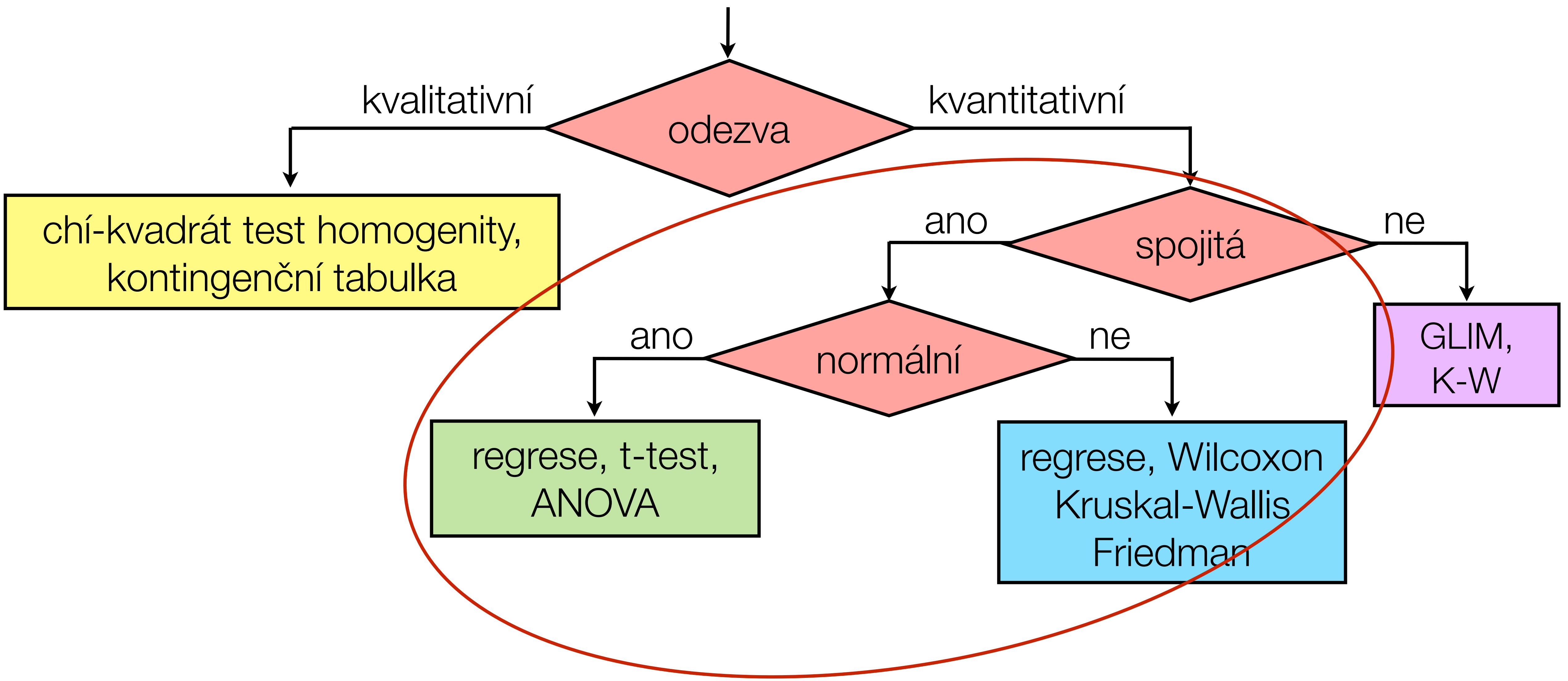
Plánování
Průmyslových
Experimentů

Část 2. Metody vyhodnocování experimentů

- Vyhodnocení experimentu: stanovení charakteristik procesu a jeho optimalizace, vyhodnocení vlastností materiálů zpravidla metodami matematické statistiky

Klíčové pojmy: Testování hypotéz, odhady parametrů, regrese, korelace

2.2. Kvantitativní odezva



2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

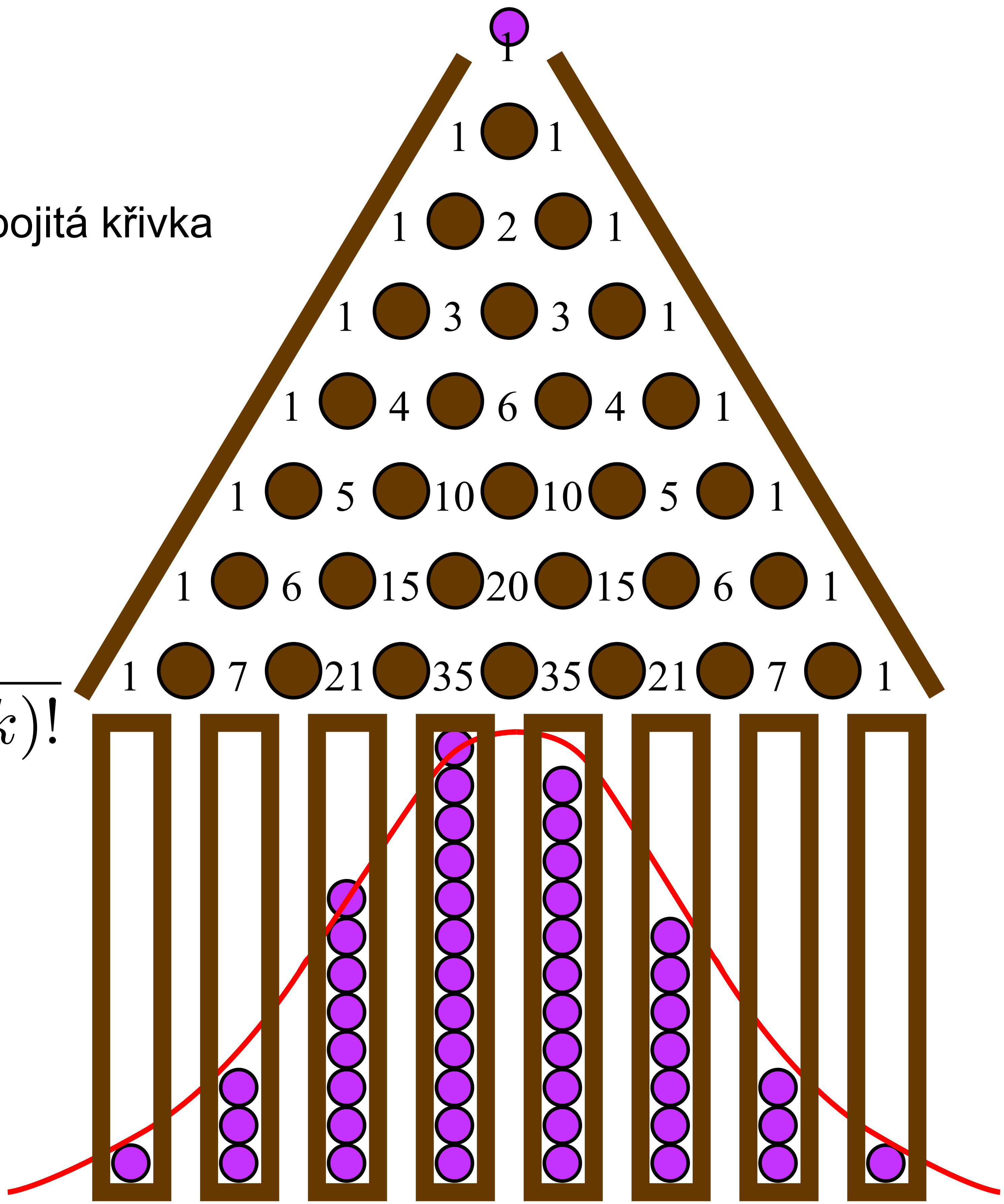
1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi $\longrightarrow$ spojitá křivka

Galtonova deska

Pascalův trojúhelník

$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$



Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = Ke^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$

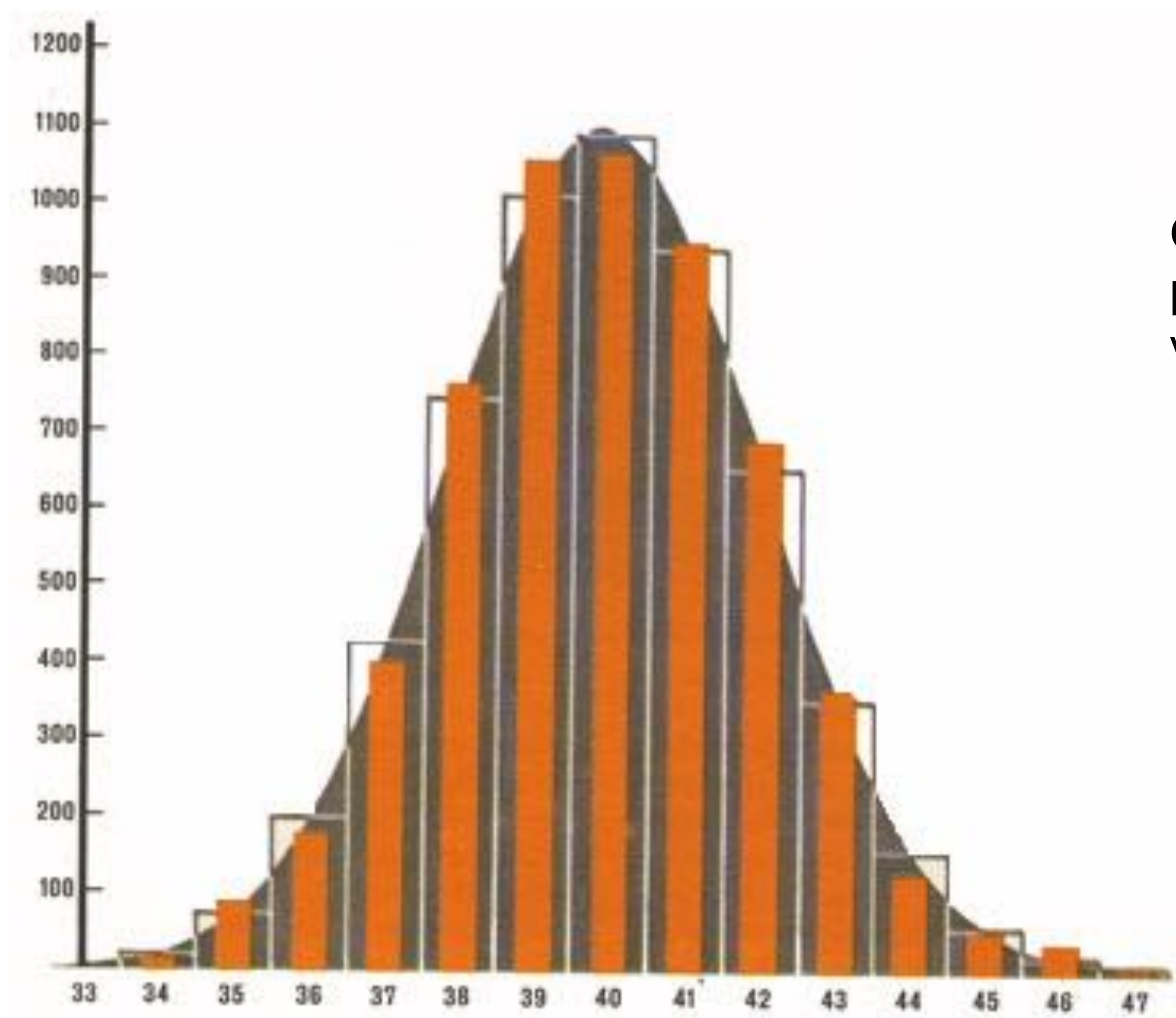
2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Qételet
- antropometrická měření anglických vojáků



Obvod hrudi skotských vojáků v palcích, naměřený Quételetem ve dvacátých letech 19. století

2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních

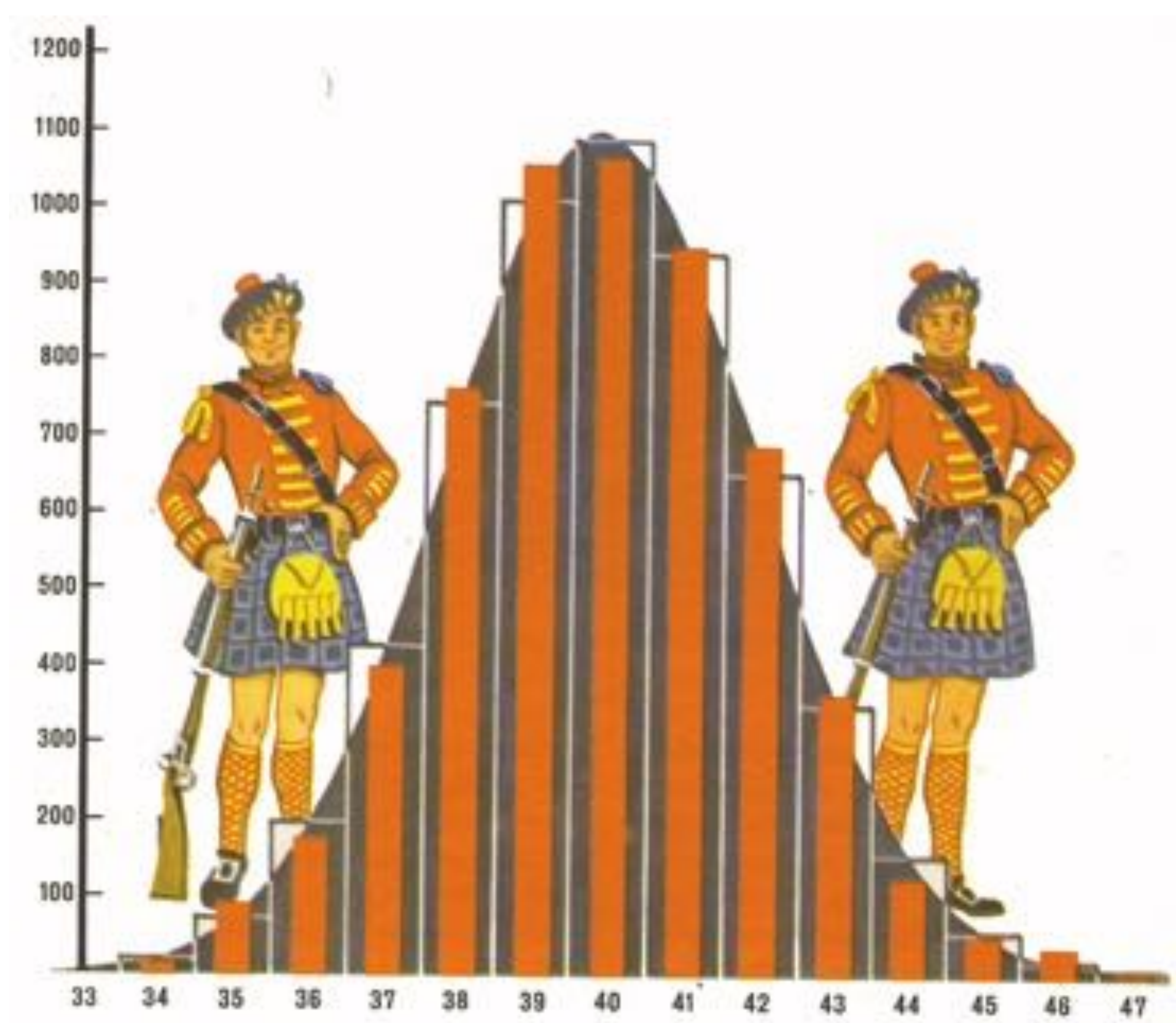
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Qételet

