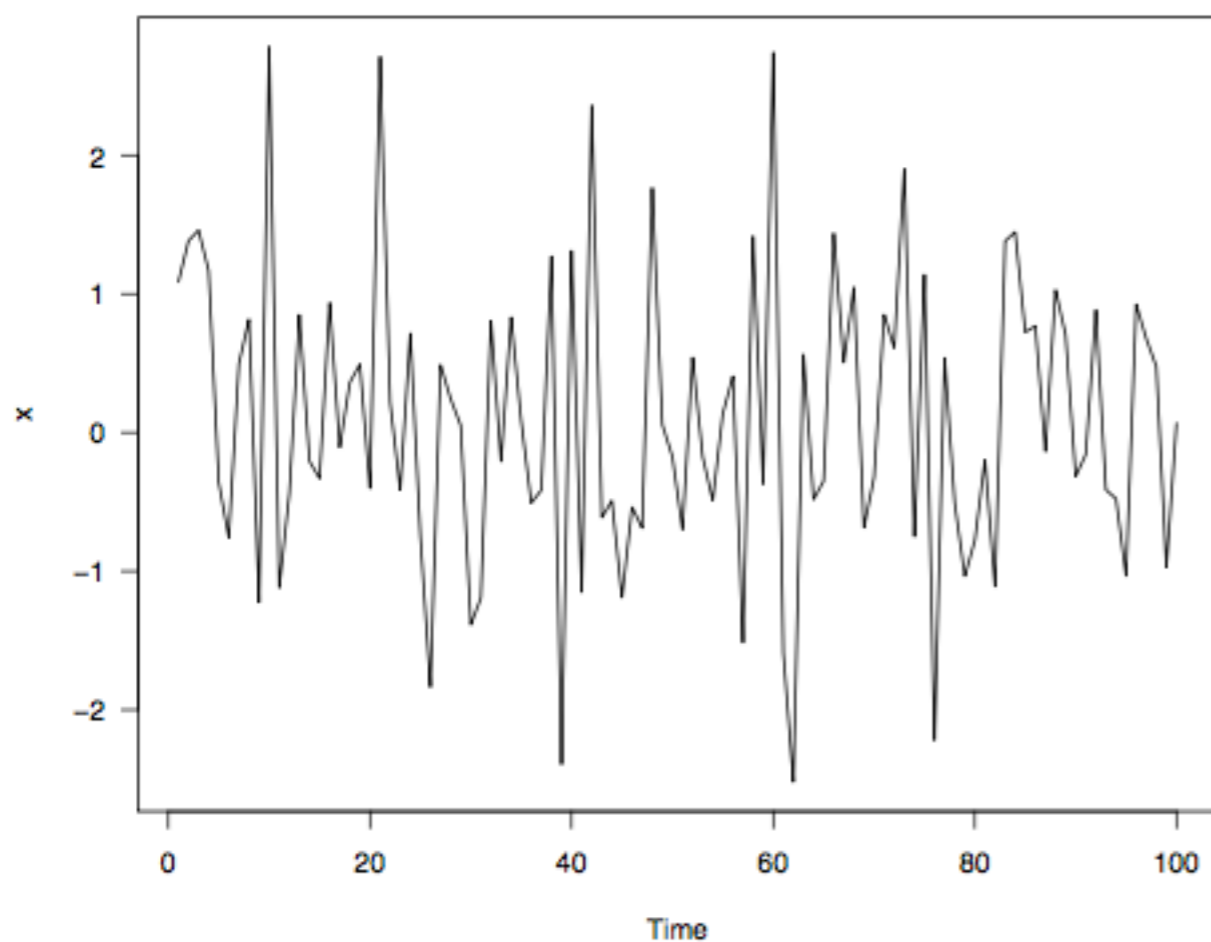
$$c(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1} \sigma_\epsilon^2, \quad v \geq 1$$

$$r(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1}, \quad v \geq 1$$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = -0.5Y_{k-1} + \epsilon_k + 0.3\epsilon_{k-1}$$



$$c(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1} \sigma_\epsilon^2, \quad v \geq 1$$

$$r(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{u-1}, \quad v \geq 1$$

Stacionární náhodná posloupnost

Parciální autokorelační funkce (PACF)

