Pravděpodobnost a matematická statistika

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.
dohnal@nipax.cz

I. Úvod

https://sms.nipax.cz/pas

Základy stochastiky

(1) Jiří Likeš, Josef Machek: Počet pravděpodobnosti. Sešit X edice MVŠT, SNTL Praha 1981

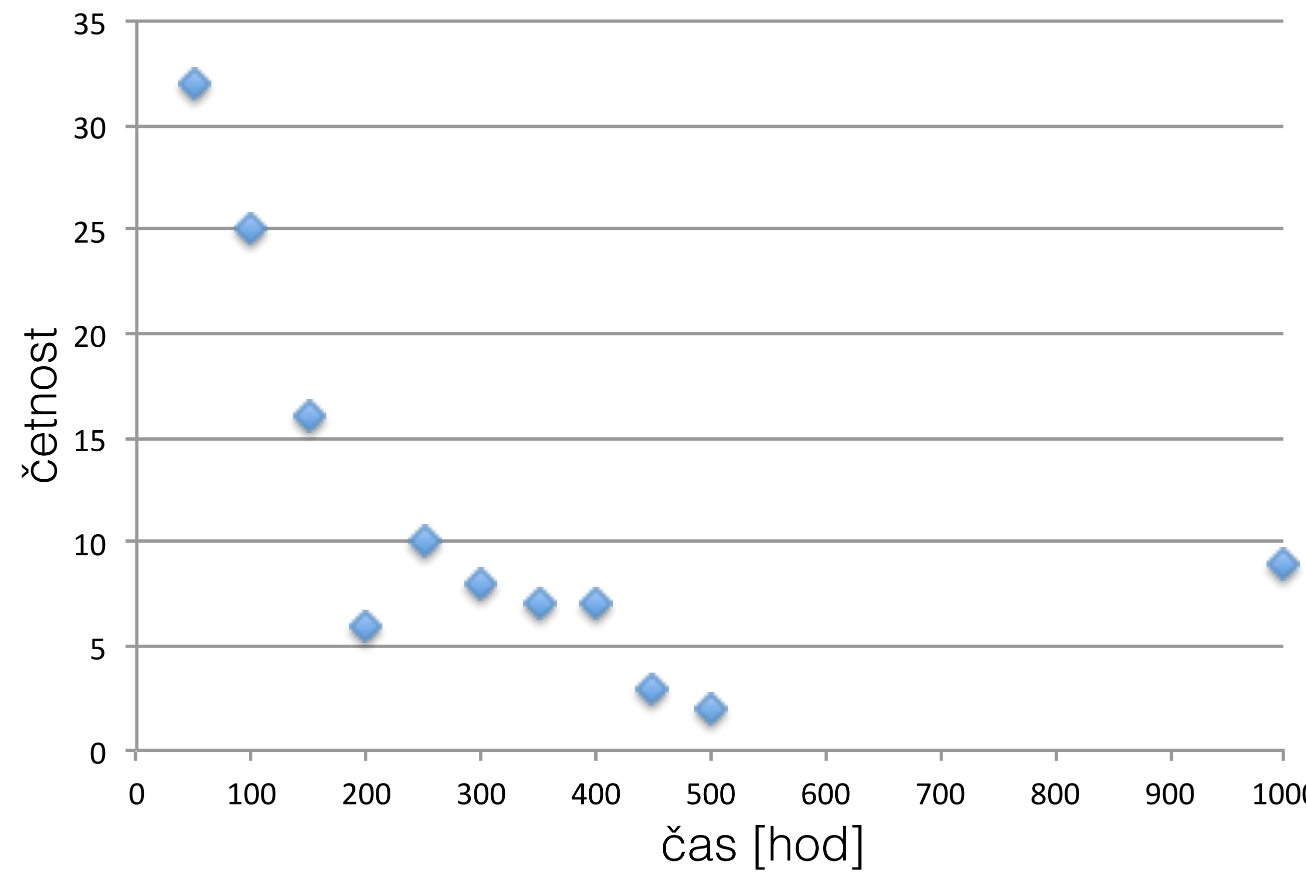
(2) Jiří Likeš, Josef Machek: Matematická statistika. Sešit XI edice MVŠT, SNTL Praha 1988 (2. vydání)

(3) tyto přednášky a další učebnice naleznete na adrese:

https://sms.nipax.cz/pas

Doba do poruchy navigačních přístrojů

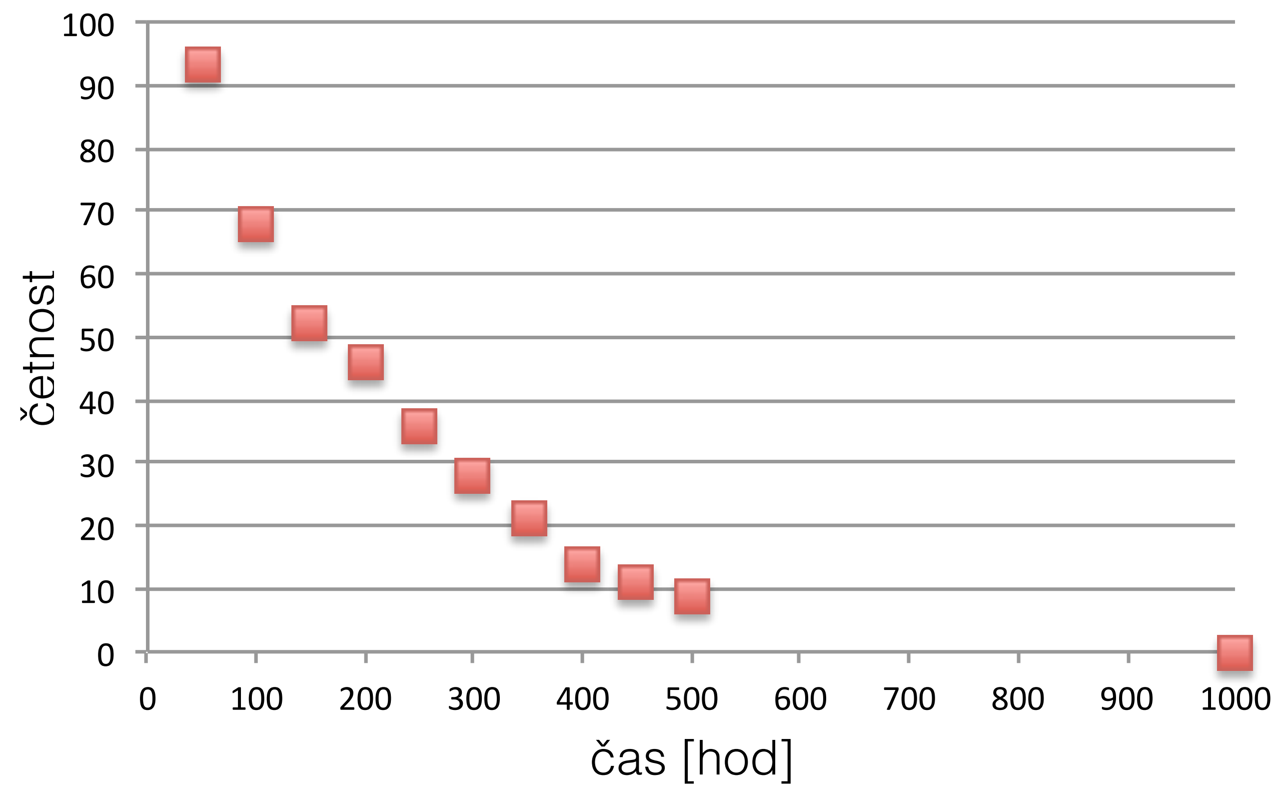
i	t_i	n_i
1	50	32
2	100	25
3	150	16
4	200	6
5	250	10
6	300	8
7	350	7
8	400	7
9	450	3
10	500	2
11	1000	9



i … pořadové číslo intervalu,
t_i … horní mez intervalu i [hod],
n_i … četnost poruch v intervalu i,

Doba do poruchy navigačních přístrojů

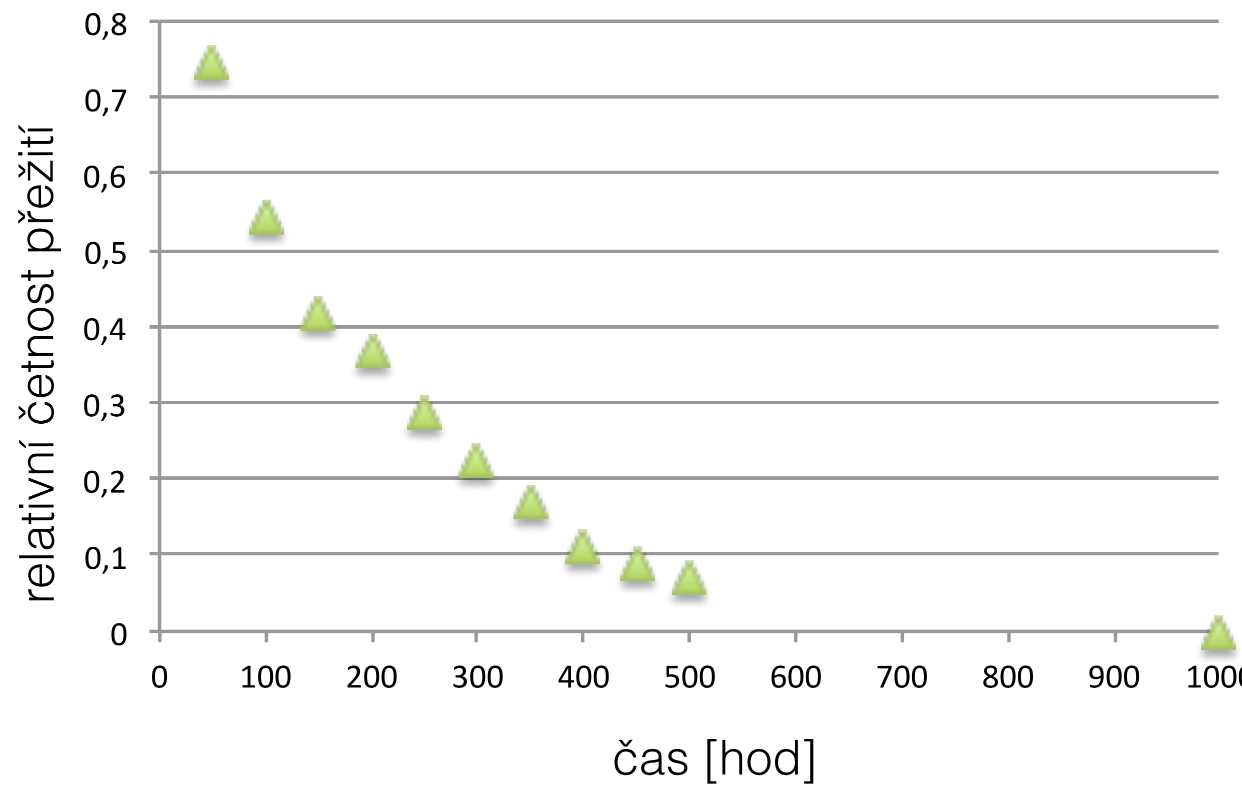
i	t_i	n_i	R_i
1	50	32	93
2	100	25	68
3	150	16	52
4	200	6	46
5	250	10	36
6	300	8	28
7	350	7	21
8	400	7	14
9	450	3	11
10	500	2	9
11	1000	9	0



i … pořadové číslo intervalu,
t_i … horní mez intervalu i [hod],
n_i … četnost poruch v intervalu i,
R_i … četnost přežití intervalu i,

Doba do poruchy navigačních přístrojů

i	t_i	n_i	R_i	R_i/n
1	50	32	93	0,744
2	100	25	68	0,544
3	150	16	52	0,416
4	200	6	46	0,368
5	250	10	36	0,288
6	300	8	28	0,224
7	350	7	21	0,168
8	400	7	14	0,112
9	450	3	11	0,088
10	500	2	9	0,072
11	1000	9	0	0

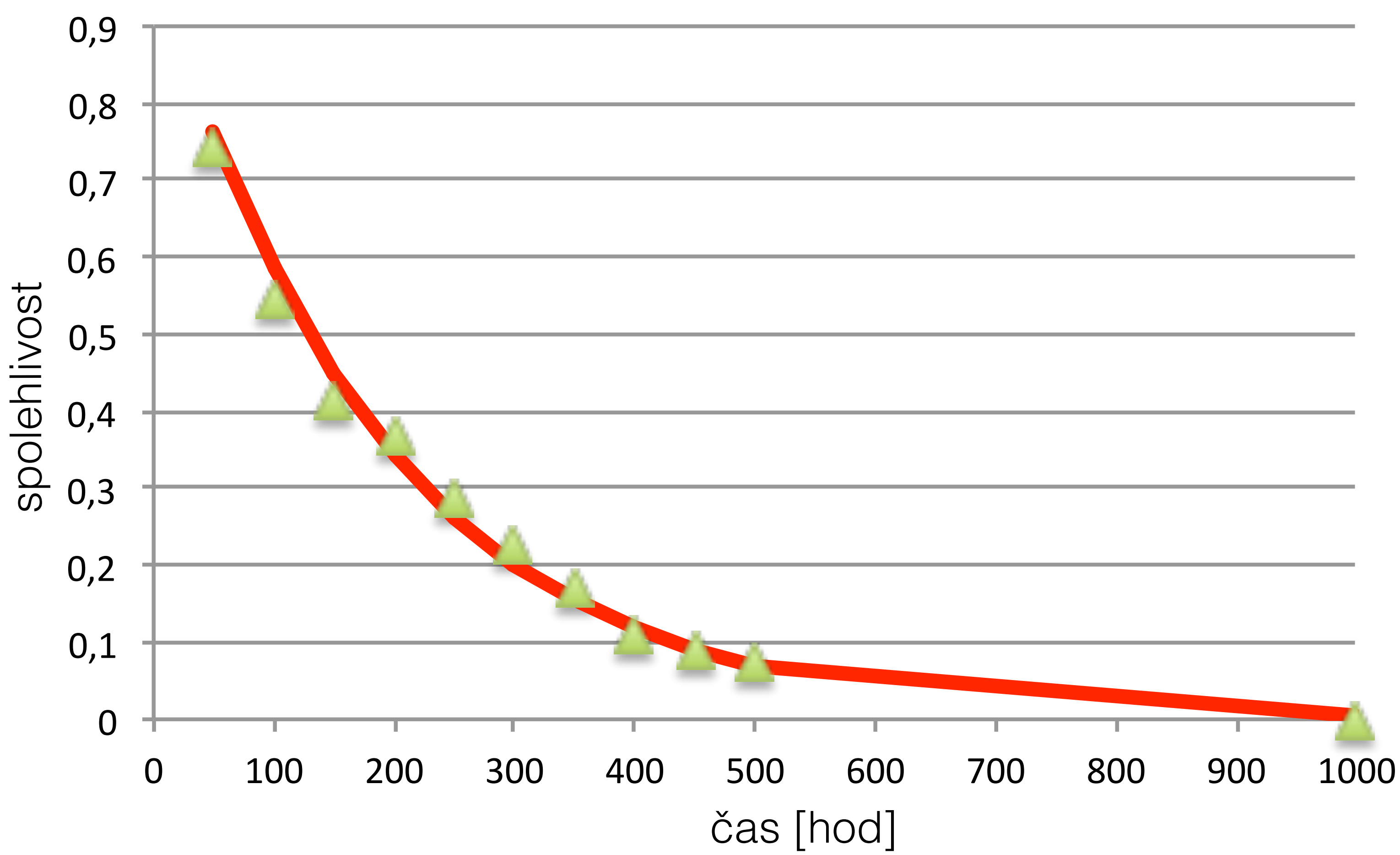


i … pořadové číslo intervalu,
t_i … horní mez intervalu i [hod],
n_i … četnost poruch v intervalu i,

R_i … četnost přežití intervalu i,
R_i/n … relativní četnost přežití,

Doba do poruchy navigačních přístrojů

i	t_i	n_i	R_i	R_i/n	$P(t_i)$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					



i … pořadové číslo intervalu,
t_i … horní mez intervalu i [hod],
n_i … četnost poruch v intervalu i,
R_i … četnost přežití intervalu i,
R_i/n … relativní četnost přežití,
$P(t_i)$… odhad funkce spolehlivosti.

