

Pravděpodobnostní metody a matematická statistika

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

II. Pravděpodobnost



<https://sms.nipax.cz/pas>

II. Úvod do teorie pravděpodobnosti

Definice pravděpodobnosti

1. Klasická definice pravděpodobnosti: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$
 $\mu(A)$ = počet elementárních jevů v jevu A

$\mu(A)$ = “míra” jevu A

2. Axiomatická definice pravděpodobnosti

(a) $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

(b) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

(c) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, po dvou disjunktní, potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

3. Statistická definice pravděpodobnosti: $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^A}{n_j}$



II. Úvod do teorie pravděpodobnosti

Pravidla pro počítání s pravděpodobností

1) $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$

2) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

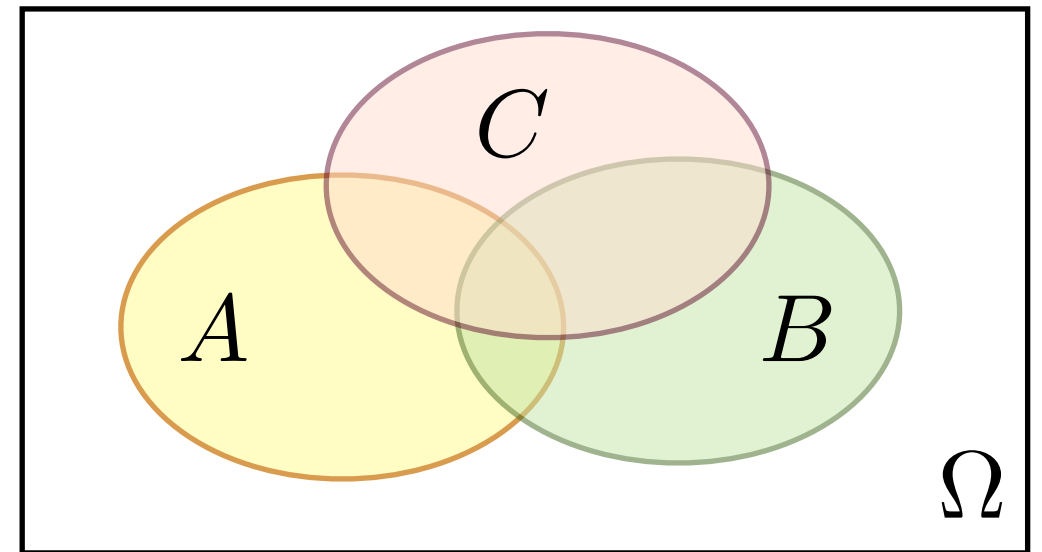
3) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

6) $P(A^C) = 1 - P(A)$

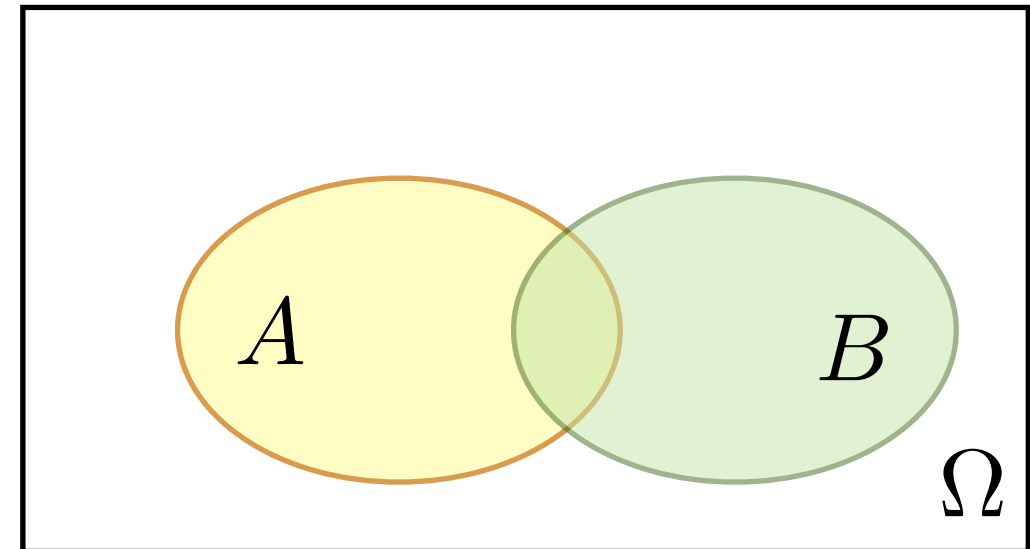
$P(A \cap B) = ?$



II. Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Jevy A a B jsou stochasticky nezávislé právě když $P(A|B)=P(A)$

Nebo také: $P(B|A)=P(B)$

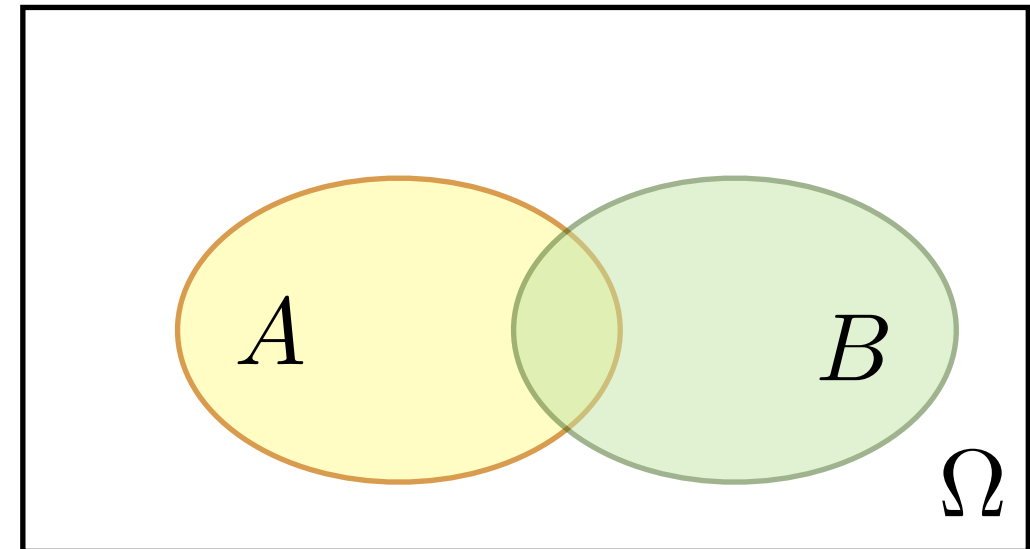
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



II. Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Jevy A a B jsou stochasticky nezávislé právě když $P(A|B)=P(A)$

