Posloupnosti

Definice Plst $\{a_n\}$ nazýváme

a) rostoucí, jestliže pro $\forall n \in N$: $a_n < a_{n+1}$

b) klesající, jestliže pro $\forall n \in N$: $a_n > a_{n+1}$

V těchto dvou případech mluvíme o plsti ryze monotónní.

c) neklesající, jestliže pro $\forall n \in N$: $a_n \leq a_{n+1}$

d) nerostoucí, jestliže pro $\forall n \in N$: $a_n \geq a_{n+1}$

V těchto dvou případech mluvíme o plsti monotónní.

Příklad. Vyšetřete monotónii plsti $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

Definice Plst $\{a_n\}$ nazýváme

a) omezenou shora, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall n \in N : \ a_n \leq K$

b) omezenou zdola, existuje-li $L \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall n \in N : \ a_n \geq L$.

a)* Nejmenší z čísel s vlastností a) se nazývá supremum plsti $\{a_n\}$.
Je-li některý prvek a_n roven supremu, pak mluvíme o maximu plsti.
Používáme označení $\sup\{a_n\}$, resp. $\max\{a_n\}$.

b)* Největší z čísel s vlastností b) se nazývá infimum plsti $\{a_n\}$.
Je-li některý prvek a_n roven infimu, pak mluvíme o minimu plsti $\{a_n\}$.
Používáme označení $\inf\{a_n\}$, resp. $\min\{a_n\}$.

Příklad *. Dána plst $\{a_n\}$, kde $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Určete její supremum a infimum. Existují hodnoty maxima a minima ?

Základní věty o limitě posloupnosti

Věta 1.6 Každá plst má nejvýše jednu limitu.

Věta 1.9 (limita vybrané posloupnosti)

Má-li plst $\{a_n\}$ limitu rovnou a, pak jakákoliv vybraná plst má též limitu a.

Příklad

Limity a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$ neexistují.

ALE

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0.$

Věta 1.11 Nechť existují $\lim a_n = a,\ \lim b_n = b$.

Pak platí: $\lim\ a_n * b_n = a * b$, pokud výraz $a * b$ má smysl.

Symbol * znamená operaci z mn. $\{+, -, \times, /\}$, vždy je $n \to +\infty$

Příklad $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2,718...$ Eulerovo číslo

Př. Libovolné $a > 0$, pak $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3 - 1000n) = +\infty$

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ $\quad$ P, Q jsou polynomy, vede na typ „$\frac{\infty}{\infty}$"

Postup výpočtu

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n - n^2}{100n + 30} = -\infty.$

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{30n^2 + 5}{n^3 + 10n - 8} = 0.$

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n + 3}{4n^2 - (2n + 1)^2} = -\frac{1}{4}$

Př. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right)=0$$

Př. $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right)=4$$

Věta 1.15 (limita sevřené plsti)

Nechť pro plsti $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ platí: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$ a pro každé $n \in N$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$.

Pak existuje $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$.

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n!)}{n^2+1} = 0.$