Nebezpečný fotbal

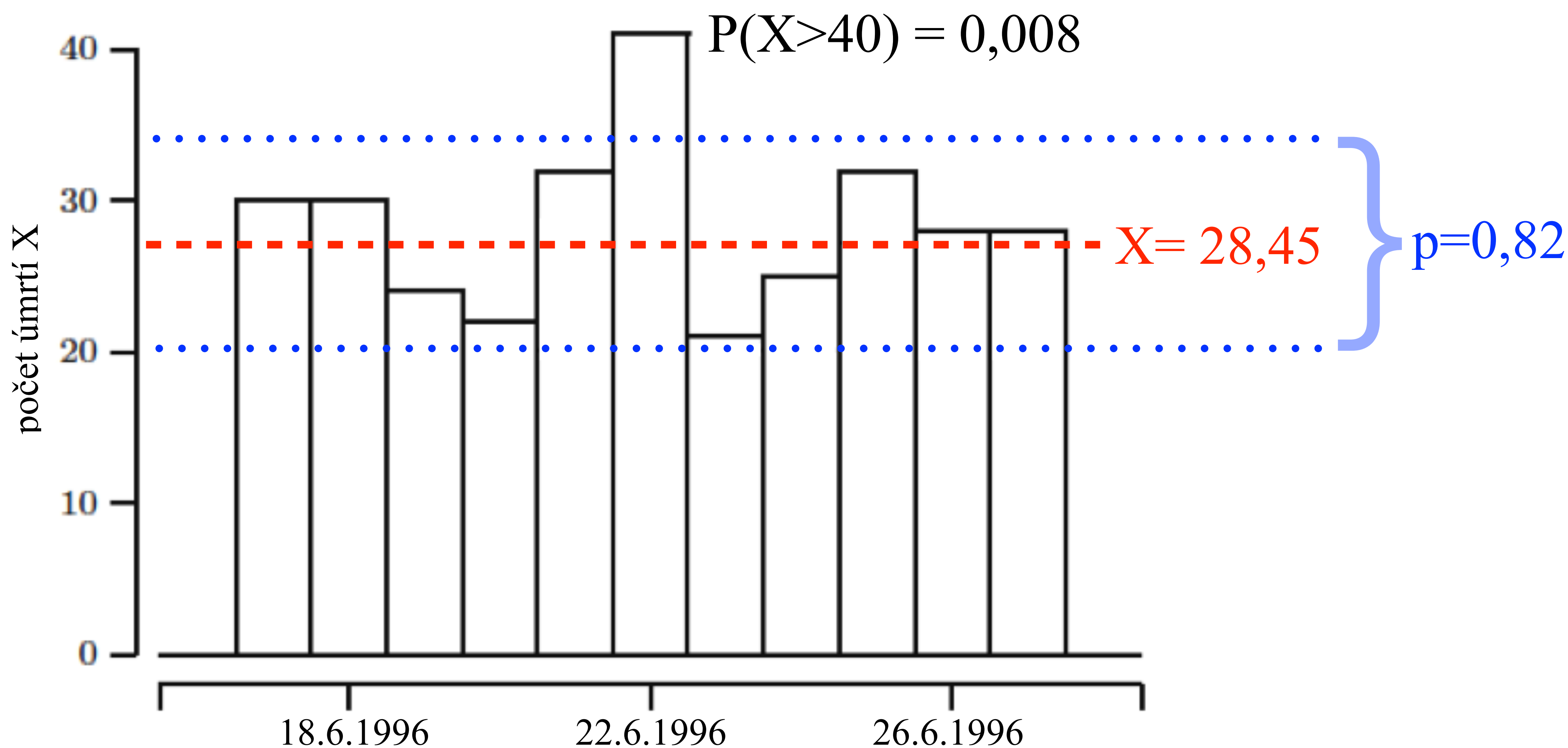
Může fotbal zabíjet?

Dne 22. června bylo vyřazeno Nizozemské mužstvo z Evropského fotbalového šampionátu. Byla porovnána úmrtnost holandské populace starší 45 let z tohoto dne následkem infarktu myokardu s úmrtností 5 dnů před a 5 dnů po této události s cílem zjistit, zda v daný den došlo k výrazné změně.

D.R. Witte et al.: *Cardiovascular mortality in Dutch men during 1996 European foolball championship: longitudinal population study.*
British Medical Journal, vol. 321 (2000), str. 1552–1554.

Nebezpečný fotbal

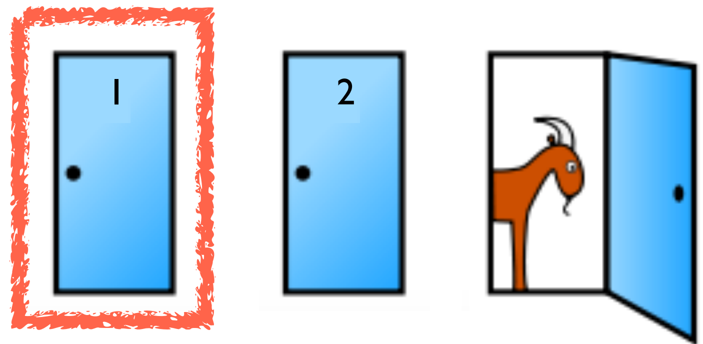
D.R. Witte et al.: *Cardiovascular mortality in Dutch men during 1996 European foolball championship: longitudinal population study.*
British Medical Journal, vol. 321 (2000), str. 1552–1554.



$$P(20 < X_{17}\ldots X_{21} < 35,\ X_{22} > 40,\ \ 20 < X_{23}\ldots X_{27} < 35) = 0{,}82^5.0{,}008.0{,}82^5 = 0{,}0011$$

$$1/0{,}0011 = 899 \text{ dní} = 2{,}46 \text{ roku}$$

Problém tří dveří (Monty Hall Problem)



?

http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimpleMontyHall/

Balící automat na kávu

24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455
24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721
24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405
23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285
24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777
24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906

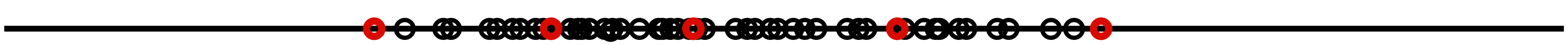
Balící automat na kávu

Stem and Leaf diagram

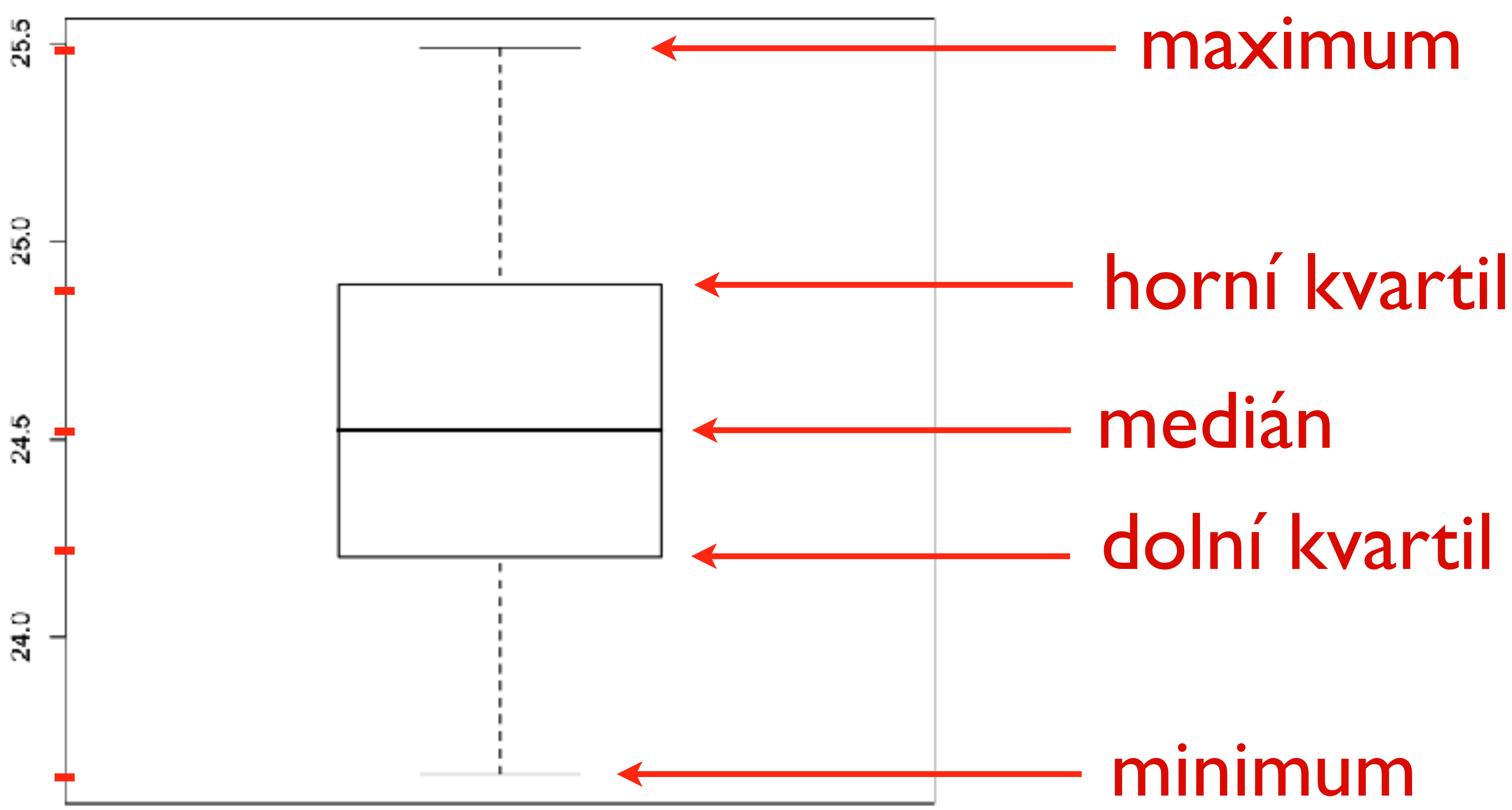
254 | 39 ← maximum
252 | 03
250 | 46733
248 | 179099 ← horní kvartil
246 | 24690369
244 | 04578234 ← medián
242 | 00113556 ← dolní kvartil
240 | 0477
238 | 44348
236 | 52 ← minimum

Balící automat na kávu

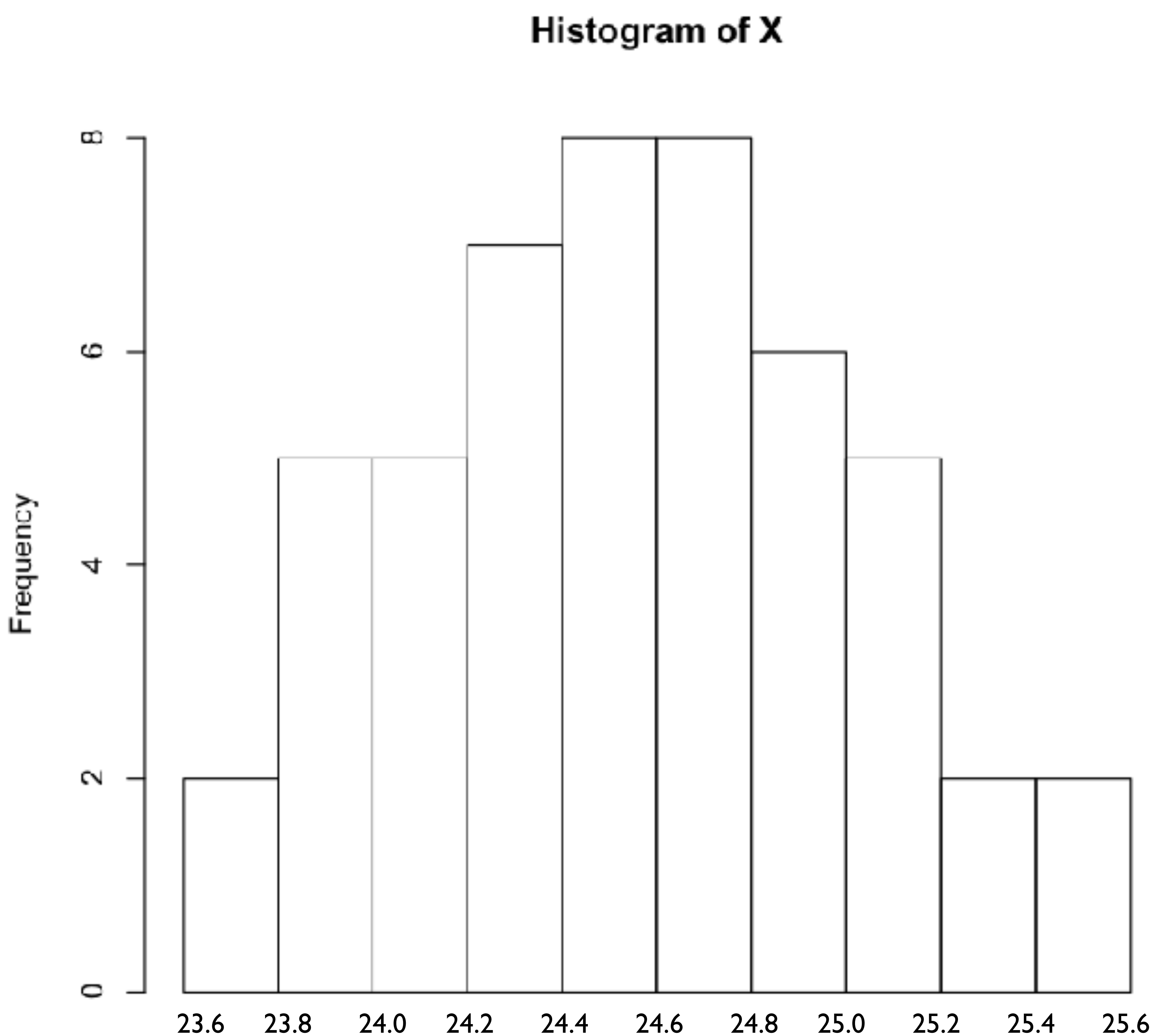
24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455
24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721
24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405
23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285
24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777
24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906