- antropometrická měření anglických vojáků



bvod hrudi skotských vojáků v
alcích, naměřený Quételetem
e dvacátých letech 19. století

normální rozdělení

2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

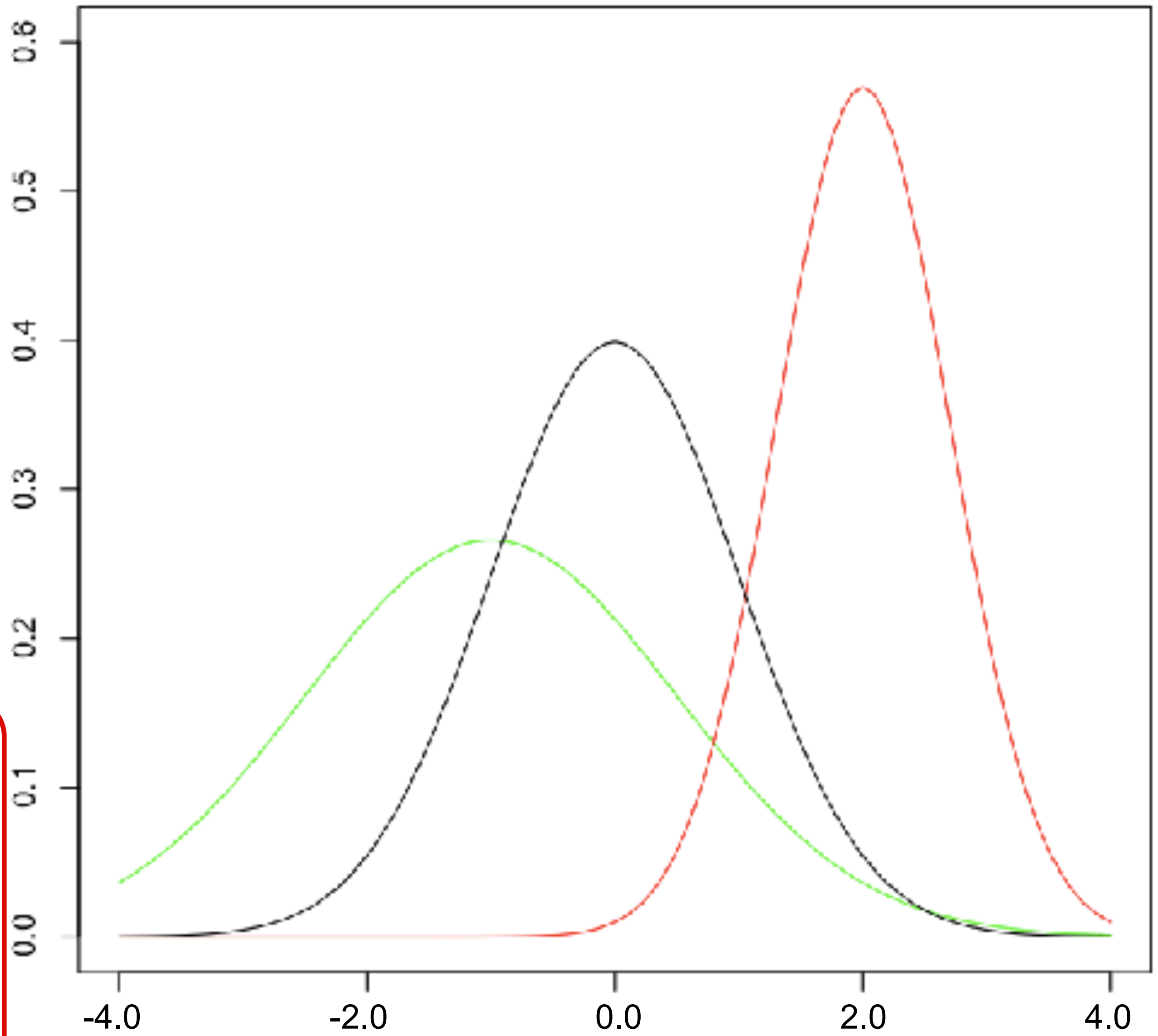
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hustota pravděpodobnosti



$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

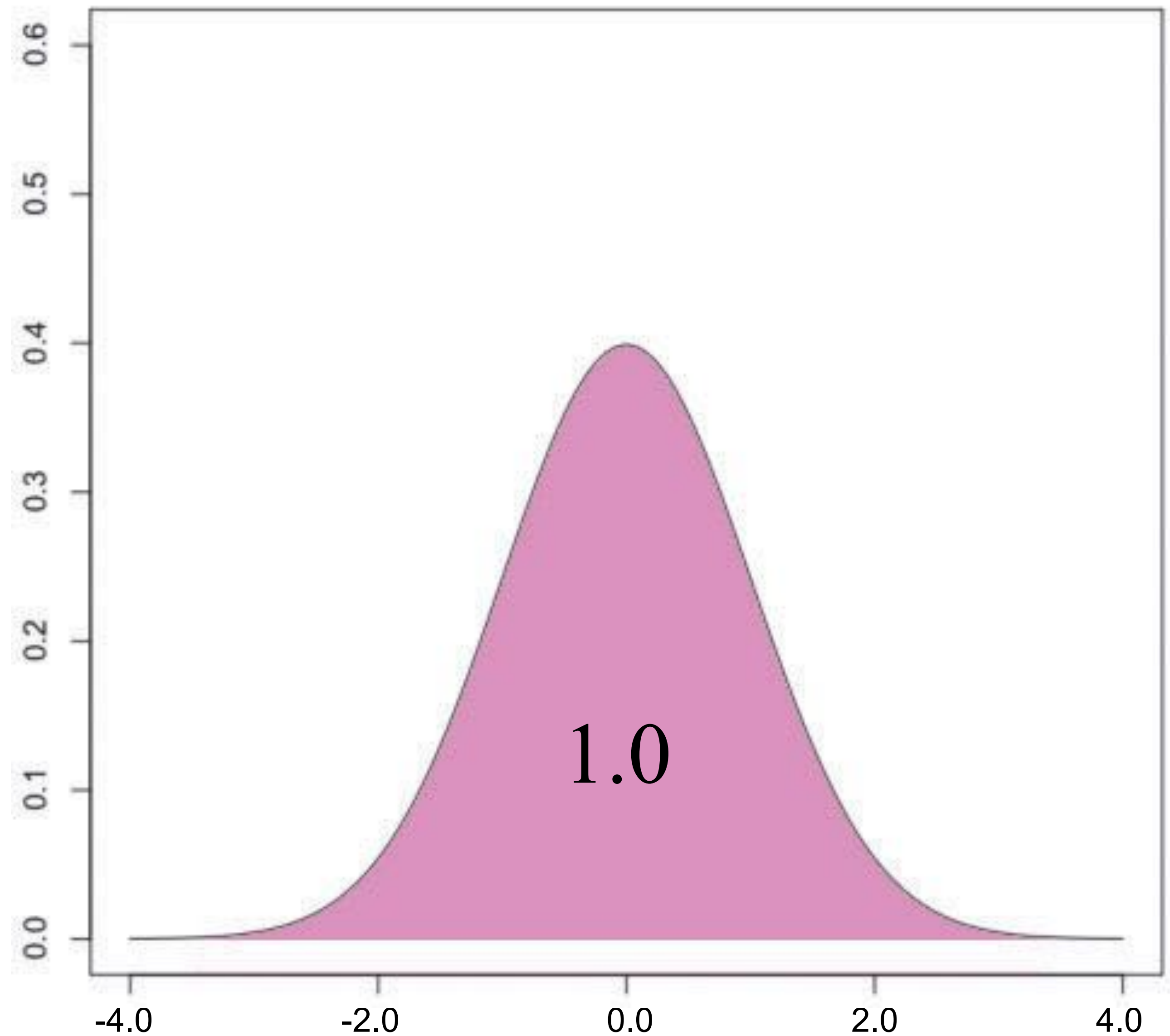
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$X \in (-\infty, +\infty)$$

