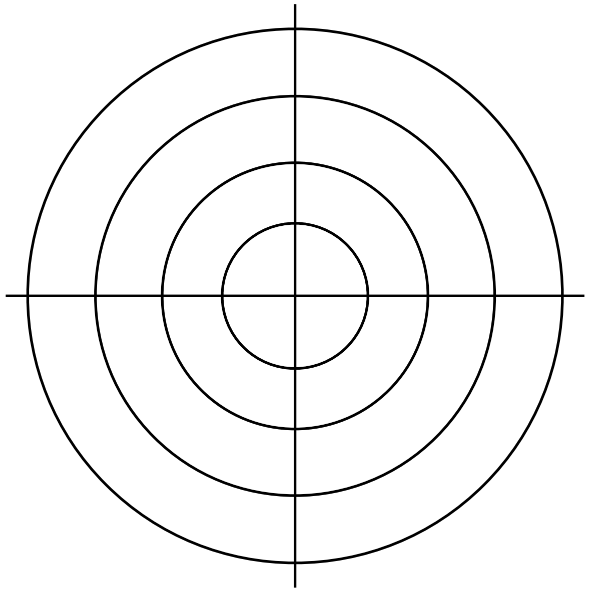
Základy stochastiky

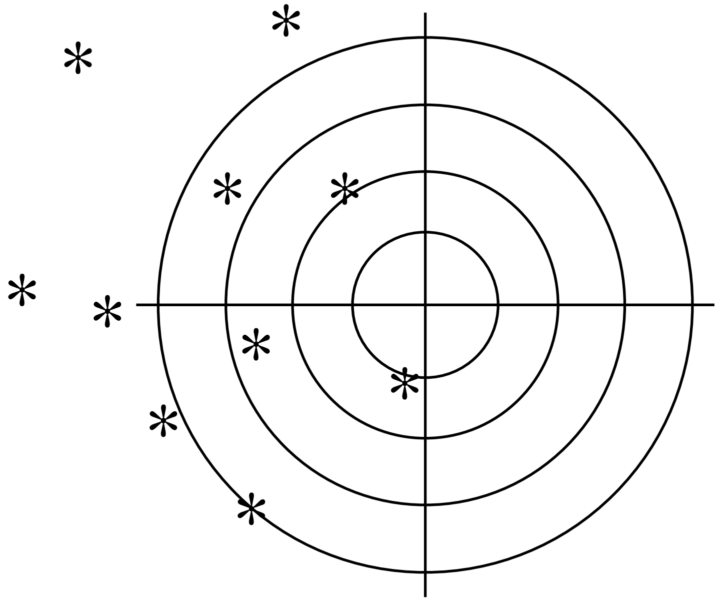
XI. Statistické charakteristiky a odhady