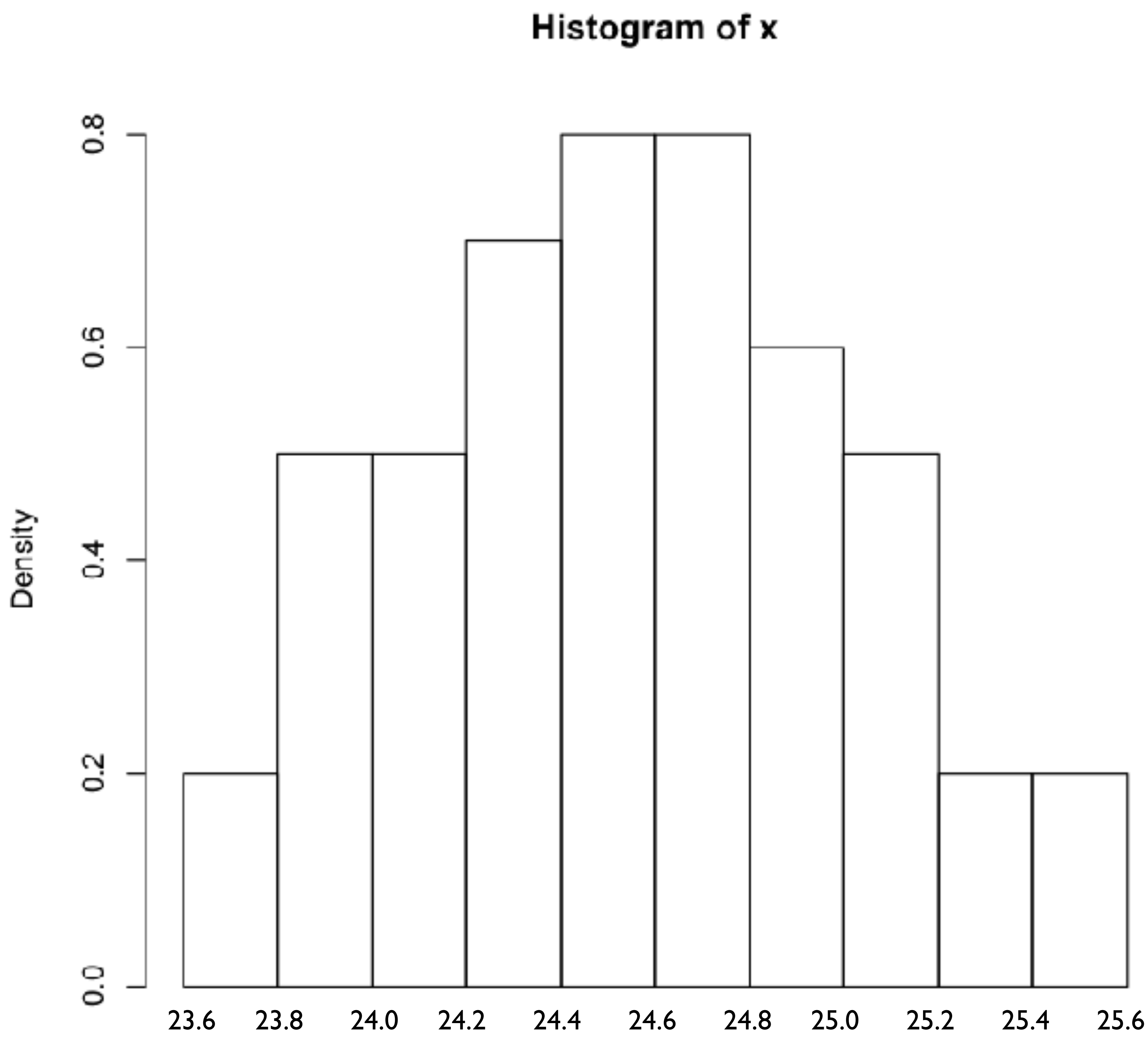
Balící automat na kávu



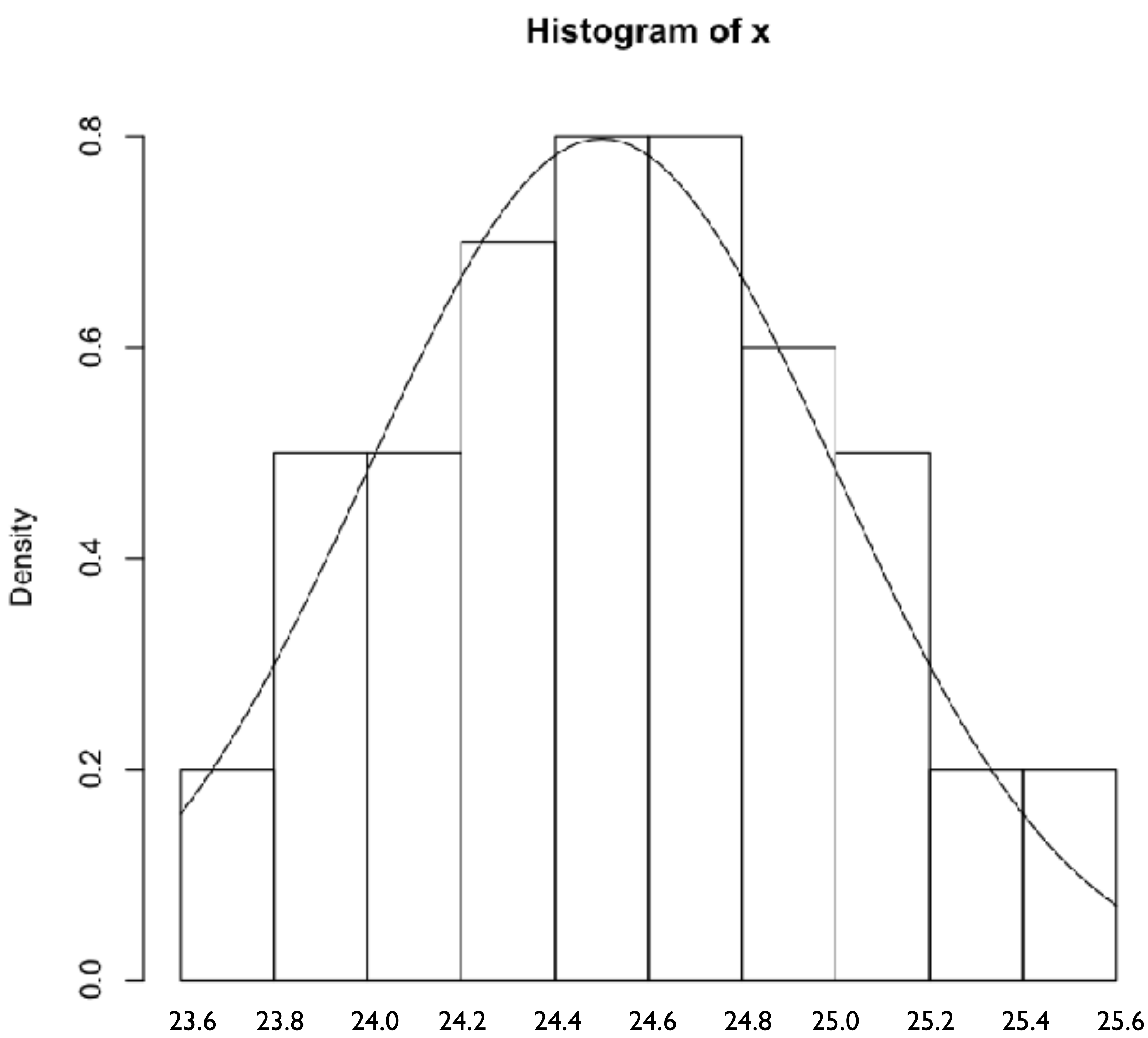
Balící automat na kávu



Balící automat na kávu



Balící automat na kávu



Balící automat na kávu

Výběrový průměr

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = 24.54689$$

Výběrový rozptyl

$$s_{n-1}^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2 = 0.2102477$$

Výběrová směrodatná odchylka

$$s_{n-1}(X) = \sqrt{s_{n-1}^2(X)} = 0.4585277$$

Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

0.26	5.00	8.65	7.20	1.62	2.91	0.17	6.05	2.70	3.95
1.12	3.18	3.27	7.45	3.08	0.81	3.65	0.40	0.32	0.23
0.57	6.24	4.65	6.49	2.80	5.62	11.78	4.17	0.48	1.15
0.93	1.32	3.43	0.28	5.95	0.63	1.91	3.94	2.57	4.81
1.81	5.04	2.05	12.64	1.73	10.54	5.75	5.41	5.21	2.39

$Y_{min} = 0.17$

$Y_{max} = 12.64$

$Y_{med} = 3.13$

$Y_{LQ} = 1.15$

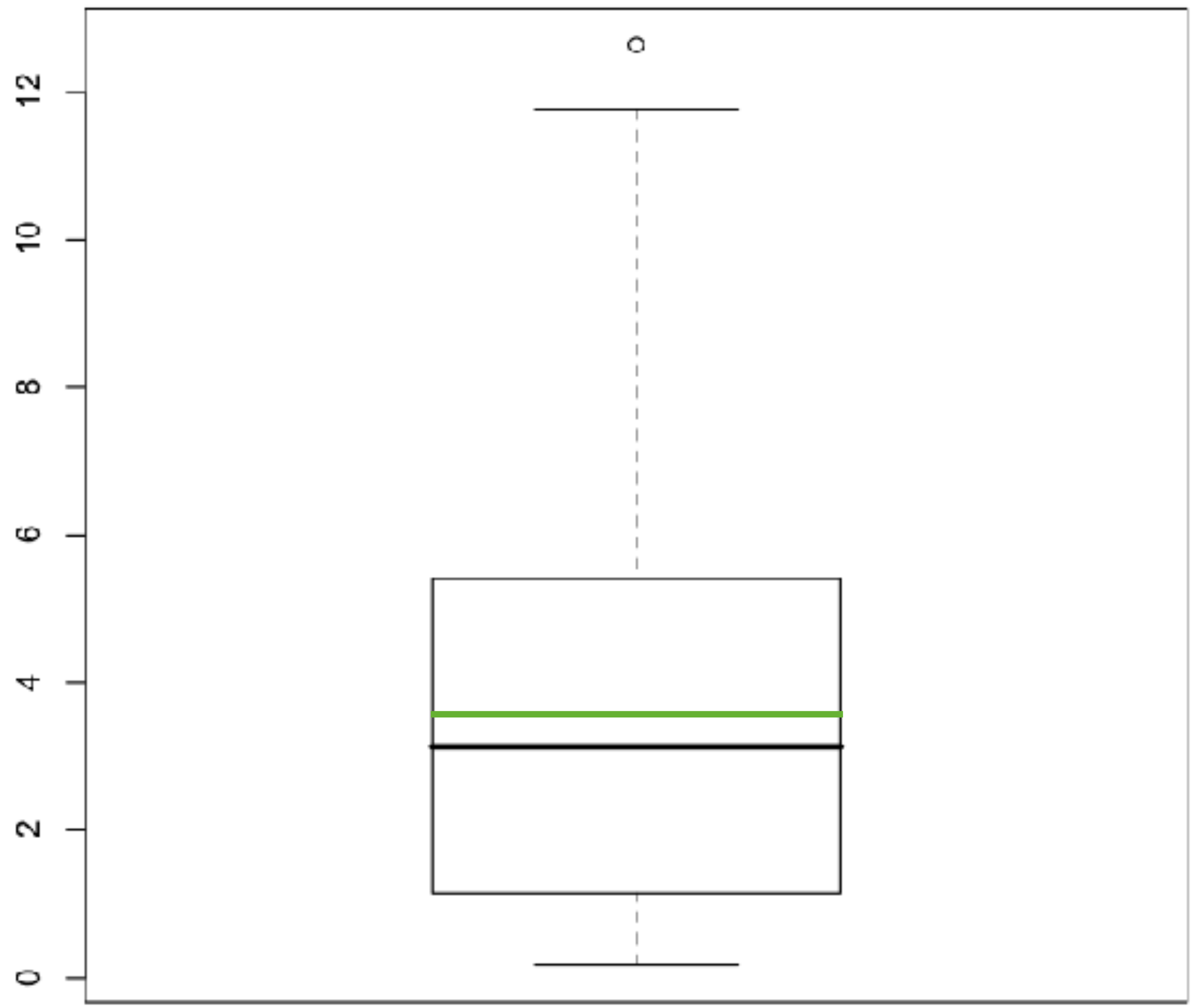
$Y_{UQ} = 5.41$

0	223334566891136789
2	146789123479
4	0278002468
6	012525
8	7
10	58
12	6

$\overline{Y} = 3.69$

$s^2_{n-1}(Y) = 9.0957$

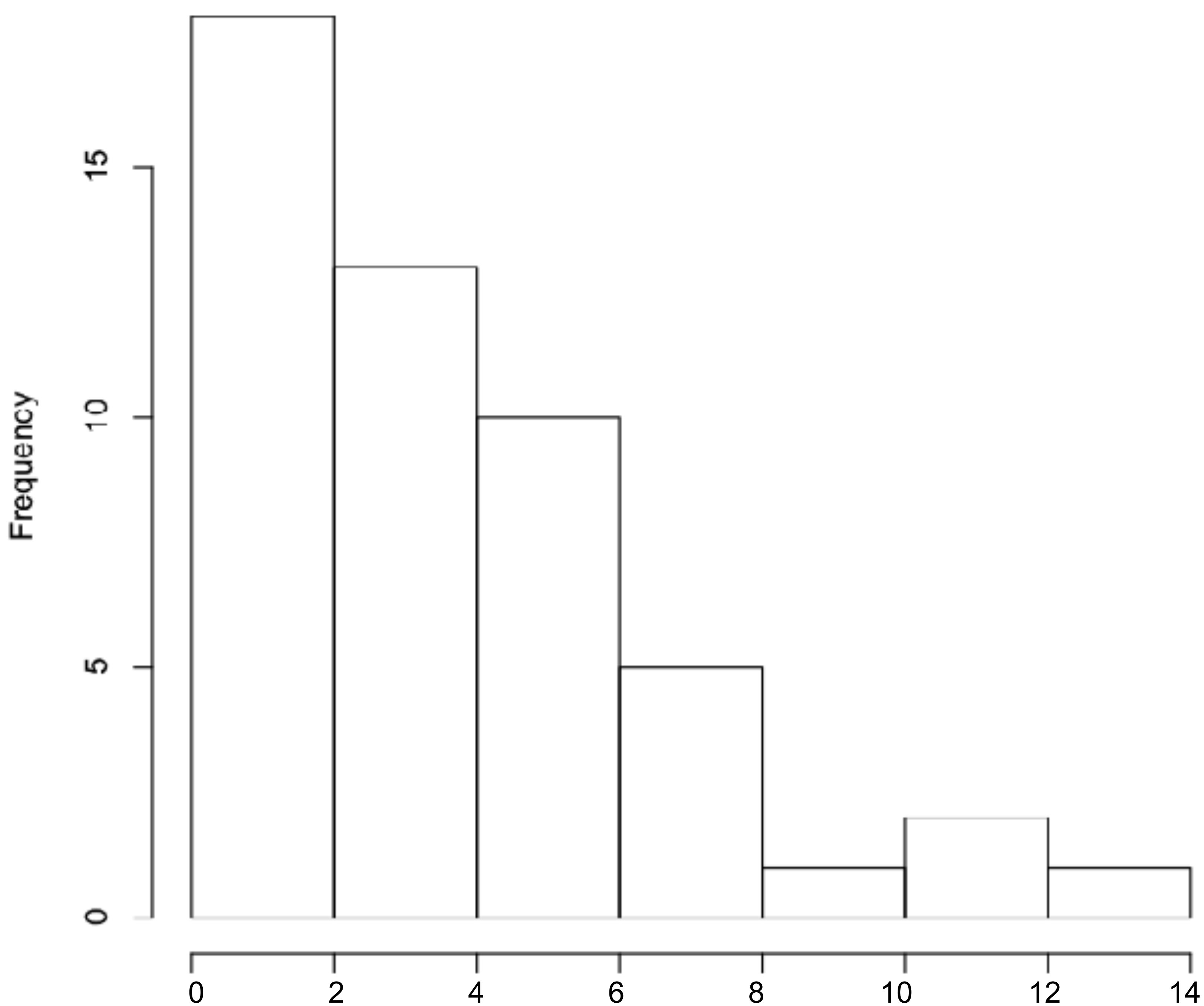
Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou



Krabicový graf (Box & Whiskers) Y

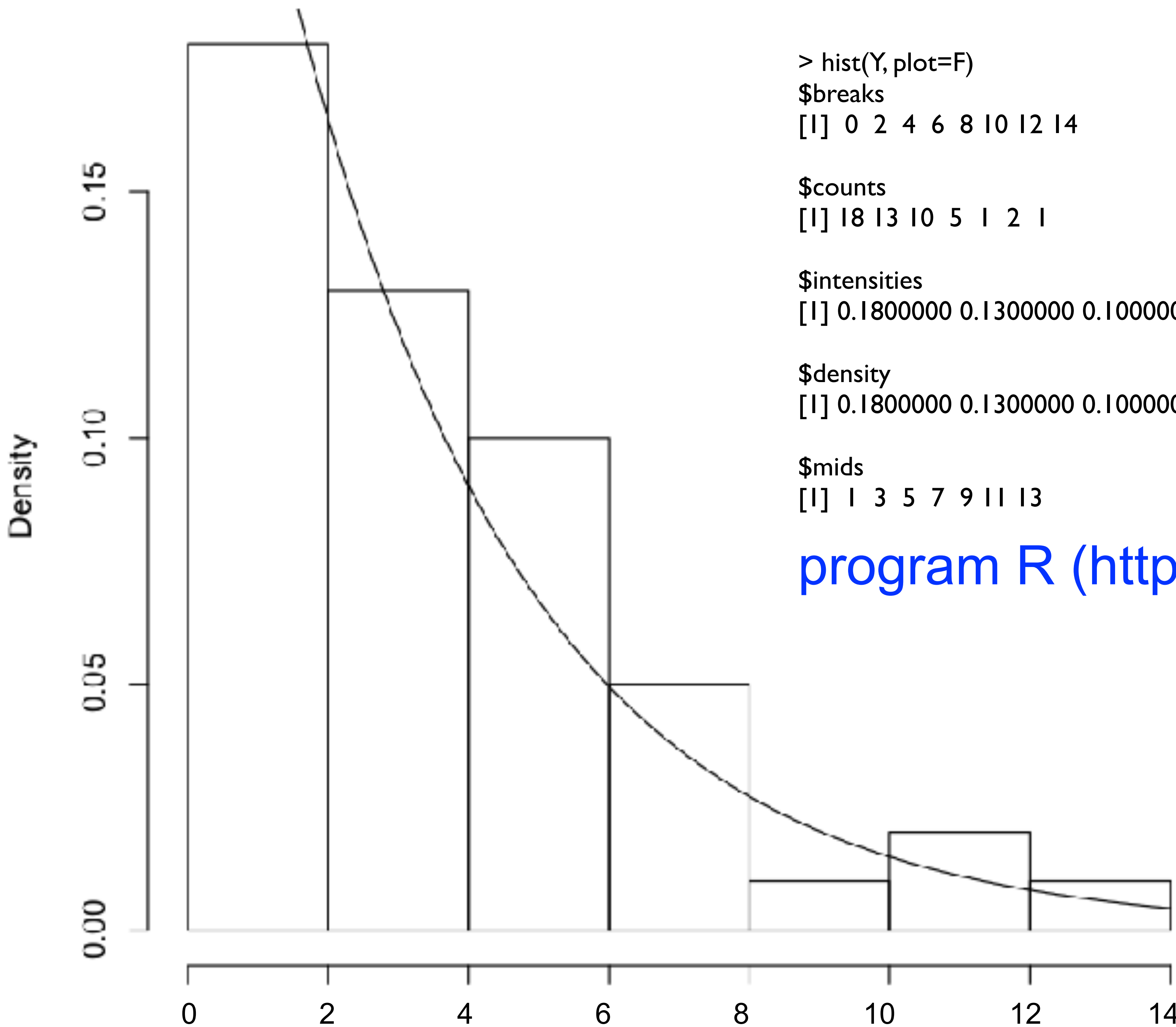
Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

Histogram Y (absolutní četnosti)



Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

Histogram Y (relativní četnosti)

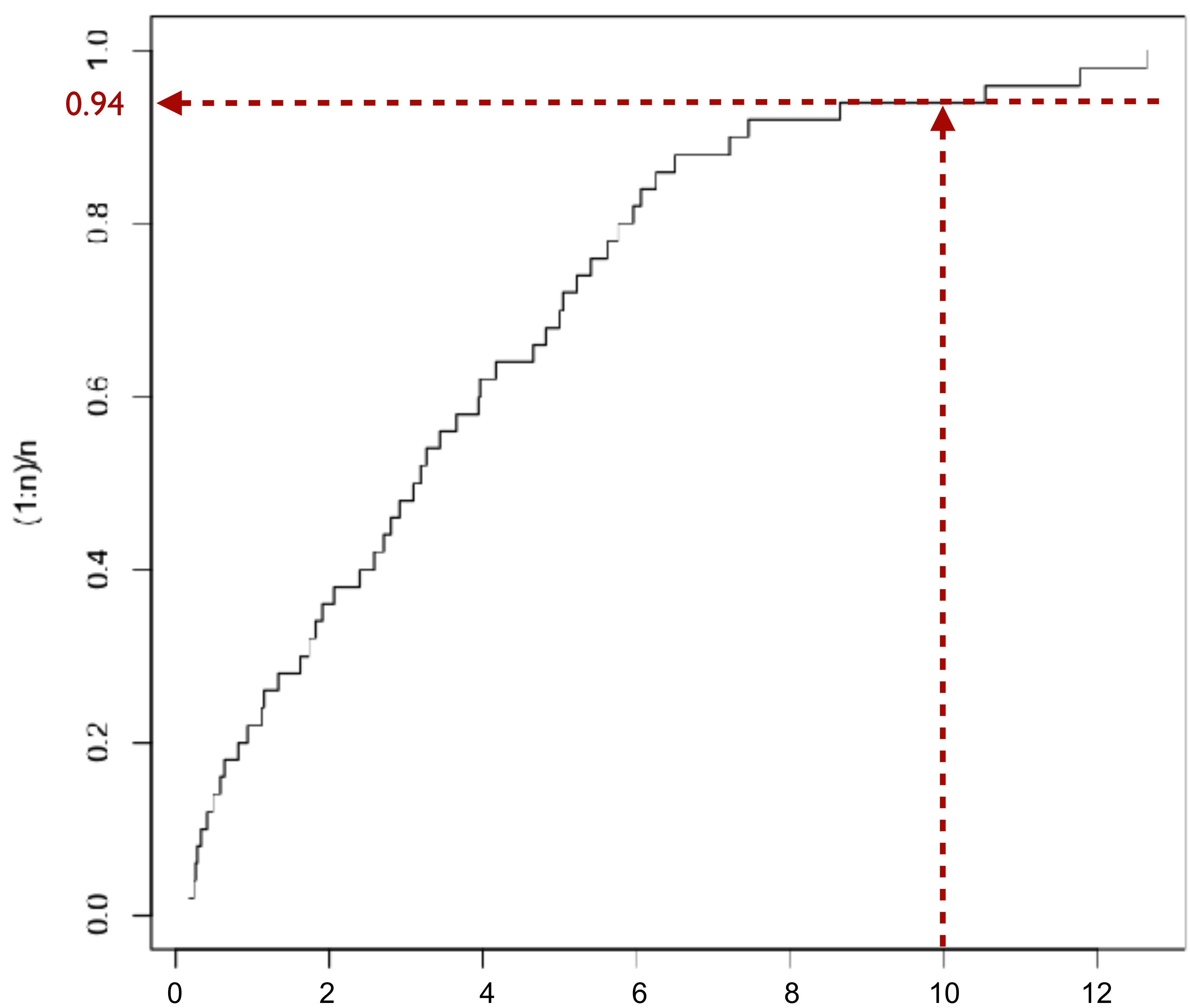



```
> hist(Y, plot=F)
$breaks
[1]  0  2  4  6  8 10 12 14

$counts
[1] 18 13 10  5  1  2  1

$intensities
[1] 0.1800000 0.1300000 0.1000000 0.0500000 0.0100000 0.0200000 0.0100000

$density
[1] 0.1800000 0.1300000 0.1000000 0.0500000 0.0100000 0.0200000 0.0100000

$mids
[1]  1  3  5  7  9 11 13
```

program R (https://www.r-project.org)

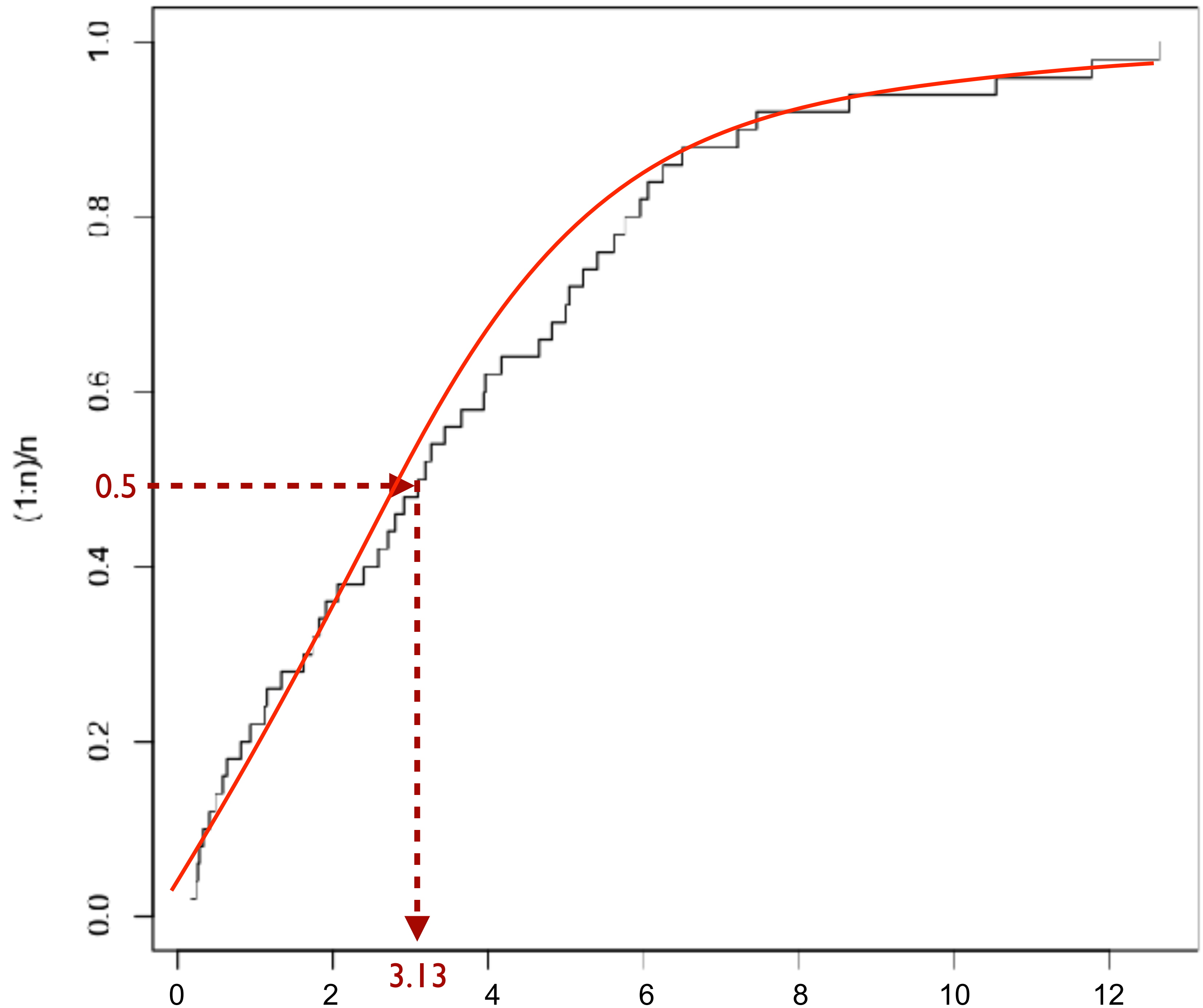
Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

Empirická distribuční funkce Y



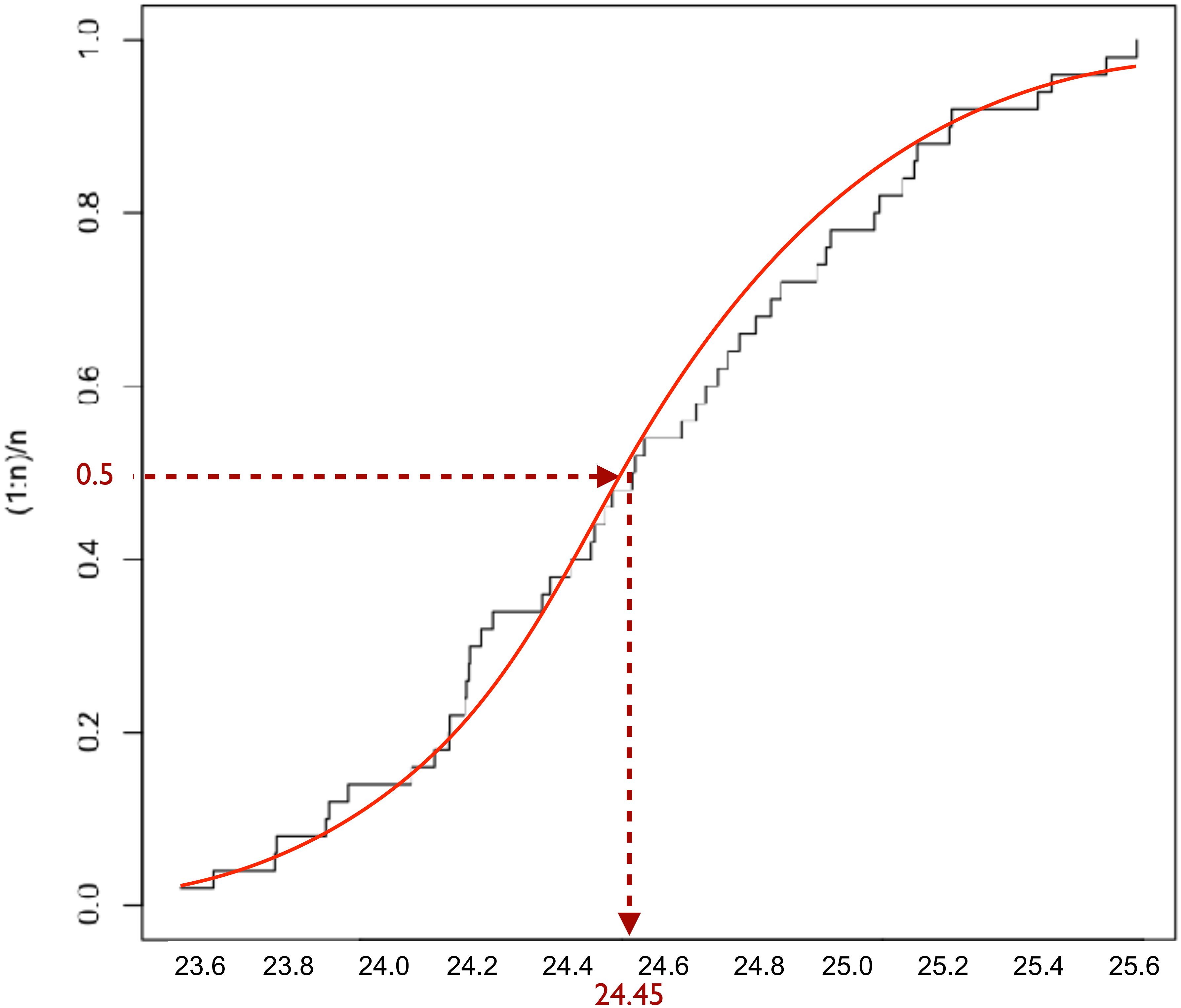
Doby mezi průjezdy automobilů mýtnou branou