Standardní normální rozdělení

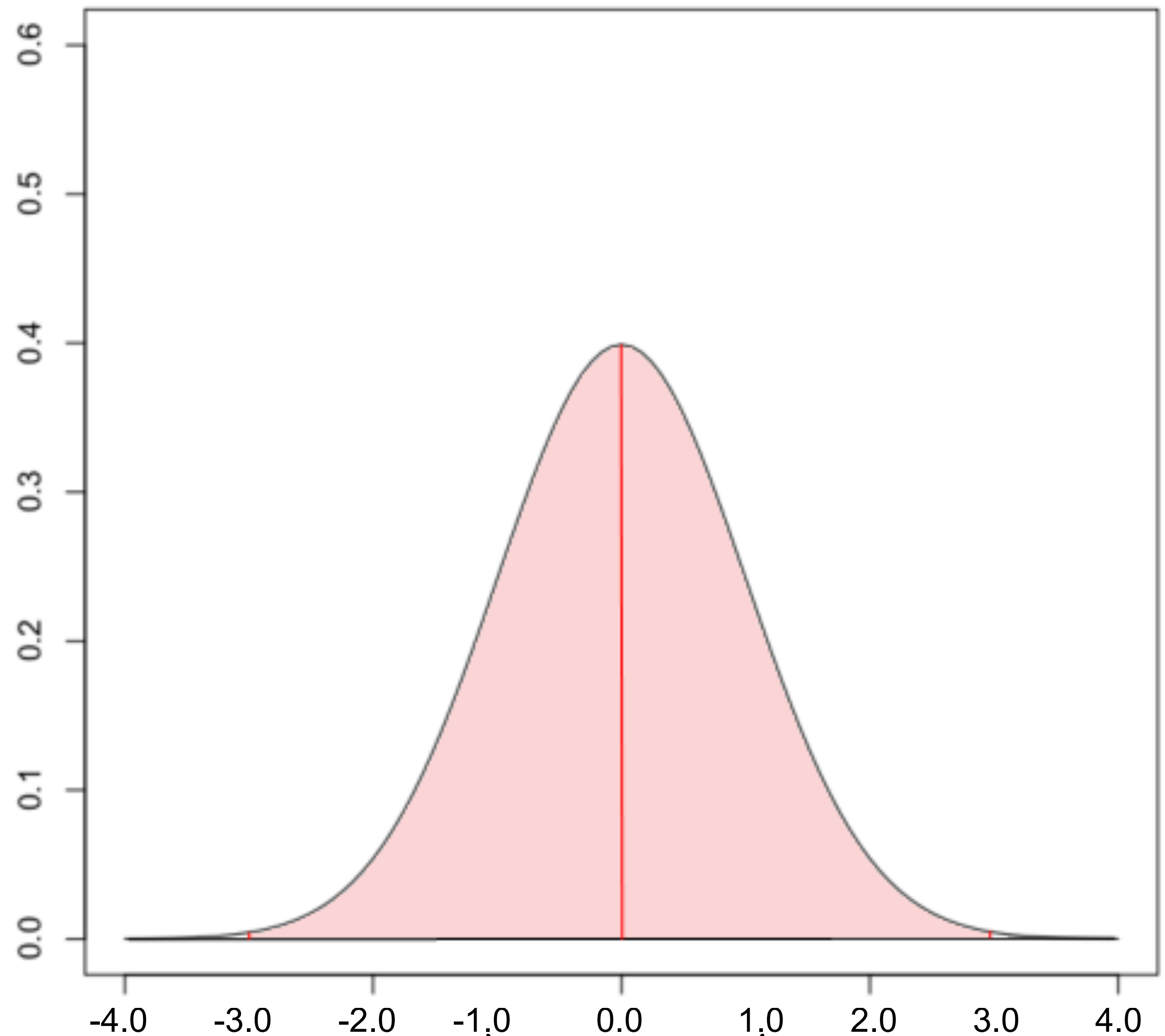


$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$



$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

68,26%

$$P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

95%

$$P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

99.7%

$$P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

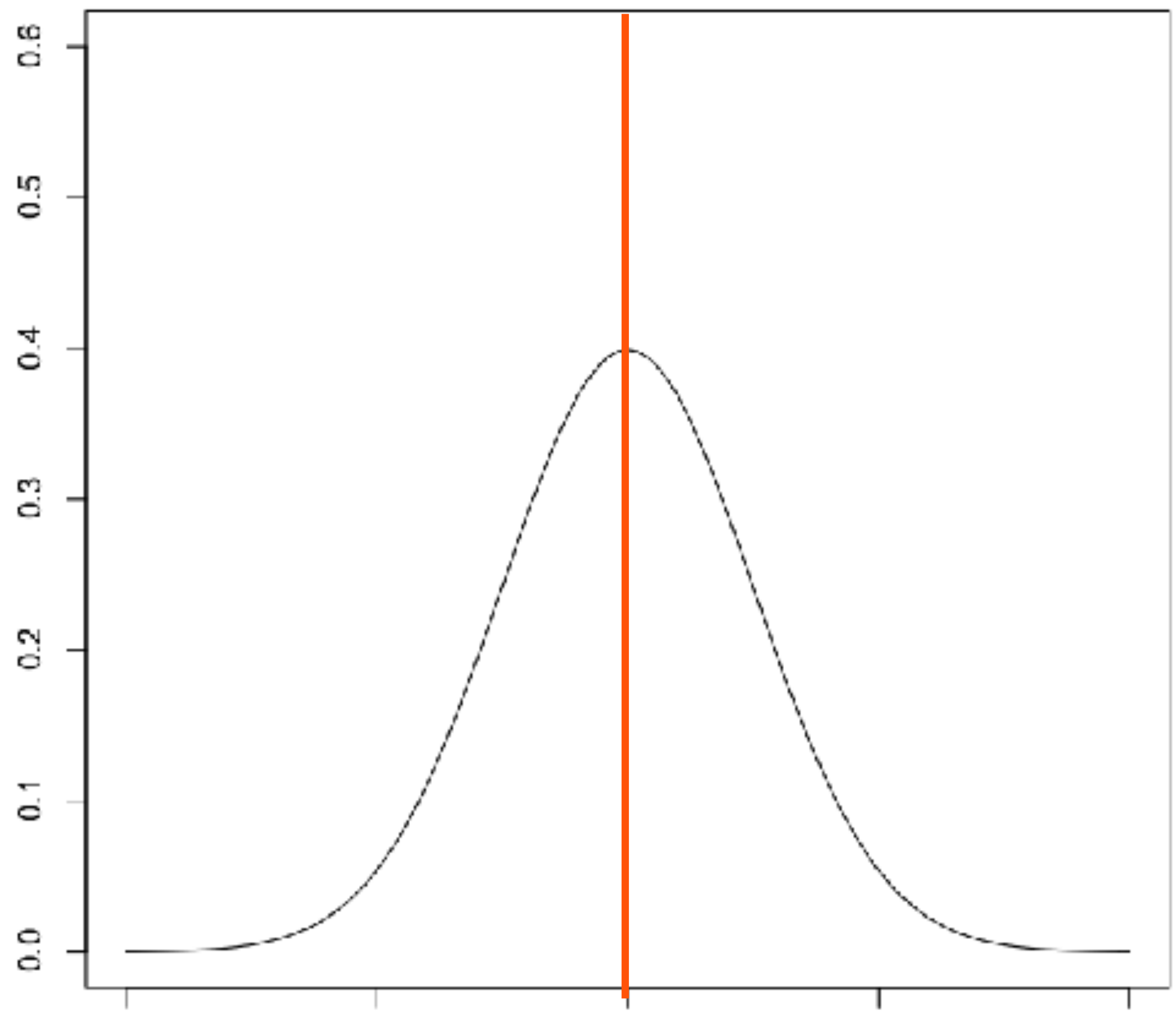
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

Symetrie: $f(x) = f(-x)$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$



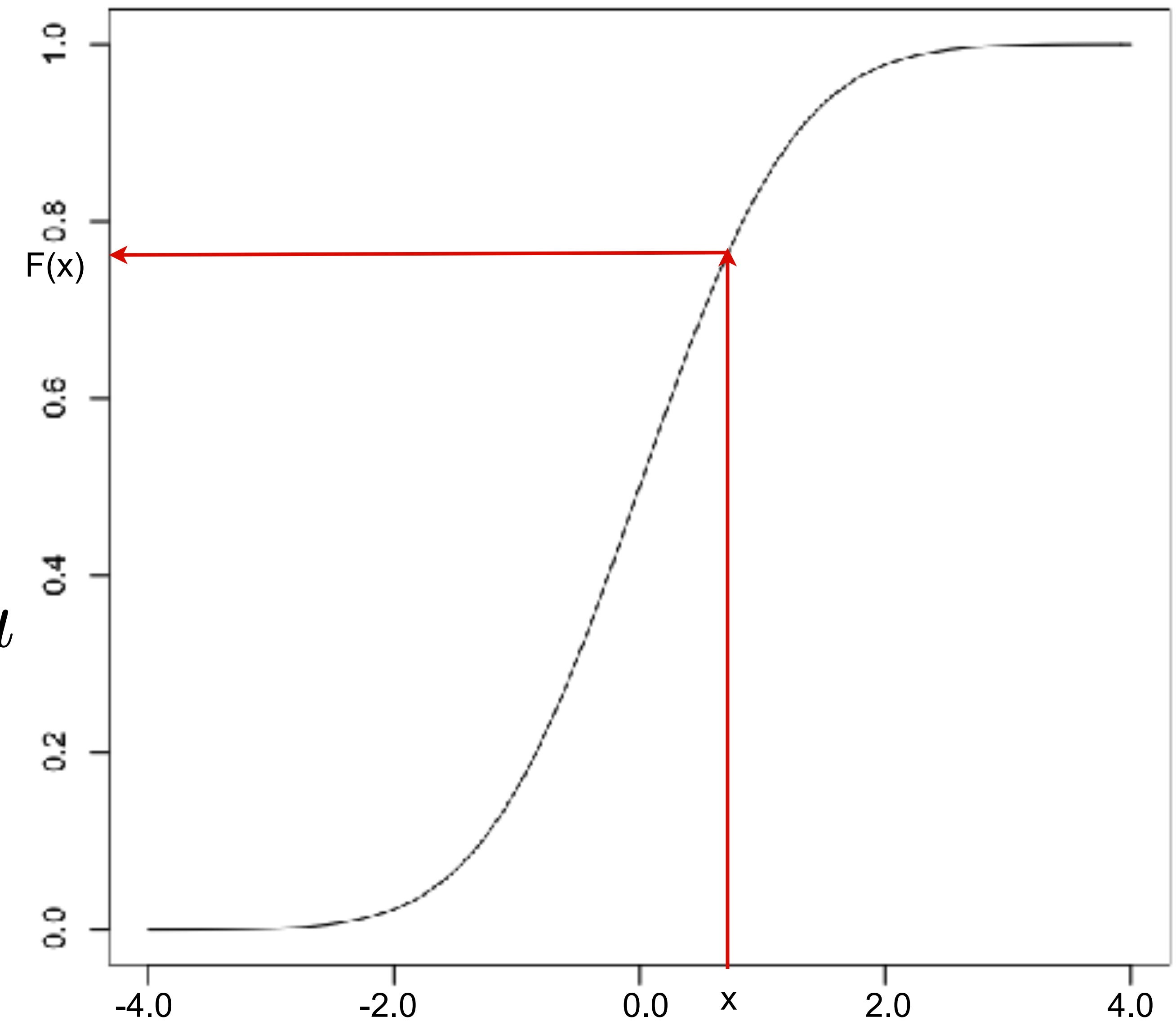
2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$



$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce

S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x?

S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X větší než x?

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$

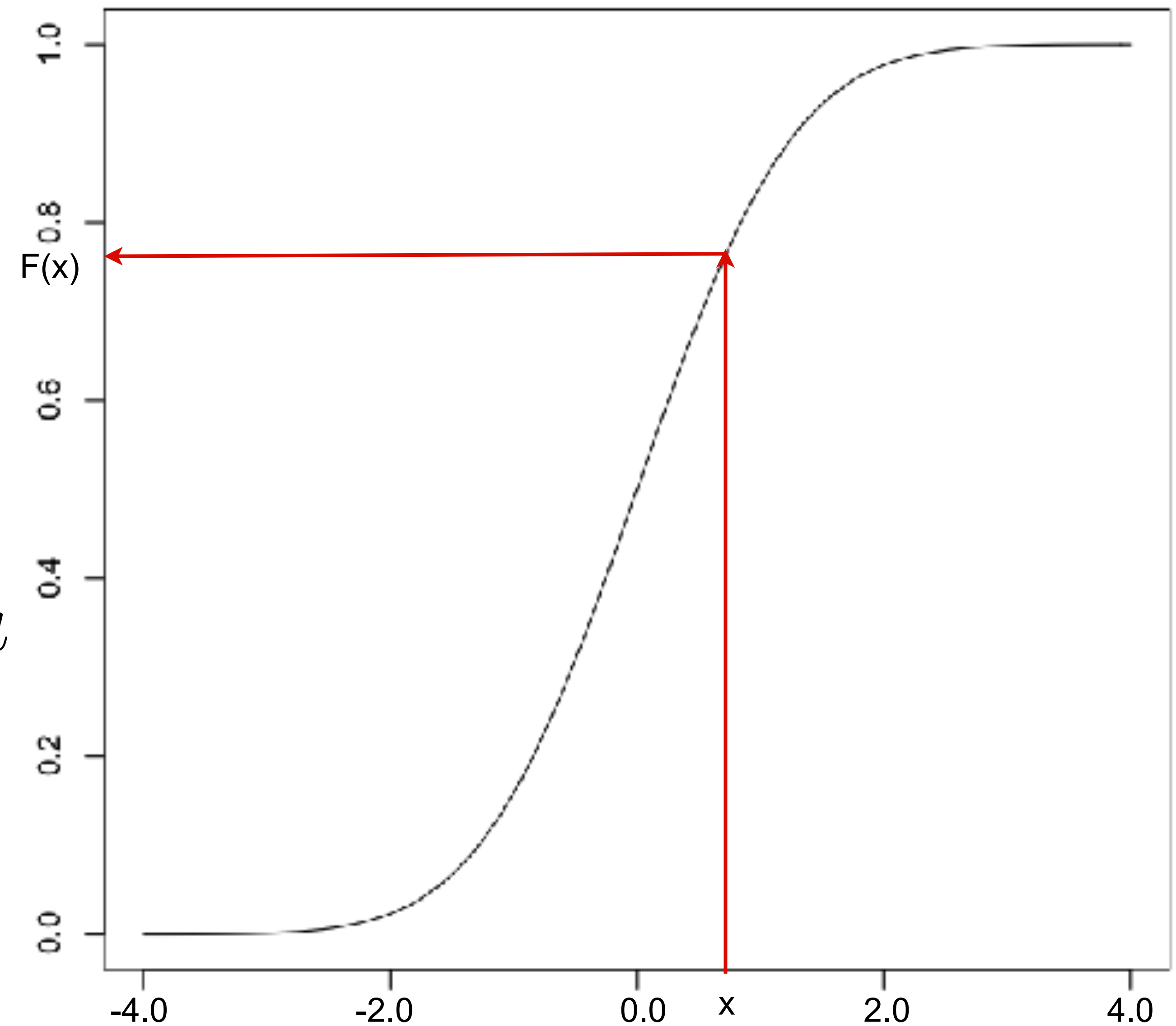
2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$



$$\boxed{\Phi(x) = P(X \leq x)}$$

distribuční funkce

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad x \in R$$

2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

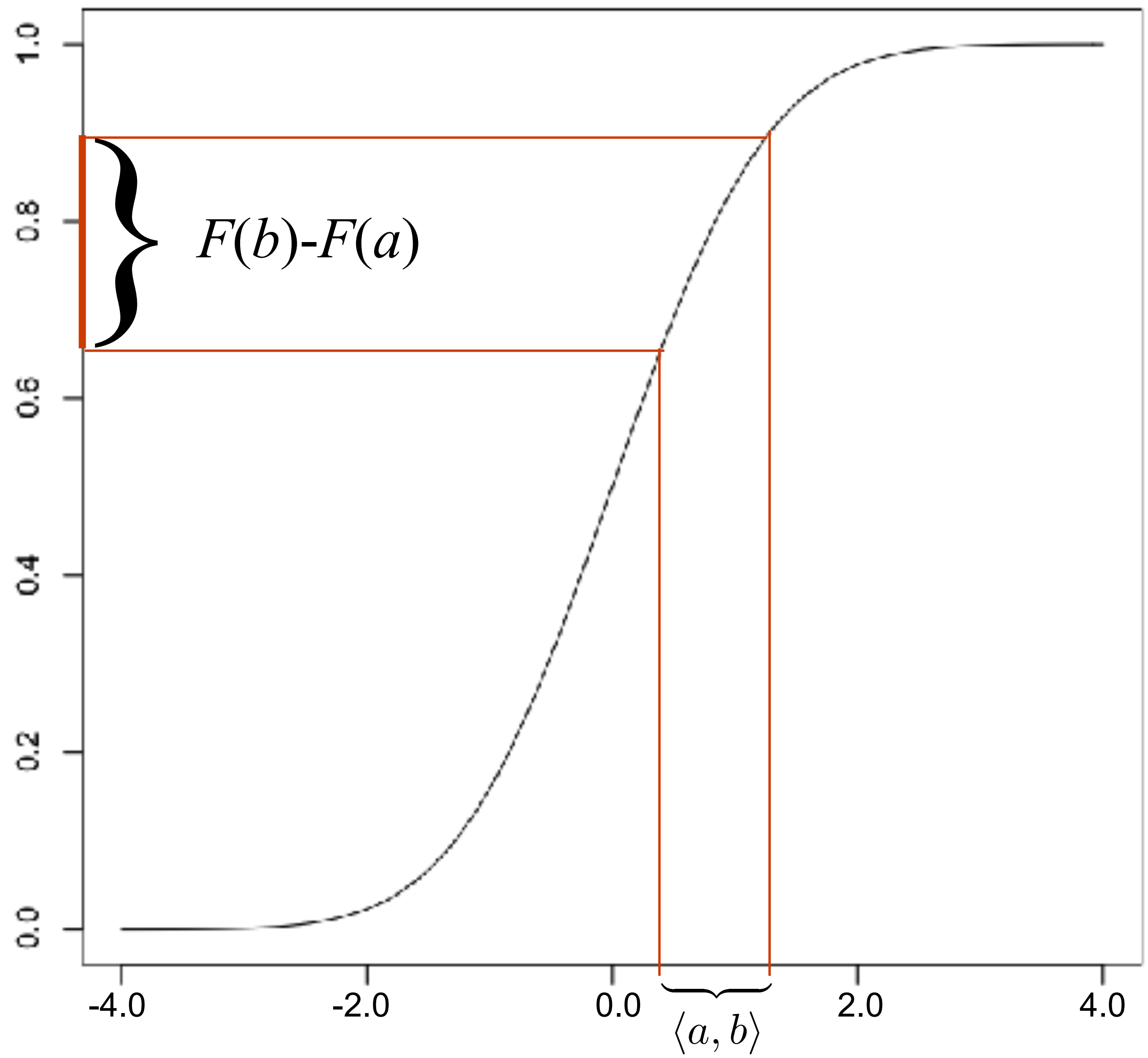
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$