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

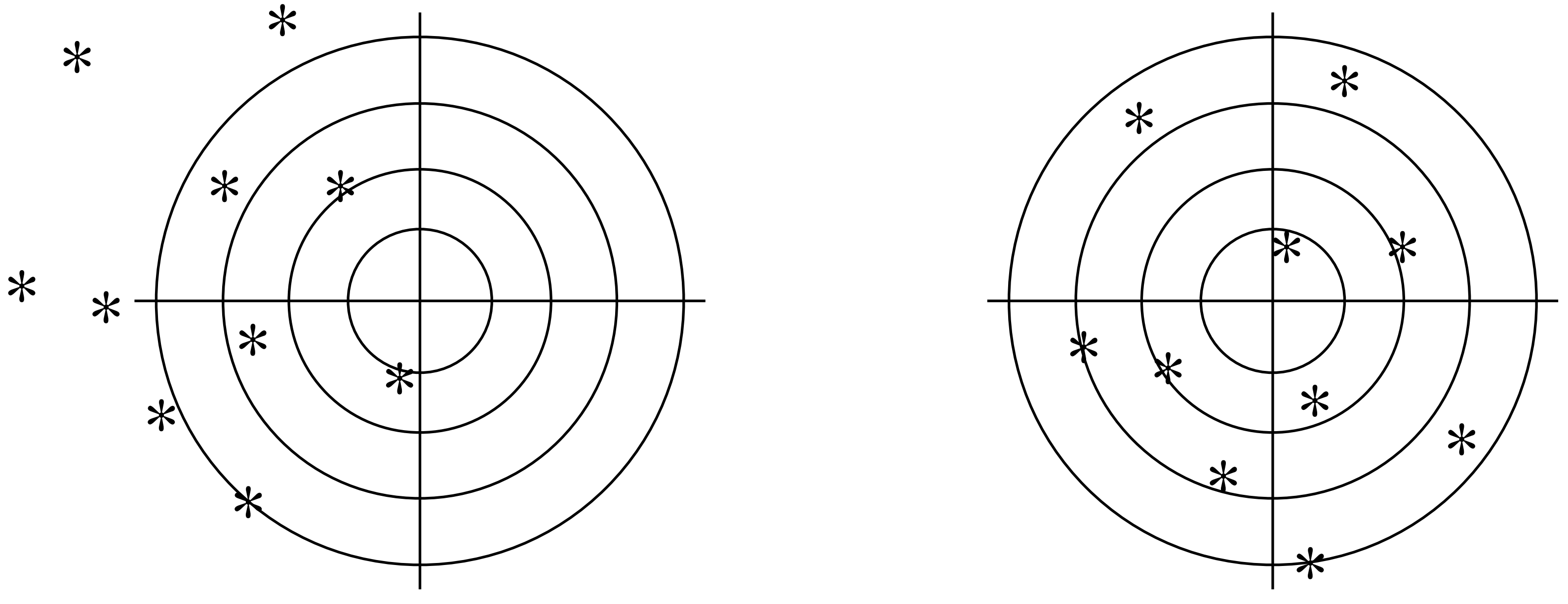
Bodové odhady



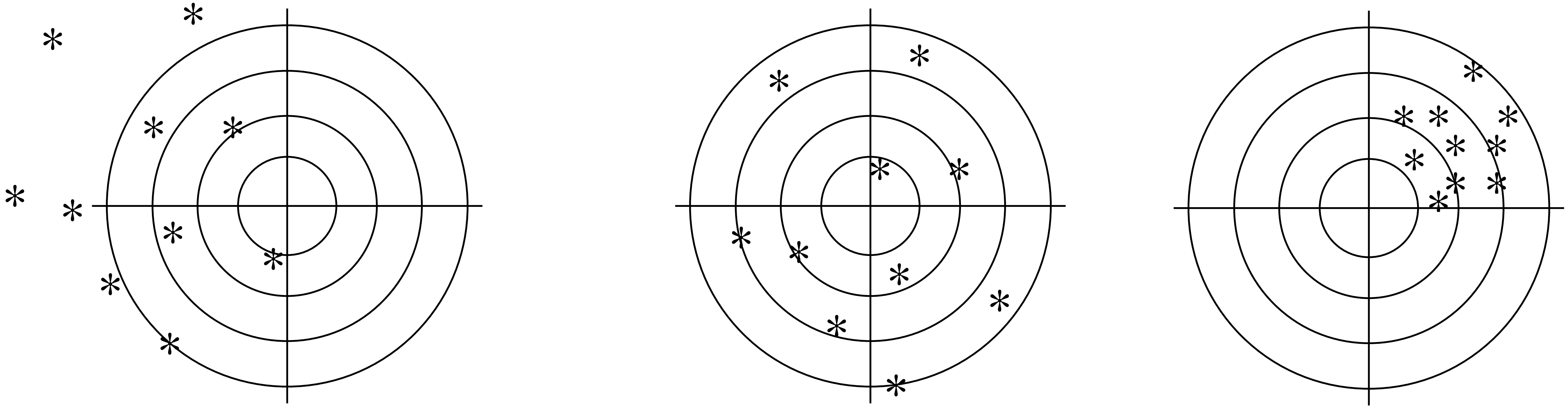
Bodové odhady



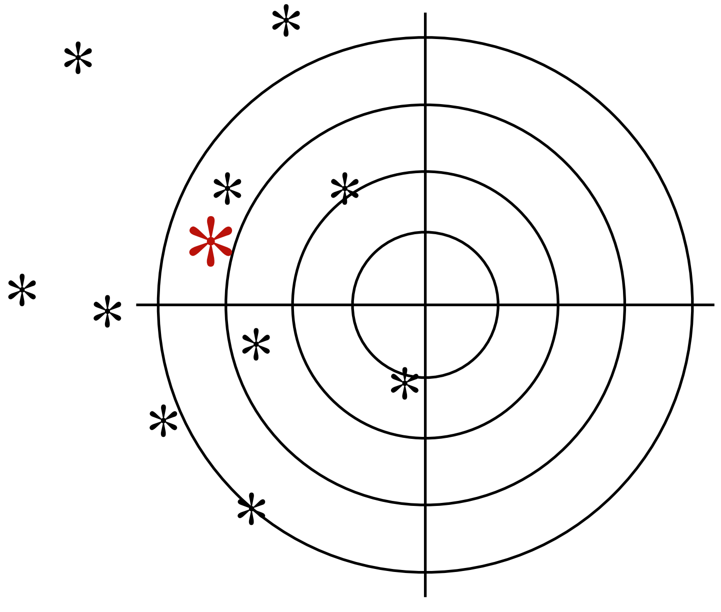
Bodové odhady

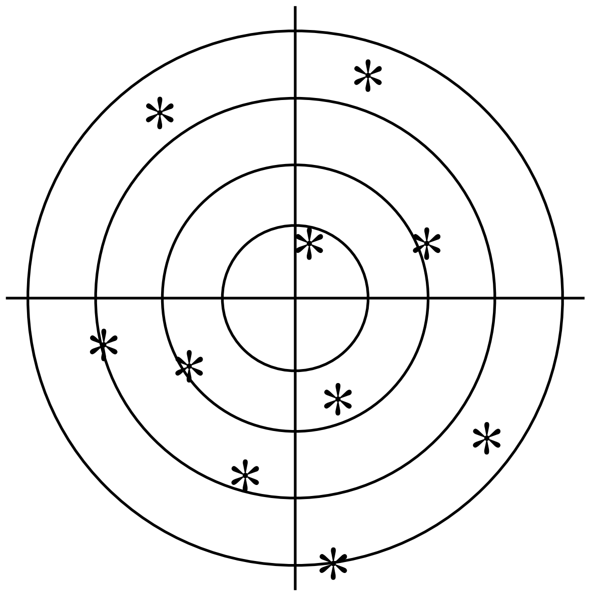


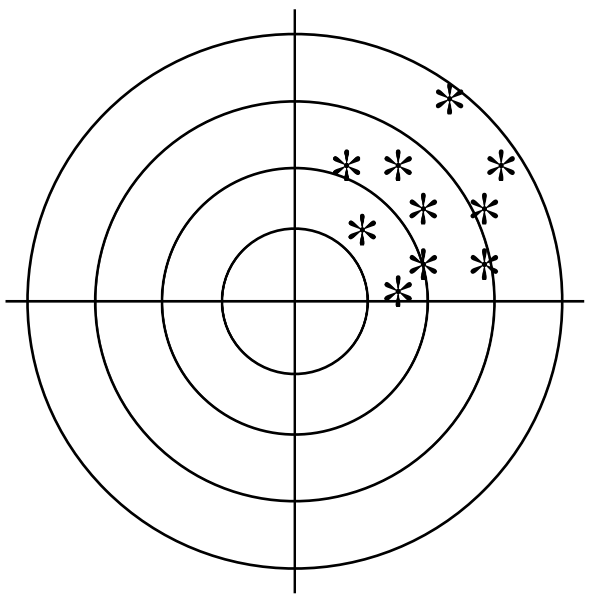
Bodové odhady



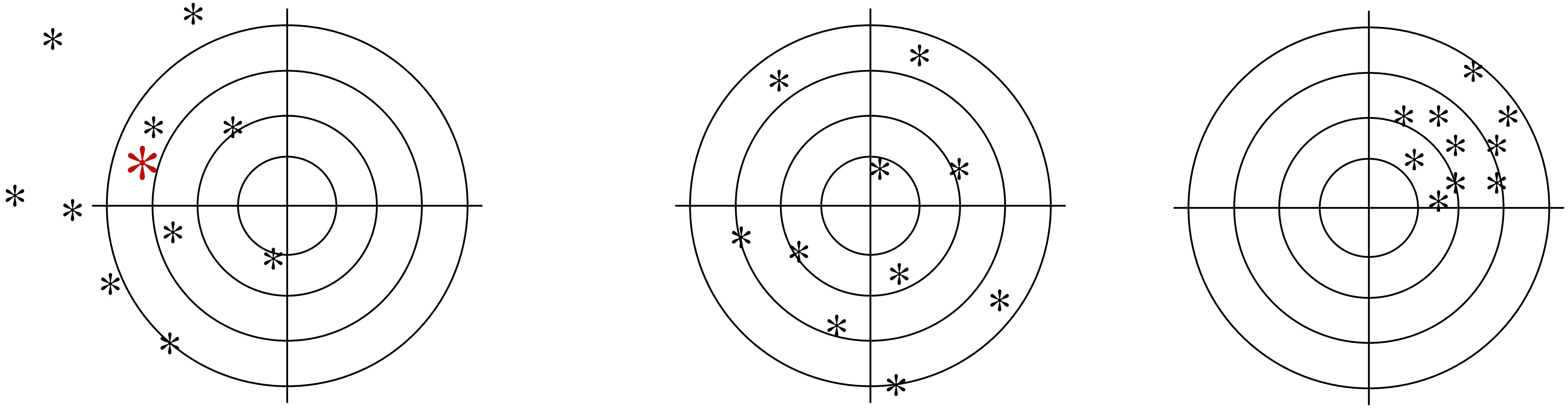
Bodové odhady





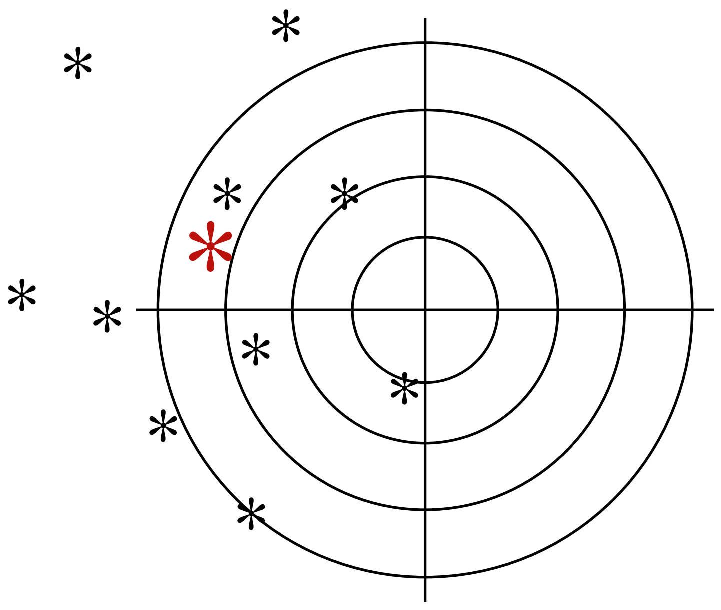


Bodové odhady

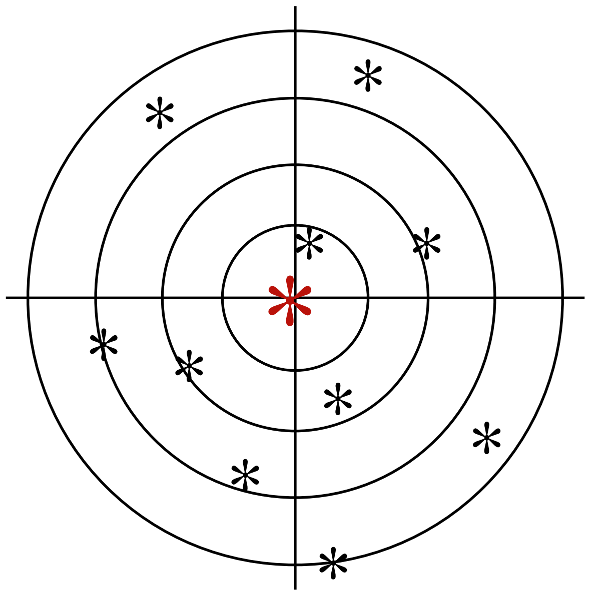


Vychýlený,
velký rozptyl

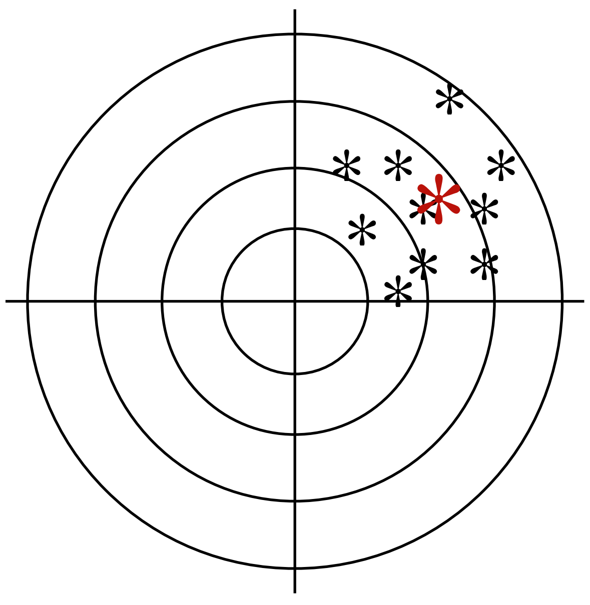
Bodové odhady



Vychýlený,
velký rozptyl

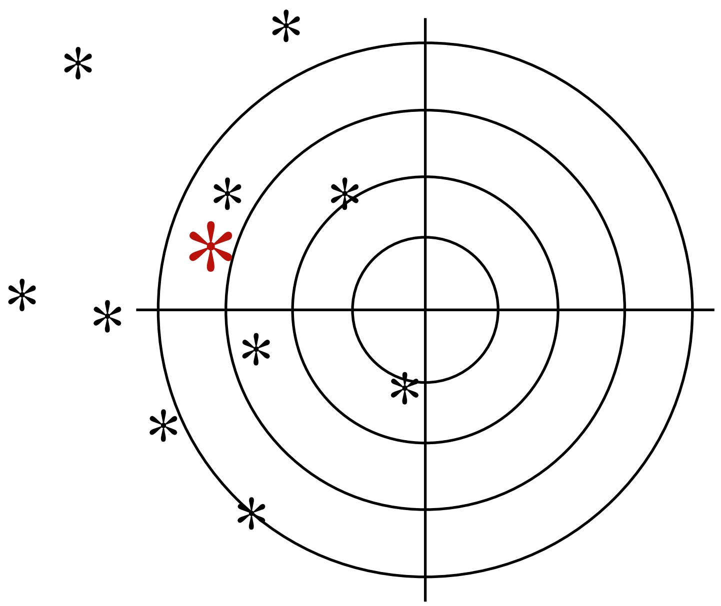


Nevychýlený,
velký rozptyl

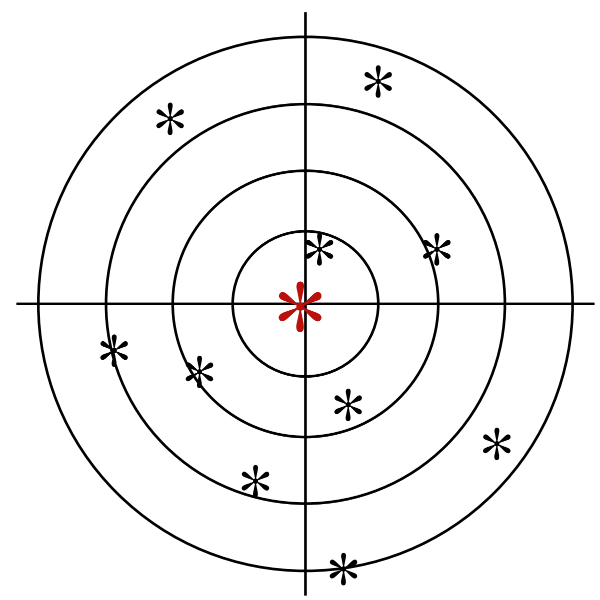


Vychýlený,
malý rozptyl

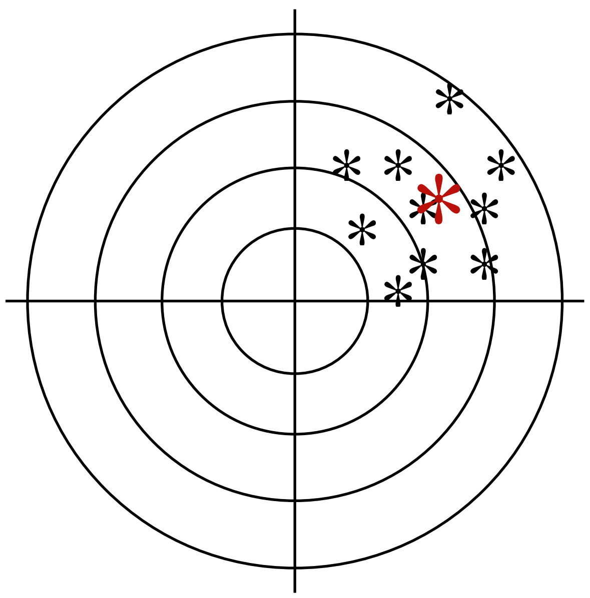
Bodové odhady



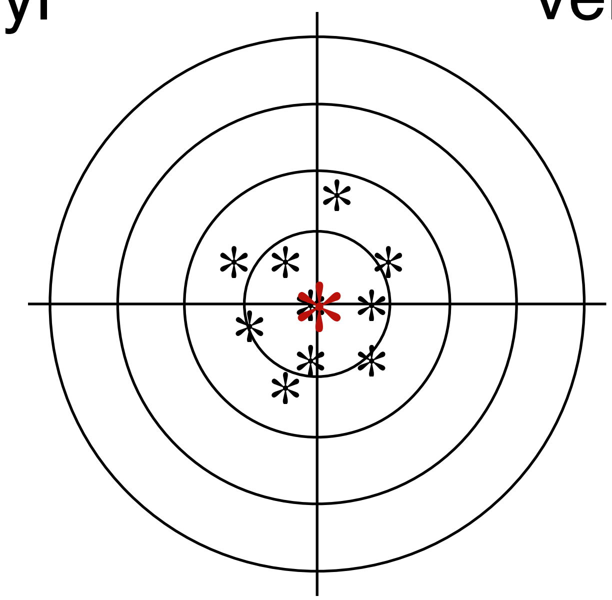
Vychýlený,
velký rozptyl



Nevychýlený,
velký rozptyl

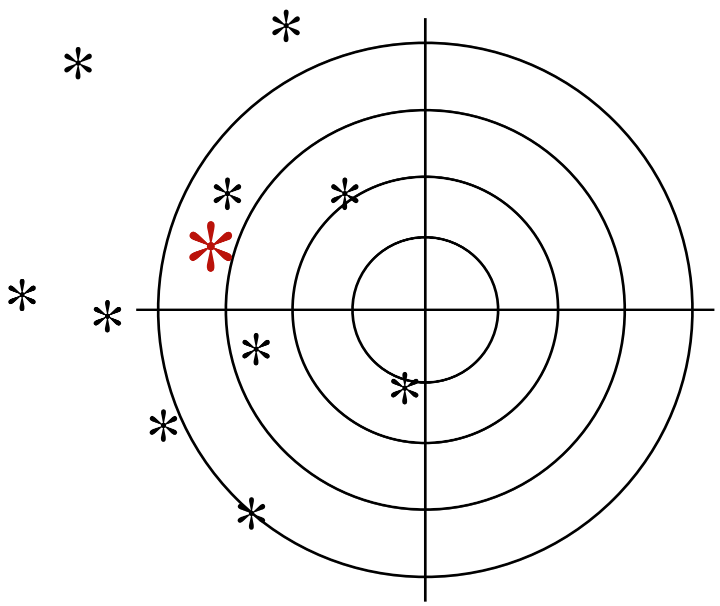


Vychýlený,
malý rozptyl

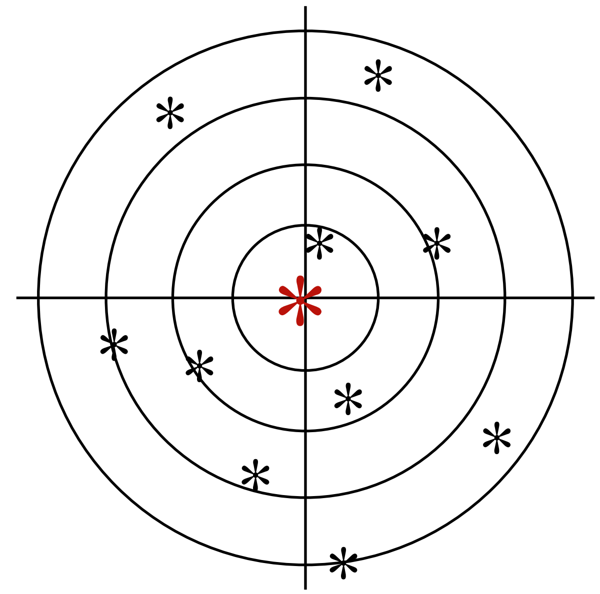


Nevychýlený,
malý rozptyl

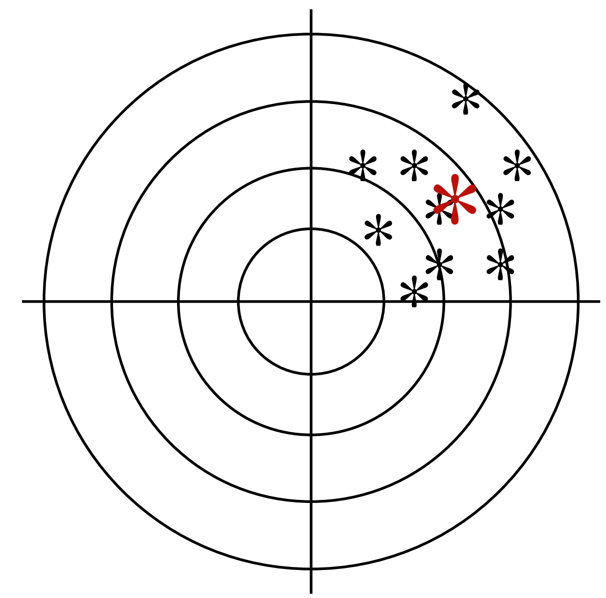
Bodové odhady



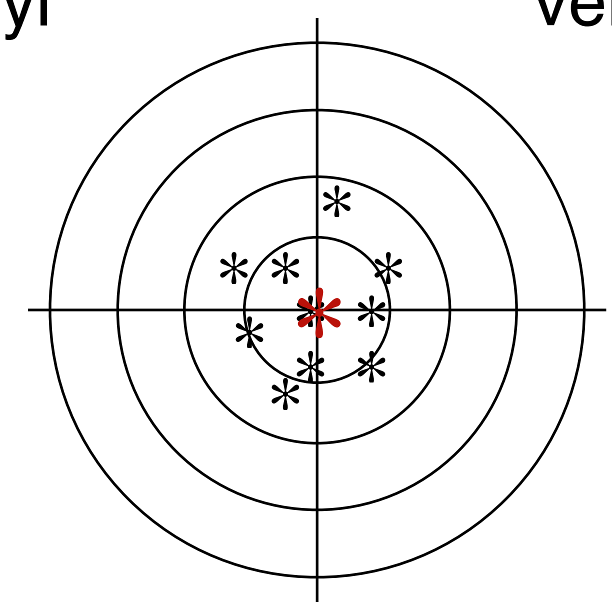
Vychýlený,
velký rozptyl



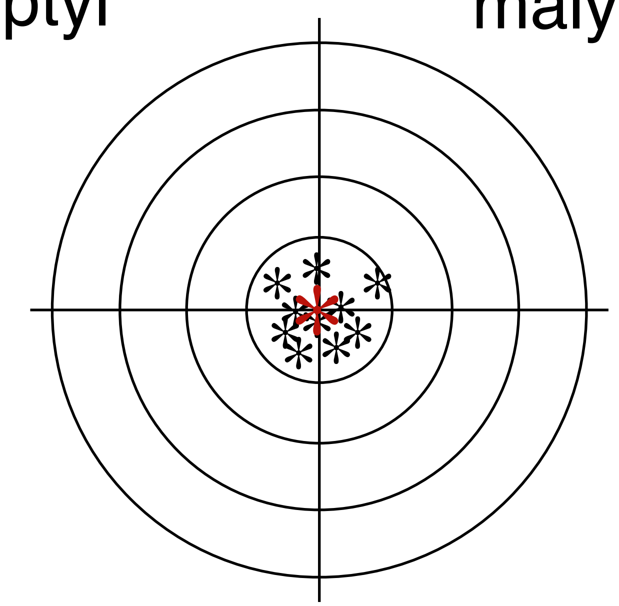
Nevychýlený,
velký rozptyl



Vychýlený,
malý rozptyl

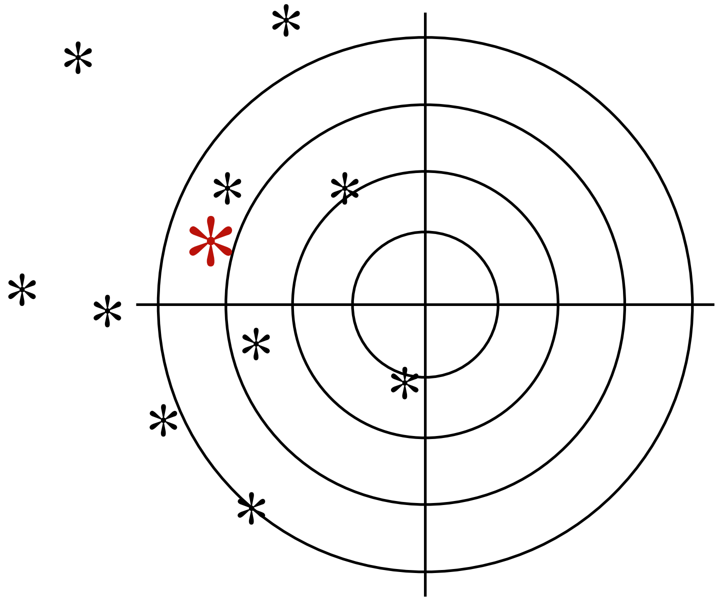


Nevychýlený,
malý rozptyl

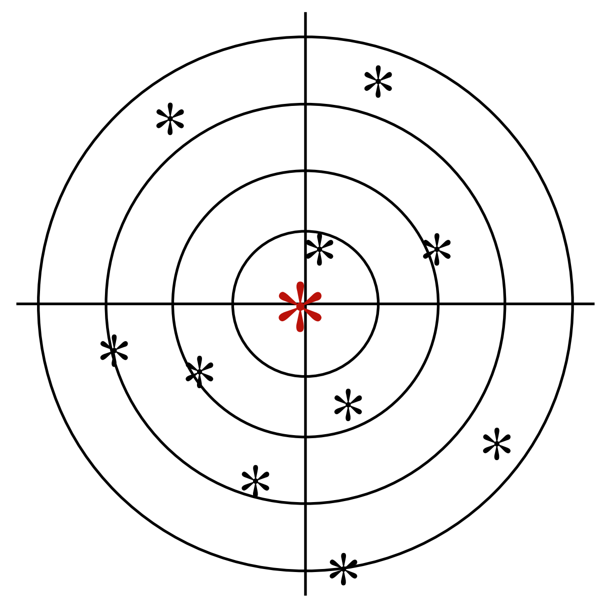


Nejlepší nestranný

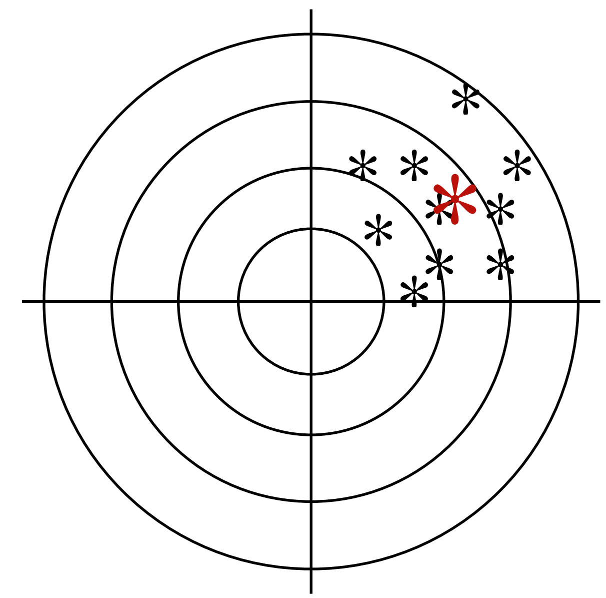
Bodové odhady



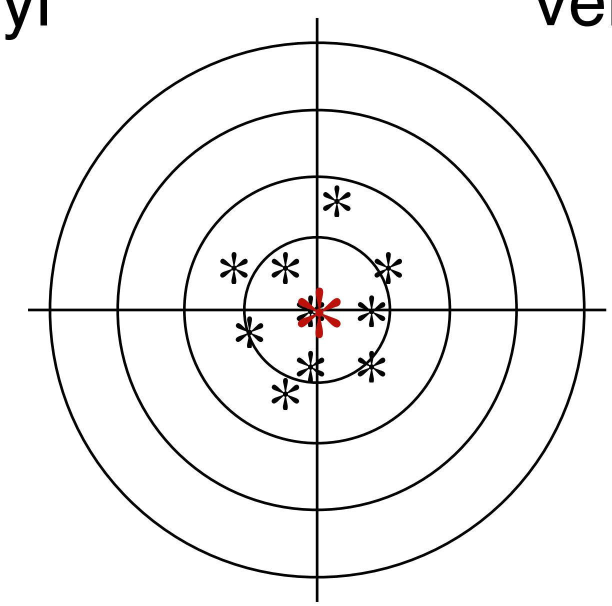
Vychýlený,
velký rozptyl



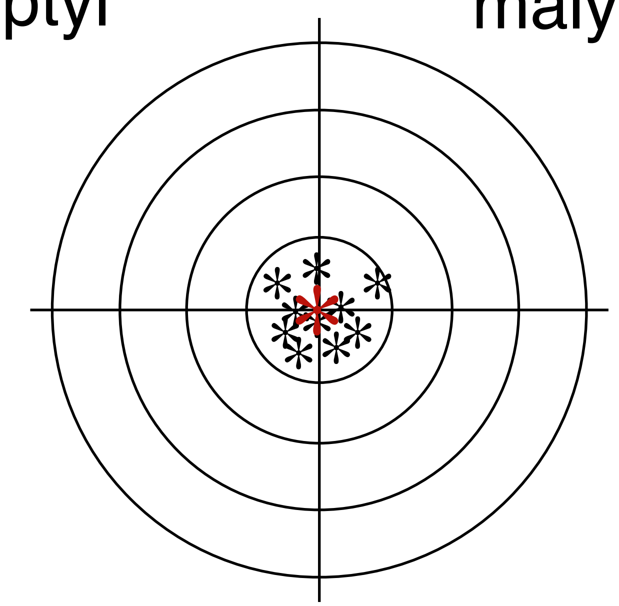
Nevychýlený,
velký rozptyl



Vychýlený,
malý rozptyl



Nevychýlený,
malý rozptyl



Nejlepší nestranný

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ = bodové odhady pravděpodobnostních charakteristik

Pravděpodobnostní charakteristiky	**Výběrové charakteristiky**
Střední hodnota $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	Výběrový průměr $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Momenty $\mu_k(X) = E(X - E(X))^k$	Výběrové momenty $m_k(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^k$
Rozptyl $var(X) = E(X - E(X))^2$	Výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$
Kvantily $\tilde{x}_{100\alpha}$	Výběrové kvantily $X_{([np]+1)}$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ = bodové odhady pravděpodobnostních charakteristik

Pravděpodobnostní charakteristiky	Výběrové charakteristiky
Střední hodnota $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	Výběrový průměr $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Momenty $\mu_k(X) = E(X - E(X))^k$	Výběrové momenty $m_k(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^k$
Rozptyl $var(X) = E(X - E(X))^2$	Výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2$
Kvantily $\tilde{x}_{100\alpha}$	Výběrové kvantily $X_{([np]+1)}$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ - je nevychýlený (nestranný, unbiased)

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ - je nevychýlený (nestranný, unbiased)

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n - \mu)^2 =$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ - je nevychýlený (nestranný, unbiased)

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n - \mu)^2 = E\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n}\Big)^2 =$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ - je nevychýlený (nestranný, unbiased)

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n - \mu)^2 = E\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^2}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\Big)^2 =$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ - je nevychýlený (nestranný, unbiased)

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n - \mu)^2 = E\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^2}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\Big)^2 =$$

$$\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_i - \mu)(X_j - \mu)\Big) =$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ - je nevychýlený (nestranný, unbiased)

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n - \mu)^2 = E\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^2}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\Big)^2 =$$

$$\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} E(X_i-\mu)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_i-\mu)(X_j-\mu)\Big) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ - je nevychýlený (nestranný, unbiased)

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n - \mu)^2 = E\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^2}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\Big)^2 =$$

$$\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_i - \mu)(X_j - \mu)\Big) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$ - rozptyl konverguje k 0 pro $n \to \infty$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad střední hodnoty: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ - je nevychýlený (nestranný, unbiased)

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n - \mu)^2 = E\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^2}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\Big)^2 =$$

$$\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_i - \mu)(X_j - \mu)\Big) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$ - rozptyl konverguje k 0 pro n→∞

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad rozptylu: $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right)$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\Big) =$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(E\big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\big) - nE(\bar{X}_n^2)\Big) =$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n.$

Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(E\big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\big) - nE(\bar{X}_n^2)\Big) =$$