Empirická distribuční funkce Y



Balící automat na kávu

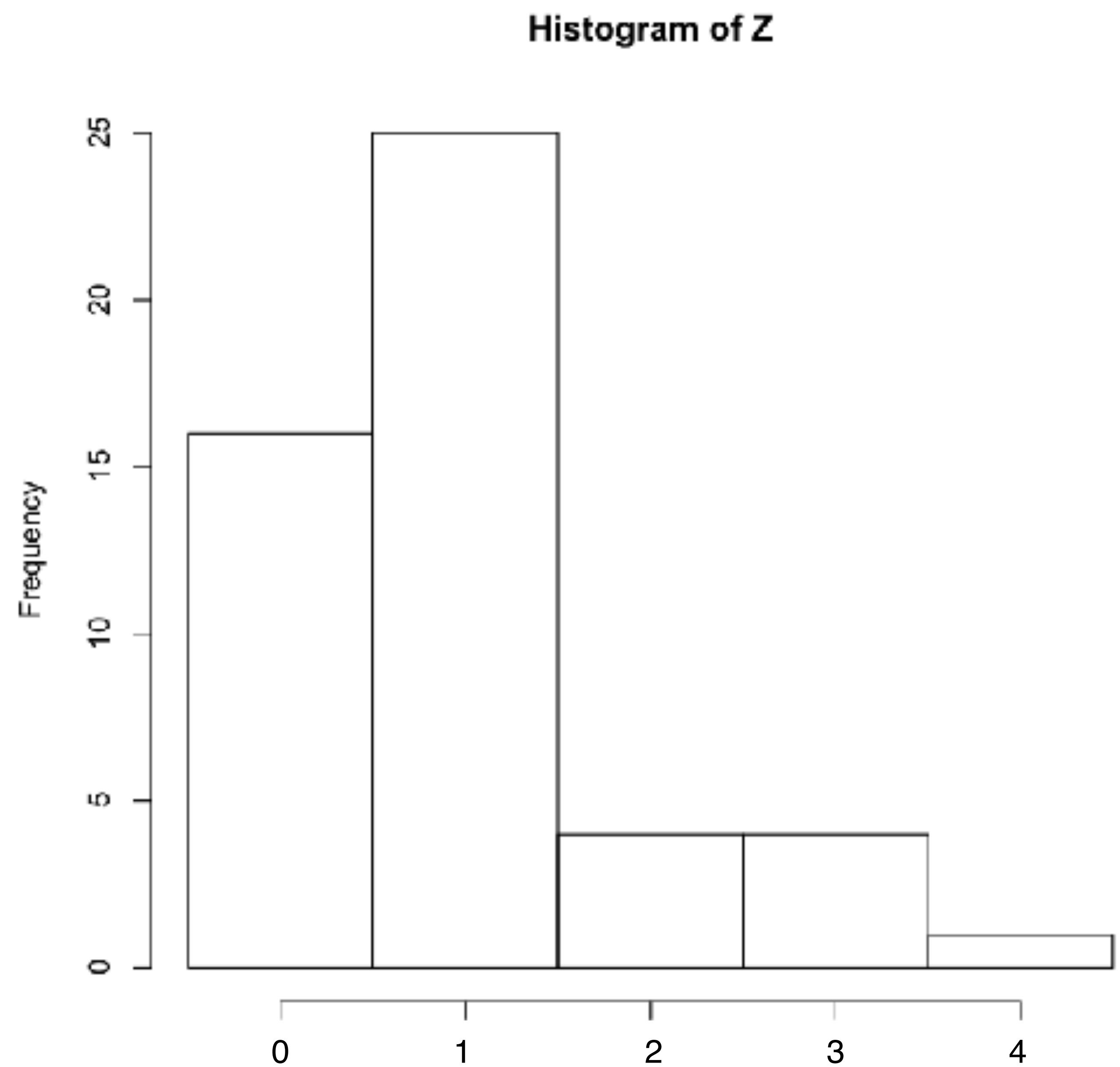
Empirická distribuční funkce Y



Vadné výrobky v 50 balení po 100 ks

1 1 0 1 1 0 3 1 2 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 2 0
0 0 2 3 1 0 0 2 1 1 1 0 3 1 0 1 0 1 1 0 4 3 1 1 0

0 | ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I
1 | ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~
2 | IIII
3 | IIII
4 | I



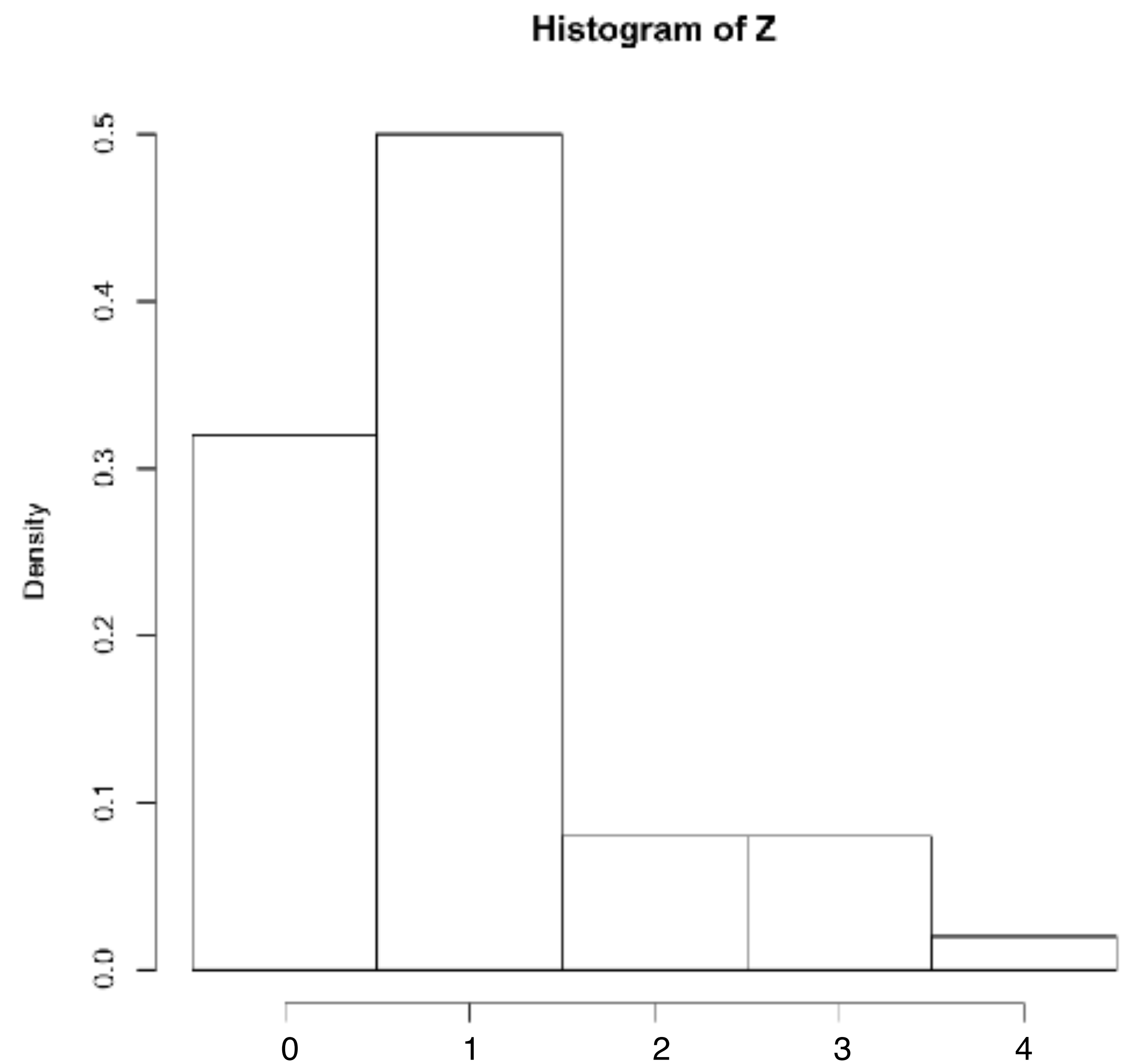
Vadné výrobky v 50 balení po 100 ks

1 1 0 1 1 0 3 1 2 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 2 0
0 0 2 3 1 0 0 2 1 1 1 0 3 1 0 1 0 1 1 0 4 3 1 1 0

0 | ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I
1 | ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~
2 | IIII
3 | IIII
4 | I

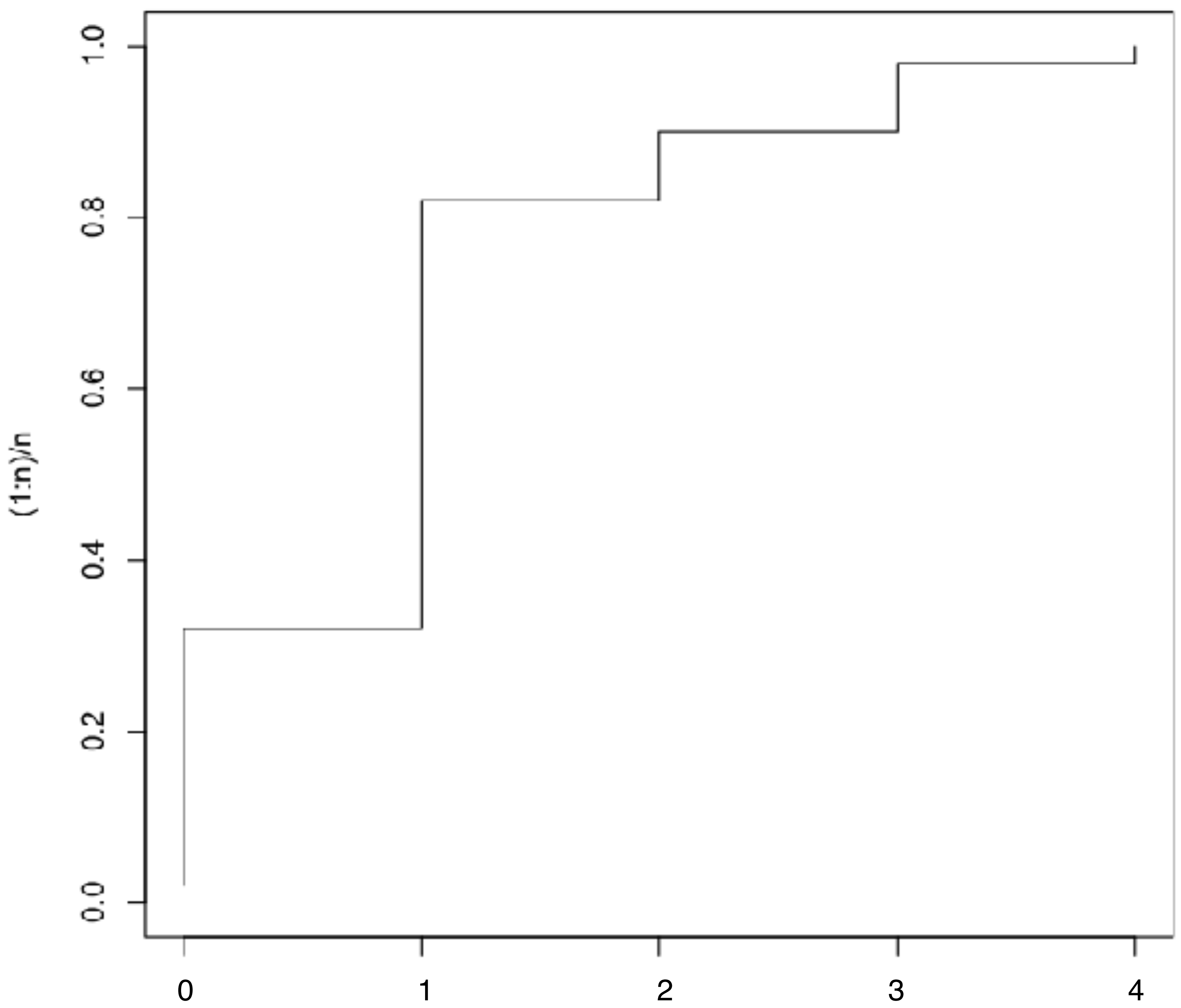
$$\bar{Z} = \frac{49}{50} = 0.98$$

$$\hat{p} = \frac{49}{50 * 100} = 0.0098$$



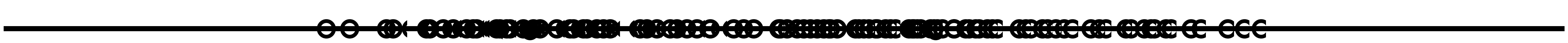
Vadné výrobky v 50 balení po 100 ks

Empirická distribuční funkce Z



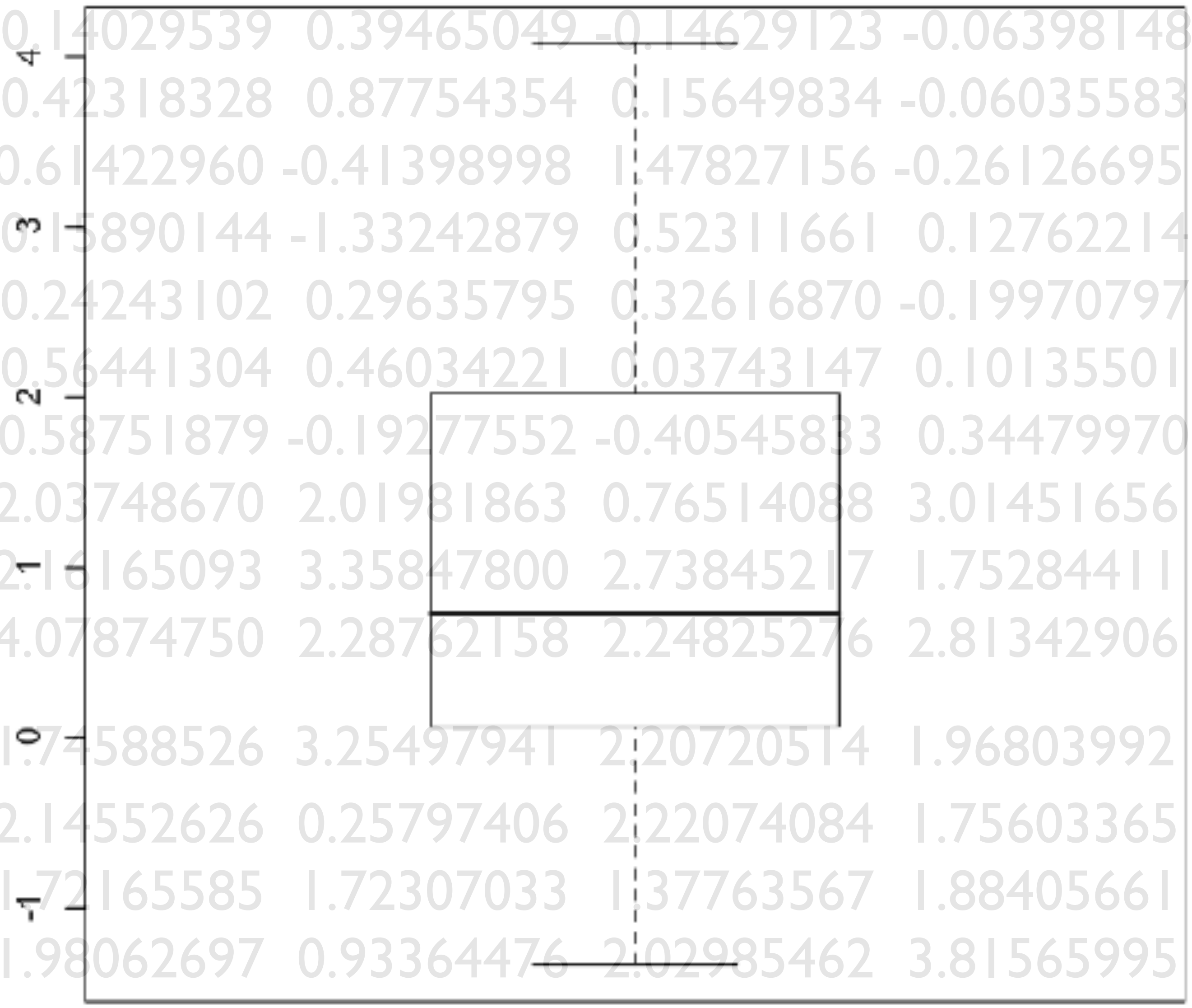
Směs dvou rozdělení

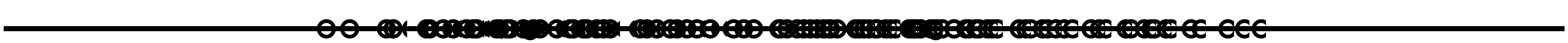
```
  [1] -0.25640083  0.18603345 -0.32252900  0.14029539  0.39465049 -0.14629123 -0.06398148
  [8]  0.10442055  0.51064463 -0.07187202 -0.42318328  0.87754354  0.15649834 -0.06035583
 [15]  0.69360581  0.15117762  0.23367583  0.61422960 -0.41398998  1.47827156 -0.26126695
 [22]  0.77789548 -0.52023548 -0.08282471 -0.15890144 -1.33242879  0.52311661  0.12762214
 [29] -0.11583169  0.51265392 -0.13004186 -0.24243102  0.29635795  0.32616870 -0.19970797
 [36] -0.01118346  0.12561809 -0.09053659 -0.56441304  0.46034221  0.03743147  0.10135501
 [43]  0.26033918 -0.23269814  0.29845597 -0.58751879 -0.19277552 -0.40545833  0.34479970
 [50]  0.08673142  2.05546926  1.07953109  2.03748670  2.01981863  0.76514088  3.01451656
 [57]  0.81426280  2.92537527  2.35934579  2.16165093  3.35847800  2.73845217  1.75284411
 [64]  1.09047564  2.13775360  2.13511623  4.07874750  2.28762158  2.24825276  2.81342906
 [71]  0.46444795  1.76316503  1.96194266  1.74588526  3.25497941  2.20720514  1.96803992
 [78]  2.47810693  1.10029278  1.29474306  2.14552626  0.25797406  2.22074084  1.75603365
 [85]  1.74266678  1.98355362  2.06861315  1.72165585  1.72307033  1.37763567  1.88405661
 [92]  2.67042567  2.97843210  2.78023154  1.98062697  0.93364476  2.02985462  3.81565995
 [99]  0.56794957  1.31112964
```