S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

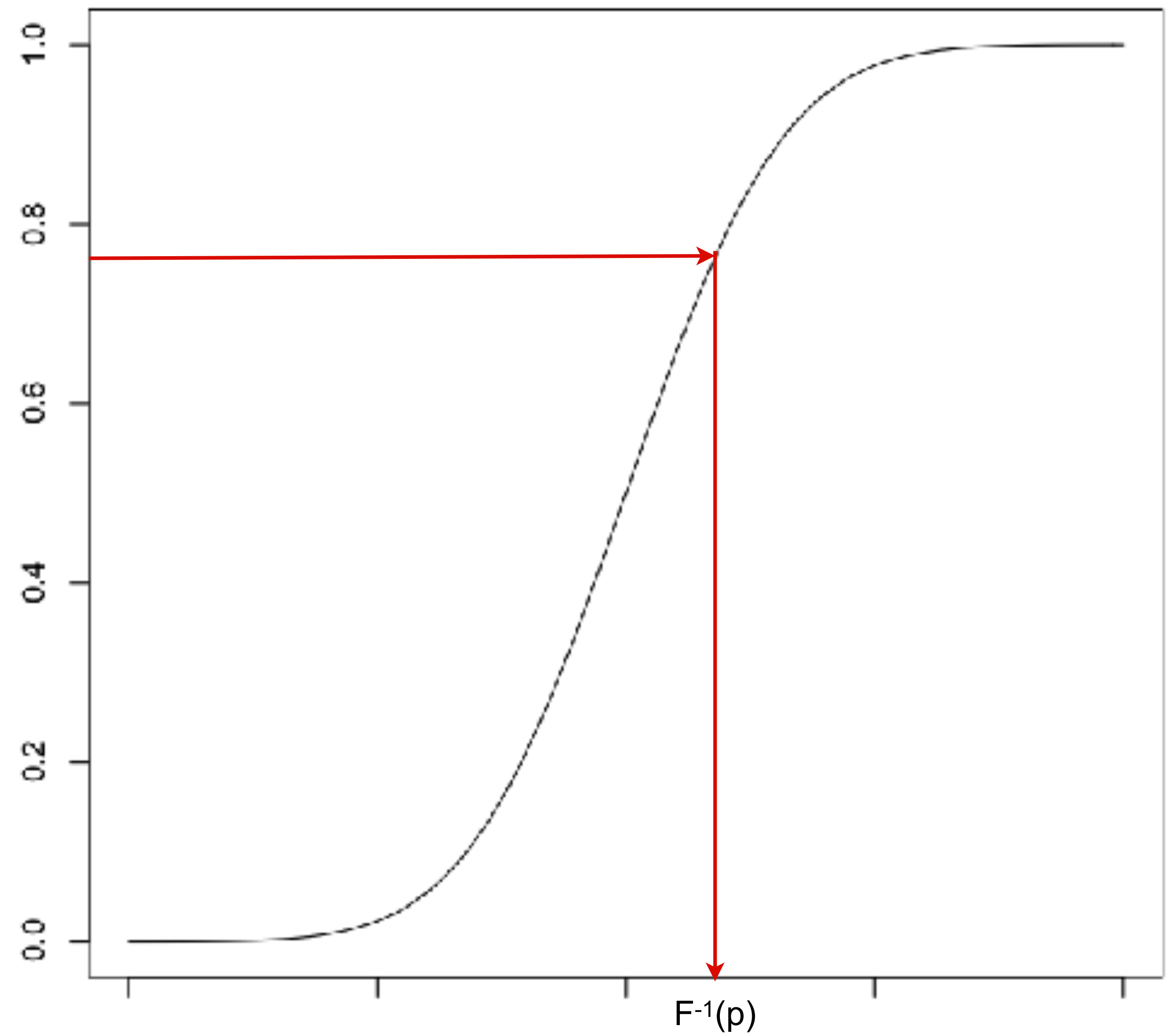
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$



Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p?

$$x_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce

Jakých hodnot bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností p?

2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

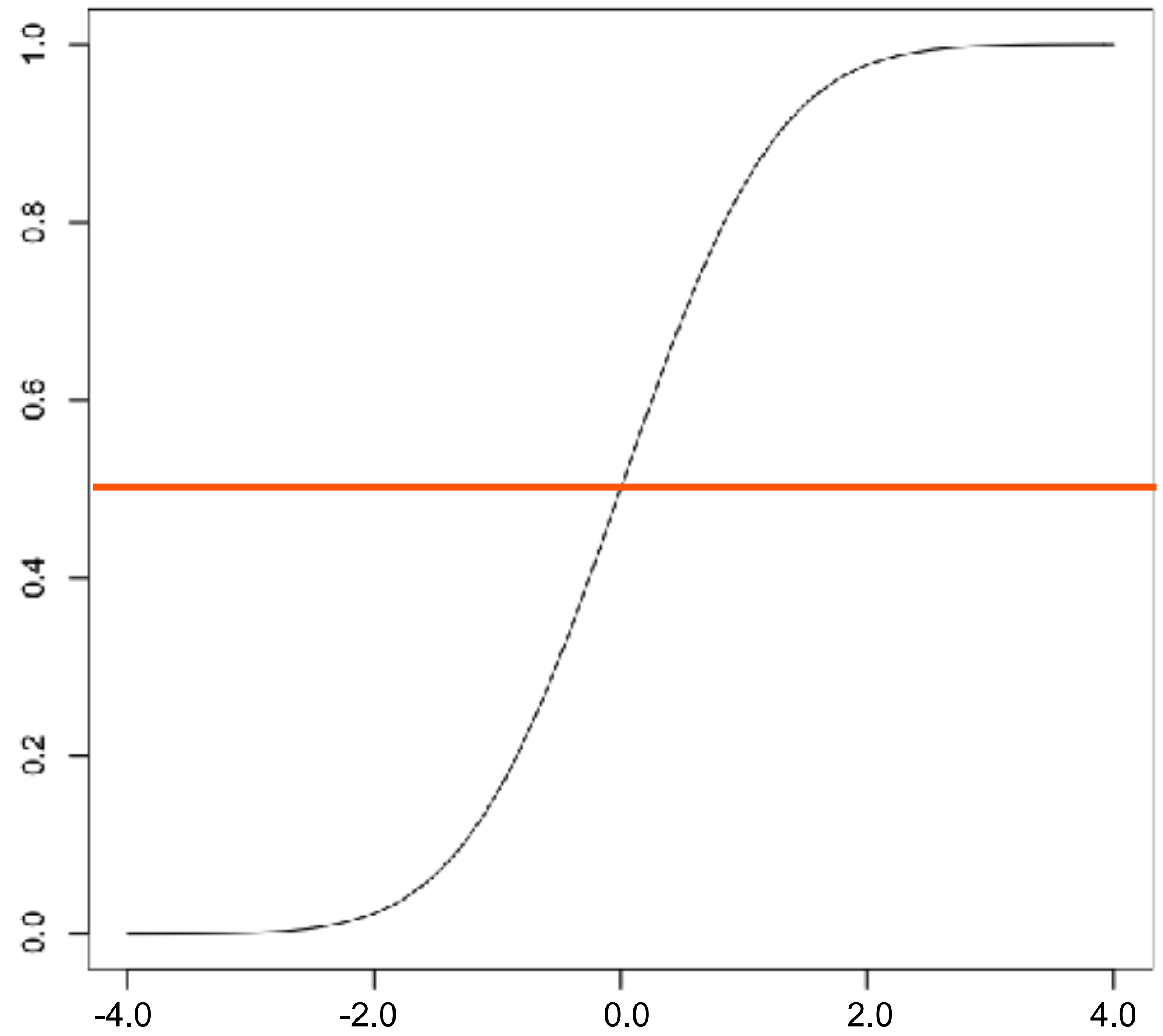
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

Symetrie distribuční funkce:

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

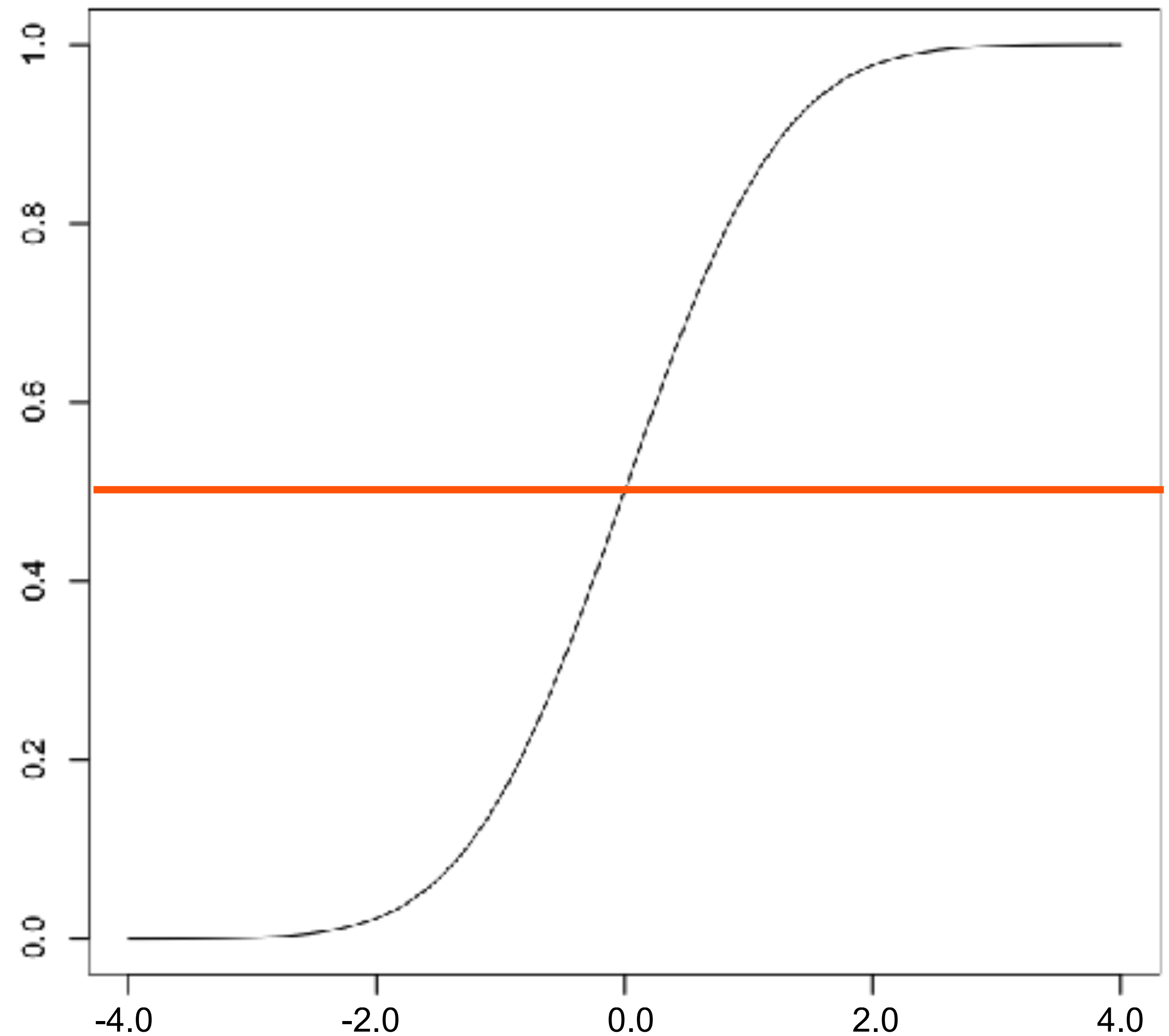


2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$



Symetrie distribuční funkce:

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

Symetrie kvantilové funkce:

$u_{p/2} = \Phi^{-1}(p/2) = (p/2)$ - kvantil standardního normálního rozdělení a

$u_{1\text{-}p/2} = \Phi^{-1}(1-p/2) = (1-p/2)$ - kvantil standardního normálního rozdělení