Nebo také: $P(B|A)=P(B)$

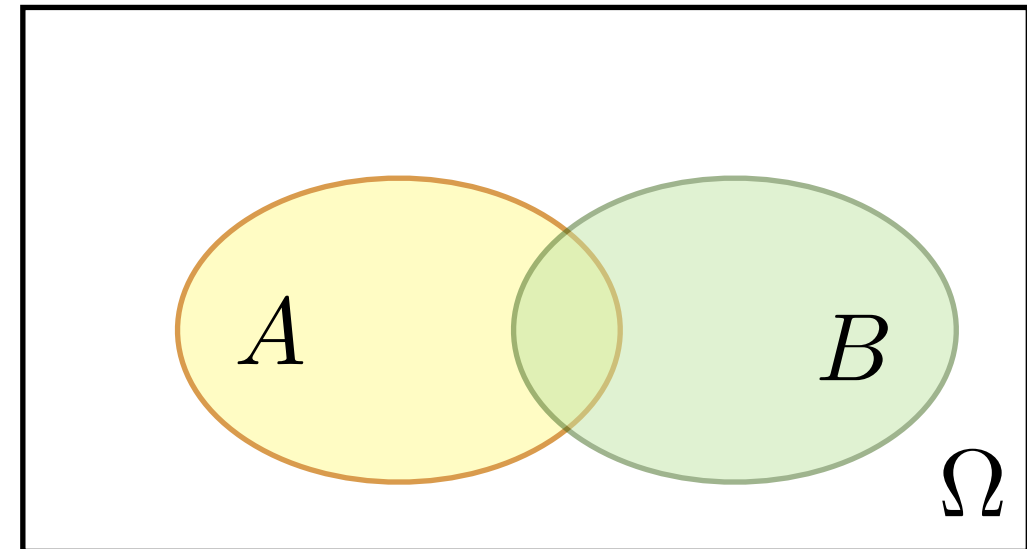
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



II. Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Příklad:

Je známo, že v dlouhodobém průměru je mezi 1000 dodaných komponent 2,34% vadných výrobků pocházejících od výrobce A, 1,08% vadných výrobků od výrobce B, 65,97% bezvadných výrobků od výrobce A a zbytek (30,6%) jsou bezvadné výrobky od výrobce B.

Lze považovat jev, že výrobek je vadný, na výrobci?

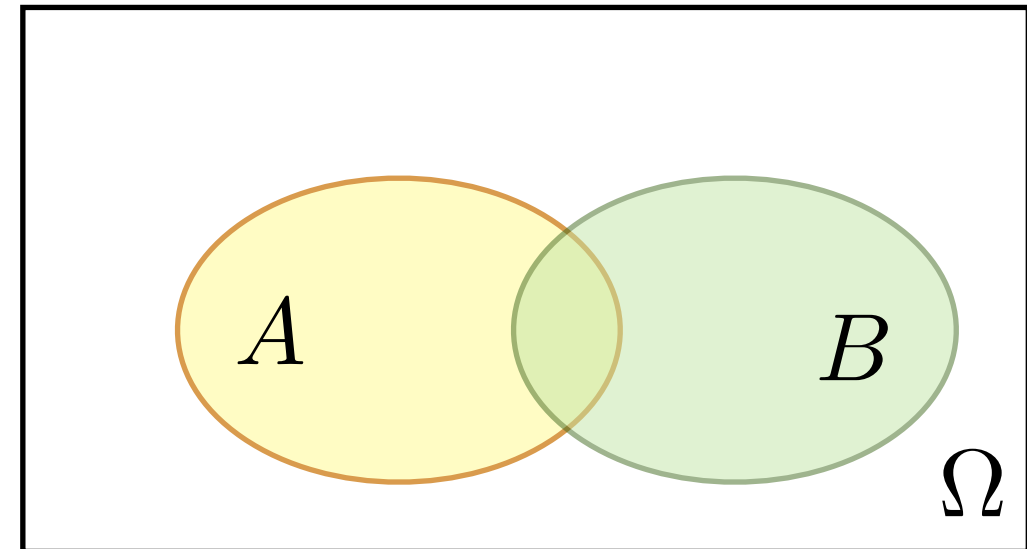
	A	B
vada (V)	2,34	1,08
bez vady	65,98	30,6



II. Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



$$2,34 = 3,42 \cdot 68,32$$

$$65,98 = 96,58 \cdot 68,32$$

$$1,08 = 3,42 \cdot 31,68$$

$$30,60 = 96,58 \cdot 31,68 \quad \text{o.K.}$$

Jev, že výrobek je vadný, lze považovat za stochasticky nezávislý na výrobci.

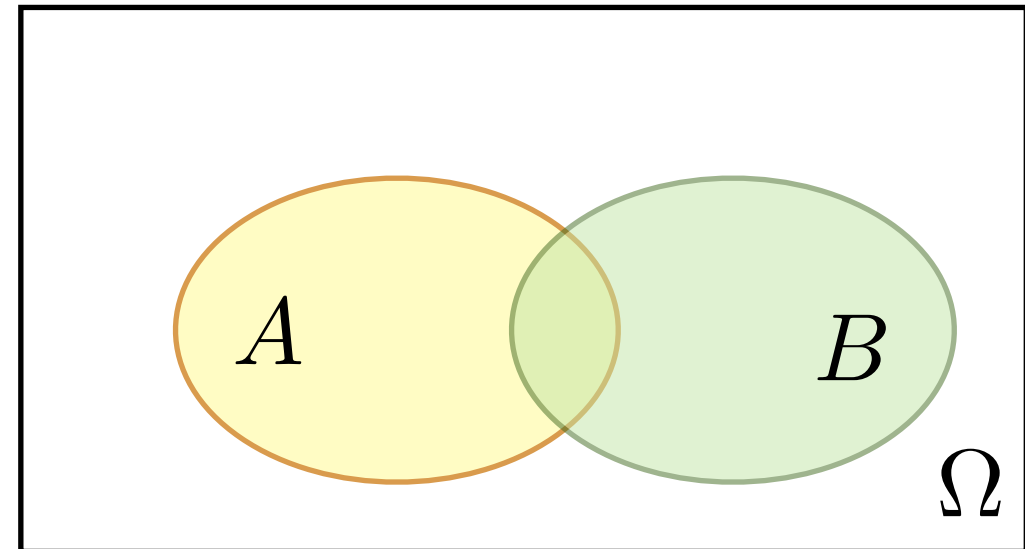
	A	B
vada (V)	2,34	1,08
bez vady	65,98	30,6



II. Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Příklad:

Bylo dotazováno 800 absolventů ČVUT a UK. Z výzkumu plyne, že 34% dotazovaných jsou absolventi ČVUT kteří pracují dále ve svém oboru, 28% dotázaných absolvovalo UK a pracují také ve svém oboru. Ve 20% případů odpovědí bylo zjištěno, že absolventi ČVUT ve svém oboru nepracují a zbývajících 18% jsou absolventi UK, kteří také nepracují ve svém oboru.