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - \big(E(X_i)\big)^2 = E(X_i^2) - \mu^2 \;\Rightarrow E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(E\big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\big) - nE(\bar{X}_n^2)\Big) =$$

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - \big(E(X_i)\big)^2 = E(X_i^2) - \mu^2 \;\Rightarrow E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\frac{1}{n}\sigma^2 = E(\bar{X}_n^2) - \mu^2 \;\Rightarrow E(\bar{X}_n^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(E\big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\big) - nE(\bar{X}_n^2)\Big) = \frac{n(\sigma^2+\mu^2) - \sigma^2 - n\mu^2}{n} = \sigma^2(1 - \frac{1}{n})$$

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - \big(E(X_i)\big)^2 = E(X_i^2) - \mu^2 \;\Rightarrow E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\frac{1}{n}\sigma^2 = E(\bar{X}_n^2) - \mu^2 \;\Rightarrow E(\bar{X}_n^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ - je vychýlený (biased)

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(E\big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\big) - nE(\bar{X}_n^2)\Big) = \frac{n(\sigma^2+\mu^2) - \sigma^2 - n\mu^2}{n} = \boxed{\sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - \big(E(X_i)\big)^2 = E(X_i^2) - \mu^2 \ \Rightarrow E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\frac{1}{n}\sigma^2 = E(\bar{X}_n^2) - \mu^2 \ \Rightarrow E(\bar{X}_n^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Odhad rozptylu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ - je vychýlený (biased)

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(E\big(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\big) - nE(\bar{X}_n^2)\Big) = \frac{n(\sigma^2+\mu^2) - \sigma^2 - n\mu^2}{n} = \boxed{\sigma^2\big(1 - \frac{1}{n}\big)}$$

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - \big(E(X_i)\big)^2 = E(X_i^2) - \mu^2 \;\Rightarrow E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\frac{1}{n}\sigma^2 = E(\bar{X}_n^2) - \mu^2 \;\Rightarrow E(\bar{X}_n^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 \quad \Rightarrow \quad E(s^2) = \sigma^2$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 \quad \Rightarrow \quad E(s^2) = \sigma^2$$

Tedy výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je nestranným odhadem rozptylu σ^2

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 \quad \Rightarrow \quad E(s^2) = \sigma^2$$

Tedy výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je nestranným odhadem rozptylu σ^2

Jak je to s rozptylem těchto odhadů?

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 \quad \Rightarrow \quad E(s^2) = \sigma^2$$

Tedy výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je nestranným odhadem rozptylu σ^2

Jak je to s rozptylem těchto odhadů?

$$\mathrm{Var}(s^2) = \mathrm{Var}\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2)$$

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 \quad \Rightarrow \quad E(s^2) = \sigma^2$$

Tedy výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je nestranným odhadem rozptylu σ^2

Jak je to s rozptylem těchto odhadů?

$$\mathrm{Var}(s^2) = \mathrm{Var}\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2)$$

Tedy:

rozptyl základního souboru $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je vychýlený, ale má menší rozptyl

výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je nevychýlený, ale má větší rozptyl

Bodové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 \quad \Rightarrow \quad E(s^2) = \sigma^2$$

Tedy výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je nestranným odhadem rozptylu σ^2

Jak je to s rozptylem těchto odhadů?

$$\mathrm{Var}(s^2) = \mathrm{Var}\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2)$$

Tedy:

rozptyl základního souboru $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je vychýlený, ale má menší rozptyl

výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ je nevychýlený, ale má větší rozptyl

Bodové odhady

Odhadujeme neznámý parametr θ. Najdeme odhadovou statistiku $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tak, aby splňovala některou (nejlépe všechny) z následujících vlastností:

- Nestrannost: $E\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = \theta$

Bodové odhady

Odhadujeme neznámý parametr θ. Najdeme odhadovou statistiku $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tak, aby splňovala některou (nejlépe všechny) z následujících vlastností:

- Nestrannost: $E\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = \theta$

Bodové odhady

Odhadujeme neznámý parametr θ. Najdeme odhadovou statistiku $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tak, aby splňovala některou (nejlépe všechny) z následujících vlastností:

- Nestrannost: $E\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = \theta$
- Vydatnost: $\mathrm{Var}\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big)$ je minimální

Bodové odhady

Odhadujeme neznámý parametr θ. Najdeme odhadovou statistiku $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tak, aby splňovala některou (nejlépe všechny) z následujících vlastností:

- Nestrannost: $E\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = \theta$
- Vydatnost: $\mathrm{Var}\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big)$ je minimální
- Konzistence: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Var}\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = 0$

Bodové odhady

Odhadujeme neznámý parametr θ. Najdeme odhadovou statistiku $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tak, aby splňovala některou (nejlépe všechny) z následujících vlastností:

- Nestrannost: $E\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = \theta$
- Vydatnost: $\mathrm{Var}\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big)$ je minimální
- Konzistence: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Var}\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = 0$

Jak se hledá odhadová statistika?