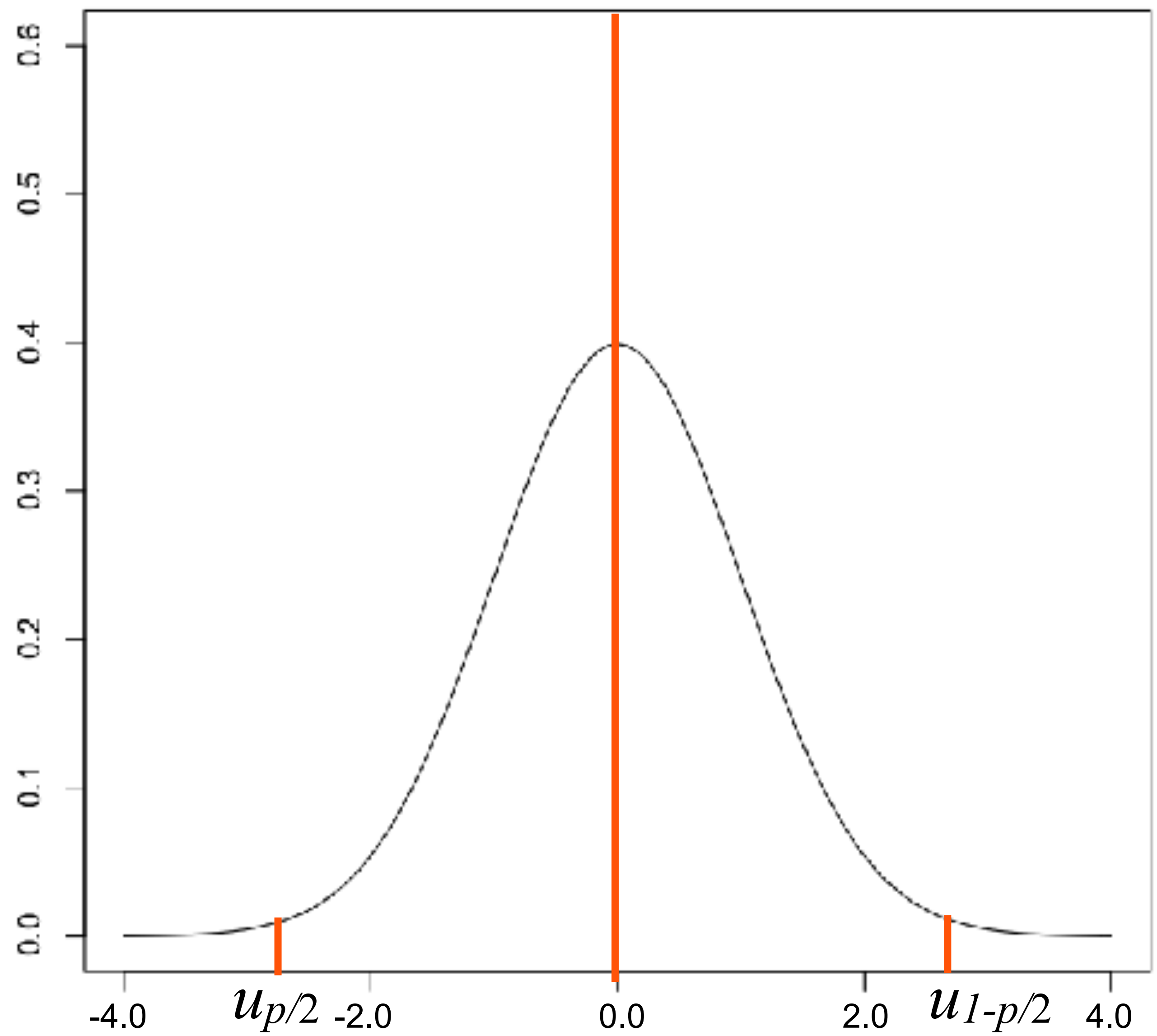
$$\boxed{u_{p/2} = -\,u_{1\text{-}p/2}}$$

2.2. Vsuvka 2: Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$



Symetrie distribuční funkce:

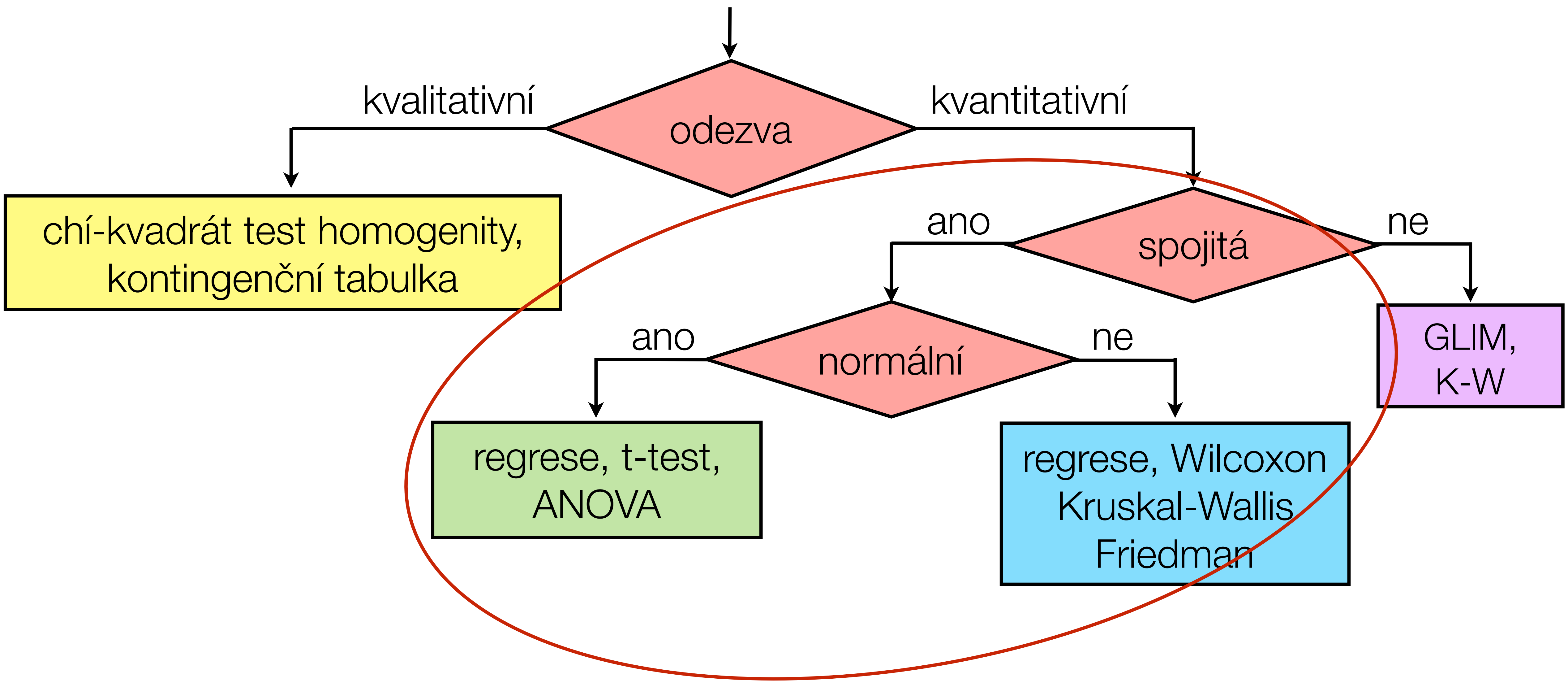
$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

Symetrie kvantilové funkce:

$u_{p/2} = \Phi^{-1}(p/2)$ =(p/2) - kvantil standardního normálního rozdělení a
$u_{1\text{-}p/2} = \Phi^{-1}(1\text{–}p/2)$ =(1–p/2) - kvantil standardního normálního rozdělení

$$\boxed{u_{p/2} = -\,u_{1\text{-}p/2}}$$

2.2. Kvantitativní odezva



2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

- uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru X
- tento faktor může mít k úrovní
- pro každou úroveň provedeme n_i měření (replikací), i=1,2,…,k
- měření můžeme sdružovat do bloků podle nějakého vedlejšího (blokového) faktoru
- provádíme znáhodnění pořadí měření (buď přes celý experiment nebo pouze uvnitř bloků)

Statistický model:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

odezva

společná úroveň

odchylka od společné úrovně, způsobená vlivem i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k

náhodná chyba v j-tém měření při i-té úrovni faktoru

O náhodných chybách ε_{ij} předpokládáme, že jsou nezávislé, stejně rozdělené s nulovou střední hodnotou a stejným rozptylem σ^2. Speciálně, předpokládáme rozdělení $N(0,\sigma^2)$

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

- uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru X
- tento faktor může mít k úrovní
- pro každou úroveň provedeme n_i měření (replikací), i=1,2,…,k
- měření můžeme sdružovat do bloků podle nějakého vedlejšího (blokového) faktoru
- provádíme znáhodnění pořadí měření (buď přes celý experiment nebo pouze uvnitř bloků)

Statistický model:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

odezva

společná úroveň

odchylka od společné úrovně, způsobená vlivem i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k

náhodná chyba v j-tém měření při i-té úrovni faktoru

vliv i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k : $\mu_i = \mu + \tau_i$

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

pořadové číslo měření (replikace)

úroveň faktoru (ošetření)

	1	2	3	...	n
1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	...	y_{1n_1}
2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	...	y_{2n_2}
3	y_{31}	y_{32}	y_{33}	...	y_{3n_3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k	y_{k1}	y_{k2}	y_{k3}	...	y_{kn_k}

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

Jeden faktor o dvou úrovních: Srovnání dvou souborů dat, normální rozdělení

1. úroveň faktoru, n replikací: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\qquad X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$

2. úroveň faktoru, m replikací: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ $\qquad Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

	1	2	3	...	n
A	x_1	x_2	x_3	...	x_n
B	y_1	y_2	y_3	...	y_m

a) dvě nezávislá měření
b) párová měření

2.2. Vsuvka 3: Analýza datového souboru

- Základní charakteristiky
  - pořadové statistiky: minimum, maximum, medián, kvartily
  - momenty: průměr, výběrový rozptyl, šikmost, špičatost
  - modus, rozpětí
- Grafická analýza
  - krabicový graf
  - histogram
  - Q-Q graf
  - rozptylový graf
- Test normality

2.2. Vsuvka 3: Analýza datového souboru

- Základní charakteristiky
  - pořadové statistiky: minimum, maximum, medián, kvartily
  - momenty: průměr, výběrový rozptyl, šikmost, špičatost
  - modus, rozpětí

1. výběrový moment = aritmetický průměr: .... $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
   (bodový odhad střední hodnoty)

2. výběrový centrální moment = výběrový rozptyl .... $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

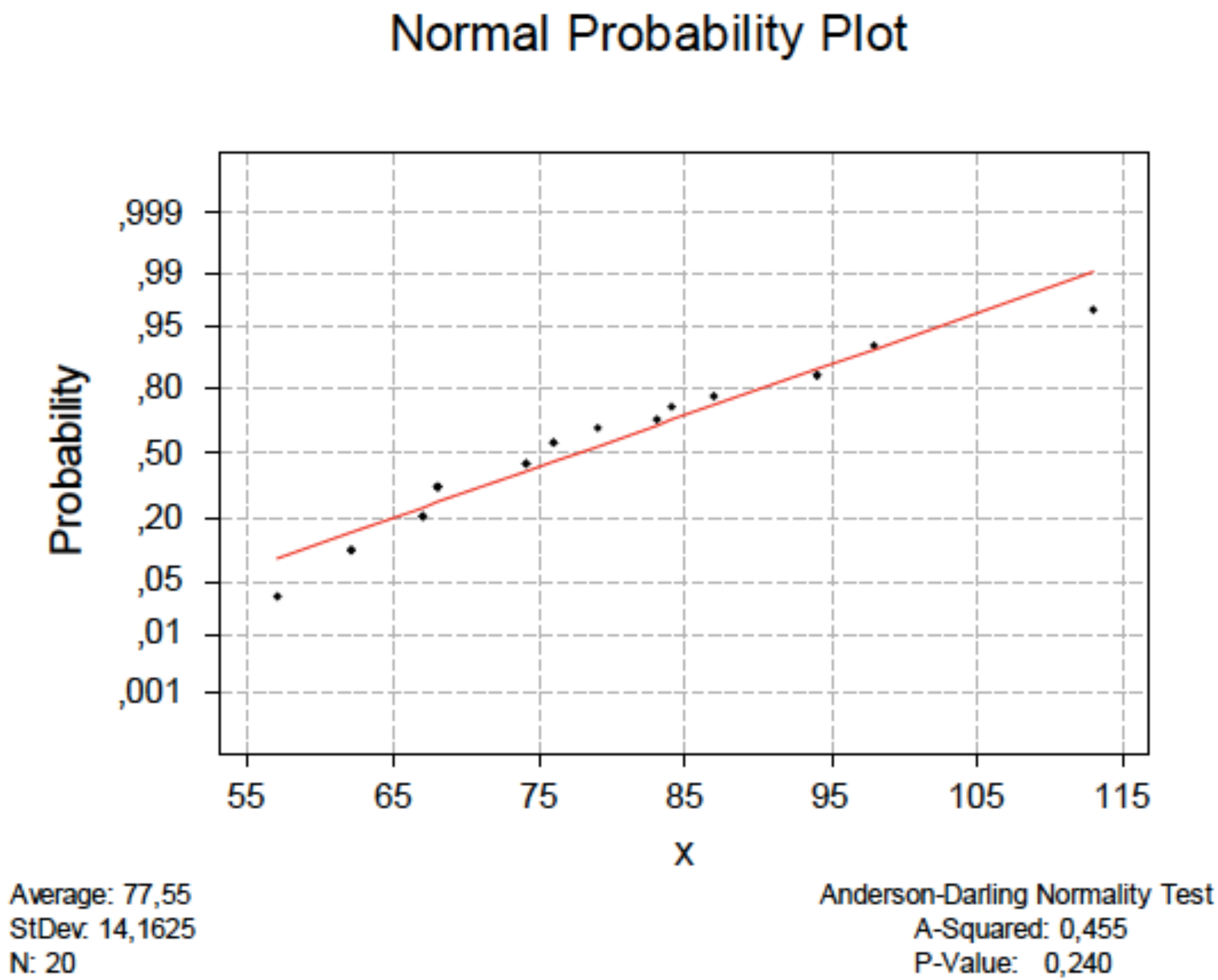
3. výběrový centrální moment .... $m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^3$
   (bodový odhad
   koeficientu šikmosti: $S_{kew} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$

4. výběrový centrální moment .... $m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4$
   (bodový odhad
   koeficientu špičatosti: $K_{urt} = \frac{m_4}{m_2^2}$ -3