$$a(u) = \rho(Y_k, Y_{k-u} \mid Y_{k-1}, \dots, Y_{k-u+1})$$

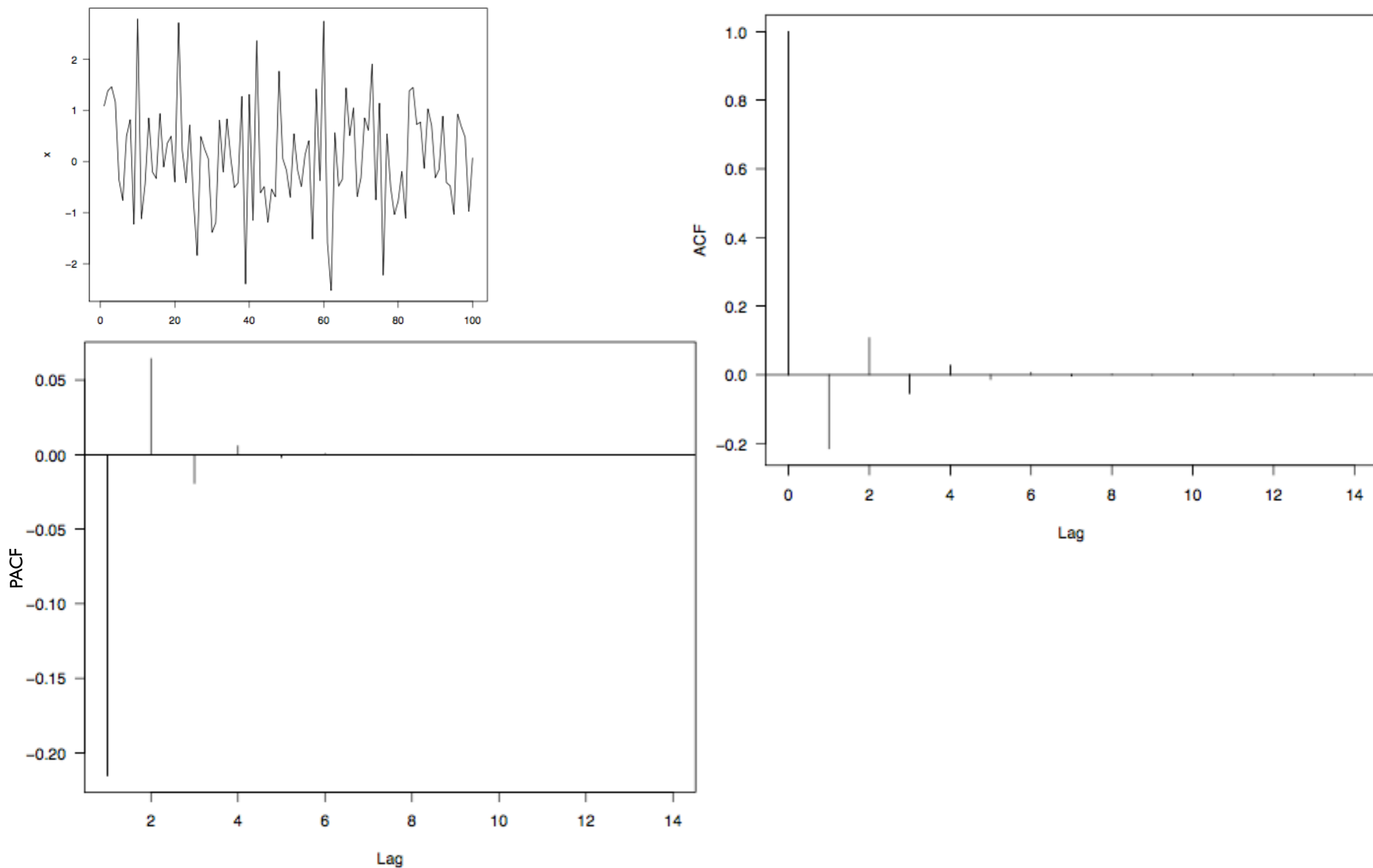
AR(1): $r(u) = \phi^u, u \geq 1, \quad a(1) = \phi, \quad a(u) = 0, u \geq 2.$

MA(1): $r(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, r(u) = 0, u \geq 2, \quad a(u) = \frac{-\theta^u(1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(r+1)}}, u \geq 0.$

Stacionární náhodná posloupnost

Posloupnost ARMA(p,q)

$$Y_k = -0.5Y_{k-1} + \epsilon_k + 0.3\epsilon_{k-1}$$



Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Regresní křivka (trend):

$$Y_k = \beta_0 + \epsilon_k$$

$$Y_k = \beta_0 + \beta_1 k + \epsilon_k$$

$$Y_k = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \epsilon_k$$

$$Y_k = \beta_0 \cdot \beta^k + \epsilon_k$$

Příklad - lineární trend:

$$f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$$

parametry β_0, β_1 odhadneme metodou nejmenších čtverců

- minimalizujeme funkci kvadratických odchylek členů posloupnosti a hodnot funkce trendu v nějakém okně $k=1, \dots, n$ ve tvaru

$$g(k; \beta_0, \beta_1) = \sum_{k=1}^n (Y_k - f(k; \beta_0, \beta_1))^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(k; \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = 0 & \quad \beta_0 n + \beta_1 \sum_{k=1}^n t_k = \sum_{k=1}^n y_k \\ \frac{\partial g(k; \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = 0 & \quad \beta_0 \sum_{k=1}^n t_k + \beta_1 \sum_{k=1}^n t_k^2 = \sum_{k=1}^n t_k y_k \end{aligned}$$

Odhady parametrů:
$$b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n \bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Příklad - lineární trend:

$$f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$$

Odhady parametrů:
$$b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

má-li ϵ_k normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$, potom můžeme vyhodnotit i **spolehlivost takového odhadu**:

- odhad rozptylu σ^2 :
$$s^2 = \frac{1}{n-2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 - b_0 \sum_{k=1}^n y_k - b_1 \sum_{k=1}^n t_k y_k \right)$$

- odhad rozptylu b_0 :
$$S_0^2 = \frac{s^2 \sum_{k=1}^n t_k^2}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}$$