Bodové odhady

Odhadujeme neznámý parametr θ. Najdeme odhadovou statistiku $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tak, aby splňovala některou (nejlépe všechny) z následujících vlastností:

- Nestrannost: $E\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = \theta$
- Vydatnost: $\mathrm{Var}\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big)$ je minimální
- Konzistence: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\big(\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = 0$

Jak se hledá odhadová statistika?

- Metoda maximální věrohodnosti (maximalizuje věrohodnostní funkci)
- Momentová metoda (srovnává teoretické a výběrové momenty)
- Metoda nejmenších čtverců (minimalizuje čtvercovou odchylku)

Bodové odhady

Bodové odhady

Metoda maximální věrohodnosti (Maximum likelihood)

Bodové odhady

Metoda maximální věrohodnosti (Maximum likelihood)

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dostaneme pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Bodové odhady

Metoda maximální věrohodnosti (Maximum likelihood)

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dostaneme pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- uvažujme sdruženou hustotu náhodného vektoru $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, která závisí na neznámém parametru $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$

Bodové odhady

Metoda maximální věrohodnosti (Maximum likelihood)

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dostaneme pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- uvažujme sdruženou hustotu náhodného vektoru $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, která závisí na neznámém parametru $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$
- s touto funkcí budeme nadále zacházet jako s funkcí neznámé θ a budeme ji nazývat věrohodnostní funkcí: $l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Bodové odhady

Metoda maximální věrohodnosti (Maximum likelihood)

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dostaneme pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- uvažujme sdruženou hustotu náhodného vektoru $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, která závisí na neznámém parametru $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$
- s touto funkcí budeme nadále zacházet jako s funkcí neznámé θ a budeme ji nazývat věrohodnostní funkcí: $l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- hledáme $\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} l(\theta; x_1, \ldots, x_n)$ a nazveme je maximálně věrohodným odhadem parametru θ.

Bodové odhady

Metoda maximální věrohodnosti (Maximum likelihood)

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dostaneme pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- uvažujme sdruženou hustotu náhodného vektoru $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, která závisí na neznámém parametru $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$
- s touto funkcí budeme nadále zacházet jako s funkcí neznámé θ a budeme ji nazývat věrohodnostní funkcí: $l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- hledáme $\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} l(\theta; x_1, \ldots, x_n)$ a nazveme je maximálně věrohod-ným odhadem parametru θ.

Často namísto funkce $l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maximalizujeme logaritmickou věrohodnostní funkci $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln(l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Bodové odhady

Metoda maximální věrohodnosti (Maximum likelihood)

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \dots, X_n$ dostaneme pozorování $x_1, x_2, \dots, x_n$
- uvažujme sdruženou hustotu náhodného vektoru $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, která závisí na neznámém parametru $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$
- s touto funkcí budeme nadále zacházet jako s funkcí neznámé θ a budeme ji nazývat věrohodnostní funkcí: $l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$
- hledáme $\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} l(\theta; x_1, \dots, x_n)$ a nazveme je maximálně věrohodným odhadem parametru θ.

Často namísto funkce $l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$ maximalizujeme logaritmickou věrohodnostní funkci $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n))$.

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametru Poissonova rozdělení $p(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametru Poissonova rozdělení $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$

Máme pozorování $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a vytvoříme věrohodnostní funkci

$$l(\lambda; k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametru Poissonova rozdělení $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$

Máme pozorování $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a vytvoříme věrohodnostní funkci

$$l(\lambda; k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}$$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametru Poissonova rozdělení $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$

Máme pozorování $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a vytvoříme věrohodnostní funkci

$$l(\lambda;\, k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}$$

Vytvoříme logaritmickou věrohodnostní funkci:

$$L(\lambda;\, k_1, \ldots, k_n) = -n\lambda + \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{n} k_i + \ln\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}\Big)$$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametru Poissonova rozdělení $p(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$

Máme pozorování $k_1, k_2, \ldots, k_\mathrm{n}$ a vytvoříme věrohodnostní funkci

$$l(\,\lambda;\, k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}$$

Vytvoříme logaritmickou věrohodnostní funkci:

$$L(\,\lambda;\, k_1, \ldots, k_n) = -n\lambda + \ln(\lambda) \sum_{i=1}^{n} k_i + \ln\Bigl(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}\Bigr)$$

a hledáme maximum:

$$\frac{\mathrm{d}L(\,\lambda;\, k_1, \ldots, k_n)}{\mathrm{d}\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametru Poissonova rozdělení $p(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$

Máme pozorování $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a vytvoříme věrohodnostní funkci

$$l(\lambda;\, k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}$$

Vytvoříme logaritmickou věrohodnostní funkci:

$$L(\lambda;\, k_1, \ldots, k_n) = -n\lambda + \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{n} k_i + \ln\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}\Big)$$

a hledáme maximum:

$$\frac{\mathrm{d}L(\lambda;\, k_1, \ldots, k_n)}{\mathrm{d}\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

$$-n + \frac{1}{\hat{\lambda}}\sum_{i=1}^{n} k_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}$$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametru Poissonova rozdělení $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$

Máme pozorování $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a vytvoříme věrohodnostní funkci

$$l(\lambda; k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}$$

Vytvoříme logaritmickou věrohodnostní funkci:

$$L(\lambda; k_1, \ldots, k_n) = -n\lambda + \ln(\lambda) \sum_{i=1}^{n} k_i + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!} \right)$$

a hledáme maximum:

$$\frac{\mathrm{d}L(\lambda; k_1, \ldots, k_n)}{\mathrm{d}\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} k_i$$

$$-n + \frac{1}{\hat{\lambda}} \sum_{i=1}^{n} k_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}}$$ = ML odhad λ (MLE λ)

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametru Poissonova rozdělení $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Máme pozorování $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a vytvoříme věrohodnostní funkci

$$l(\lambda; k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda} = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!}$$

Vytvoříme logaritmickou věrohodnostní funkci:

$$L(\lambda; k_1, \ldots, k_n) = -n\lambda + \ln(\lambda) \sum_{i=1}^{n} k_i + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!} \right)$$

a hledáme maximum:

$$\frac{dL(\lambda; k_1, \ldots, k_n)}{d\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} k_i$$

$$-n + \frac{1}{\hat{\lambda}} \sum_{i=1}^{n} k_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}}$$ = ML odhad λ (MLE λ)

Bodové odhady

Bodové odhady

Momentová metoda

Bodové odhady

Momentová metoda

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z nějakého rozdělení s d.f. $F(x;\theta)$, kde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ je k neznámých parametrů

Bodové odhady

Momentová metoda

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z nějakého rozdělení s d.f. $F(x;\theta)$, kde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ je k neznámých parametrů
- Spočteme k teoretických momentů $\mu_1, \ldots, \mu_k$ a k výběrových momentů $m_1, \ldots, m_k$

Bodové odhady

Momentová metoda

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z nějakého rozdělení s d.f. $F(x;\theta)$, kde $\theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ je k neznámých parametrů
- Spočteme k teoretických momentů $\mu_1, ..., \mu_k$ a k výběrových momentů $m_1, ..., m_k$
- porovnáním těchto momentů dostaneme k rovnic, z nichž vyjádříme k odhadů neznámých parametrů.

Bodové odhady

Momentová metoda

- pozorováním i.i.d. výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z nějakého rozdělení s d.f. $F(x;\theta)$, kde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ je k neznámých parametrů
- Spočteme k teoretických momentů $\mu_1, \ldots, \mu_k$ a k výběrových momentů $m_1, \ldots, m_k$
- porovnáním těchto momentů dostaneme k rovnic, z nichž vyjádříme k odhadů neznámých parametrů.

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametrů normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ momentovou metodou.

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametrů normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ momentovou metodou.

$$\mu_1 = E(X) = \mu, \qquad \mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametrů normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ momentovou metodou.

$$\mu_1 = E(X) = \mu, \qquad \mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$m_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametrů normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ momentovou metodou.

$$\mu_1 = E(X) = \mu, \qquad \mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$m_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

odtud:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametrů normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ momentovou metodou.

$$\mu_1 = E(X) = \mu, \qquad \mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$m_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

odtud:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Bodové odhady

Příklad: Odhad parametrů normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ momentovou metodou.

$$\mu_1 = E(X) = \mu, \qquad \mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$m_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

odtud:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n.$

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1 - \alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad\qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1) \qquad\qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}\,)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad$ $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad\qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \leq \mu \leq \overline{\mu}\,) = P(\,-\underline{\mu} \geq -\mu \geq -\overline{\mu}\,)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad$ $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad\qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}) = P(-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}) = P(\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu})$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}\,) = P(\,-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}\,) = P(\,\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}) = P(-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}) = P(\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu})$$

$$= P(\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n})$$

$$= P(\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad\qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}\,) = P(\,-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}\,) = P(\,\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,) = 1 - \alpha \;\; = P(\,u_{\alpha/2} \le Z \le u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\,1) \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(\,\underline{\mu} \le \mu \le \overline{\mu}\,) = P(-\underline{\mu} \ge -\mu \ge -\overline{\mu}\,) = P(\,\bar{X} - \underline{\mu} \ge \bar{X} - \mu \ge \bar{X} - \overline{\mu}\,)$$

$$= P\left(\,\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \ge \frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,\right)$$

$$= P\left(\,\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,\right) = 1 - \alpha \;= P(\,u_{\alpha/2} \le Z \le u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2}$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \right) = 1 - \alpha \quad = P\left(u_{\alpha/2} \leq Z \leq u_{1-\alpha/2} \right)$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X}-\overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}=u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X}-\underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}=u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$=P\left(\frac{\bar{X}-\overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\leq Z\leq\frac{\bar{X}-\underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\right)=1-\alpha \quad =P\left(u_{\alpha/2}\leq Z\leq u_{1-\alpha/2}\right)$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha \;\; = P(u_{\alpha/2} \leq Z \leq u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X}-\overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}=u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}=\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X}-\underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}=u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\leq\mu\leq\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,)=1-\alpha}$$

$$=P(\,\frac{\bar{X}-\overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\leq Z\leq\frac{\bar{X}-\underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,)=1-\alpha \;=P(\,u_{\alpha/2}\leq Z\leq u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$$

$$\boxed{P(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha}$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$= P(\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}) = 1 - \alpha \quad = P(u_{\alpha/2} \leq Z \leq u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha}$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1)}$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,) = 1 - \alpha \;\; = P(\,u_{\alpha/2} \leq Z \leq u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \le \mu \le \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha}$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1)} \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$= P(\,\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \le Z \le \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}\,) = 1 - \alpha \;\; = P(\,u_{\alpha/2} \le Z \le u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\boxed{P(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha}$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1)} \qquad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$= P(\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n}) = 1 - \alpha \;= P(u_{\alpha/2} \leq Z \leq u_{1-\alpha/2})$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$P(\,\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\,1) \qquad \boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\,) = 1 - \alpha}$$

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$P(\,\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1) \qquad \boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\,) = 1 - \alpha}$$

Tedy intervalový odhad je ve tvaru: $(\,\bar{X} - SE,\, \bar{X} + SE\,)$

kde SE je tzv. standardní chyba.

Intervalové odhady

$$\frac{\bar{X} - \overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha/2} \qquad \overline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} \qquad \underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

$$P(\,\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha$$

- Příklad: $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ $\qquad \bar{X}_n \sim N(\mu,\, \sigma^2/n)$

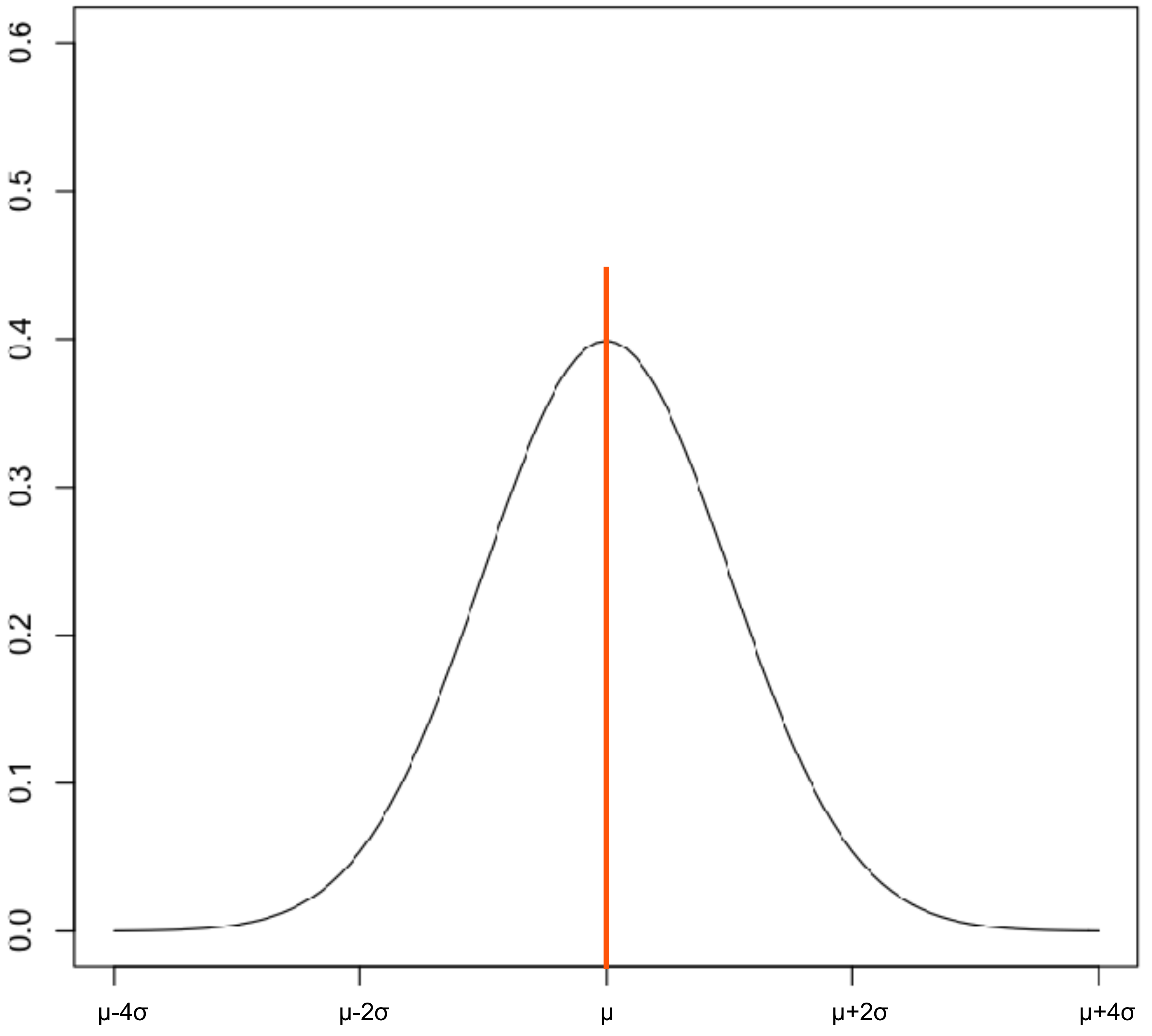
$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,\, 1) \qquad \boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)}$$

$$\boxed{P(\,\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\,) = 1 - \alpha}$$