2.2. Vsuvka 3: Analýza datového souboru

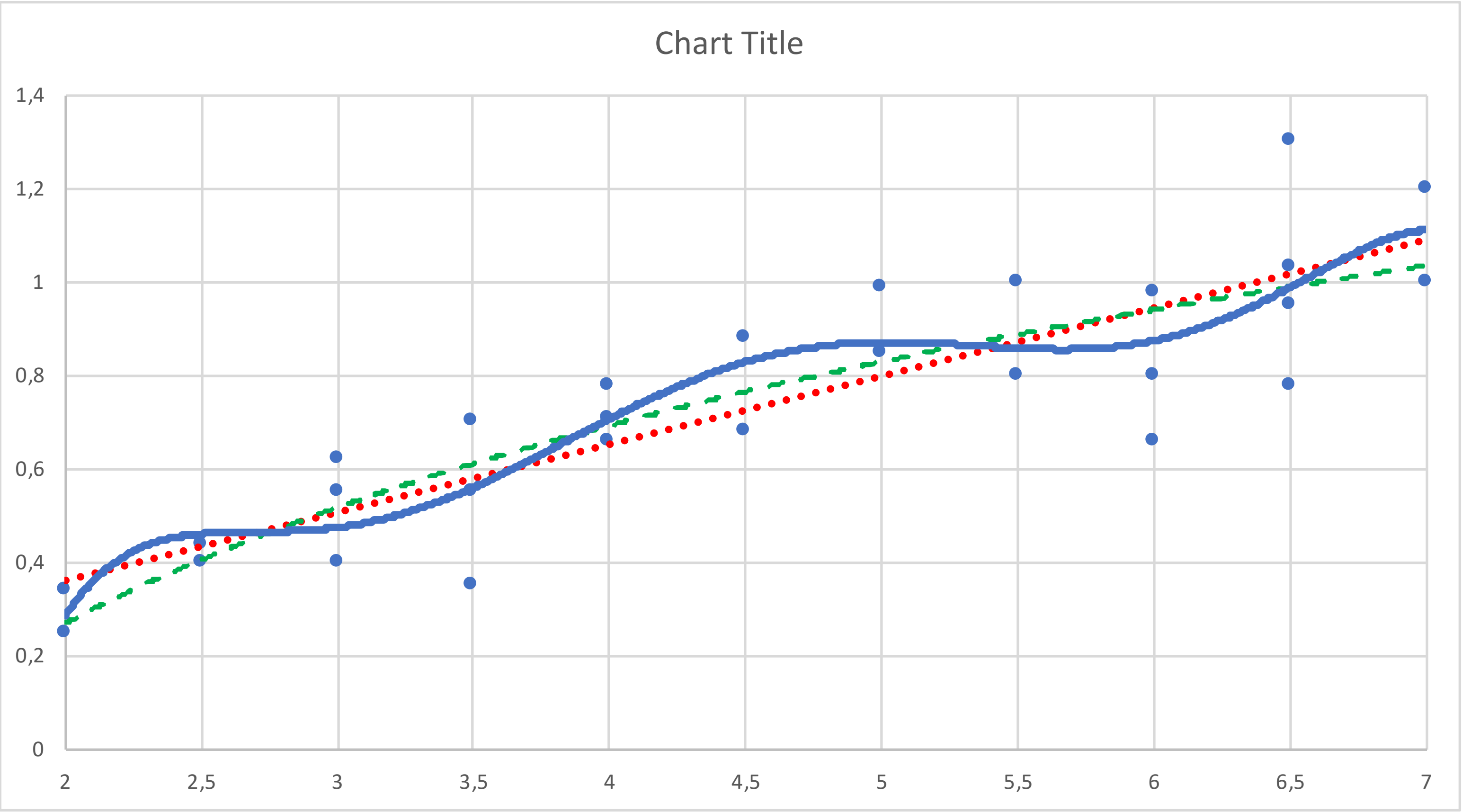
2.2. Vsuvka 3: Analýza datového souboru

- Základní charakteristiky
  - pořadové statistiky: minimum, maximum, medián, kvartily
  - momenty: průměı
  - modus, rozpětí
- **Grafická analýza**
  - krabicový graf
  - histogram
  - Q-Q graf



2.2. Vsuvka 3: Analýza datového souboru

- Základní charakteristiky
  - pořadové statistiky: minimum, maximum, medián, kvartily
  - momenty: průměr, výběrový rozptyl, šikmost, špičatost
  - modus, rozpětí
- **Grafická analýza**
  - krabicový graf
  - histogram
  - Q-Q graf
  - rozptylový graf



2.2. Vsuvka 3: Analýza datového souboru

- Základní charakteristiky
  - pořadové statistiky: minimum, maximum, medián, kvartily
  - momenty: průměr, výběrový rozptyl, šikmost, špičatost
  - modus, rozpětí
- Grafická analýza
  - krabicový graf
  - histogram
  - Q-Q graf
  - rozptylový graf
- **Test normality**

2.2. Vsuvka 3: Analýza datového souboru

Test normality na základě šikmosti a špičatosti

Za předpokladu, že výběr pochází z normálního rozdělení, platí pro index šikmosti:

$$E(S_{kew}^{norm}) = 0$$

$$Var(S_{kew}^{norm}) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

a pro index špičatosti:

$$E(K_{urt}^{norm}) = 3 - \frac{6}{n+1}$$

$$Var(K_{urt}^{norm}) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

Máme-li dostatečný počet pozorování (řádově stovky), mají statistiky

$$T_3 = \frac{S_{kew}^{norm}}{\sqrt{Var(S_{kew}^{norm})}} \qquad T_4 = \frac{K_{urt}^{norm} - E(K_{urt}^{norm})}{\sqrt{Var(K_{urt}^{norm})}}$$

přibližně standardní normální rozdělení pravděpodobnosti.

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

Jeden faktor o dvou úrovních: Srovnání dvou souborů dat, normální rozdělení

1. úroveň faktoru, n replikací: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\quad X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$

2. úroveň faktoru, m replikací: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ $\quad Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

	1	2	3	...	n
A	x_1	x_2	x_3	...	x_n
B	y_1	y_2	y_3	...	y_m

a) dvě nezávislá měření

b) párová měření

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

Jeden faktor o dvou úrovních: Srovnání dvou souborů dat, normální rozdělení

a) dvě nezávislá měření:

1. úroveň faktoru, n replikací: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\quad X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$

2. úroveň faktoru, m replikací: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ $\quad Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

	1	2	3	...	n
A	x_1	x_2	x_3	...	x_n
B	y_1	y_2	y_3	...	y_m

- oba parametry v obou případech známe
- známe střední hodnoty a neznáme rozptyly
- známe rozptyly a neznáme střední hodnoty
- žádný z parametrů neznáme

Odhady středních hodnot: $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Odhady rozptylů: $$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X-\bar{X})^2, \quad s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum (Y-\bar{Y})^2$$

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

Jeden faktor o dvou úrovních: Srovnání dvou souborů dat, normální rozdělení

a) dvě nezávislá měření:

1. úroveň faktoru, n replikací: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\quad X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$

2. úroveň faktoru, m replikací: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ $\quad Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

	1	2	3	...	n
A	x_1	x_2	x_3	...	x_n
B	y_1	y_2	y_3	...	y_m

- test shody rozptylů
- test shody středních hodnot při stejných rozptylech
- test shody středních hodnot při nestejných rozptylech

2.2. Srovnávací analýza: jeden faktor, dvě úrovně

Srovnání rozptylů dvou nezávislých měření - test shody rozptylů

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska velikosti rozptylu?

Lze považovat rozptyl dvou nezávislých měření za shodný při dané hladině významnosti?

nulová hypotéza : $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

alternativní hypotéza: $H_A : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

testová statistika : $F = \dfrac{s_X^2}{s_Y^2}$

hladina významnosti: α

F-test

Fisherovo-Snedecorovo rozdělení $F(n\text{-}1, m\text{-}1)$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude

$$F_{\alpha/2}(n-1, m-1) < F < F_{\alpha/2}(n-1, m-1)$$

2.2. Srovnávací analýza

Srovnání středních hodnot dvou nezávislých souborů dat - dvouvýběrový t-test

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska jejich střední hodnoty?

Lze považovat střední hodnoty dvou nezávislých měření za shodné při dané hladině významnosti?

Lze od sebe statisticky významně odlišit dvě nezávislá měře-ní podle jejich jejich střední hodnoty?

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ → dvouvýběrový t-test se stejnými rozptyly

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ → dvouvýběrový t-test s nestejnými rozptyly

2.2. Srovnávací analýza

Srovnání středních hodnot dvou nezávislých souborů dat - dvouvýběrový t-test

Dvouvýběrový t-test se stejnými rozptyly: $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

$$\Rightarrow s^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = s^2_{\bar{X}} + s^2_{\bar{Y}} = \frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} = \frac{s^2}{n} + \frac{s^2}{m} = s^2\left(\frac{m+n}{m.n}\right)$$

dále odhadneme s^2 ze všech naměřených hodnot:

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2\right) =$$

$$\frac{1}{n+m-2}\left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2\right)$$

tedy:

$$s^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{n+m}{nm(n+m-2)}\left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2\right)$$

2.2. Srovnávací analýza

Srovnání středních hodnot dvou nezávislých souborů dat - dvouvýběrový t-test

Dvouvýběrový t-test se stejnými rozptyly: $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$

$$s^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{n+m}{nm(n+m-2)}\Big((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2\Big)$$

Testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

ta má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n+m\text{-}2)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \le t_\alpha(n+m-2)$ kde $t_\alpha(n+m-2)$ je (oboustranná) α-kritická hodnota t-rozdělení o $(n+m\text{-}2)$ stupních volnosti.

2.2. Srovnávací analýza

Srovnání středních hodnot dvou nezávislých souborů dat - dvouvýběrový t-test

Dvouvýběrový t-test se nestejnými rozptyly: $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$: $s^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = s^2_{\bar{X}} + s^2_{\bar{Y}} = \dfrac{s_X^2}{n} + \dfrac{s_Y^2}{m}$

Testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}}$$

a má rozdělení, které je směsí t-rozdělení o $(n\text{-}1)$ a $(m\text{-}1)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude splněna nerovnost $|T| \leq At_\alpha(n-1) + Bt_\alpha(m-1)$, kde A a B jsou váhy, A+B=1.

$$A = \frac{\frac{1}{n}s_X^2}{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}, \qquad B = \frac{\frac{1}{m}s_Y^2}{\frac{1}{n}s_X^2 + \frac{1}{m}s_Y^2}$$

2.2. Srovnávací analýza

Jeden faktor o dvou úrovních: Srovnání dvou souborů dat

b) párová pozorování:

1. úroveň faktoru, n replikací: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\qquad X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$

2. úroveň faktoru, n replikací: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ $\qquad Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

	1	2	3	...	n
A	x_1	x_2	x_3	...	x_n
B	y_1	y_2	y_3	...	y_n

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných obektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech
- .....

- párový test shody středních hodnot

2.2. Srovnávací analýza

Srovnání párových souborů dat - párový t-test

1. úroveň faktoru, n replikací: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\qquad X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$

2. úroveň faktoru, n replikací: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ $\qquad Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Testujeme $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ proti $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$

máme n párových pozorování : $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$

$$\Rightarrow \quad Z_1 = X_1 - Y_1,\ Z_2 = X_2 - Y_2, \ldots,\ Z_n = X_n - Y_n,$$

$$Z \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_Z^2)$$

Testujeme $H_0 : \mu_Z = 0$ proti $H_A : \mu_Z \neq 0$

Jednovýněrový t-test o střední hodnotě veličiny Z

2.2. Srovnávací analýza

Srovnání párových souborů dat - párový t-test

Jednovýběrový t-test : $$T = \frac{\bar{Z} - a}{s_Z}\sqrt{n}$$

$$H_0 : \mu_Z = a$$
$$H_A : \mu_Z \neq a$$

T má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n\text{-}1)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \leq t_\alpha(n-1)$ kde $t_\alpha(n-1)$ je (oboustranná) α-kritická hodnota t-rozdělení o $(n\text{-}1)$ stupních volnosti.