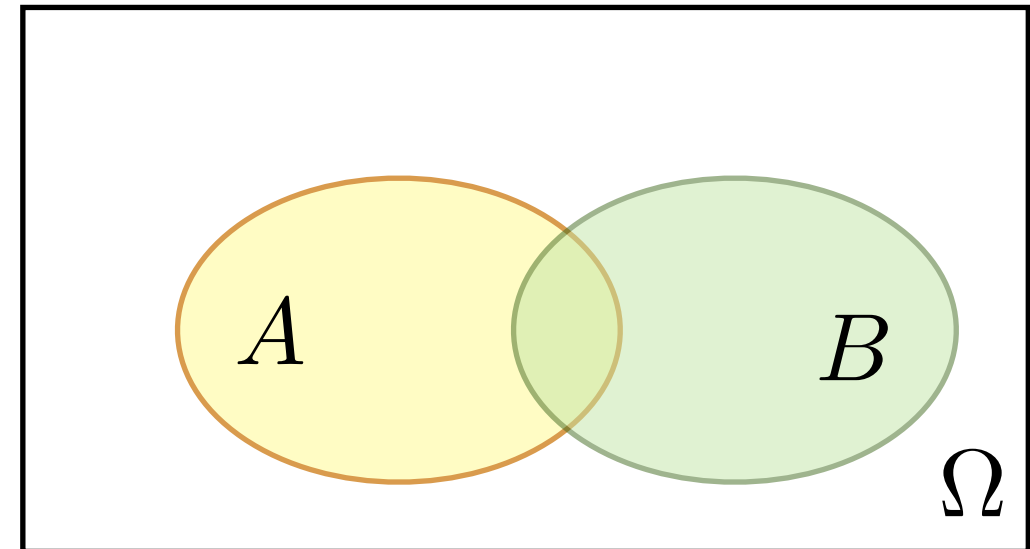
Lze považovat uplatnění se v oboru studia stochasticky nezávislé na absolvované univerzitě?



II. Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Příklad:

	ČVUT	UK	celkem
v oboru	0,34	0,28	0,62
mimo obor	0,20	0,18	0,38
celkem	0,54	0,46	1

$$0,54 \cdot 0,62 = 0,3348$$

$$P(O) = 0,62$$

$$P(O|\text{ČVUT}) = 0,34/0,54 = 0,63 > P(O)$$

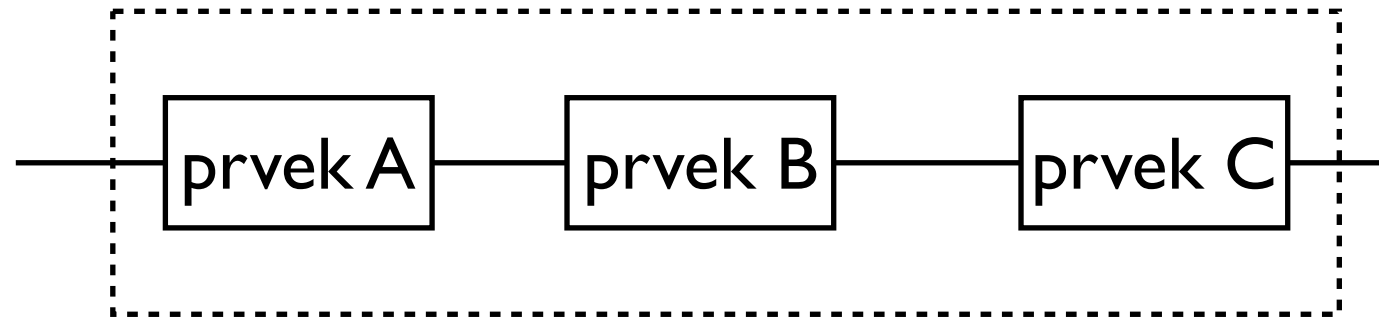
Uplatnění v oboru je stochasticky závislé na absolvované univerzitě



II. Paralelní a sériové systémy

Sériový systém:

Nezávislé prvky A, B, C



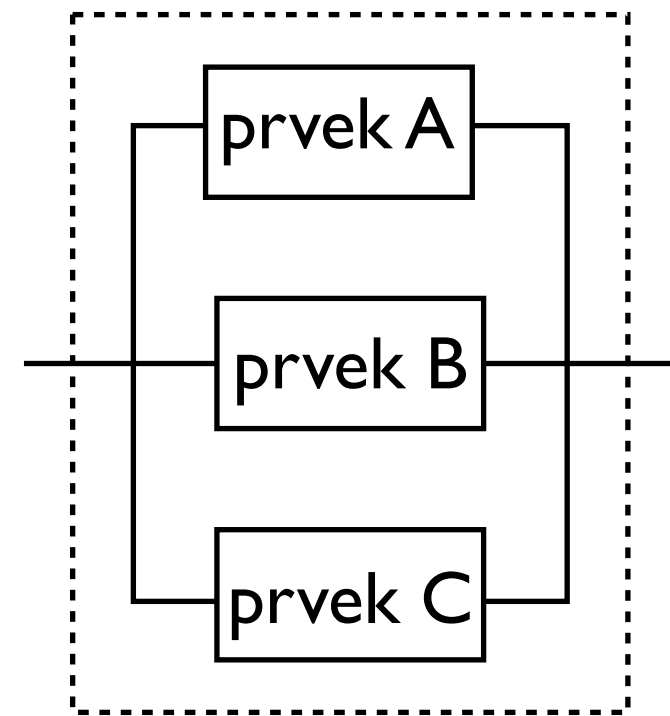
$$D = \{\text{system bude funkční}\} = A \cap B \cap C$$

$$P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Paralelní systém:

$$D = \{\text{system bude funkční}\} = A \cup B \cup C$$

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$



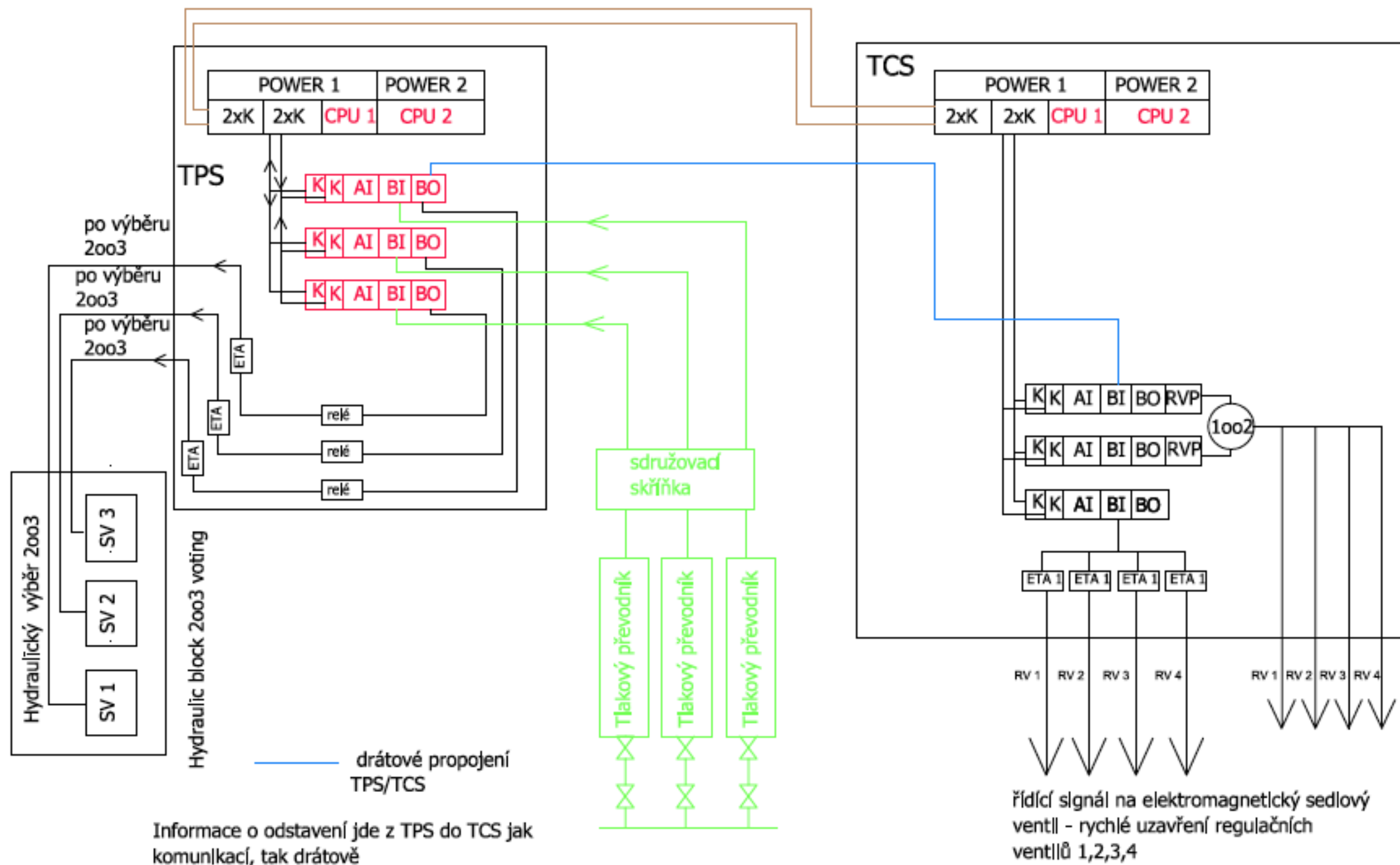
$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

$$P(D_P) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

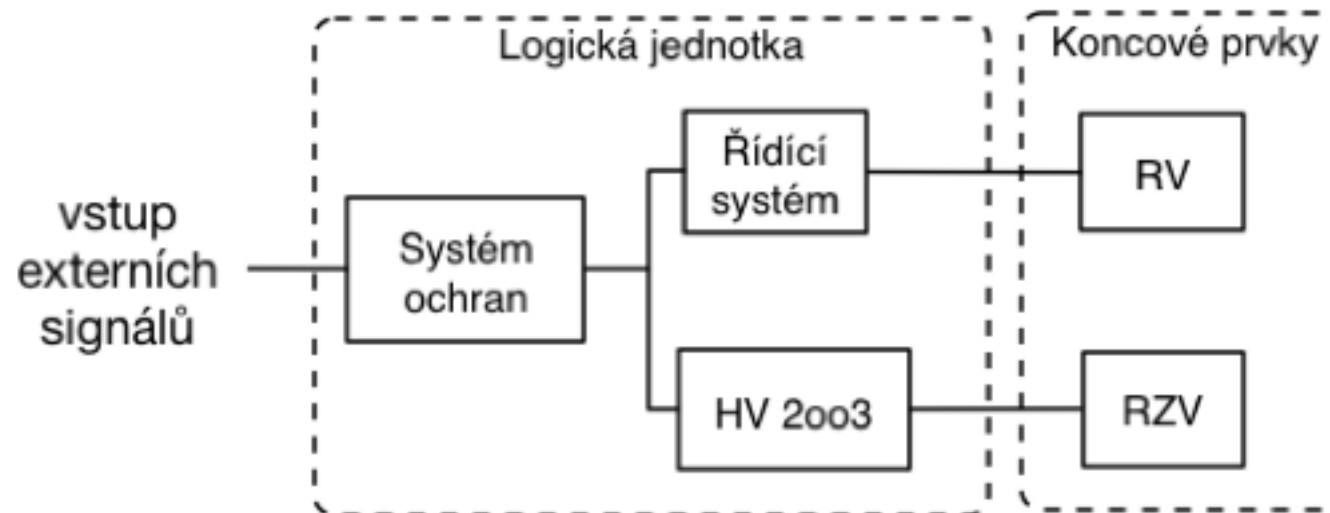
$$P(D_S) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$



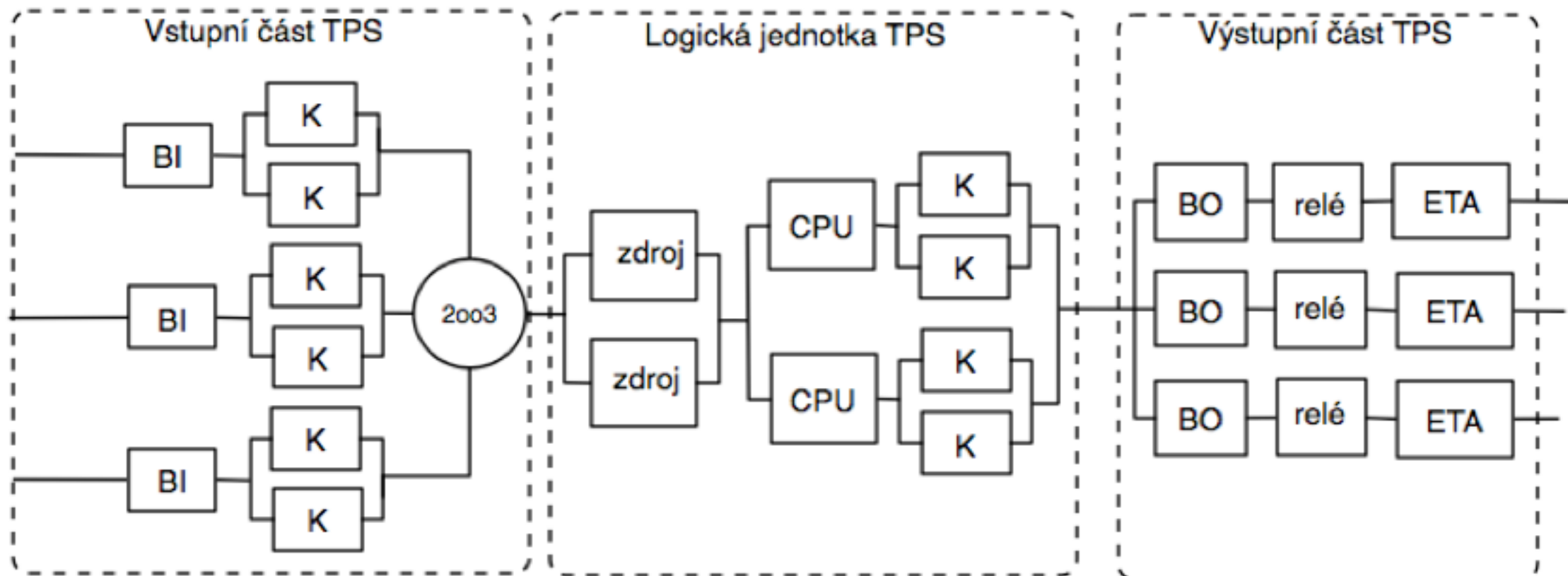
II. Paralelní a sériové systémy



II. Paralelní a sériové systémy



System ochran:

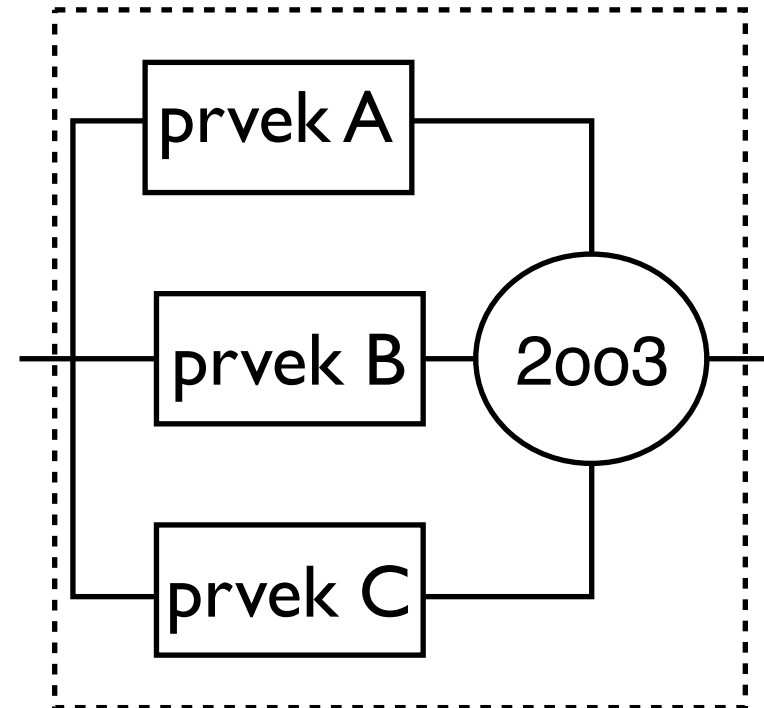


II. Paralelní a sériové systémy

System KooN (K out of N):

Nezávislé prvky A, B, C

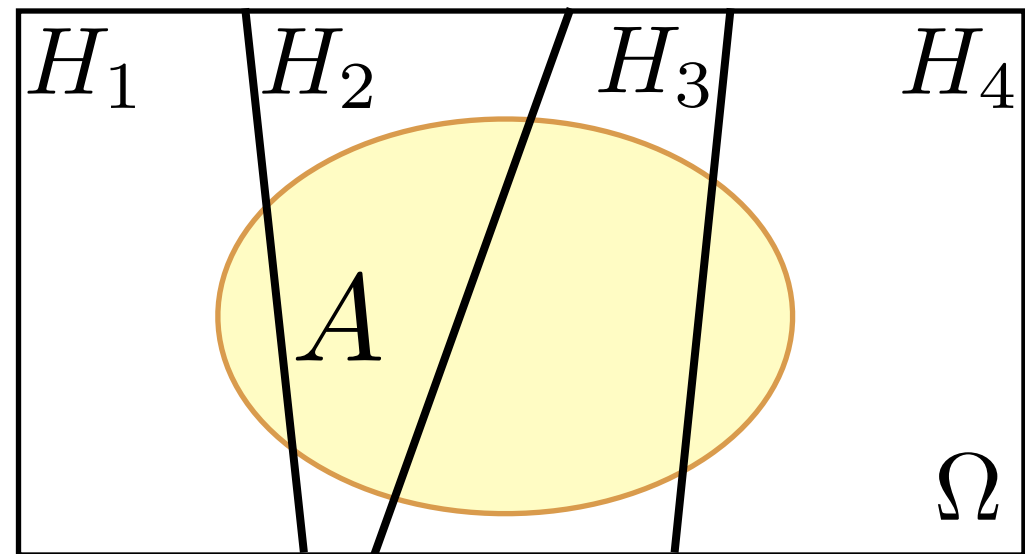
$P(D) = ???$



II. Věta o úplné pravděpodobnosti

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω
 $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

$$\begin{aligned} P(A) = & P(A|H_1) \cdot P(H_1) \\ & + P(A|H_2) \cdot P(H_2) \\ & + P(A|H_3) \cdot P(H_3) \\ & + P(A|H_4) \cdot P(H_4) \end{aligned}$$



Příklad:

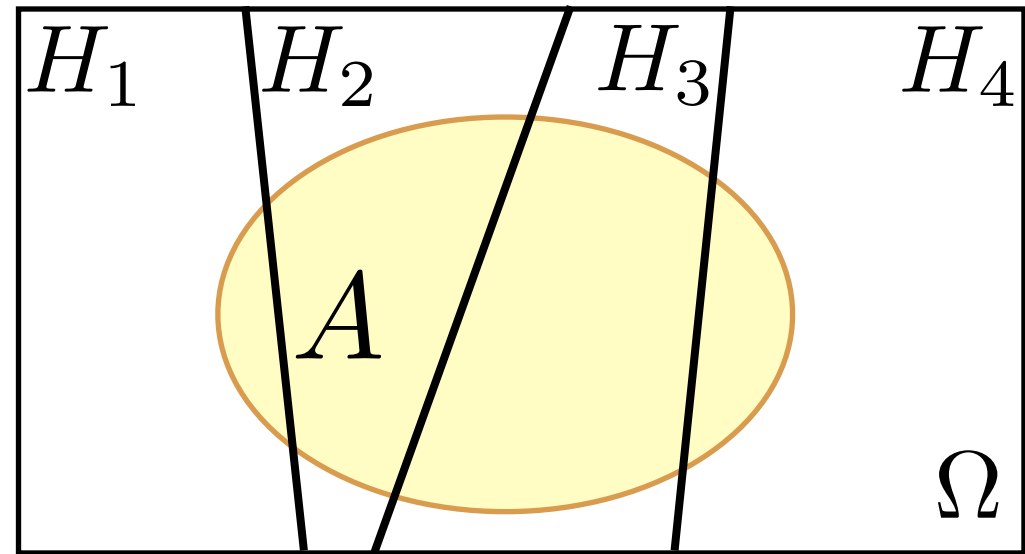
Na trhu jsou výrobky od čtyř výrobců v pořadí A, B, C a D v poměru 1:2:4:5. Zmetkovitost je u těchto výrobců po řadě 0,5%, 0,8%, 0,3% a 0,3%. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek na trhu bude vadný? A bude-li vadný, jaká je pravděpodobnost, že byl vyroben výrobcem A?