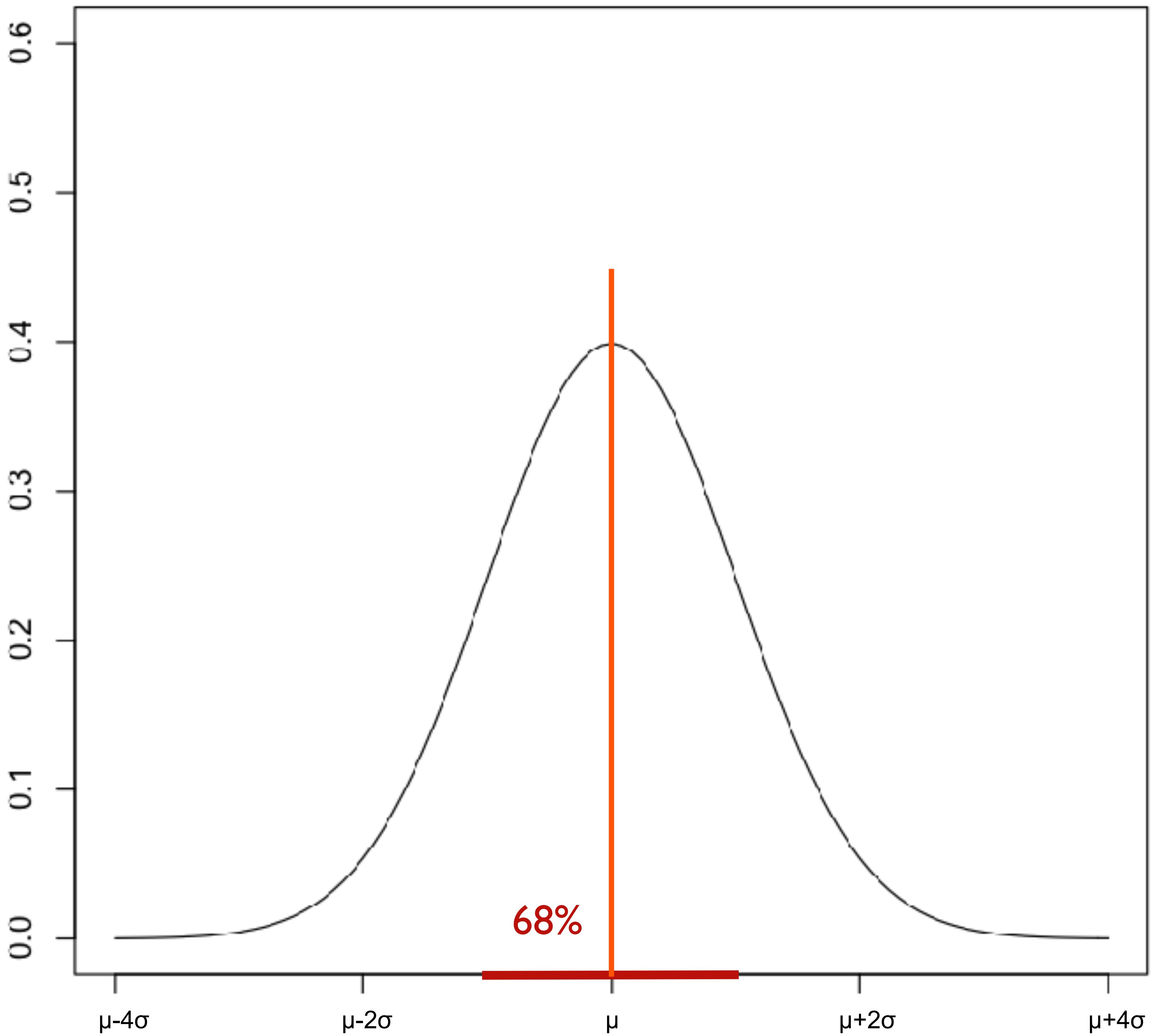
Tedy intervalový odhad je ve tvaru: $\quad (\,\bar{X} - SE,\, \bar{X} + SE\,)$

kde SE je tzv. standardní chyba.