2.2. Srovnávací analýza

Jednostranné srovnávací testy

“dolní” nebo “horní” jednostranná alternativa :

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad\qquad H_0 : \mu_X = \mu_Y$$
$$H_A : \mu_X < \mu_Y \qquad\qquad H_A : \mu_X > \mu_Y$$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude buď $T > t_\alpha(n-1)$ nebo $T < -t_\alpha(n-1)$, kde $t_\alpha(n-1)$ je (jednostranná) α-kritická hodnota t-rozdě-lení o $(n$-$1)$ stupních volnosti.

oboustranná α-kritická hodnota je $(1-\alpha/2)$-kvantil $t_{1-\alpha/2}(n-1)$

jednostranná α-kritická hodnota je $(1-\alpha)$-kvantil $t_{1-\alpha}(n-1)$

2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Dodavatel X:

```
> x
  [1]  0.41379418  0.51040227  3.28722973  7.31995568  4.53994434 -1.07426821
  [7]  4.74575978  2.55201407  3.22058685 -1.17401554 -1.24119500  4.18294690
 [13]  0.65486399 -0.18908709 -0.73101186  1.27876451  1.26734875  2.78570344
 [19]  2.96834139  1.22145702  1.80851440 -0.80356569  2.57347292  3.42552806
 [25]  1.66904559 -2.21179295  4.17696270  2.15191523  3.62707736  0.06900211
 [31]  0.51371315  0.54983237  4.09554316  1.28465289  4.05350899  5.10504379
 [37]  4.25580572  0.79826235 -1.02042629  1.87299786  0.14051938  3.05622839
 [43]  4.74780021  4.54794140 -6.54132331  1.94429658  1.95488616  4.73267571
 [49]  4.83082378  2.95830720  2.99769818 -1.07337799  0.58403864  2.73050678
 [55]  0.28021230 10.49771713  2.36870296  0.60689702  8.42679434  1.29763889
 [61]  1.31289734  1.93230073  5.92597773  1.49746935  6.30721756  3.15585521
 [67]  5.38824907  3.27322441  3.41248356 -0.40437473  3.19350142 -4.06261001
 [73] -1.05763312 -0.39748962  0.86637433  2.02108109 -1.06445976  1.10375263
 [79]  4.51823259 -0.75725877 -0.87173075 -2.19932463  7.70167909  1.48655986
 [85]  4.90757730  5.51652338 -0.34615559  0.01031344  4.57582354  1.17516968
 [91] -0.21932558 -1.27848277  2.97655676  1.44863955  3.67881403  0.30868429
 [97] -2.52052309  0.05248743  0.07728483 -1.12975005  3.99585182  0.79045260
[103]  3.73159608  7.36490361  6.40646375 -1.54228149 -0.65100869  4.04305846
[109]  2.47766853 -3.48957597  6.20840771  0.40560482  0.49118447 -1.48277951
[115] -1.23675030  5.16138353  1.15383008  2.75286404  4.70183189 -2.29877355
```

2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Dodavatel Y:

```
> y
  [1]  6.65956934  2.78876119  0.33397602 -0.03763918  0.74993937  3.81490677
  [7]  1.70428804 -3.31291341 -0.22972370  4.02124752  5.93229834  3.30506070
 [13] -3.61277063  0.78809415  0.37976841  1.52357320  1.76230055  1.03078642
 [19] -2.74093726  2.77205578 -0.25596771 -0.79295335 -1.99567925  7.14183490
 [25]  6.56129569 -2.39785588 -2.30807391 -1.02088455 -2.26040839 -2.76088135
 [31]  1.81877126  0.14669279  4.21783231 -2.13184320  3.69196005 -2.69614367
 [37] -2.68014820  3.72209577  1.73709472 -0.70580812  0.07337669  2.17063230
 [43]  2.72495294  5.04390706  1.32219033  4.72349163 -0.67638087  2.64424944
 [49]  2.78769261 -2.10997705  4.26042721 -3.50266144  1.72564280 -2.07028305
 [55] -4.59779260 -1.71953774  2.90307934  1.38358058  3.42339203 -1.68000430
 [61]  7.55683608  6.32574310 -2.60318964  3.24511198  0.97390332  2.22611398
 [67]  0.83831831  0.07828888  2.29402602  2.68356827  0.07483911  3.38214384
 [73] -0.59180508  9.07209729 -1.27708114  4.77997853 -0.83918672  6.26383807
 [79]  1.50674691  3.25716693  5.70351834  5.80174051  3.61099316  2.19293272
 [85] -1.46102337 -0.97135778  1.54849399  4.34257358 -1.64886246  2.44942102
 [91]  2.68469434  1.64707956  5.49827517  1.01640668  4.43099277  2.23430799
 [97] -1.74337571  6.43458332  2.94137432 -1.01569579
```

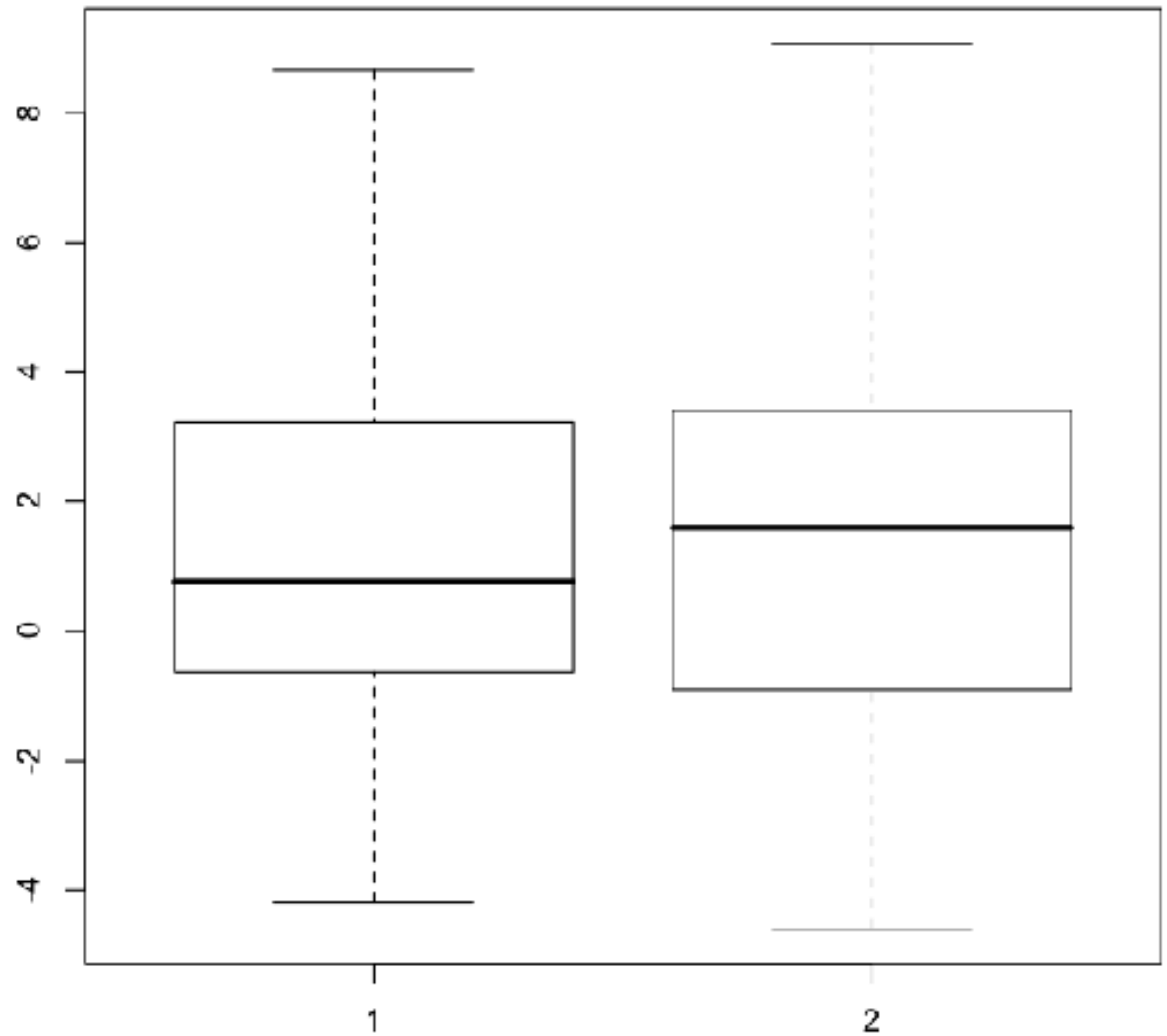
2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedenv v cm.

1) Vizualizace dat:
Box&Whiskers diagram



2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

2) Srovnání rozptylů: F-test

```
> var.test(x,y)

    F test to compare two variances

data:  x and y
F = 0.8712, num df = 119, denom df = 99, p-value = 0.4701
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.5943383 1.2684711
sample estimates:
ratio of variances
         0.8711758
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme, rozptyly se statisticky významně neliší

2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

3) Srovnání středních hodnot: dvouvýběrový t-test se shodnými rozptyly

```
> t.test(x,y, var.equal=T)

   Two Sample t-test

data:  x and y
t = 1.0375, df = 218, p-value = 0.3007
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3598731  1.1598308
sample estimates:
mean of x mean of y
 1.884360  1.484381
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme, střední hodnoty se statisticky významně neliší

2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

1) Data:

```
> pred_cvicenim
  [1] 12.666378  7.322789 15.021706 13.616913 10.970712  5.464451
  [7]  9.999636 15.693764 13.771444 17.065310  6.940708 15.860749
 [13] 18.019348  6.326531 20.647763 23.005369 14.619170 20.787108
 [19] 14.238225  9.674337 14.763170  9.613791  9.727326  9.146292
 [25] 21.246960 16.200128 15.466065 13.691879  9.032113 10.558392
 [31] 18.258896 14.992416 14.722569 10.579842 10.758363  8.894299
 [37] 13.502299 12.994734 14.775563  9.818535 18.208089  8.438143
 [43]  8.282819 11.090392 15.174881  7.704479  8.917742 10.275903
 [49] 11.488700 16.572150 18.892428 13.544225  9.309845 13.713258
 [55] 12.904993  8.951567  9.041688 10.222305 14.136072  9.222289
 [61] 15.208694 14.627659 15.287092 11.389052  7.716052 14.307632
 [67] 14.647653 18.705963 13.665201  8.025347 13.157791 14.336731
 [73]  9.548584 12.522605 11.876452 12.241549 12.944160 17.637175
 [79]  9.854223 17.877400 15.892081  9.893356  7.791175 11.901961
 [85] 15.605362 13.464186 12.451922 16.090626  8.907932 16.333859
 [91] 13.554146 19.586575 11.765020  9.981692  5.325750 20.168371
 [97] 12.485393 14.349888 14.198229  7.315012 16.787920 10.998550
[103] 10.377856 13.531181 12.258939 11.346062 12.998020  8.498104
[109] 14.195263 15.372914 11.698431 12.929311 11.232474 21.551867
[115] 10.436798 14.430260 18.836296 14.838428 14.450987 10.879682
```

2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

1) Data:

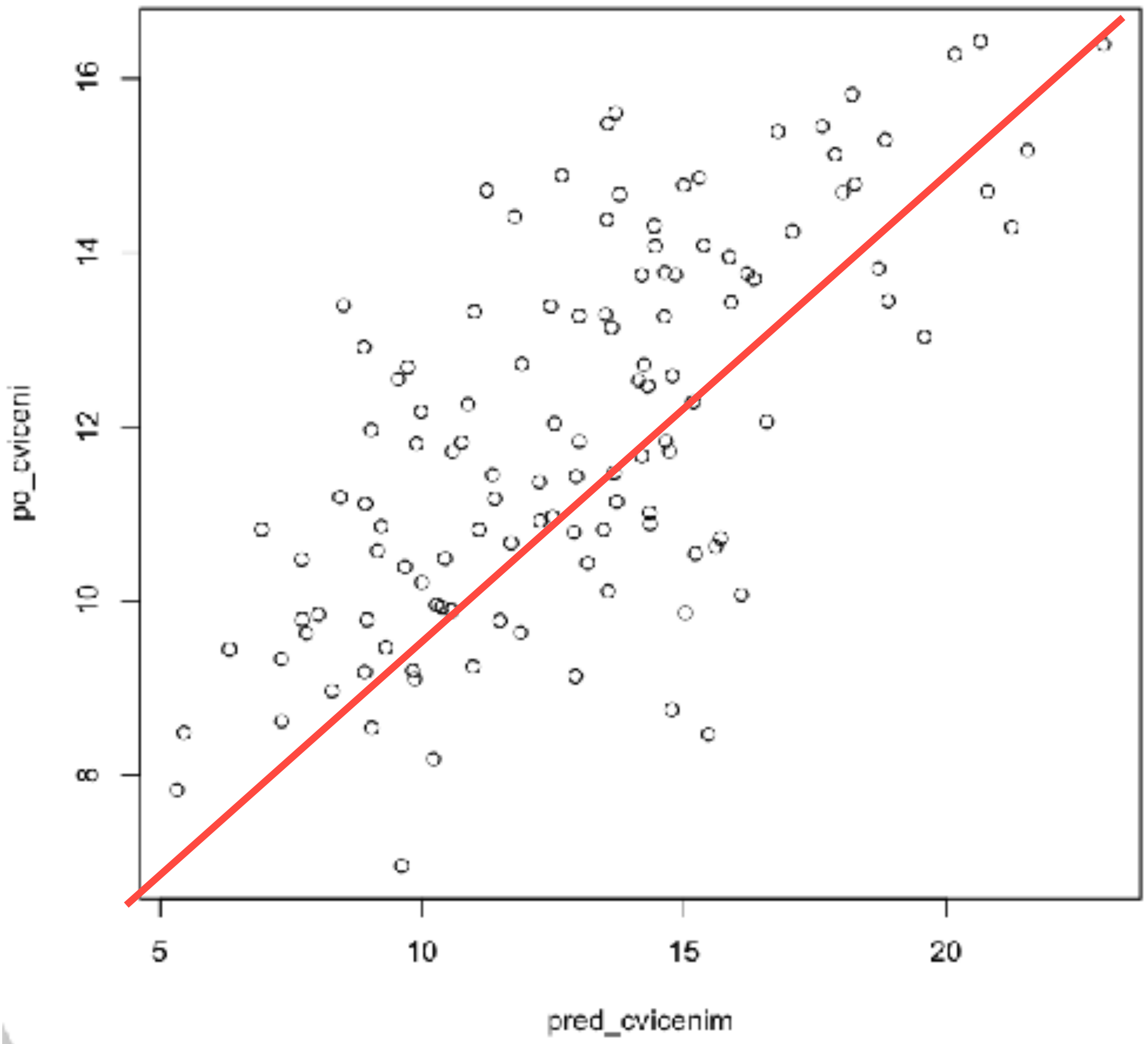
```
> po_cviceni
  [1] 14.889379  8.627612  9.867455 13.141168  9.249122  8.490774
  [7] 10.217290 10.724403 14.669450 14.243944 10.826905 13.951521
 [13] 14.693401  9.449562 16.425888 16.392689 13.265474 14.704994
 [19] 12.718107 10.395385  8.756276  6.961521 12.688497 10.578342
 [25] 14.294064 13.763032  8.472324 15.605253 11.968936  9.897284
 [31] 14.788205 14.773378 11.723336 11.719464 11.824407 12.914485
 [37] 13.291805 13.272867 12.586791  9.202608 15.817188 11.197137
 [43]  8.974410 10.823942 12.289400 10.483861 11.119684  9.956822
 [49]  9.778551 12.062084 13.449972 15.481139  9.470557 11.143402
 [55] 10.793291  9.786869  8.547580  8.188947 12.532635 10.862473
 [61] 10.547040 13.774638 14.861969 11.180668  9.790466 12.469556
 [67] 11.837173 13.820717 11.476120  9.850563 10.440890 11.015557
 [73] 12.547672 12.041457  9.639740 11.368657 11.431948 15.449064
 [79]  9.110052 15.125478 13.433802 11.807514  9.632299 12.725762
 [85] 10.628523 10.824474 13.389953 10.077884  9.185360 13.697777
 [91] 10.116078 13.036067 14.412094 12.175099  7.835201 16.277825
 [97] 10.967441 10.892966 11.668289  9.340267 15.392018 13.323701
[103]  9.928631 14.378075 10.924935 11.448320 11.836161 13.397990
[109] 13.744963 14.083459 10.668370  9.139692 14.716621 15.173684
[115] 10.493444 14.308470 15.295041 13.748886 14.074436 12.261138
```