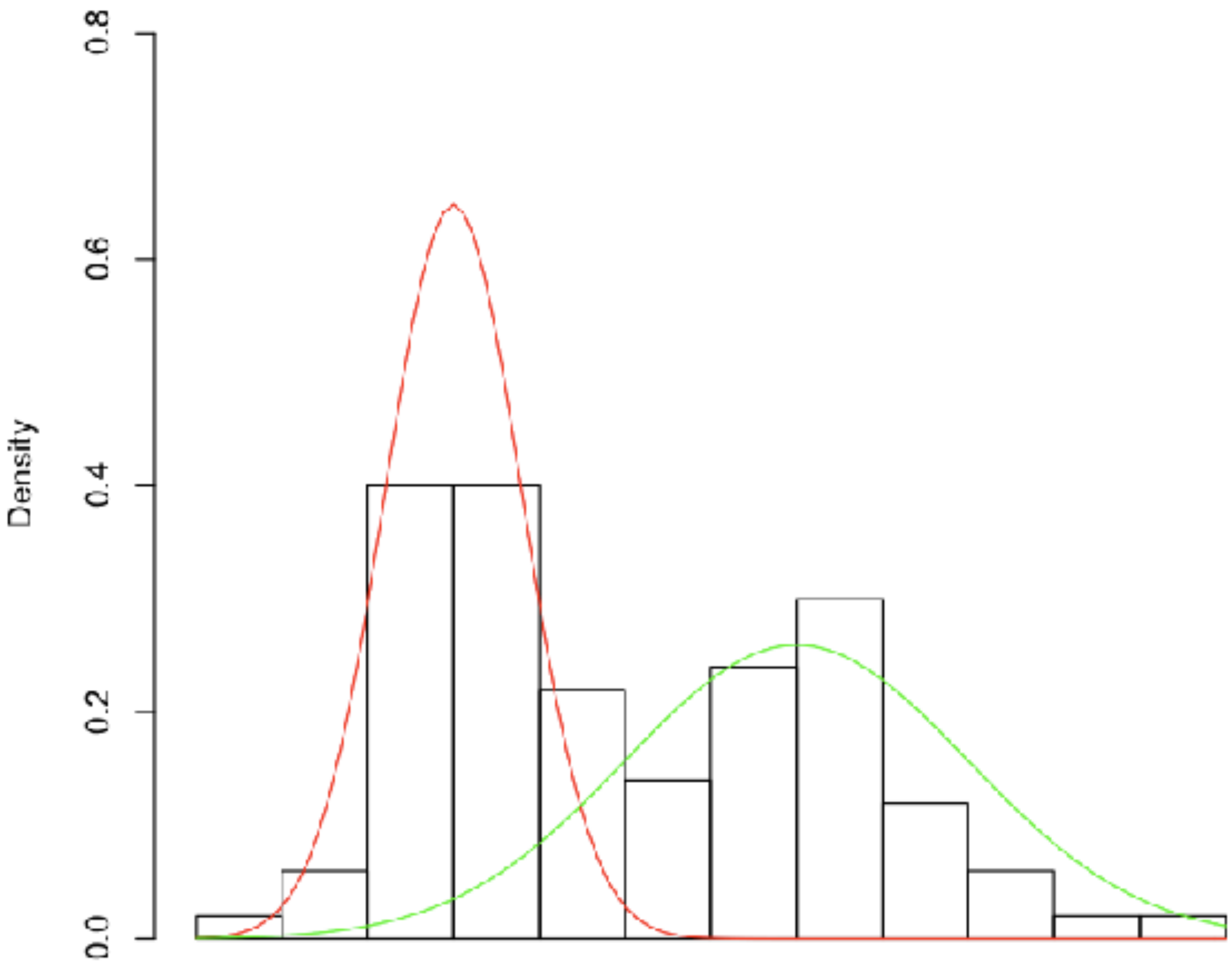
Směs dvou rozdělení

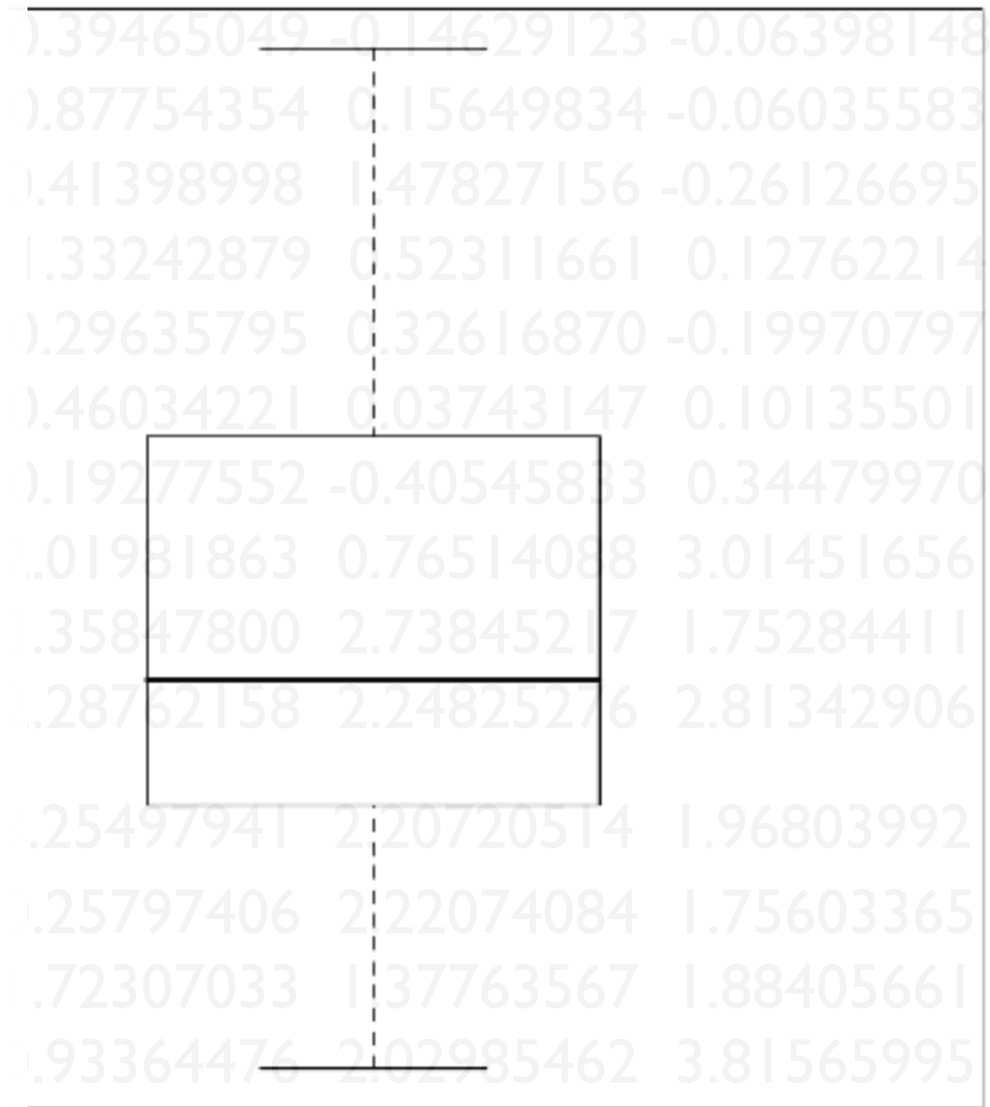
```
 [1] -0.25640083  0.18603345 -0.32252900  0.14029539  0.39465049 -0.14629123 -0.06398148
 [8]  0.10442055  0.51064463 -0.07187202 -0.42318328  0.87754354  0.15649834 -0.06035583
[15]  0.69360581  0.15117762  0.23367583  0.61422960 -0.41398998  1.47827156 -0.26126695
[22]  0.77789548 -0.52023548 -0.08282471 -0.15890144 -1.33242879  0.52311661  0.12762214
[29] -0.11583169  0.51265392 -0.13004186 -0.24243102  0.29635795  0.32616870 -0.19970797
[36] -0.01118346  0.12561809 -0.09053659 -0.56441304  0.46034221  0.03743147  0.10135501
[43]  0.26033918 -0.23269814  0.29845597 -0.58751879 -0.19277552 -0.40545833  0.34479970
[50]  0.08673142  2.05546926  1.07953109  2.03748670  2.01981863  0.76514088  3.01451656
[57]  0.81426280  2.92537527  2.35934579  2.16165093  3.35847800  2.73845217  1.75284411
[64]  1.09047564  2.13775360  2.13511623  4.07874750  2.28762158  2.24825276  2.81342906
[71]  0.46444795  1.76316503  1.96194266  1.74588526  3.25497941  2.20720514  1.96803992
[78]  2.47810693  1.10029278  1.29474306  2.14552626  0.25797406  2.22074084  1.75603365
[85]  1.74266678  1.98355362  2.06861315  1.72165585  1.72307033  1.37763567  1.88405661
[92]  2.67042567  2.97843210  2.78023154  1.98062697  0.93364476  2.02985462  3.81565995
[99]  0.56794957  1.31112964
```

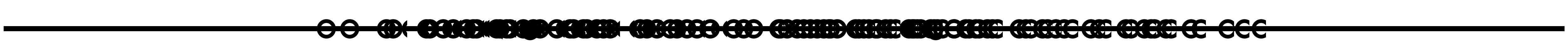




Směs dvou rozdělení







Úvod do teorie pravděpodobnosti

- Náhoda a pravděpodobnost,
- náhodný jev, náhodná veličina
- rozdělení pravděpodobnosti a jeho souvislost s histogramem
- pravidla pro počítání s pravděpodobností
- podmíněná pravděpodobnost
- závislost náhodných veličin
- využití závislosti při stanovení pravděpodobnosti - věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta

(1) Jiří Likeš, Josef Machek: Počet pravděpodobnosti. Sešit X edice MVŠT, SNTL Praha 1981

(2) další učebnice naleznete na adrese: https://gejza.nipax.cz

Úvod do teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus $=$ činnost, která může skončit různým výsledkem a my dopředu nevíme kterým

Náhodný jev $=$ výsledek náhodného pokusu, o kterém dopředu nevíme, zda nastane či ne

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
(Kolmogorov, 1933)

Ω - množina elemetárních náhodných jevů

$\mathcal{F}$ - jevové pole (σ-algebra náhodných jevů)

(a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
(b) pokud $A \in \mathcal{F}$, potom platí $A^C \in \mathcal{F}$
(c) pokud $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$, potom platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

P - pravděpodobnostní míra na $\mathcal{F}$

Úvod do teorie pravděpodobnosti

Definice pravděpodobnosti

1. Klasická definice pravděpodobnosti: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

   $\mu(A) =$ počet elementárních jevů v jevu A

   $\mu(A) =$ "míra" jevu A

2. Axiomatická definice pravděpodobnosti

   (a) $\forall A \in \mathcal{F} : \quad P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