II. Věta o úplné pravděpodobnosti

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω
 $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

$$\begin{aligned} P(A) = & P(A|H_1) \cdot P(H_1) \\ & + P(A|H_2) \cdot P(H_2) \\ & + P(A|H_3) \cdot P(H_3) \\ & + P(A|H_4) \cdot P(H_4) \end{aligned}$$



Příklad:

$$P(H_1) = 1/12, \quad P(A|H_1) = 0,005$$

$$P(H_2) = 2/12, \quad P(A|H_2) = 0,008$$

$$P(H_3) = 4/12, \quad P(A|H_3) = 0,003$$

$$P(H_4) = 5/12, \quad P(A|H_4) = 0,003$$

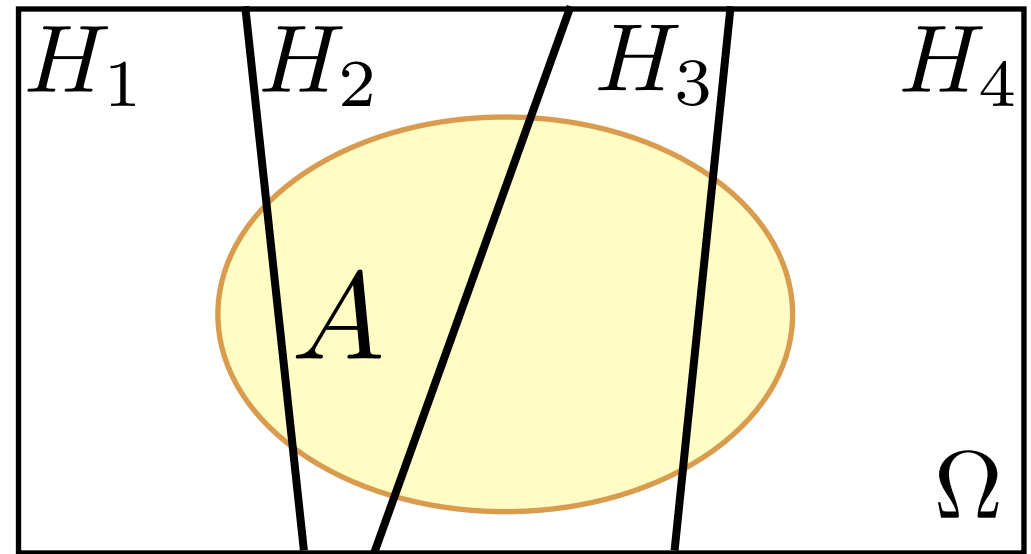
$$P(A) = (5 + 16 + 12 + 15)/12000 = 0,004$$



II. Bayesova věta

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω
 $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

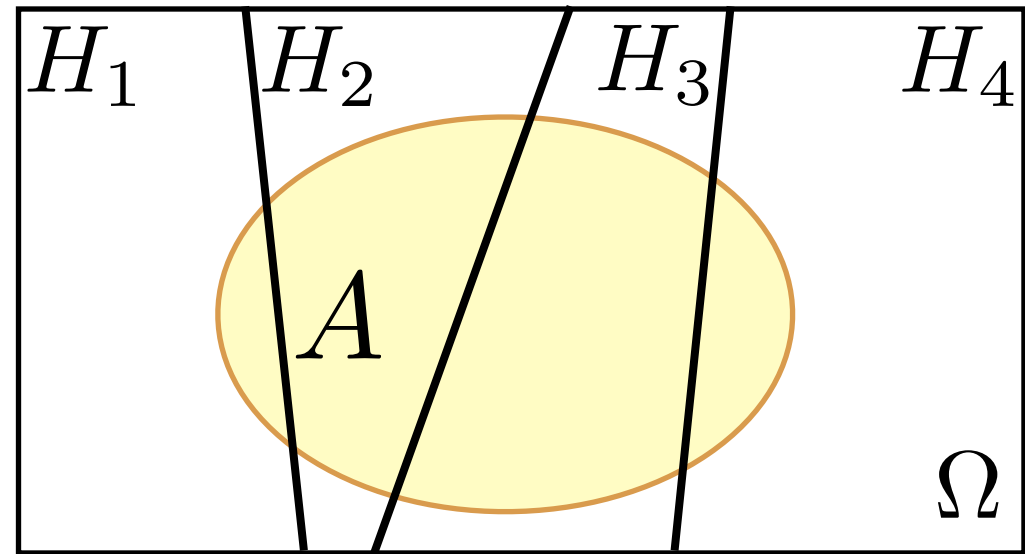
$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)}$$



II. Bayesova věta

A je náhodný jev, $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je úplné pokrytí Ω
 $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{\sum_{i=1}^4 P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$



Příklad:

$$P(H_1) = 0,08333, \quad P(A|H_1) = 0,0005$$

$$P(H_2) = 0,16667, \quad P(A|H_2) = 0,0008$$

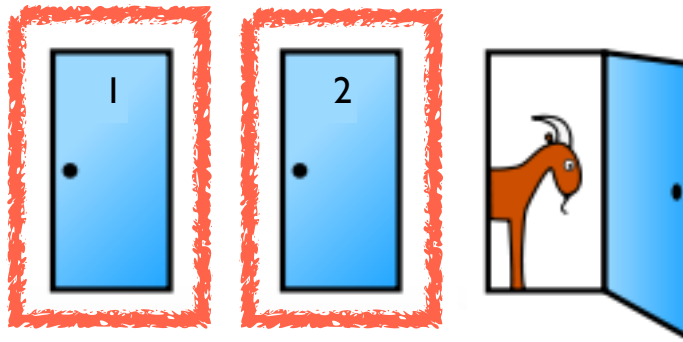
$$P(H_3) = 0,33333, \quad P(A|H_3) = 0,0003$$

$$P(H_4) = 0,41667, \quad P(A|H_4) = 0,0003$$

$$P(H_1|A) = 0,0005 \cdot 0,08333 / 0,0004 = 0,10417$$



Problém tří dveří (Monty Hall Problem)



- Označme: A_1, A_2, A_3 jevy, že auto je za dveřmi č. 1, 2, 3.
- Pro nás je zřejmě apriori $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$.
- Necht' O_1, O_2, O_3 značí jevy, že moderátor otevře dveře č. 1, 2, 3.
- Zvolíme např. dveře č. 1.
- Zřejmě je $P(O_1) = 0$ a $P(O_2) = P(O_3) = 1/2$.
- Dále platí: $P(O_2|A_1)=1/2$, $P(O_3|A_1)=1/2$, $P(O_2|A_2)=0$, $P(O_3|A_2)=1$, $P(O_2|A_3)=1$, $P(O_3|A_3)=0$.
- Předpokládejme, že moderátor otevřel dveře č. 3.
- Tedy aposteriorní pravděpodobnosti podle Bayesovy věty jsou:

$$P(A_1|O_3) = \frac{P(A_1)P(O_3|A_1)}{P(O_3)} = \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/2} = 1/3$$