- odhad rozptylu b_1 :
$$S_1^2 = \frac{s^2}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}$$

a tedy **100(1- α)%-interval spolehlivosti** pro koeficienty β_0 a β_1 lze vyjádřit jako

$$b_i - S_i t_{1-\alpha/2}(n-2) \leq \beta_i \leq b_i + S_i t_{1-\alpha/2}(n-2), \quad i = 0, 1$$

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Příklad - lineární trend:

$$f(k; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 k$$

Odhady parametrů:
$$b_1 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k y_k - \bar{t} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

má-li ϵ_k normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$, potom můžeme provést **predikci pro nějakou budoucí hodnotu T** :

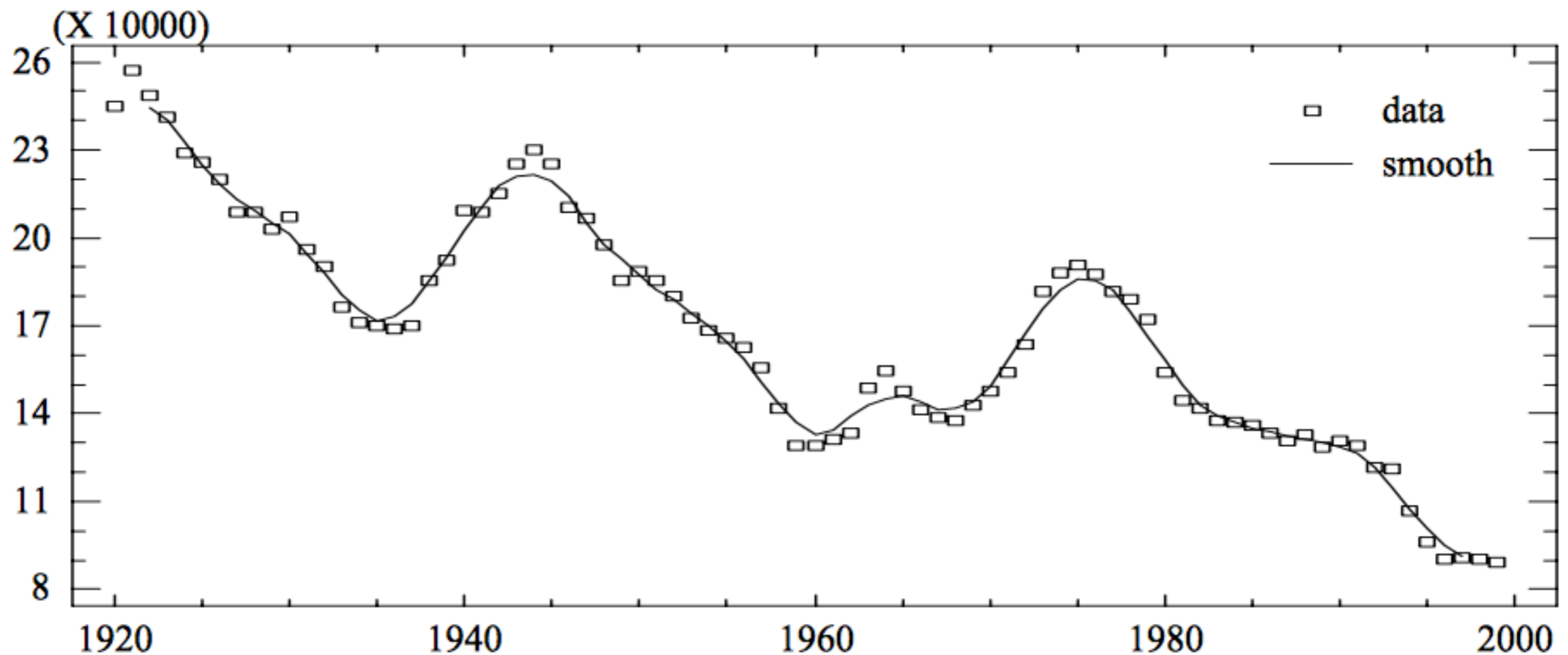
100(1- α)%-interval spolehlivosti pro predikci má potom tvar

$$\tilde{y}_T - t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot F_T \leq Y_T \leq \tilde{y}_T + t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot F_T$$

kde
$$F_T = s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(T - \bar{t})^2}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - n\bar{t}^2}}$$