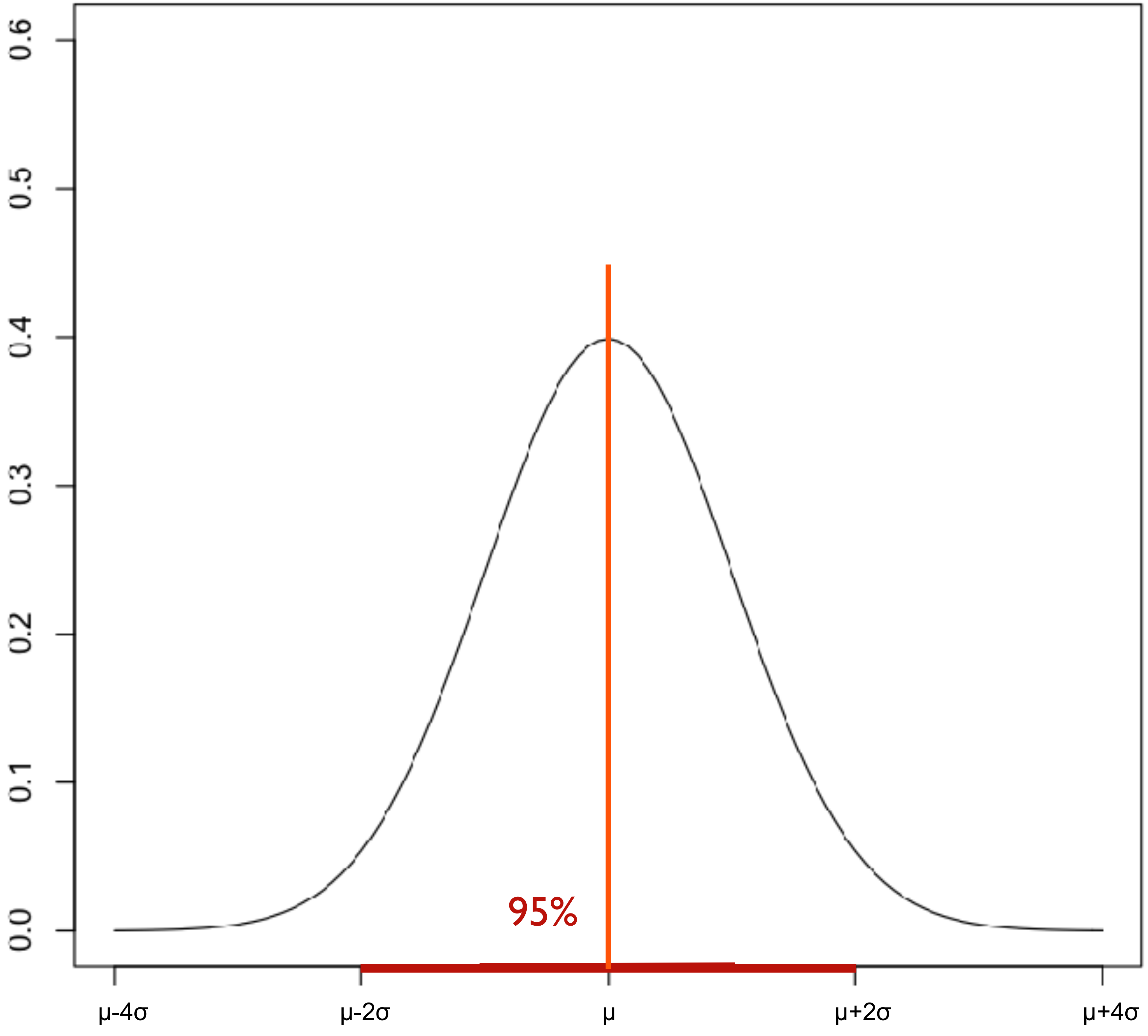
Intervalové odhady



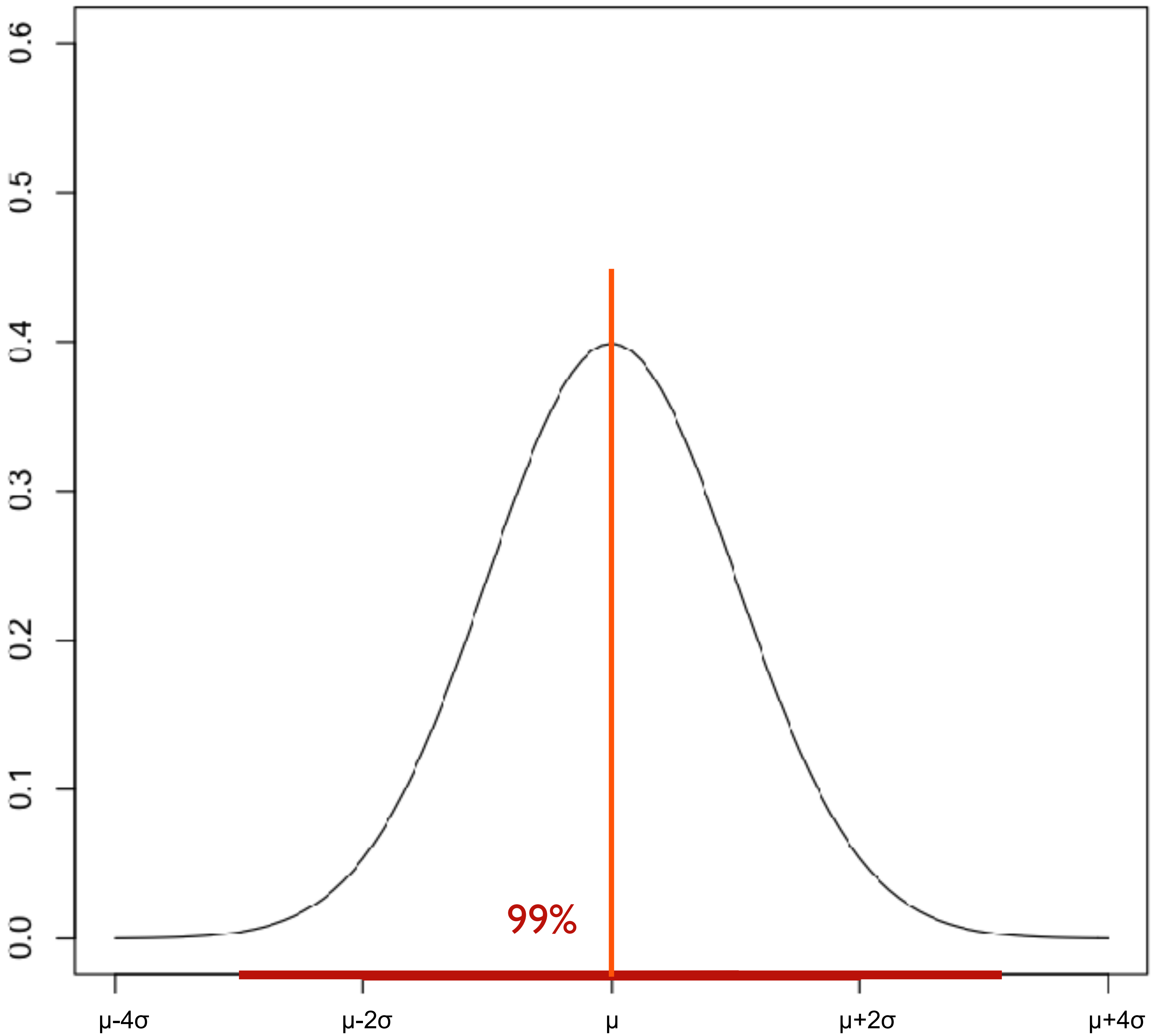
Intervalové odhady



Intervalové odhady



Intervalové odhady

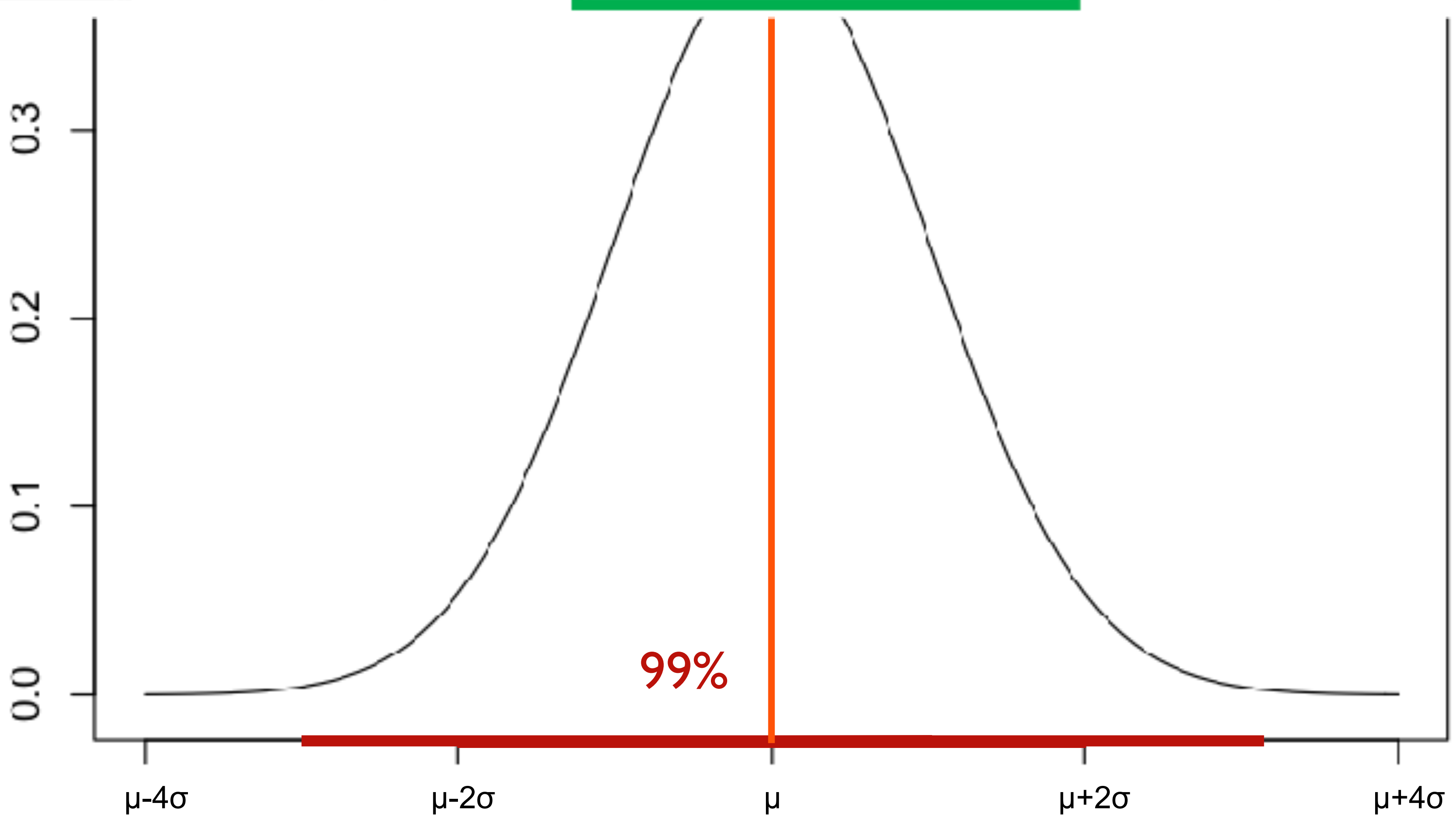


Intervalové odhady

Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. +90,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,65118	14,17739	12,50000	9,519502	13	0,000000

Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,59333	14,23525	12,50000	9,519502	13	0,000000

Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -99,000%	Int. spolehl. +99,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,46676	14,36181	12,50000	9,519502	13	0,000000

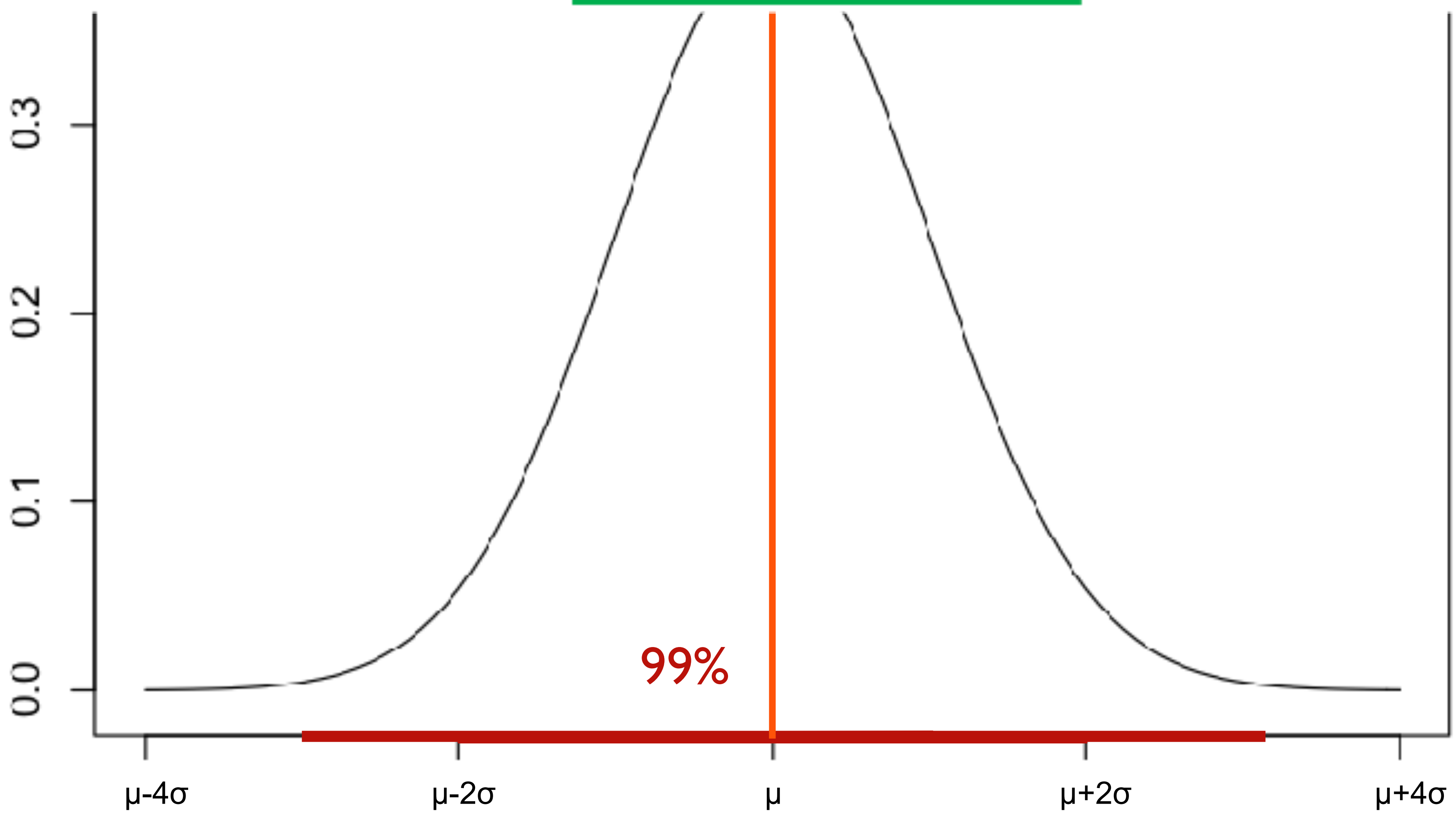


Intervalové odhady

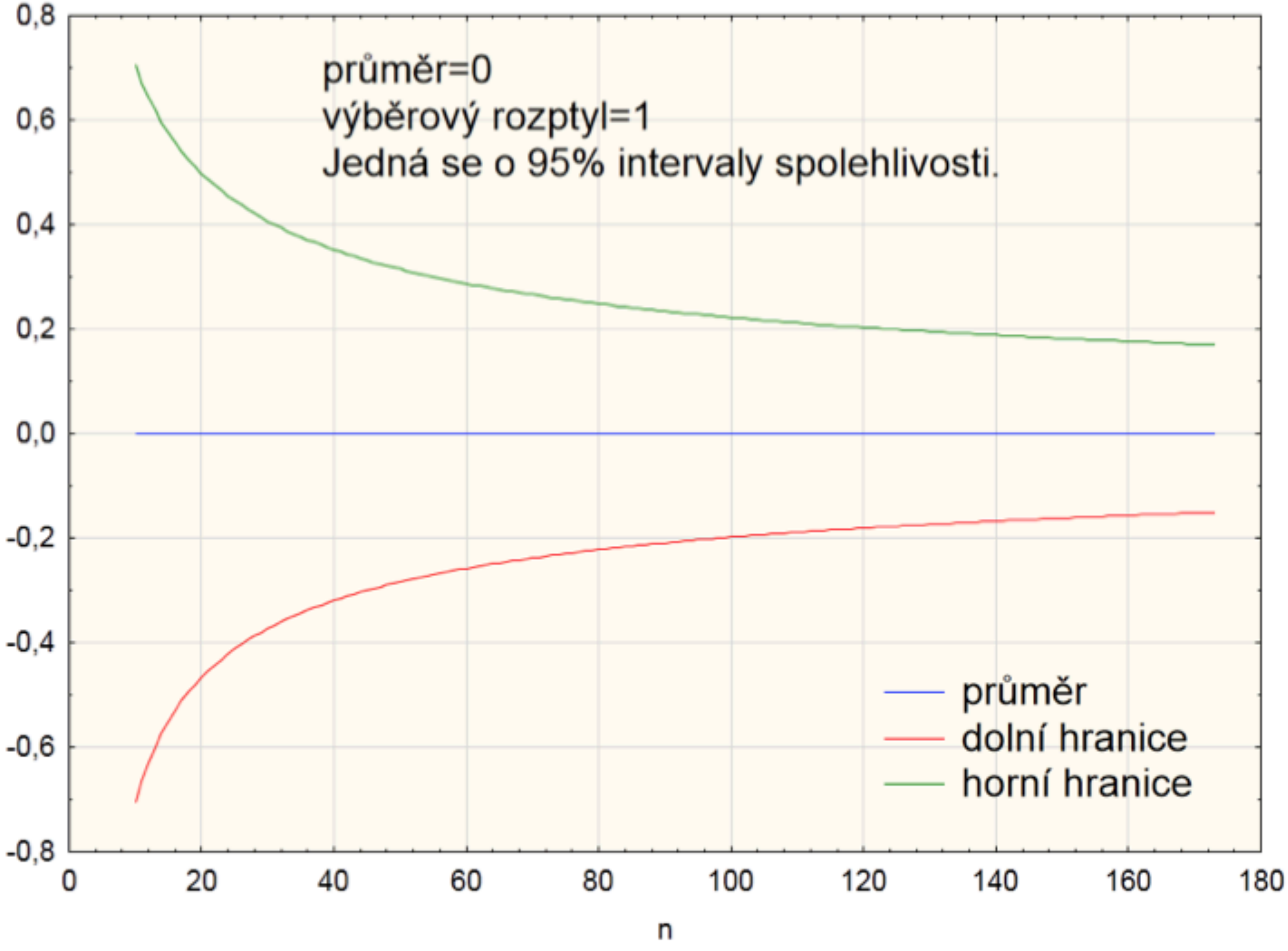
Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. +90,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,65118	14,17739	12,50000	9,519502	13	0,000000

Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,59333	14,23525	12,50000	9,519502	13	0,000000

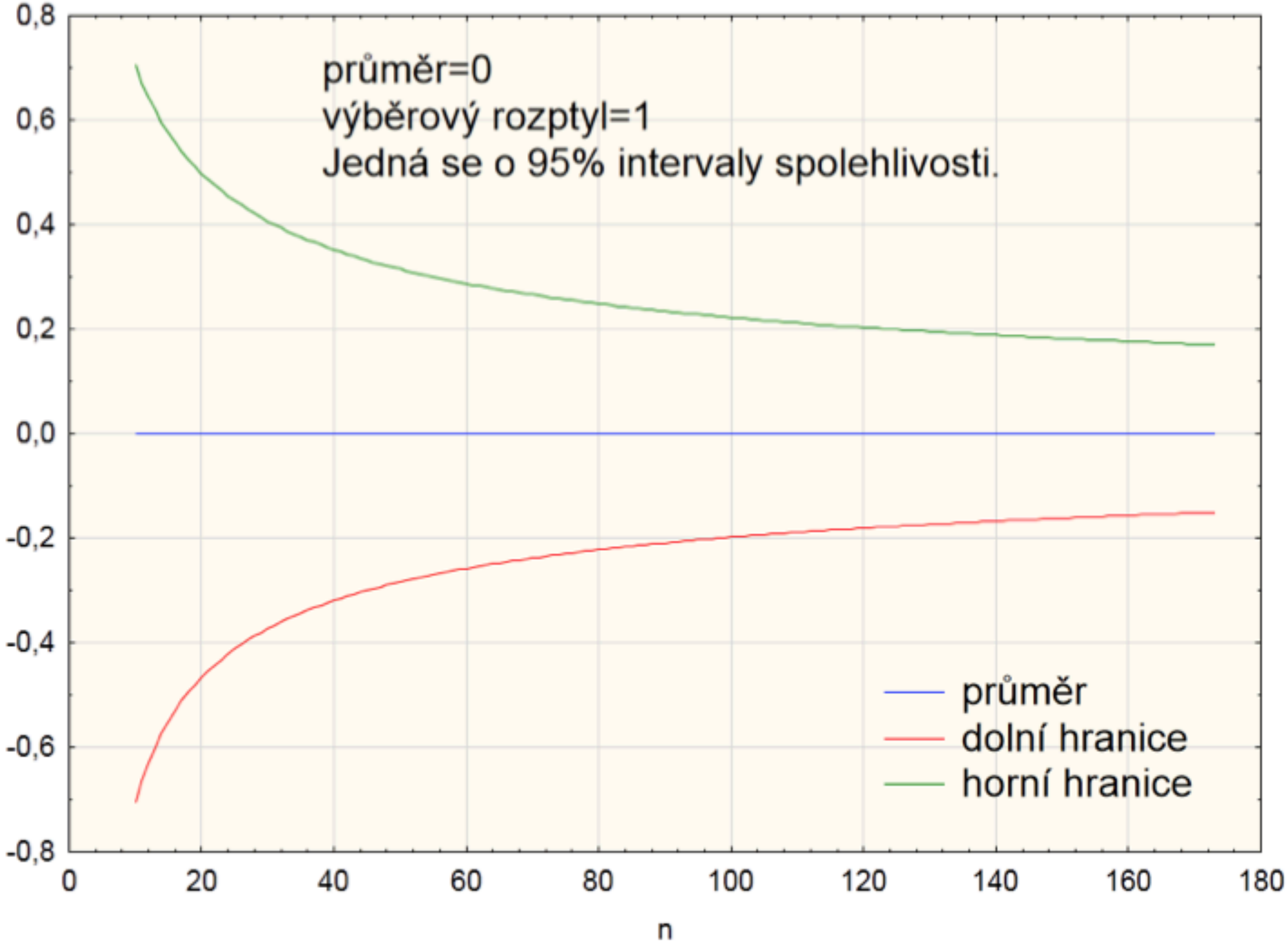
Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -99,000%	Int. spolehl. +99,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
spotřeba l/100	13,91429	0,555888	14	0,148567	13,46676	14,36181	12,50000	9,519502	13	0,000000