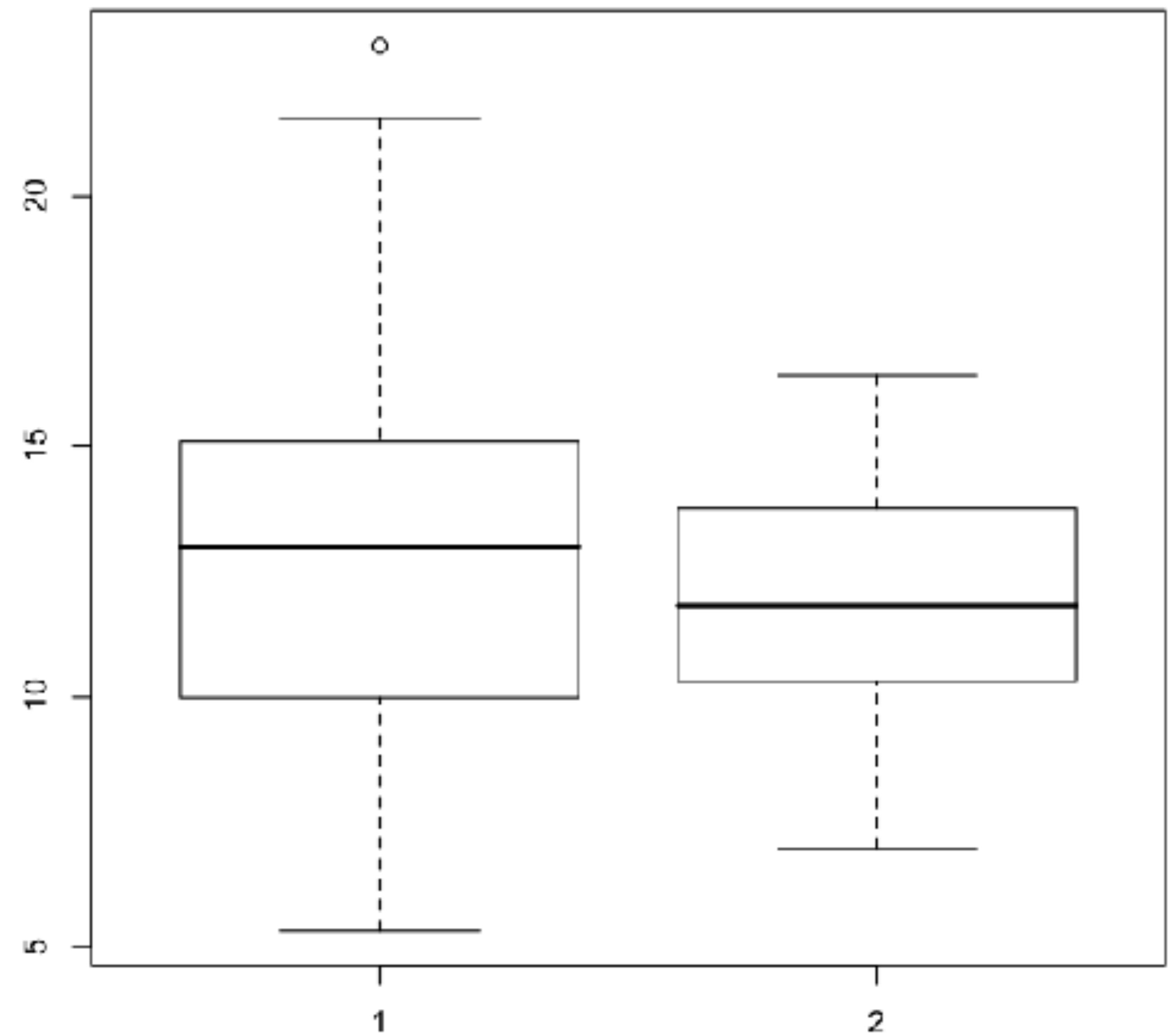
2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

2) Grafické zobrazení





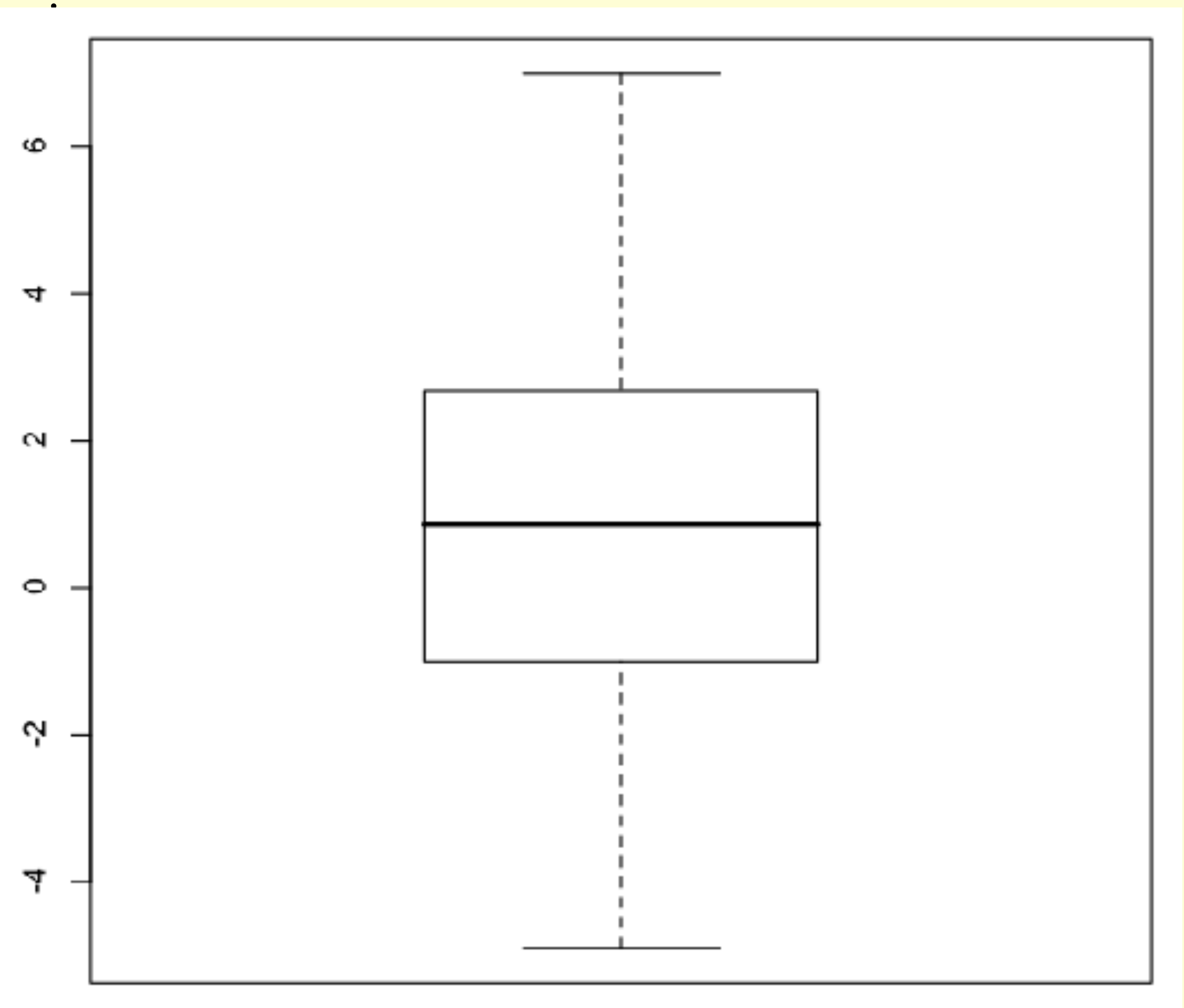
2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

3) Rozdíly:

```
> rozdil = pred_cvicenim - po_cvic
> rozdil
  [1] -2.22300091 -1.30482283  5.1
  [7] -0.21765415  4.96936015 -0.8
 [13]  3.32594695 -3.12303070  4.2
 [19]  1.52011877 -0.72104757  6.0
 [25]  6.95289576  2.43709534  6.9
 [31]  3.47069129  0.21903888  2.9
 [37]  0.21049440 -0.27813376  2.1
 [43] -0.69159043  0.26644963  2.8
 [49]  1.71014906  4.51006508  5.4
 [55]  2.11170209 -0.83530141  0.4
 [61]  4.66165463  0.85302053  0.4
 [67]  2.81048012  4.88524631  2.1
 [73] -2.99908758  0.48114855  2.2
 [79]  0.74417071  2.75192209  2.4
 [85]  4.97683829  2.63971186 -0.9
 [91]  3.43806805  6.55050838 -2.6
 [97]  1.51795203  3.45692228  2.5
[103]  0.44922574 -0.84689404  1.3
[109]  0.45029949  1.28945495  1.0
[115] -0.05664624  0.12179055  3.5
```



2.2. Srovnávací analýza

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

4) Párový t-test:

```
> t.test(rozdil, mu=0)

   One Sample t-test

data:  rozdil
t = 4.0391, df = 119, p-value = 9.54e-05
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.5089508 1.4878397
sample estimates:
mean of x
0.9983952
```

=> nulovou hypotézu zamítáme, cvičení mělo vliv a rychlost reakce se statisticky významně zvýšila

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

Jeden faktor o dvou úrovních: Srovnání dvou souborů dat, obecné rozdělení

1. úroveň faktoru, n replikací: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

2. úroveň faktoru, m replikací: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$

a) dvě nezávislá měření
b) párová měření

	1	2	3	...	n
A	x_1	x_2	x_3	...	x_n
B	y_1	y_2	y_3	...	y_m

Neparametrické testy pro srovnání dvou souborů dat:

1)Dvouvýběrový Wilcoxonův test
2)Párový (jednovýběrový) Wilcoxonův test
3)Znaménkový test

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

Jeden faktor o dvou úrovních: Srovnání dvou souborů dat, obecné rozdělení

Neparametrické testy jsou založeny na **pořadových statistikách:**

Dvouvýběrový Wilcoxonův test $H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad H_A : \mu_X \neq \mu_Y$

- Sloučíme všechna měření v jeden soubor: $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$
- Uspořádáme jej podle velikosti a potom určíme:
  - R_k^X= pořadí k-tého pozorování X ve spojeném souboru
  - R_l^Y = pořadí l-tého pozorování Y ve spojeném souboru
  - R^X = součet všech R_k^X pro k=1, …, n a R^Y= součet všech R_l^Y pro l=1, …, m

Pro malá n, m (do 30) porovnáváme přímo jednu z hodnot buď R^X nebo R^Y s kritickými hodnotami pro dvouvýběrový Wilcoxonův test (viz např. https://is.muni.cz/th/r5oe7/Bakalarska_prace.pdf), pro velké hodnoty n a m (nad 30) lze jako testovou statistiku použít

$$W = \frac{R^X - E(R^X)}{\sqrt{var(R^X)}}$$

kde $E(R^X) = \frac{n(m+n+1)}{2}, \quad var(R^X) = \frac{mn(m+n+1)}{12}$

Tato statistika má přibližně N(0,1) rozdělení.

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

Jeden faktor o dvou úrovních: Srovnání dvou souborů dat, obecné rozdělení

Neparametrické testy jsou založeny na **pořadových statistikách:**

Párový Wilcoxonův test

- Spočítáme rozdíly $(X_1\text{-}Y_1), (X_2\text{-}Y_2), \ldots, (X_n\text{-}Y_n)$ a vyloučíme nulové rozdíly
- Uspořádáme je podle velikosti absolutních hodnot a potom určíme:
  - R_k^+= pořadí k-tého kladného rozdílu, R_l^- = pořadí l-tého záporného rozdílu
  - R^+ = součet všech R_k^+ a R^-= součet všech R_l^-

Pro malá n, m (do 30) porovnáváme přímo jednu z hodnot buď R^+ nebo R^- s kritickými hodnotami pro jednovýběrový Wilcoxonův test (viz např. https://is.muni.cz/th/r5oe7/Bakalarska_prace.pdf), pro velké hodnoty n a m (nad 30) lze jako testovou statistiku použít

$$V = \frac{R^+ - E(R^+)}{\sqrt{var(R^+)}}$$

kde $E(R^+) = \dfrac{n^*(n^*+1)}{4}, \quad var(R^+) = \dfrac{n^*(n^*+1)(2n^*+1)}{24}$ a n* je počet nenulových rozdílů. Tato statistika má přibližně N(0,1) rozdělení.

2.2. Kvantitativní odezva, jeden faktor

Jeden faktor o dvou úrovních: Srovnání dvou souborů dat, obecné rozdělení

Neparametrické testy jsou založeny na **pořadových statistikách:**

Znaménkový test (párový test)

- Spočítáme rozdíly $(X_1 - Y_1)$, $(X_2 - Y_2)$, ..., $(X_n - Y_n)$ a vyloučíme nulové rozdíly
- Spočteme počet záporných rozdílů Z a počet nenulových rozdílů n*

Statistika Z má binomické rozdělení s parametry n* a 1/2, pro velké hodnoty n* ji lze aproximovat normáním rozdělením a tedy test založit na statistice

$$S = \frac{|2Z - n^*|}{\sqrt{n^*}}$$

která má přibližně N(0,1) rozdělení. Hypotézu o shodě zamítáme, když je $S \geq u(1 - \alpha/2)$.