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

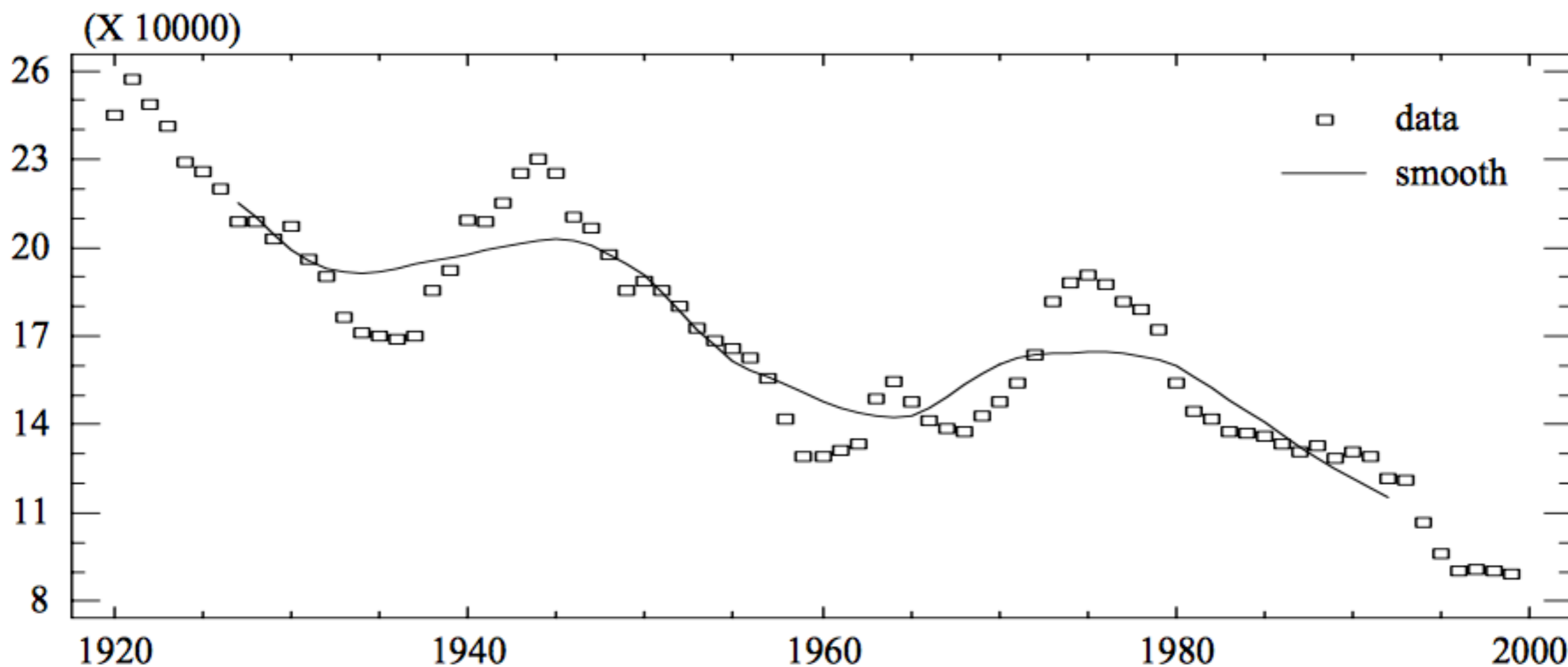
Klouzavé průměry:
$$y_k^* = \frac{1}{m + n + 1} \sum_{i=-m}^n y_{k+i}$$



klouzavé průměry délky 5 ($m=2, n=2$)

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry:
$$y_k^* = \frac{1}{m + n + 1} \sum_{i=-m}^n y_{k+i}$$



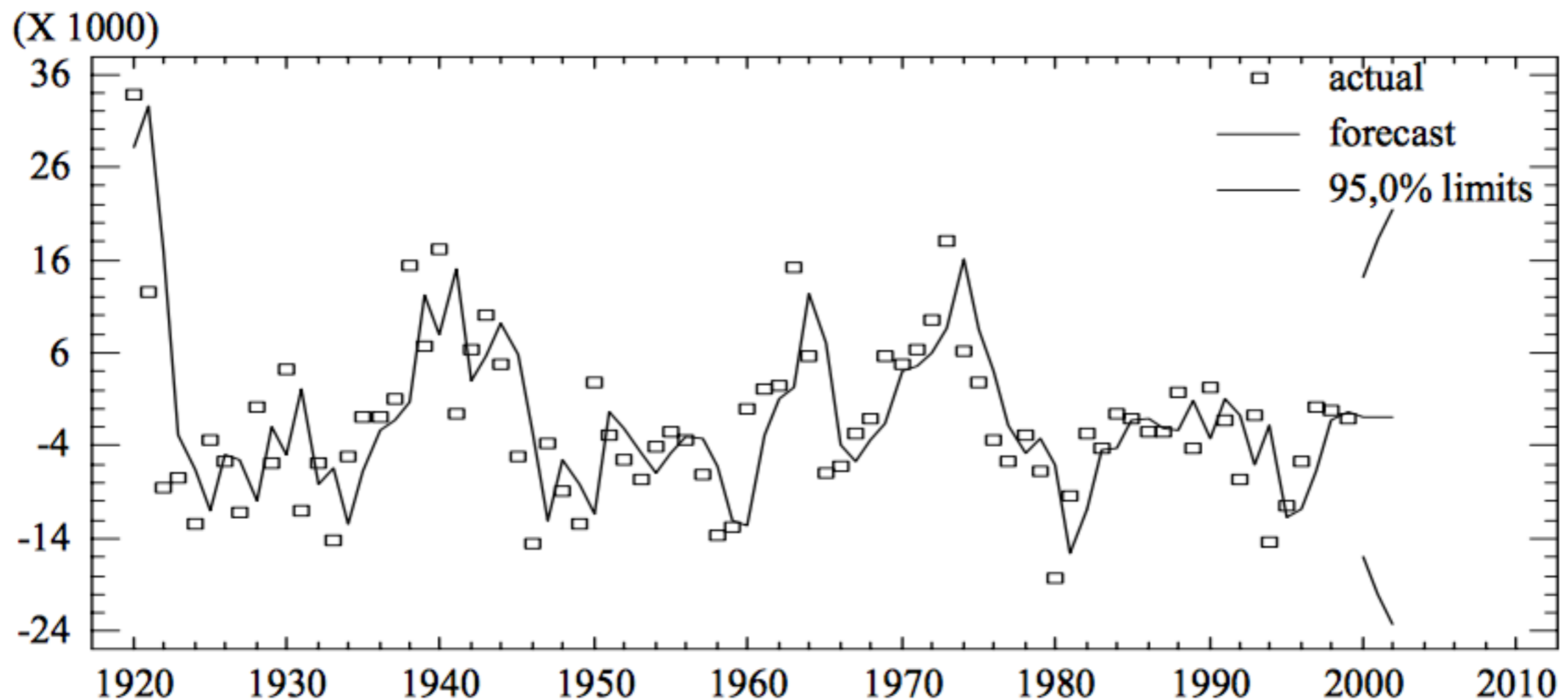
klouzavé průměry délky 15 ($m=7, n=7$)