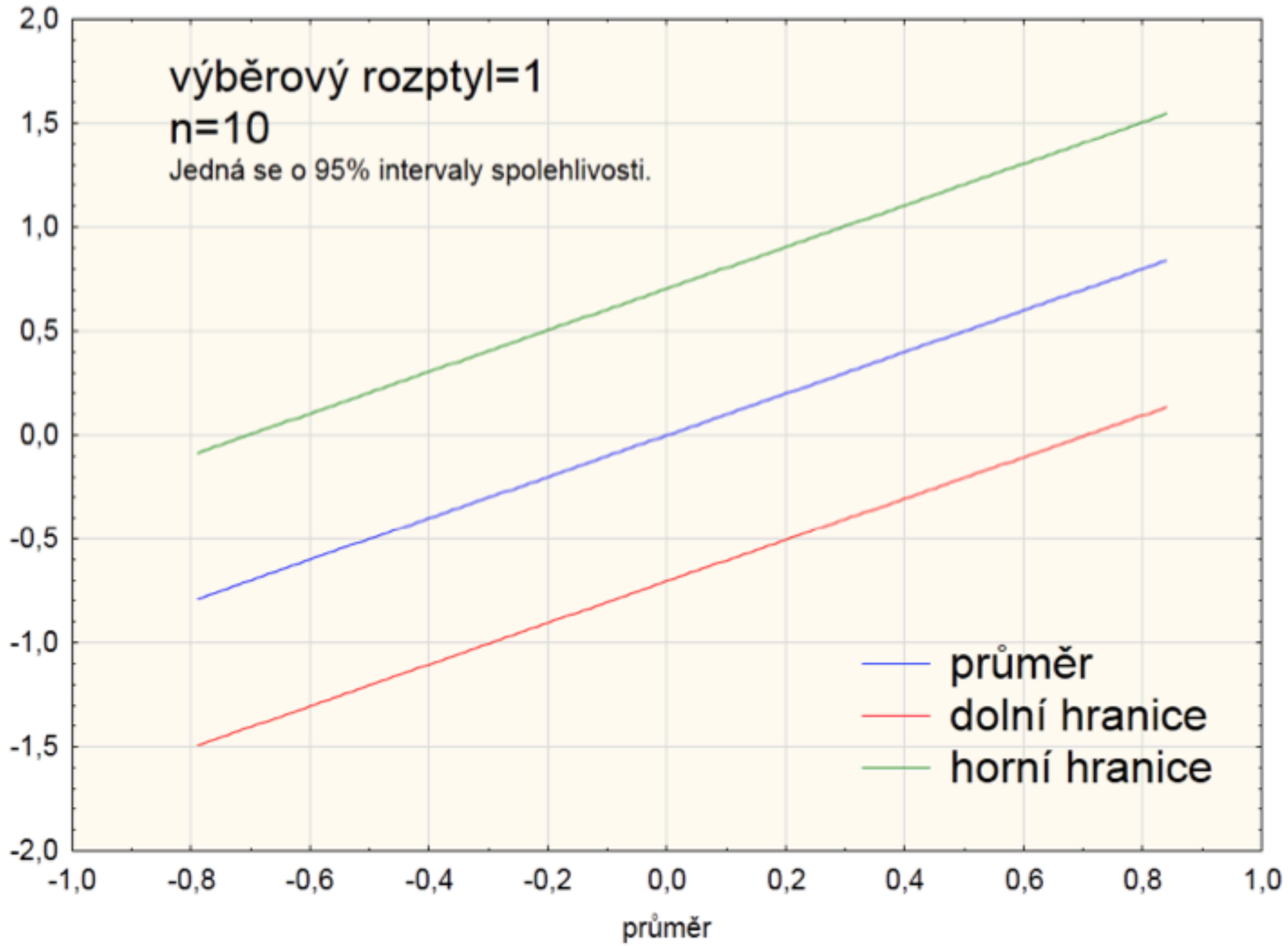
Intervalové odhady



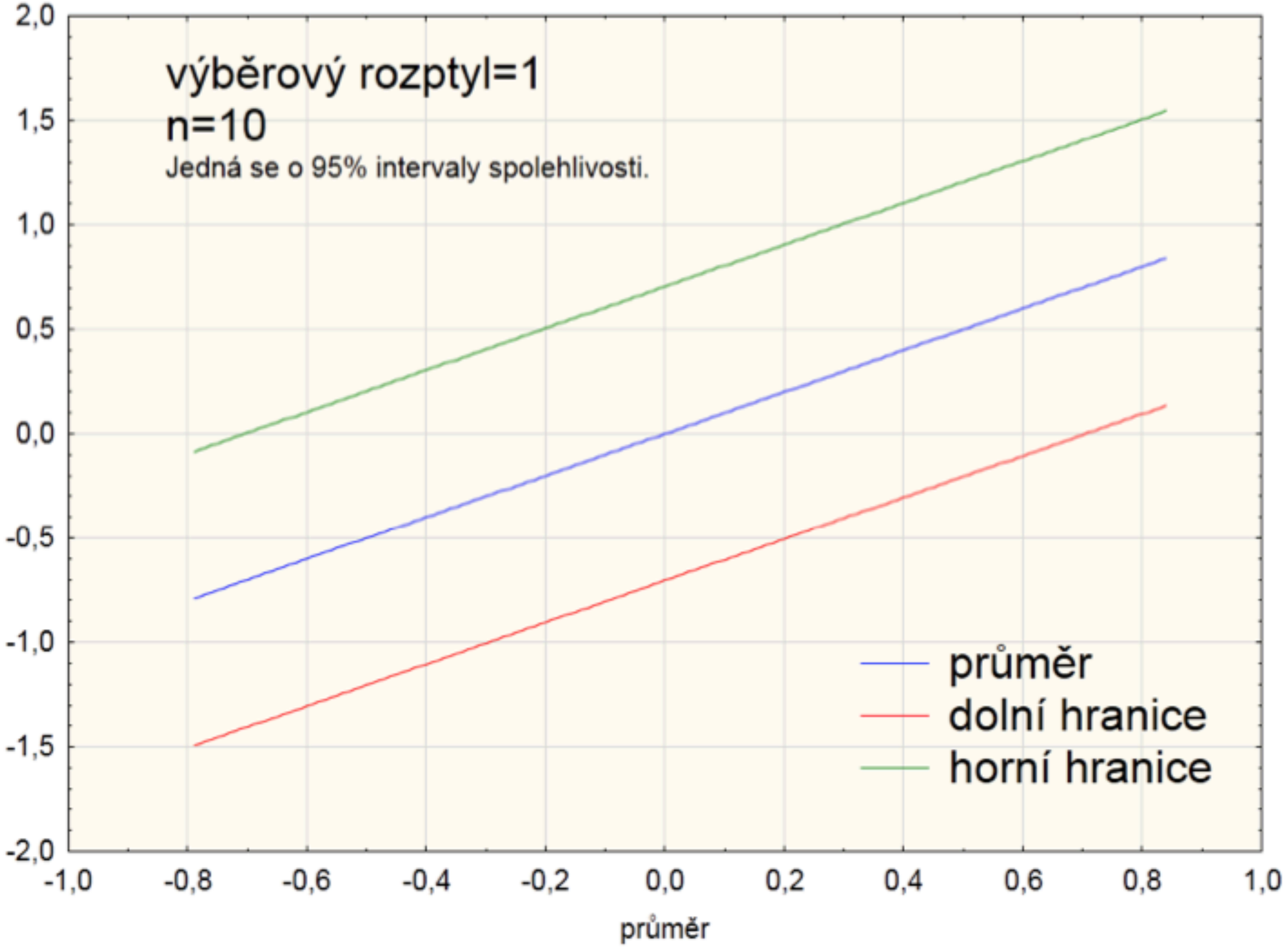
Intervalové odhady



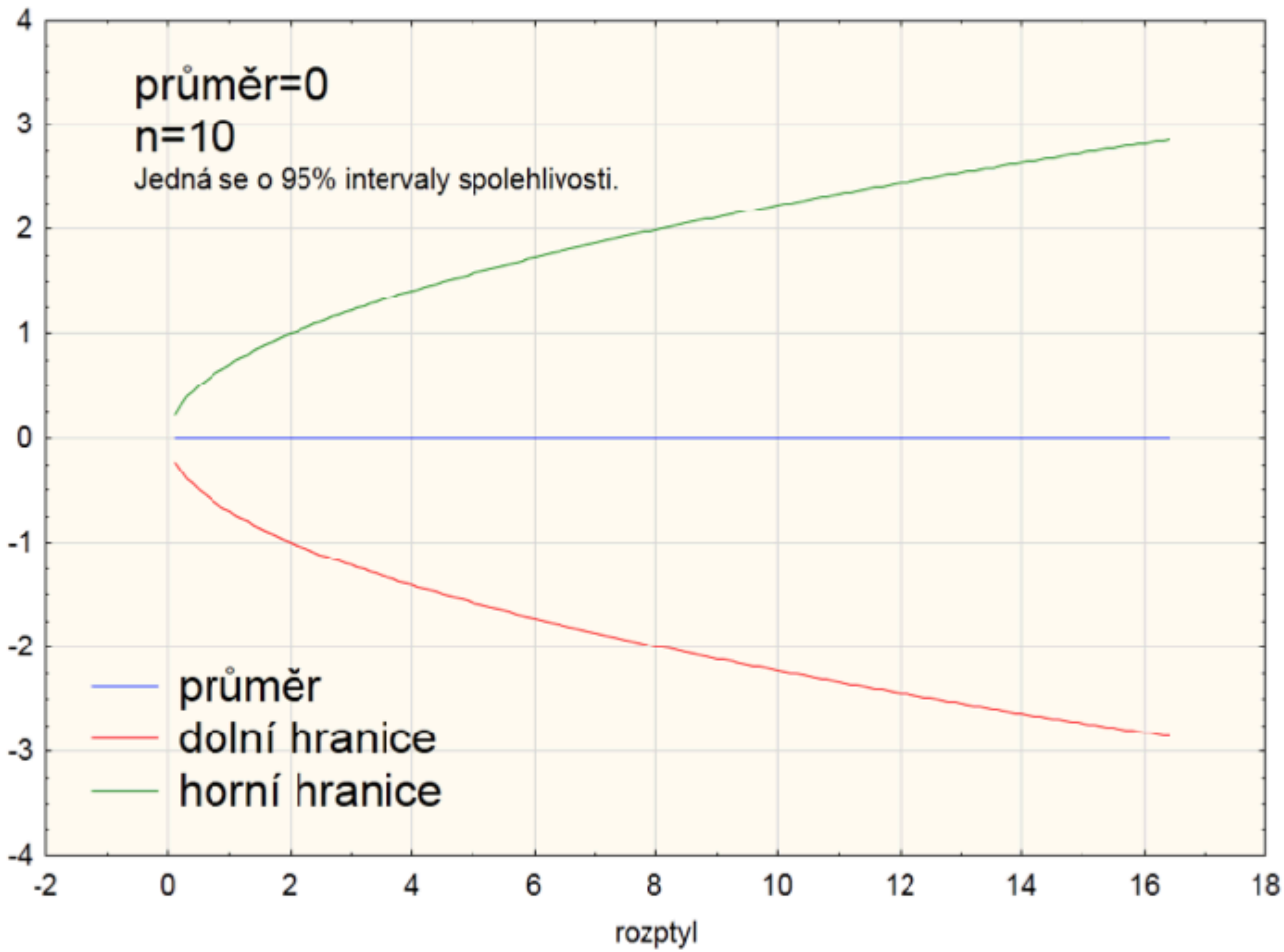
Intervalové odhady



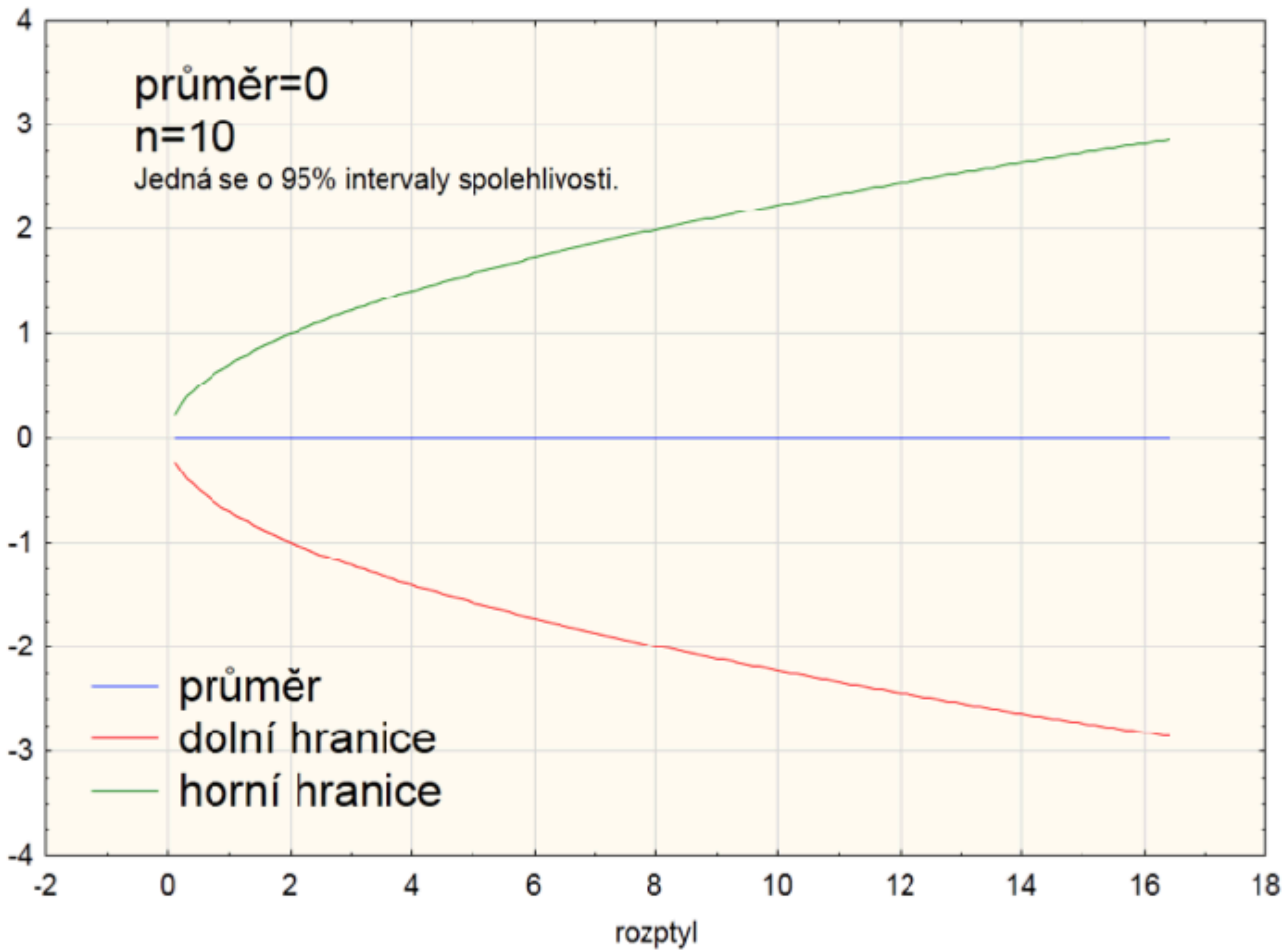