   (b) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

   (c) jsou-li $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom

   $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$

3. Statistická definice pravděpodobnosti: $\lim_{j \to \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$

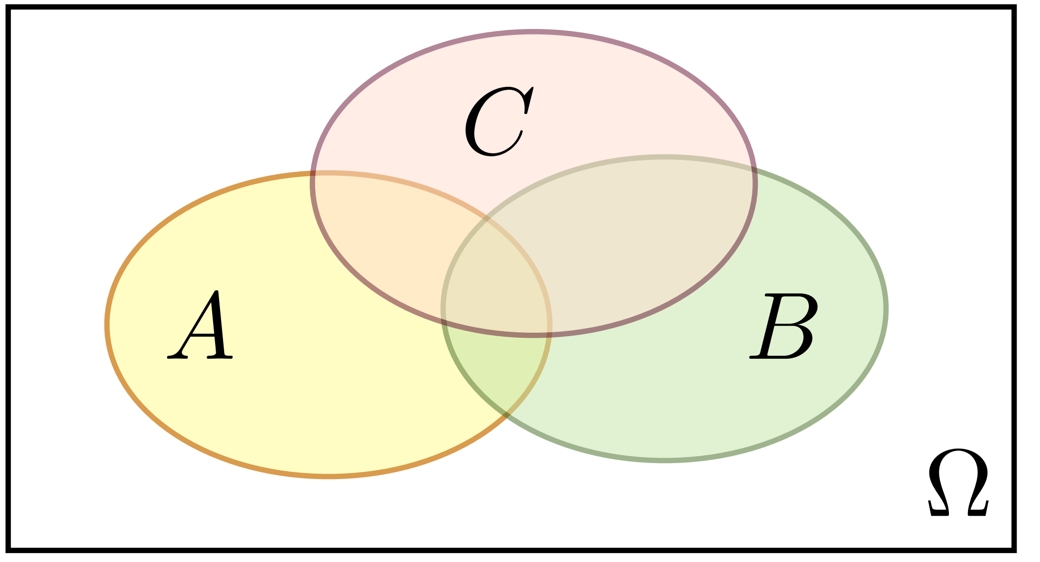
Úvod do teorie pravděpodobnosti

Pravidla pro počítání s pravděpodobností

1) $P(A) \in \langle 0, 1\rangle$

2) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

3) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$



4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

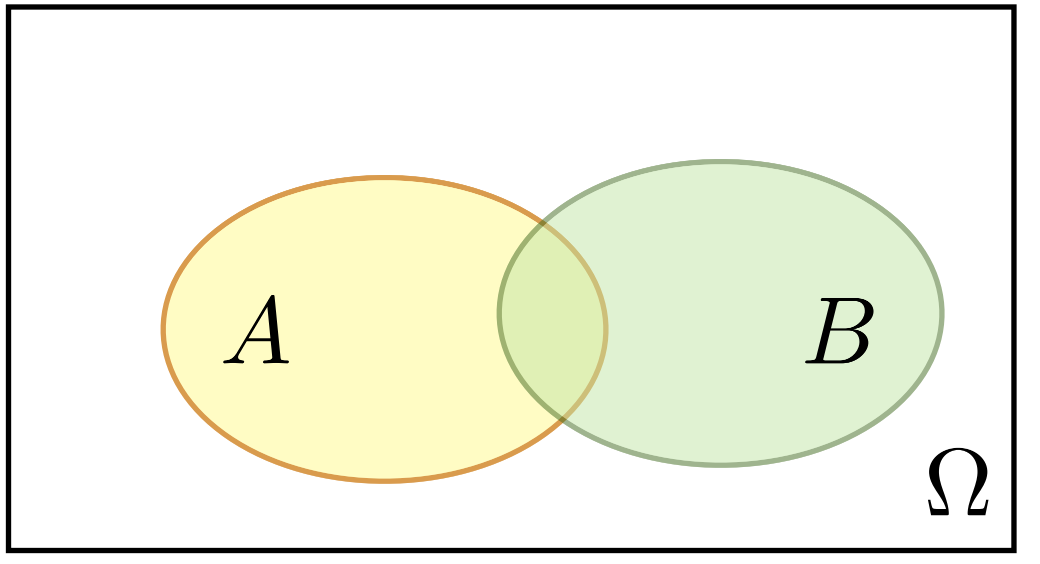
6) $P(A^C) = 1 - P(A)$

$$\boxed{P(A \cap B) = ?}$$

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$



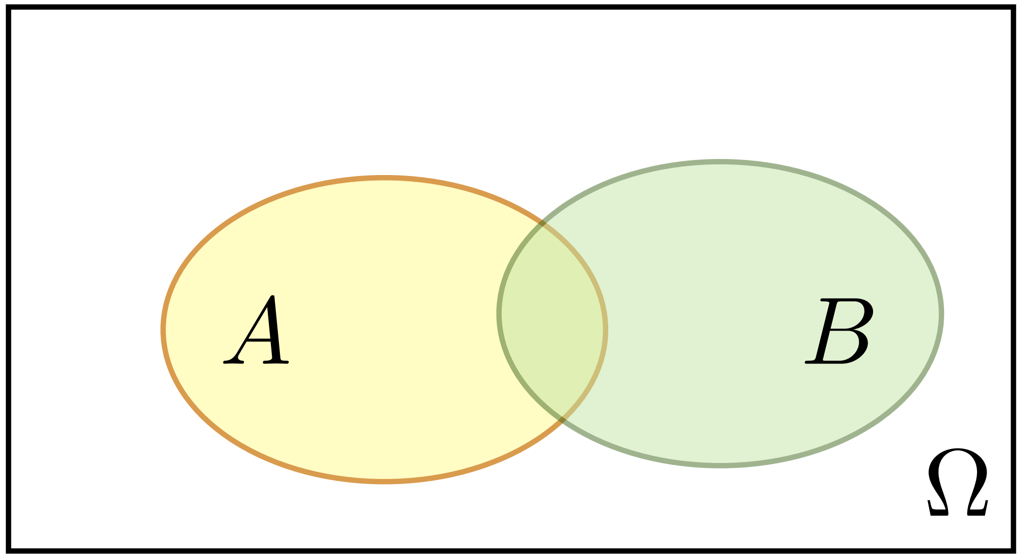
Příklad:

Je známo, že v dlouhodobém průměru je mezi 1000 dodaných komponent 2,34% vadných výrobků výrobce A, 1,08% vadných výrobků výrobce B, 65,97% bezvadných výrobků výrobce A a zbytek (30,6%) jsou bezvadné výrobky od výrobce B. Lze považovat jev, že výrobek je vadný, za stochasticky závislý na výrobci?

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$



Příklad:

Jevy A a V jsou stochasticky nezávislé právě když

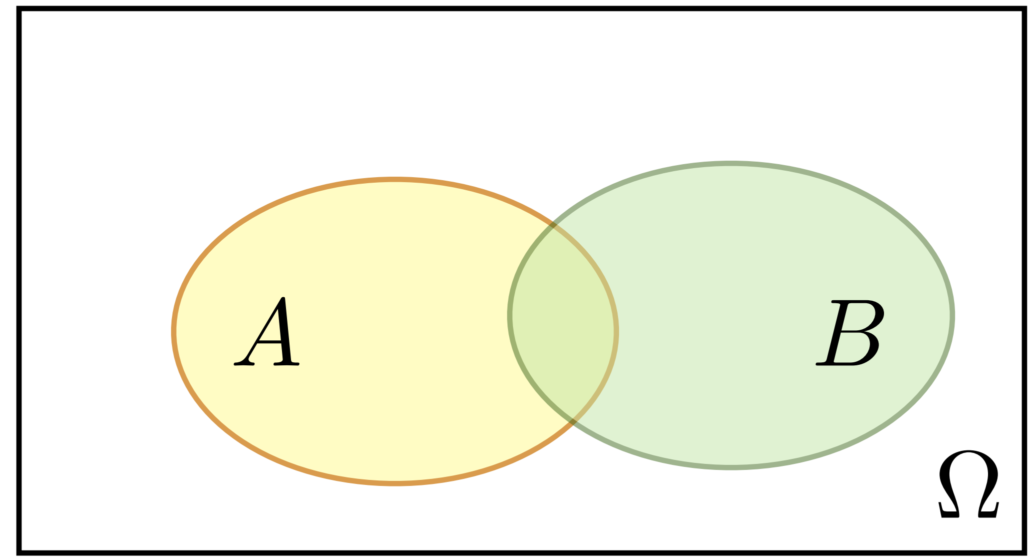
$$P(V|A) = P(V)$$
$$P(A|V) = P(A)$$
$$P(A \cap V) = P(A).P(V)$$

	A	B	celkem
vada (V)	2,34	1,08	3,42
bez vady	65,98	30,6	96,58
celkem	68,32	31,68	100

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$



Příklad:

Jev, že výrobek je vadný, lze považovat za stochasticky nezávislý na výrobci.

$$2{,}34 = 3{,}42 \, . \, 68{,}32$$

$$1{,}08 = 3{,}42 \, . \, 31{,}68$$

$$65{,}98 = 96{,}58 \, . \, 68{,}32$$

$$30{,}60 = 96{,}58 \, . \, 31{,}68$$

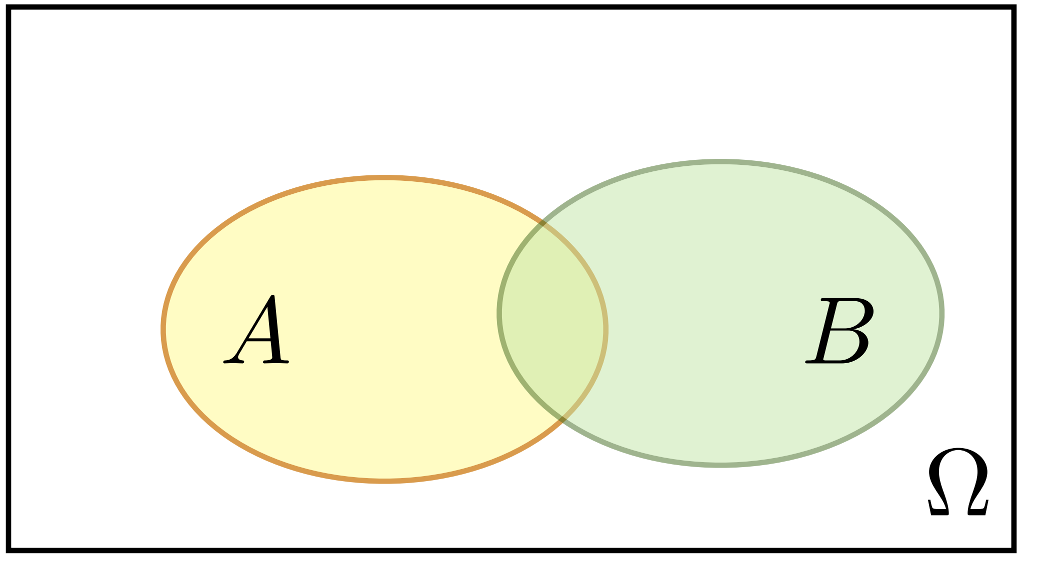
o.K.

	A	B	celkem
vada (V)	2,34	1,08	3,42
bez vady	65,98	30,6	96,58
celkem	68,32	31,68	100

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$



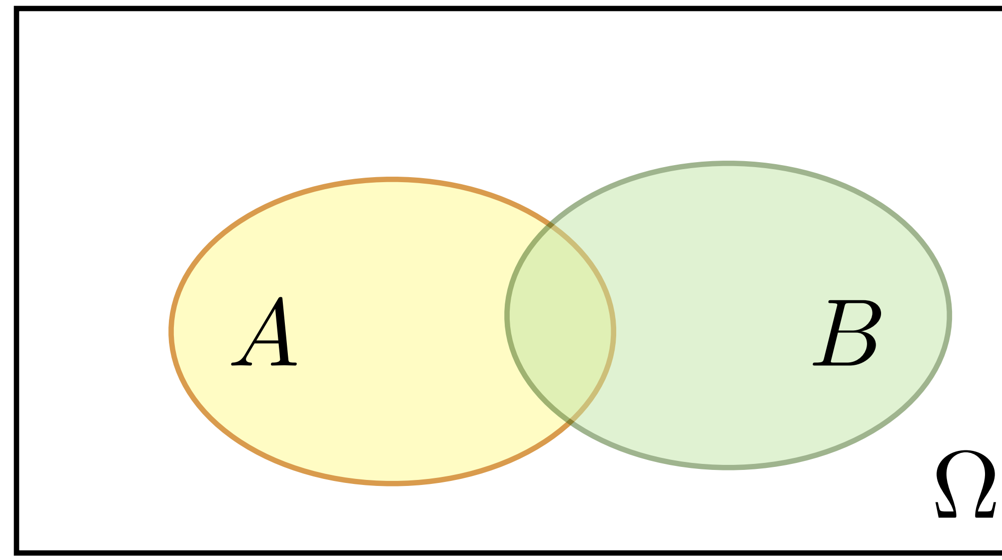
Příklad:

Z šetření obchodního řetězce vyplývá, že 34% zákazníků nakupuje pivo Pardál a současně dámské kalhotky. 28% zákazníků nakupuje dámské kalhotky, ale nenakupuje pivo Pardál, 19% nakupuje Pardála a nekupuje dámské kalhotky. Ostatních 19% nekupuje ani jednu z komodit. Lze považovat nákup piva Pardál stochasticky nezávislý na nákupu dámských kalhotek?

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$



Příklad:

$$0{,}62\ .\ 0{,}53 = 0{,}3286$$

$$P(K) = 0{,}62$$
$$P(K|P) = 0{,}42/0{,}62$$
$$= 0{,}677 > P(K)$$

Nákup dámských kalhotek je stochasticky závislý na nákupu piva Pardál

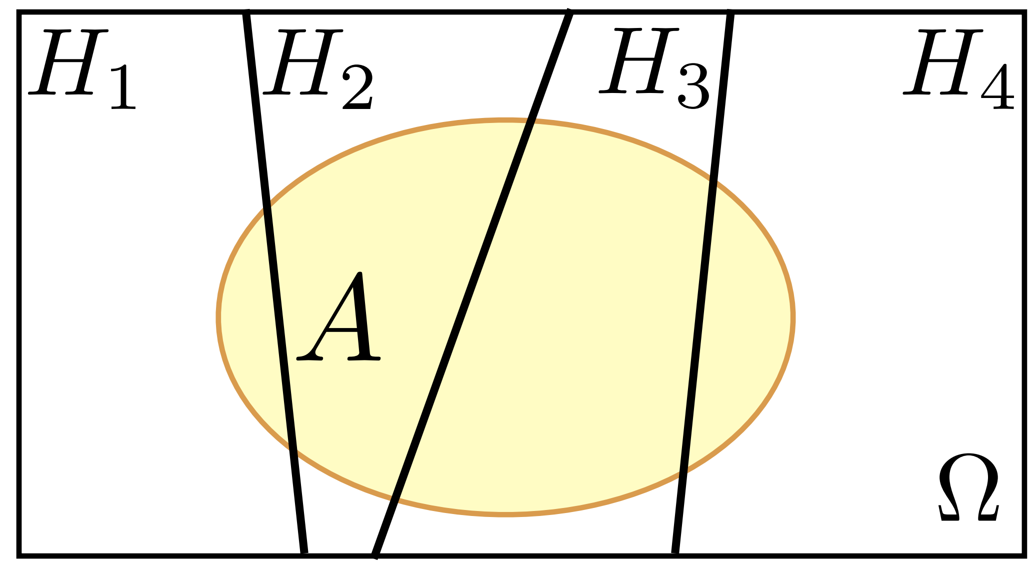
	P	P^C	celkem
K	0,42	0,2	0,62
K^C	0,19	0,19	0,38
celkem	0,53	0,47	1

Věta o úplné pravděpodobnosti

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω

$$H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$$

$$\begin{aligned} P(A) = {} & P(A|H_1).P(H_1) \\ & +P(A|H_2).P(H_2) \\ & +P(A|H_3).P(H_3) \\ & +P(A|H_4).P(H_4) \end{aligned}$$



Příklad:

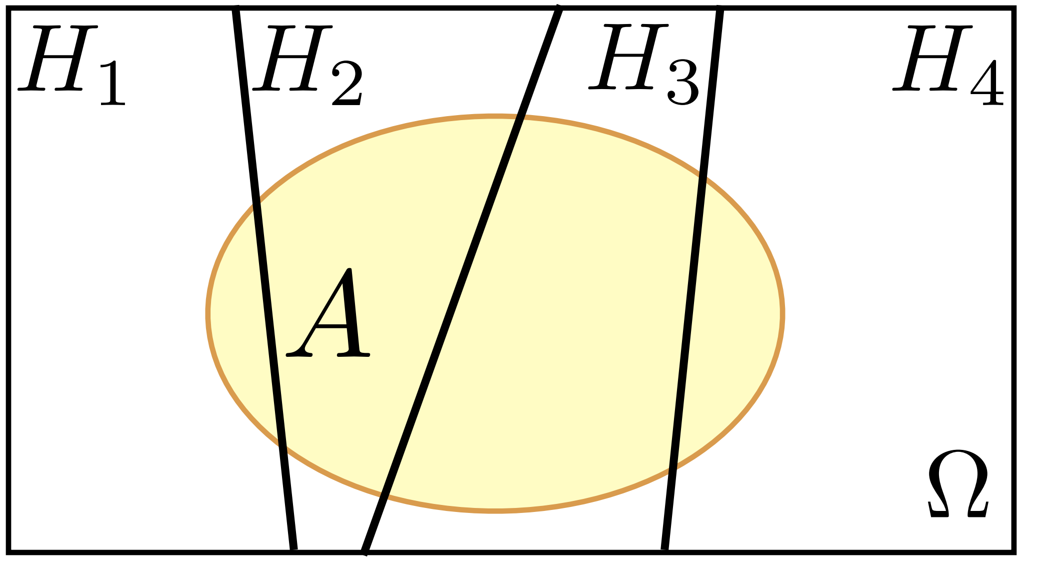
Na trhu jsou výrobky od čtyř výrobců v pořadí A, B, C a D v poměru 1:2:4:5. Zmetkovitost je u těchto výrobců po řadě 0,5%, 0,8%, 0,3% a 0,3%. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek na trhu bude vadný? A bude-li vadný, jaká je pravděpodobnost, že byl vyroben výrobcem A?