Vyhlazování náhodné posloupnosti $Y_k = f(k) + \epsilon_k$

Klouzavé průměry:
$$y_k^* = \frac{1}{m + n + 1} \sum_{i=-m}^n y_{k+i}$$

Klouzavé mediány:
$$y_k^* = \text{med}(y_{k-m}, \dots, y_k, \dots, y_{k+n})$$

Exponenciální vyhlazování:
$$y_k^* = (1 - \lambda)y_{k-1}^* + \lambda y_k$$



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

trendová složka

sezónní složka

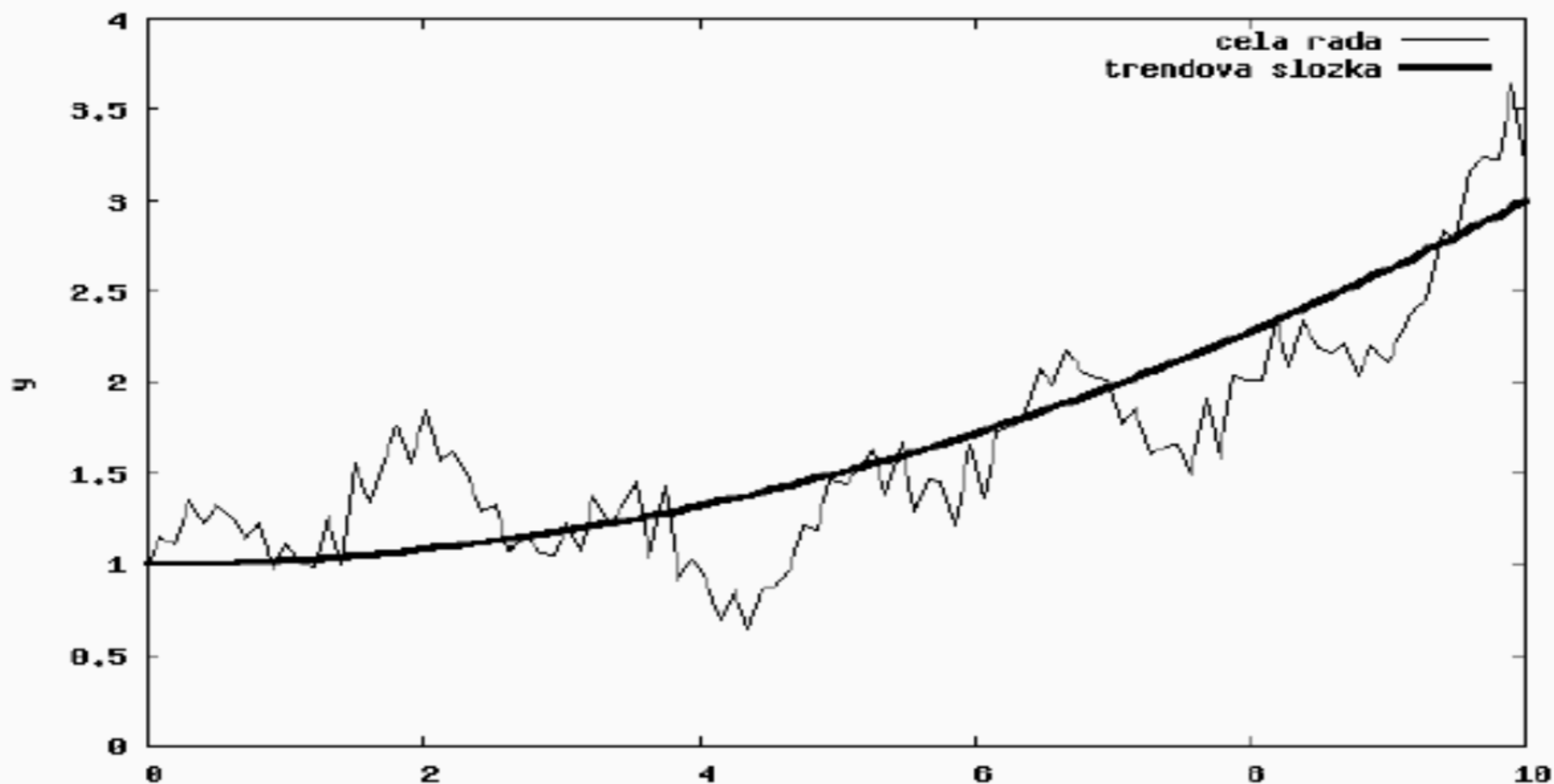
cyklická složka

náhodná složka

Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

