V. Potenciální vektorové pole

Definice. Říkáme, že křivkový integrál vektorové funkce $\overrightarrow{f}$ nezávisí v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ $(k = 2,\, k = 3)$ na cestě, jestliže pro libovolné dvě křivky C_1, C_2 v D se stejným počátečním a stejným koncovým bodem platí

$$\int_{C_1} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = \int_{C_2} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$$

Věta 1.2. Křivkový integrál $\int_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ nezávisí v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ na cestě právě tehdy, když cirkulace $\overrightarrow{f}$ podél libov. uzavřené křivky v $\boldsymbol{D}$ je nulová.

Definice. Vektorové pole $\vec{f}$ se nazývá **potenciální pole v oblasti** $D \subset \mathbb{E}_k$ $(k = 2, k = 3)$, jestliže existuje skalární funkce φ taková, že $\vec{f} = \operatorname{grad} \varphi$ v oblasti D.
Skalární funkci φ nazýváme **potenciálem vektorového pole $\vec{f}$ v** D.

Věta 1.4. Je-li $\boldsymbol{\vec{f}}$ potenciální pole, pak jeho potenciál $\boldsymbol{\varphi}$ je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

Věta 1.5. Nechť $\boldsymbol{\vec{f}}$ je spojité potenciální vekt. pole v oblasti $\boldsymbol{D}$ s potenciálem $\boldsymbol{\varphi}$. Pak pro libovolnou křivku $\boldsymbol{C}$ v $\boldsymbol{D}$ s počát. bodem A a konc. bodem B platí:

$$\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Věta 1.6., 1.7.

Nechť $\overrightarrow{f}$ je spojité vekt. pole v oblasti D.

Potom násl. výroky jsou ekvivalentní:

(1) $\overrightarrow{f}$ je potenciální pole v D

(2) křivkový integrál nezávisí v D na cestě

(3) cirkulace podél libov. uzavřené křivky v D je nulová.

Definice. Oblast D v $\mathbb{E}_2$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže vnitřek každé uzavřené křivky v D leží v D.

Věta 2.6. (Postač. podm. pro potenciální pole, $n = 2$)

Nechť 1. D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a

2. souřadnicové funkce U a V vekt. pole $\vec{f}$ mají spojité parc. derivace v oblasti D a

3. $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ v D.

Potom $\vec{f}$ je potenciální pole v D.

Věta 2.5

Jsou-li PD funkcí U, V spojité v obl. $\boldsymbol{D}$, pak rovnost

$\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ je nutnou podmínkou, aby $\overrightarrow{f}$ bylo potenciální pole v $\boldsymbol{D}$.

Potenciál, příklady

1. Dáno vektorové pole
   $\vec{f} = (xy^2\,,\, x^2y + y^2)$

a) Určete potenciál φ tohoto pole v největší možné oblasti D.

b) Určete $\int_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$, kde
   C je křivka od bodu $A = [0, 3]$ do bodu $B = [2, 1]$

2. Dáno vektorové pole

$$\vec{f} = \left(\frac{\cos x}{y} - 2x \,,\, \frac{1}{y} - \frac{\sin x}{y^2} \right).$$

a) Ověřte, že křivkový integrál $\int_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ nezávisí na cestě v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$ (určete největší možnou oblast).

b) Určete potenciál φ tohoto pole v D.

c) Pomocí potenciálu určete $\int_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$,
kde C je křivka s počát. bodem $A = [0, 1]$ a konc. b. $B = [\pi/2, 1]$.