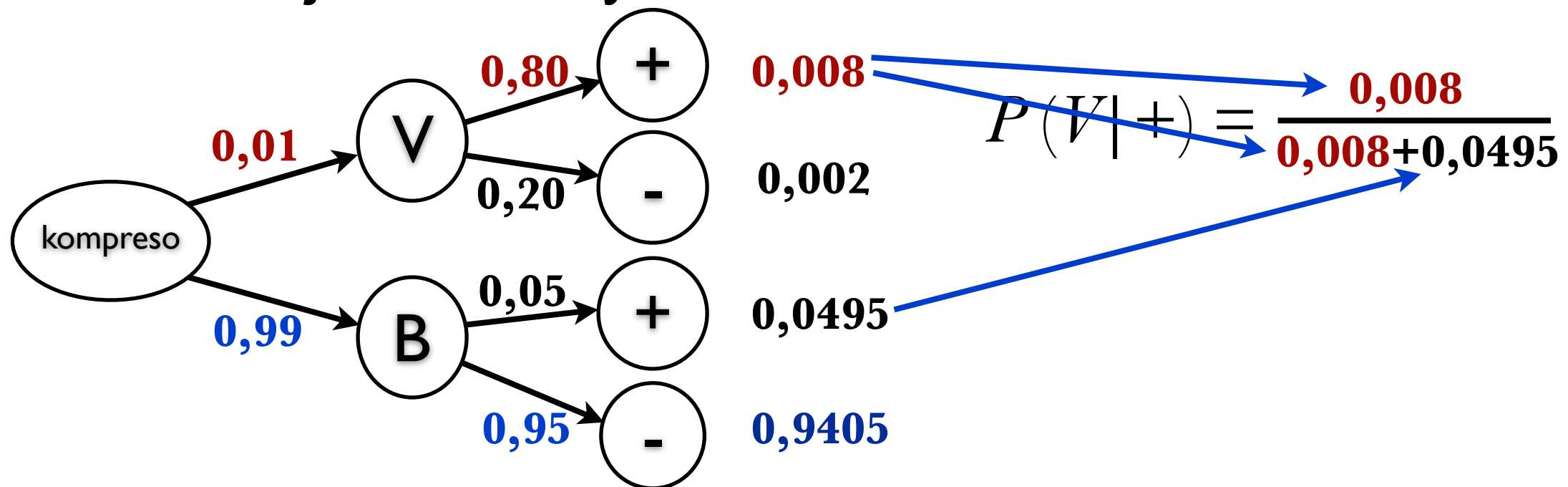
$$P(A_2|O_3) = \frac{P(A_2)P(O_3|A_2)}{P(O_3)} = \frac{1/3 \cdot 1}{1/2} = 2/3$$



II. Bayesova věta

Příklad:

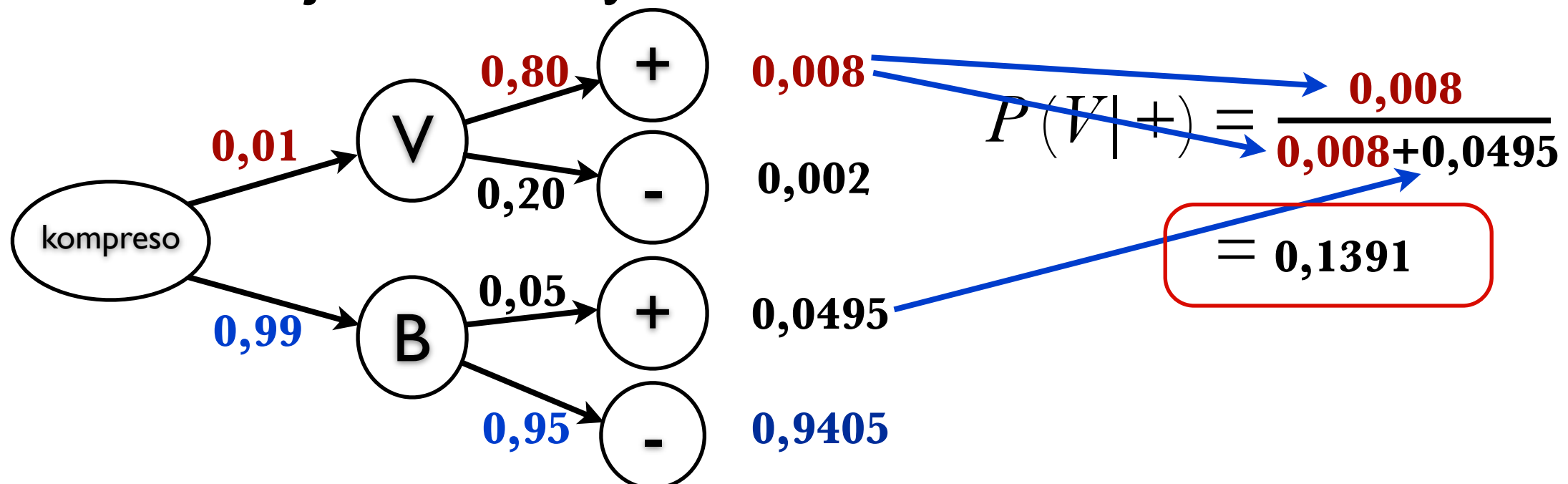
Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?



II. Bayesova věta

Příklad:

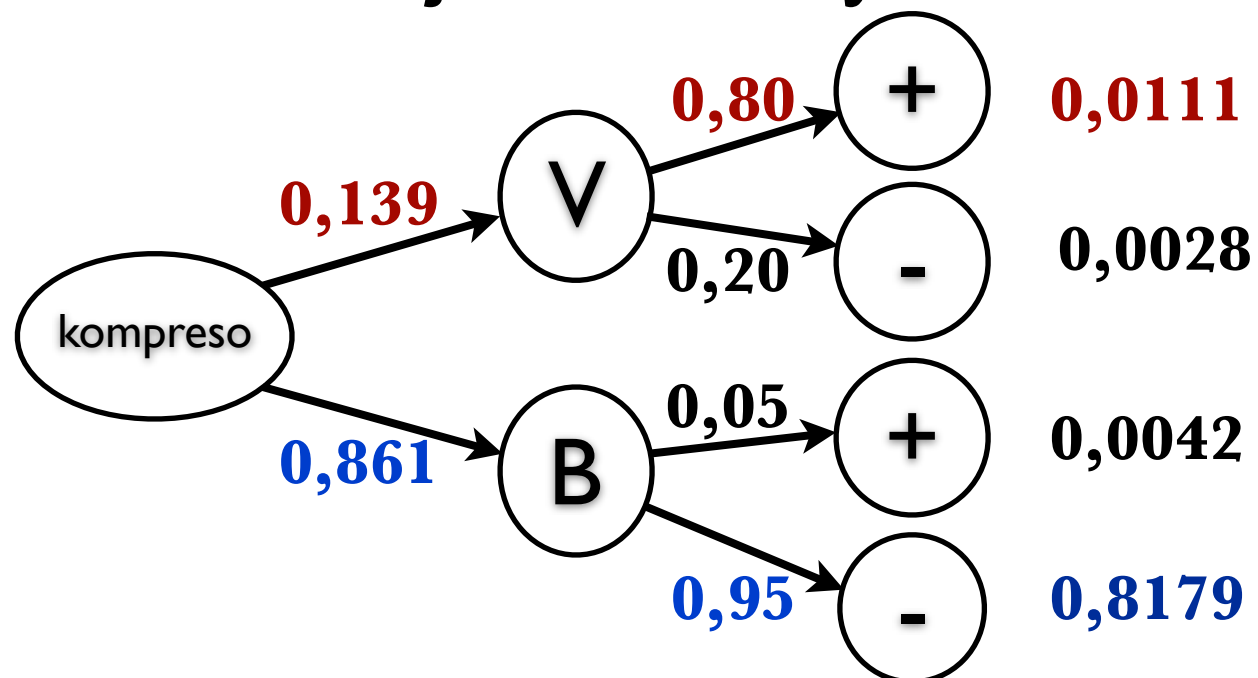
Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?