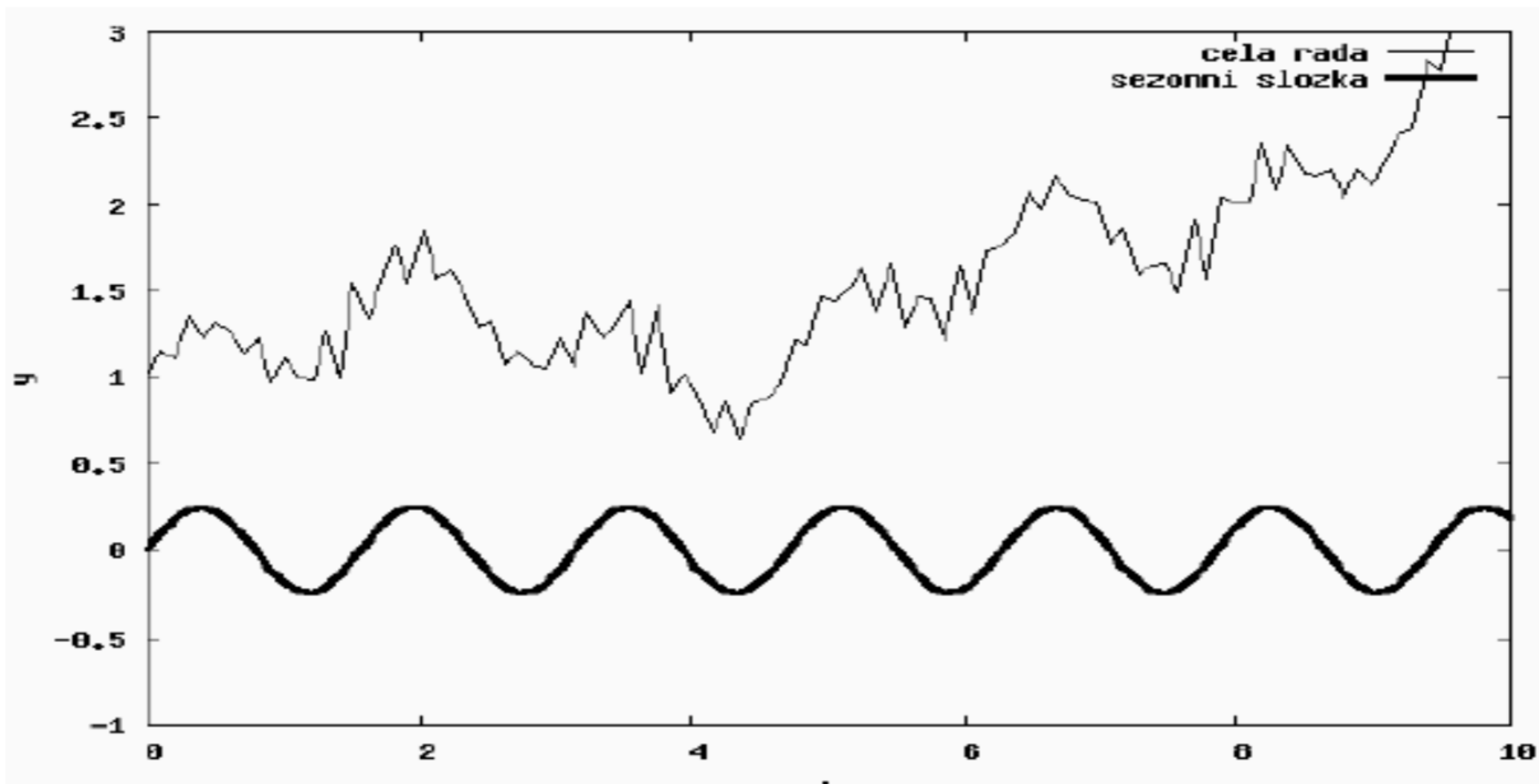
trendová složka



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

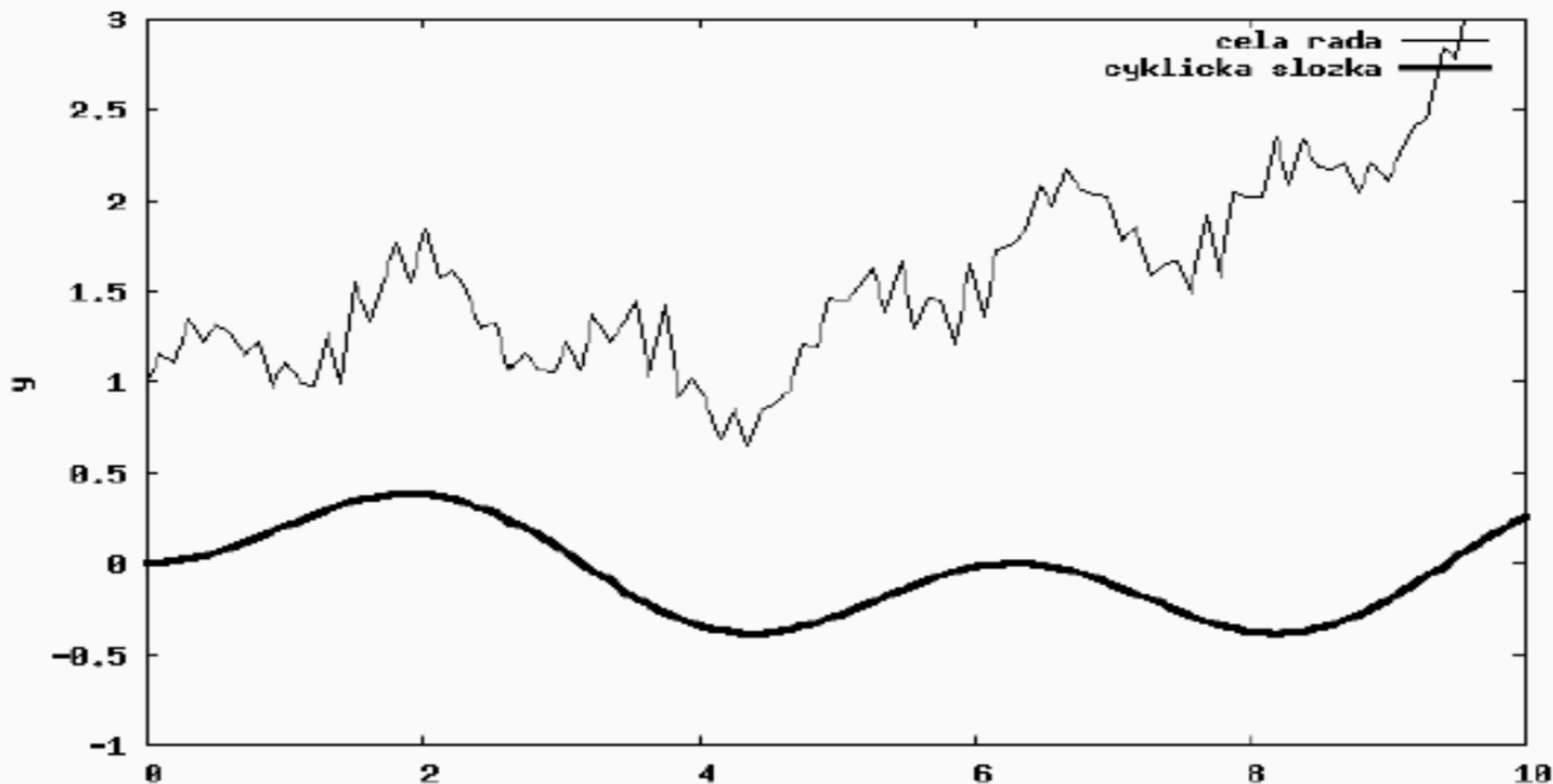
sezónní složka



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

cyklická složka

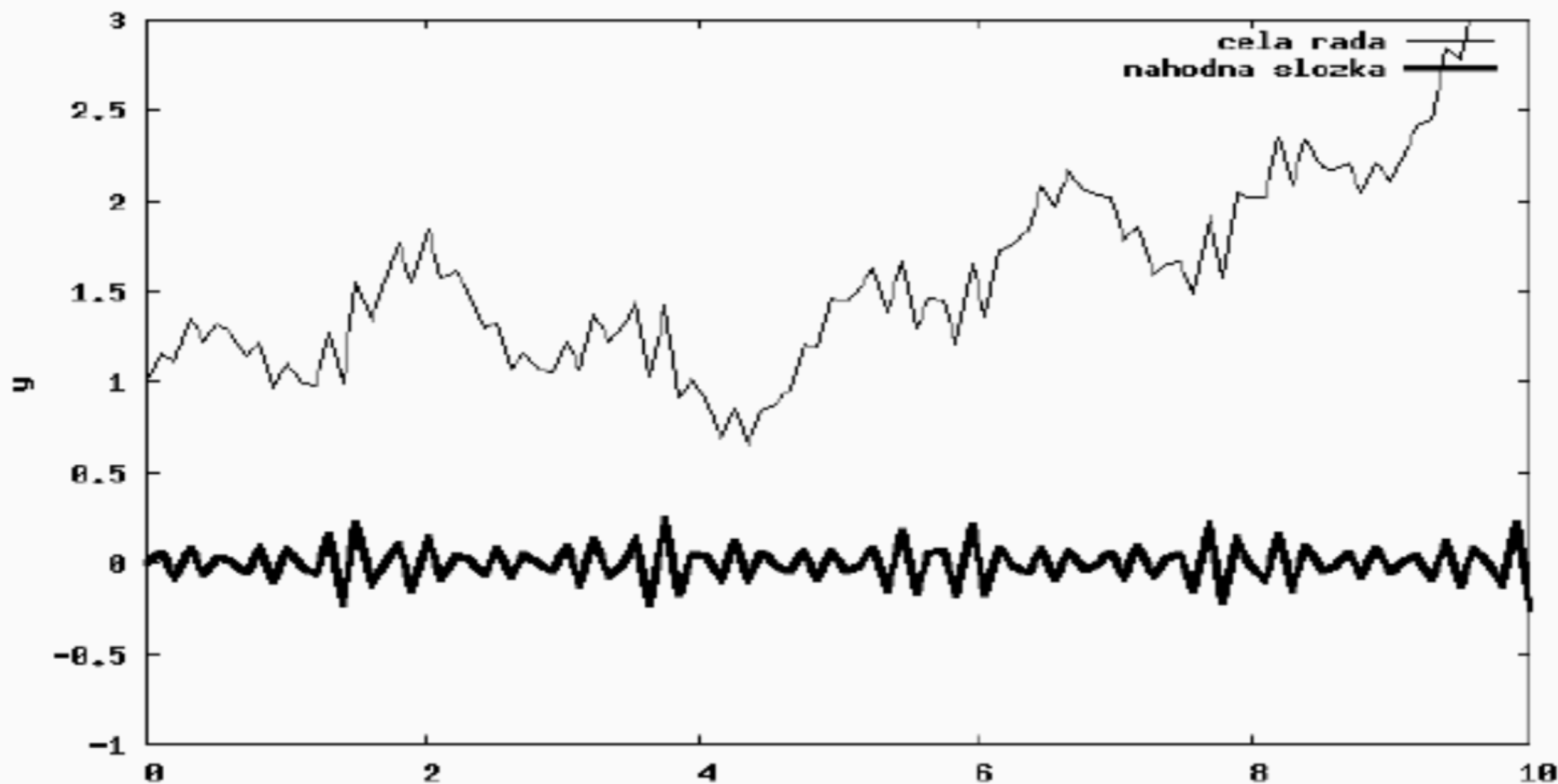


Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$

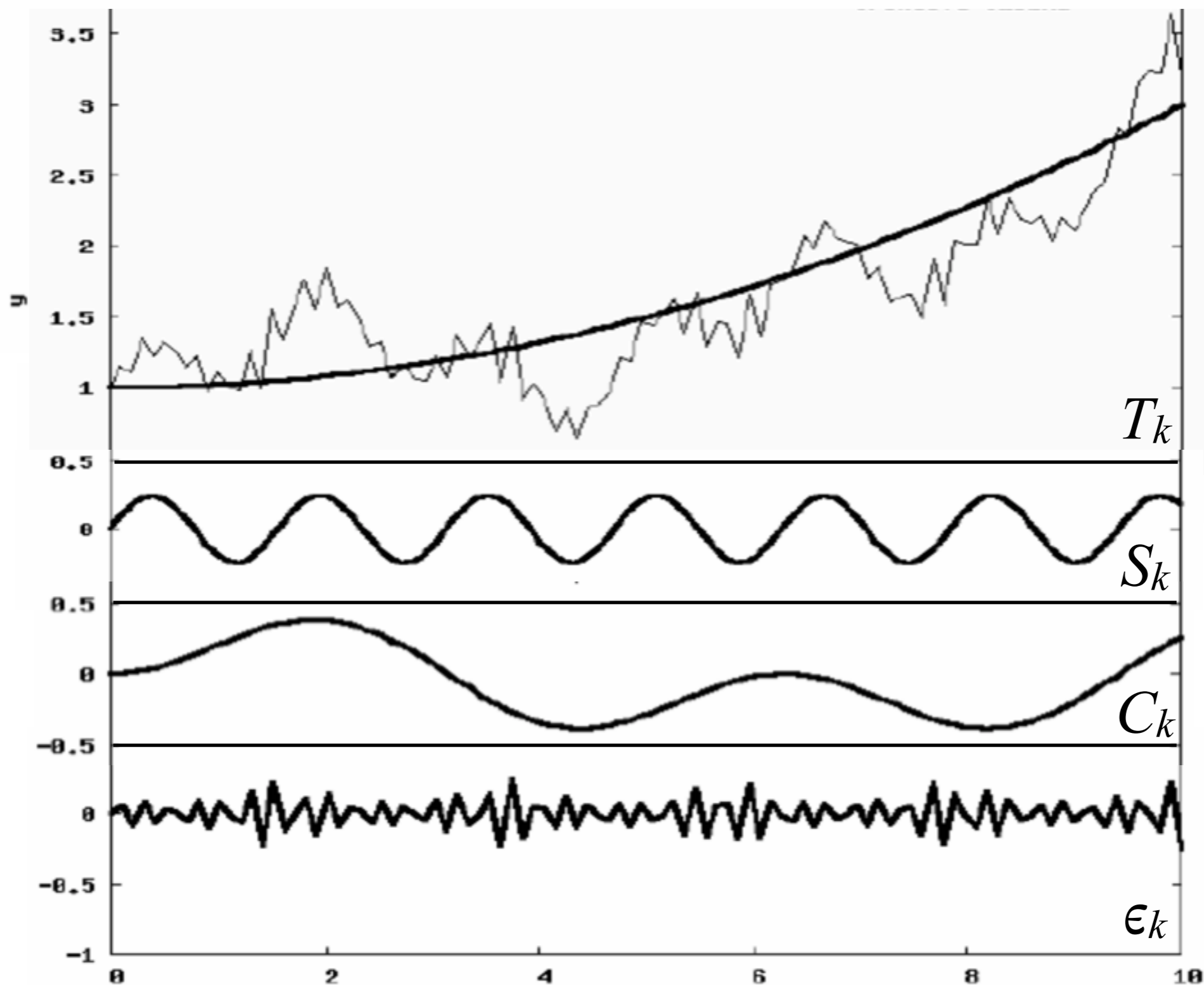
Očištěná řada

náhodná složka



Dekompozice náhodné posloupnosti

$$Y_k = T_k + S_k + C_k + \epsilon_k$$





... a to je všechno.
Dál už každý
sám ;)