Věta o úplné pravděpodobnosti

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω

$$H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(A) = {} & P(A|H_1).P(H_1) \\ & +P(A|H_2).P(H_2) \\ & +P(A|H_3).P(H_3) \\ & +P(A|H_4).P(H_4) \end{aligned}}$$



Příklad:

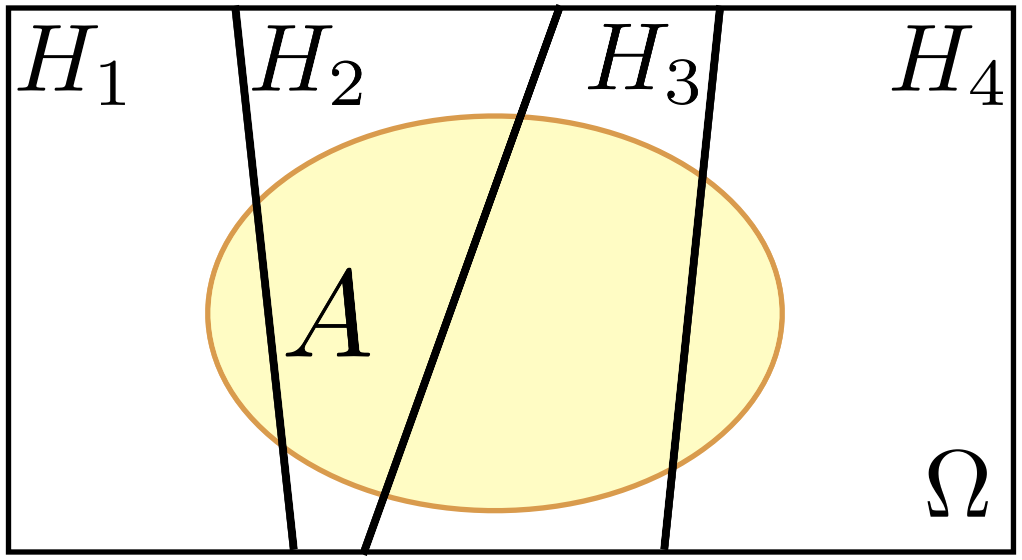
$$P(H_1) = 1/12, \; P(A|H_1) = 0{,}005$$
$$P(H_2) = 2/12, \; P(A|H_2) = 0{,}008$$
$$P(H_3) = 4/12, \; P(A|H_3) = 0{,}003$$
$$P(H_4) = 5/12, \; P(A|H_4) = 0{,}003$$
$$\boxed{\mathrm{P}(A) = (5 + 16 + 12 + 15)/12000 = 0{,}004}$$

Bayesova věta

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω

$$H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1).P(H_1)}{P(A)}$$

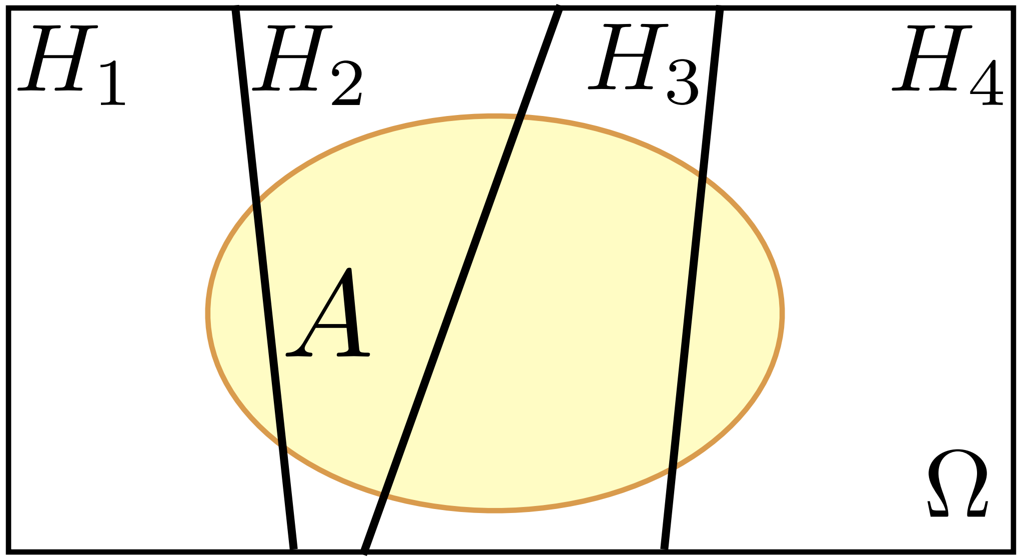


Bayesova věta

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω

$$H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1).P(H_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A|H_i).P(H_i)}$$



Příklad:

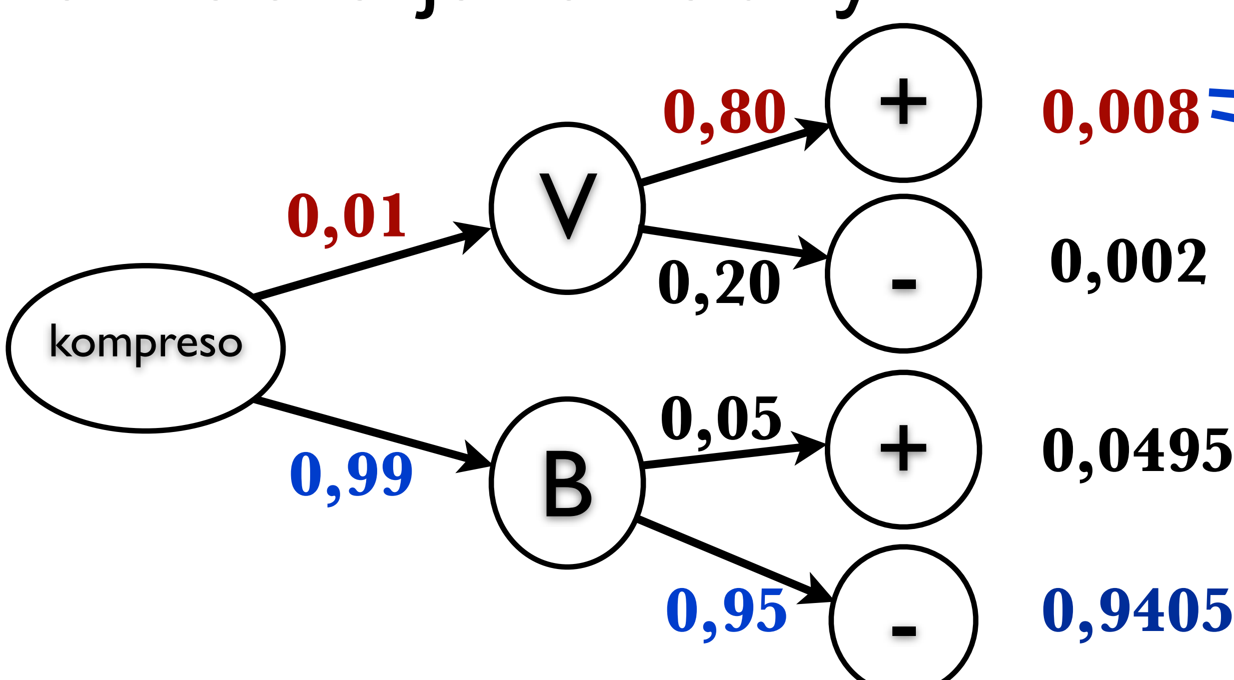
$$P(H_1) = 0{,}08333, \quad P(A|H_1) = 0{,}005$$
$$P(H_2) = 0{,}16667, \quad P(A|H_2) = 0{,}008$$
$$P(H_3) = 0{,}33333, \quad P(A|H_3) = 0{,}003$$
$$P(H_4) = 0{,}41667, \quad P(A|H_4) = 0{,}003$$

$$\boxed{\mathrm{P}(H_1|A) = 0{,}005.0{,}08333/0{,}004 = 0{,}10417}$$

Bayesova věta

Příklad:

Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?

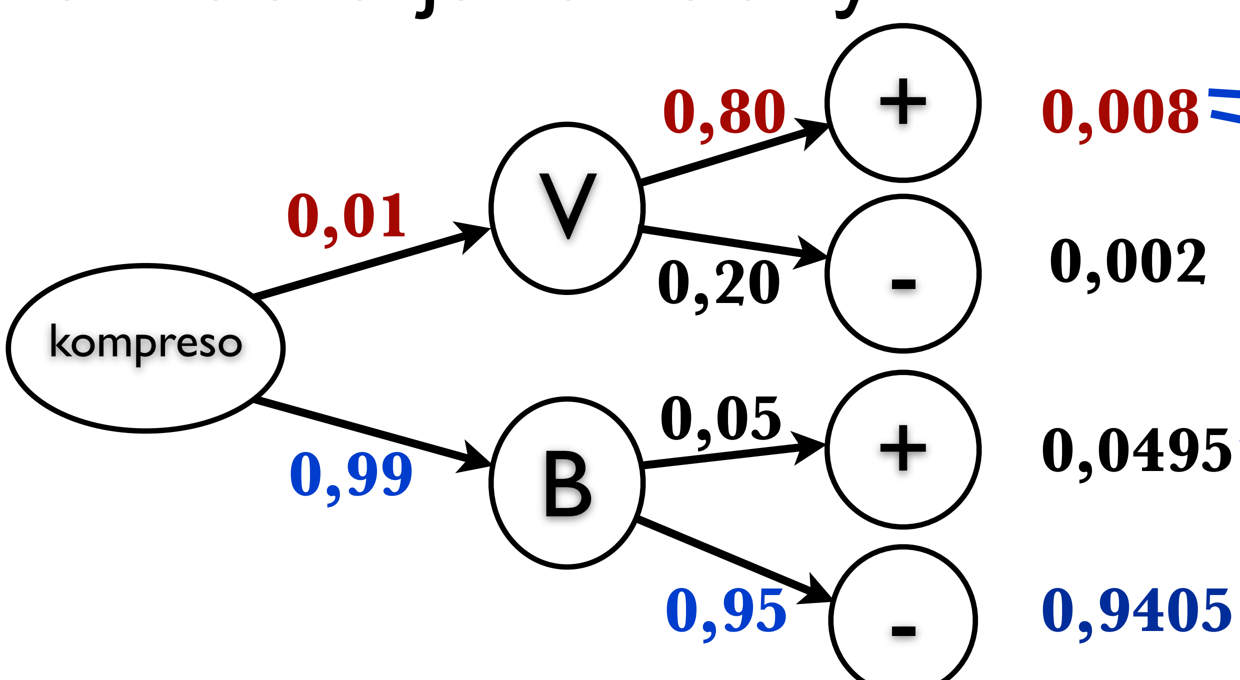


$$P(V|+) = \frac{0{,}008}{0{,}008 + 0{,}0495}$$

Bayesova věta

Příklad:

Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?



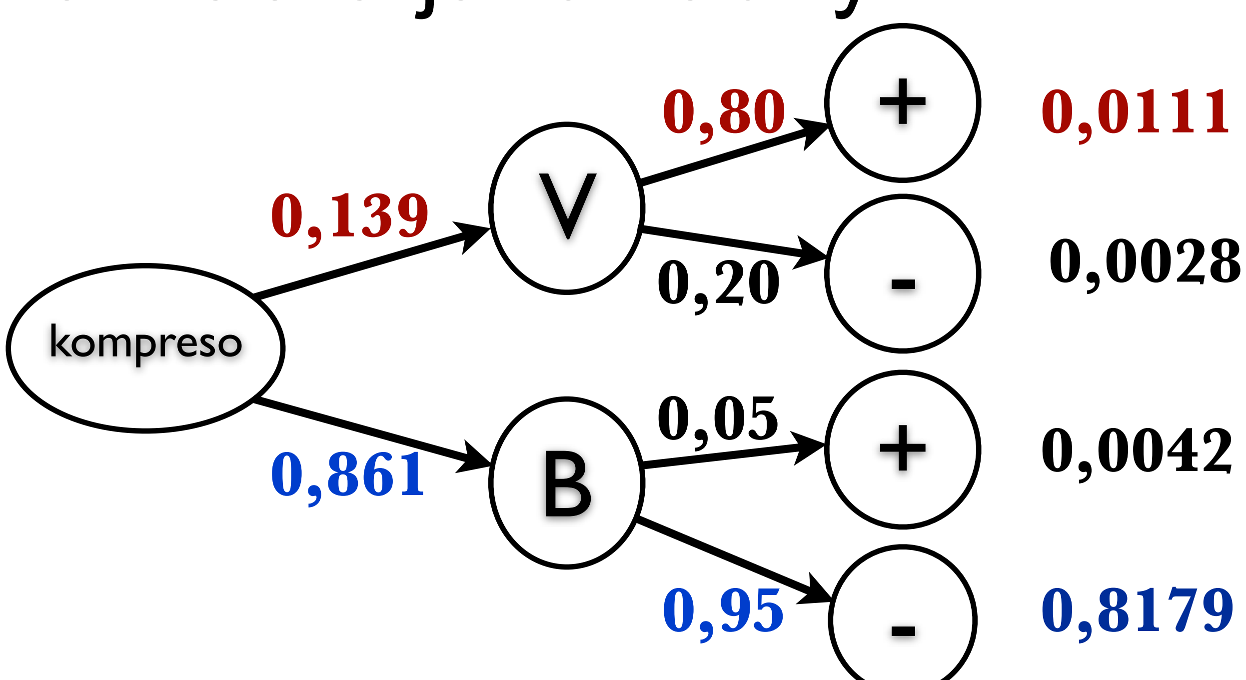
$$P(V|+) = \frac{0,008}{0,008+0,0495}$$

$$\boxed{= 0,1391}$$

Bayesova věta

Příklad:

Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?

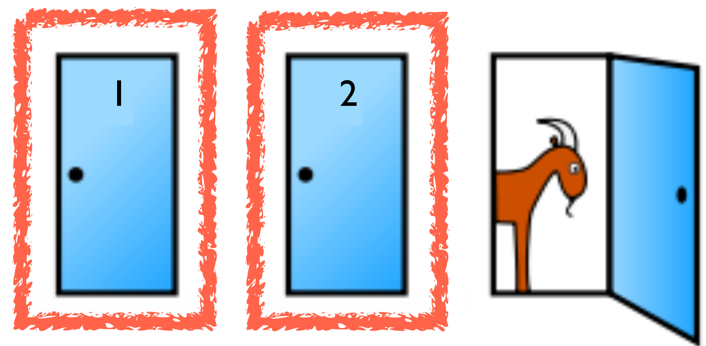


$$P_2(V|+) = \frac{0,0111}{0,0111+0,0042}$$

$$\boxed{= 0,7255}$$

Při opakovaném testu

Problém tří dveří (Monty Hall Problem)



- Označme: A_1, A_2, A_3 jevy, že auto je za dveřmi č, 1, 2, 3.
- Pro nás je zřejmě apriori $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$.
- Nechť O_1, O_2, O_3 značí jevy, že moderátor otevře dveře č, 1, 2, 3.
- Zvolíme např. dveře č. 1.
- Zřejmě je $P(O_1) = 0$ a $P(O_2) = P(O_3) = 1/2$.
- Dále platí: $P(O_2|A_1)=1/2$, $P(O_3|A_1)=1/2$, $P(O_2|A_2)=0$, $P(O_3|A_2)=1$, $P(O_2|A_3)=1$, $P(O_3|A_3)=0$.
- Předpokládejme, že moderátor otevřel dveře č. 3.
- Tedy aposteriorní pravděpodobnosti podle Bayesovy věty jsou:

$$P(A_1|O_3)=\frac{P(A_1)P(O_3|A_1)}{P(O_3)}=\frac{1/3.1/2}{1/2}=1/3$$

$$\boxed{P(A_2|O_3)=\frac{P(A_2)P(O_3|A_2)}{P(O_3)}=\frac{1/3.1}{1/2}=2/3}$$