II. Bayesova věta

Příklad:

Tělo kompresoru musí být 100% hermeticky uzavřeno. V průměru jeden ze sta kompresorů trochu netěsní a je třeba jej rozložit a znovu složit. Zkouška těsnosti odhalí vadný výrobek s pravděpodobností 0,8. Naproti tomu, s pravděpodobností 0,05 označí jako vadný bezvadný výrobek. Jaká je pravděpodobnost vady u výrobku, který zkouška označila jako vadný?



$$P_2(V|+) = \frac{0,0111}{0,0111 + 0,0042}$$

$$= 0,7255$$

Při opakovaném testu



Naděje rytíře de Méré

První hra:

Jakou má šanci náhodný jev, že padne minimálně jedna šestka ve čtyřech po sobě následujících hodech hrací kostkou?

$A_i = \{\text{v } i\text{-tém hodu padne šestka}\}, P(A_i) = 1/6, i=1,2,3,4.$

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4, P(A) = 1 - \prod (1 - P(A_i)) = 1 - (5/6)^4 = 1 - 625/1296 = 0,517747$

Druhá hra:

Jakou má šanci náhodný jev, že padnou současně dvě šestky alespoň jednou při 24 po sobě následujících hodech dvěma hracími kostkami?

$B_i = \{\text{v } i\text{-tém hodu padnou dvě šestky}\}, P(B_i) = 1/36, i=1, \dots, 24.$

$B = B_1 \cap \dots \cap B_{24}, P(B) = 1 - \prod (1 - P(B_i)) = 1 - (35/36)^{24} =$

$= 1 - 0,508596 = 0,491403876$



Rozdělení sázky

Dva hráči hrají sérii 9 her a vyhraje ten, který první dosáhne 5 vítězství (tedy většinu). Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu 4:2 a je třeba spravedlivě rozdělit sázku mezi oba hráče.

Řešení:

- 1) Předpokládáme, že vítězství každého z obou hráčů A a B v následujících neuskutečněných hrách by bylo stejně možné.
- 2) Chybí dohrát ještě tři hry: hráči A chybí k vítězství jedna výhra, hráči B chybějí tři.
- 3) Možné výsledky jsou: AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB.
- 4) Z toho v prvních sedmi by celkově vyhrál hráč A a pouze v jediném případě (posledním) by vyhrál hráč B.
- 5) Tedy šance na výhru jsou 7:1 a to je také poměr, v němž by měla být rozdělena sázka.



Rozdělení sázky

Dva hráči hrají sérii 9 her a vyhraje ten, který první dosáhne 5 vítězství (tedy většinu). Na vítěze je vyhlášena sázka. Hra je však přerušena za stavu 4:2 a je třeba spravedlivě rozdělit sázku mezi oba hráče.

Řešení 2:

- 1) Předpokládáme, že vítězství každého z obou hráčů A a B v následujících neuskutečněných hrách by bylo stejně možné.
- 2) Chybí dohrát ještě tři hry: hráči A chybí k vítězství jedna výhra, hráči B chybějí maximálně tři hry.
- 3) Pro ukončení hry by mohly nastat tyto výsledky: A, BA, BBA, BBB.
- 4) Je $P(A)=1/2$, $P(BA)=1/4$, $P(BBA)=P(BBB)=1/8$.
- 5) Hráč A by vyhrál v prvních třech případech s pravděpodobností $7/8$, Hráč B by vyhrál pouze v posledním případě s pravděpodobností $1/8$.
- 6) Tedy šance na výhru jsou 7:1 a to je také poměr, v němž by měla být rozdělena sázka.



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Úloha o ruinování hráče

Dva hráči A a B hrají sérii her. Při každé hře hráči vsadí jednu korunu. Hráč A vyhraje s pravděpodobností p a prohraje s pravděpodobností $1-p$. Na počátku má hráč A celkem x korun, hráč B má y korun. Hry jsou vzájemně nezávislé. Hra se hraje tak dlouho, dokud mají oba co vsadit. Tedy hra končí v okamžiku, kdy je jeden z hráčů zruinován. Jakou mají hráči A a B pravděpodobnost zruinování?

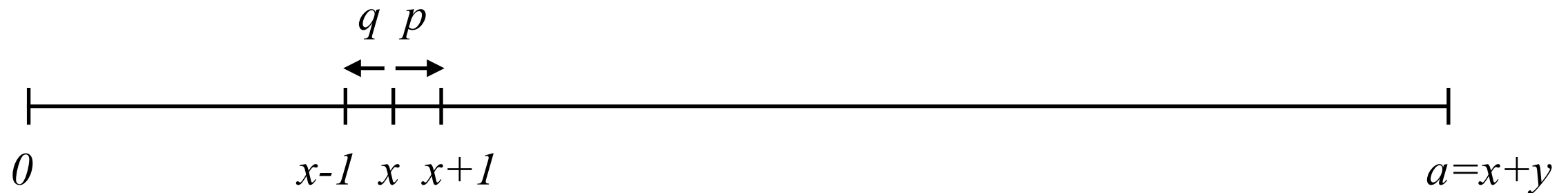
Další z nejznámějších pravděpodobnostních úloh, kterou lze nalézt například v učebnici teorie pravděpodobnosti W. Feller z roku 1957.

<http://www.statapol.cz/oldstat/bulletiny/ib-93-4.pdf>



Úvod do teorie pravděpodobnosti

Úloha o ruinování hráče



q_x = pravděpodobnost, že hráč A bude zruinován

$$p = q = 0,5 \Rightarrow q_x = 0,5(q_{x+1} + q_{x-1}), \quad x > 0, \quad q_0 = 1 \quad q_a = 0$$

$$q_x = q_0 + dx$$

$$q_x = 1 + \frac{x}{a}$$

$$p \neq q \Rightarrow q_x = pq_{x+1} + qq_{x-1}, \quad x > 0, \quad q_0 = 1 \quad q_a = 0$$

$$q_x = A + B \left(\frac{q}{p} \right)^x$$

$$q_x = \frac{\left(\frac{q}{p} \right)^a - \left(\frac{q}{p} \right)^x}{\left(\frac{q}{p} \right)^a - 1}$$