Intervalové odhady



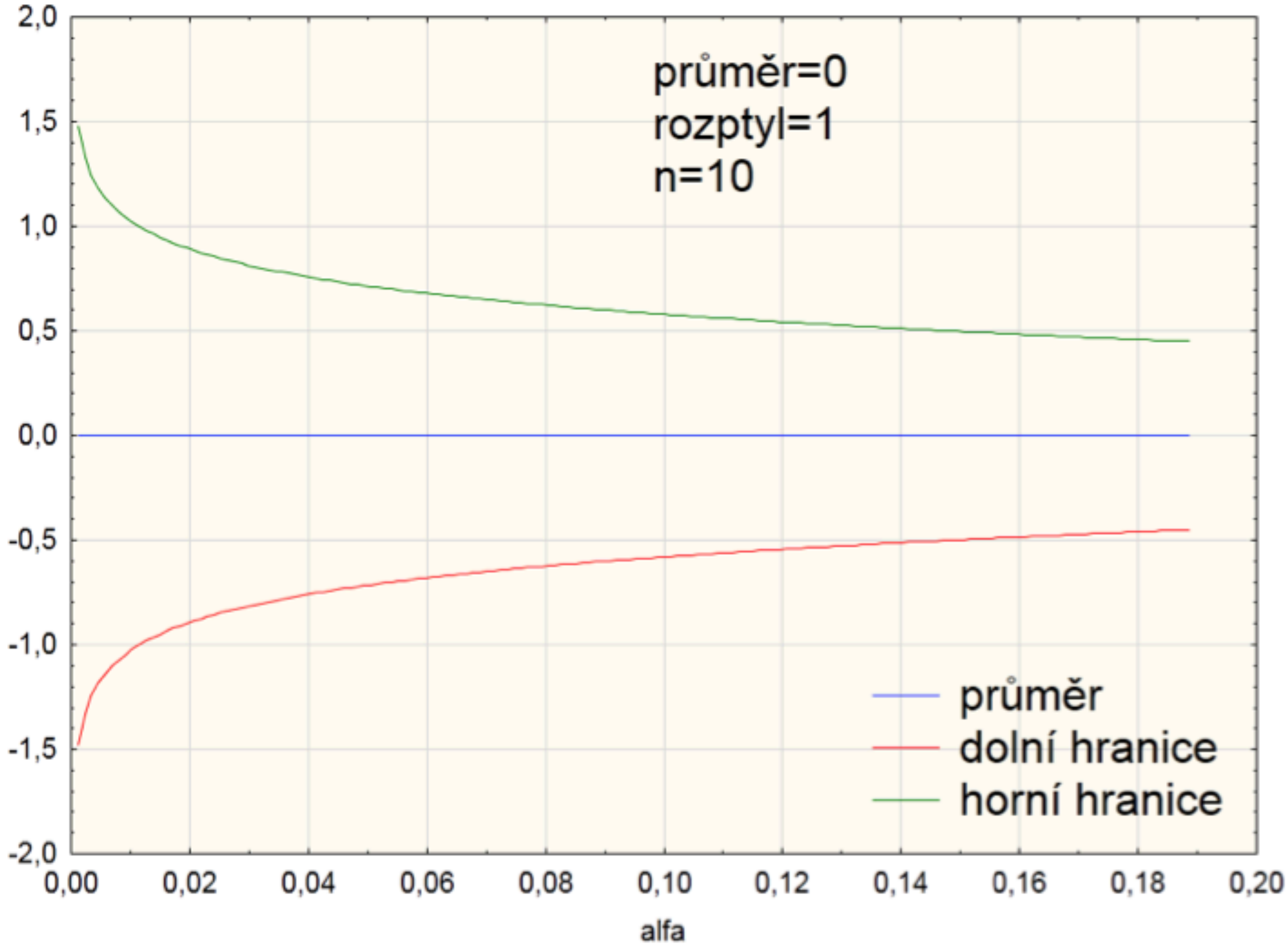
Intervalové odhady



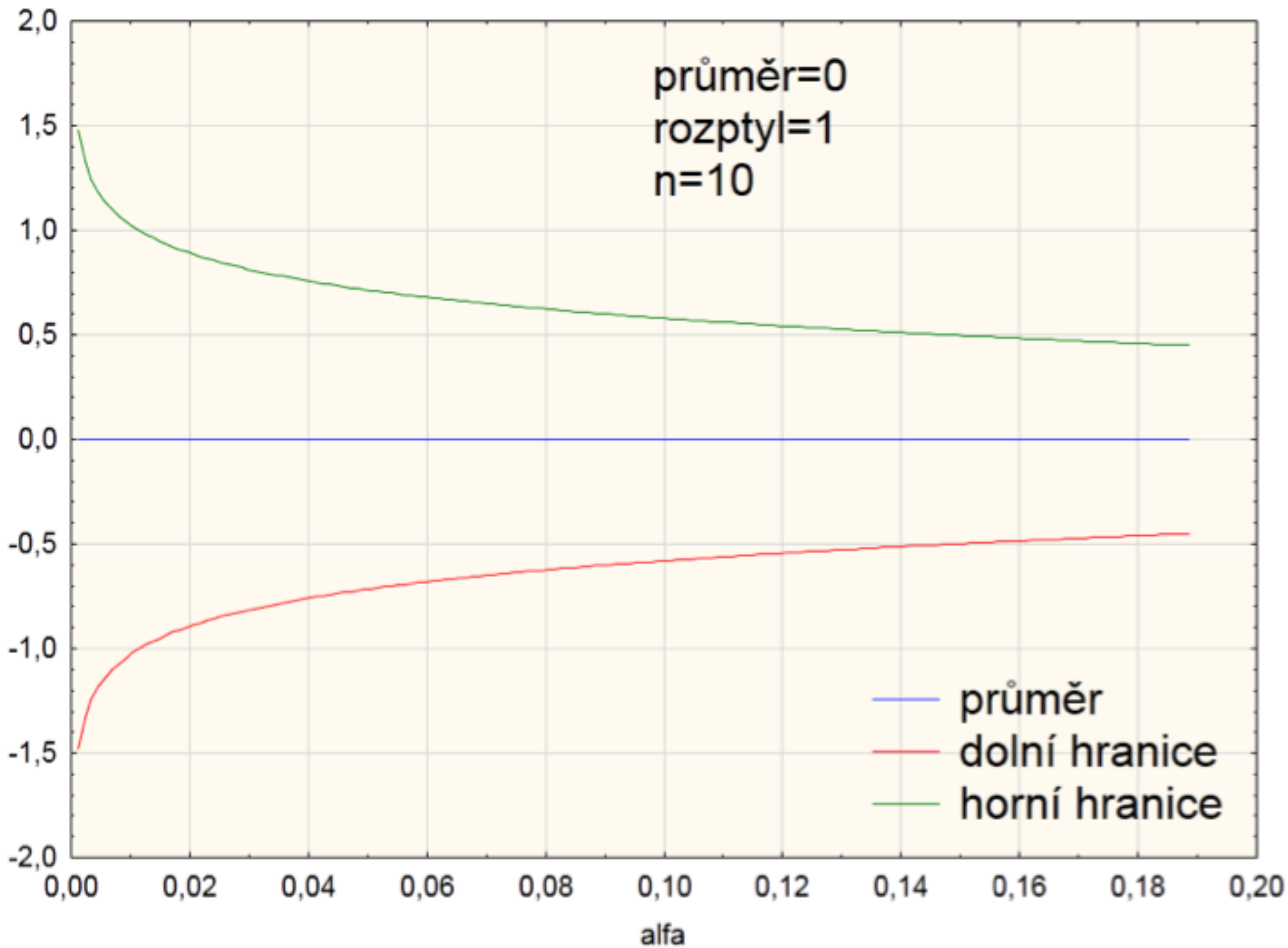
Intervalové odhady



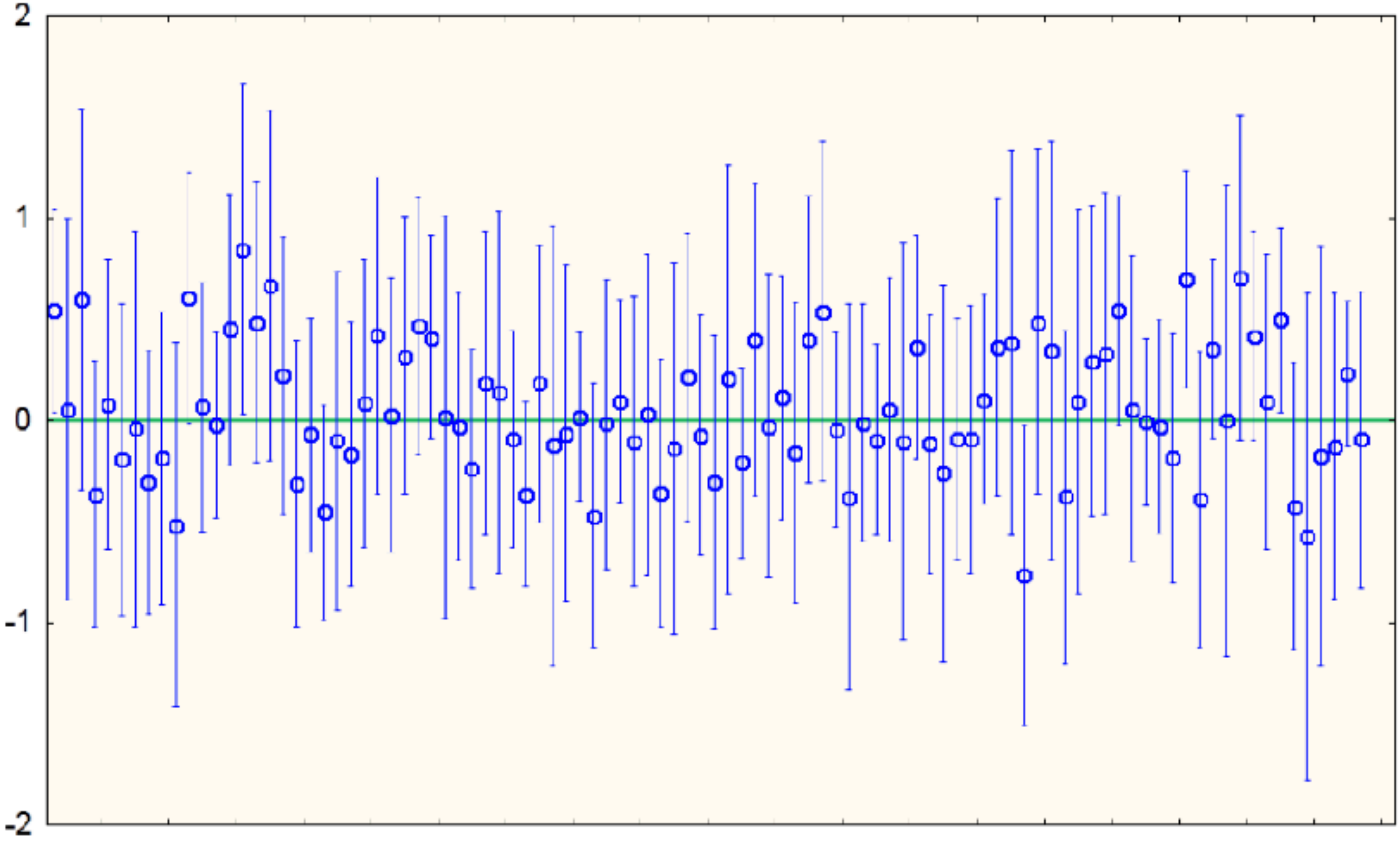
Intervalové odhady



Intervalové odhady

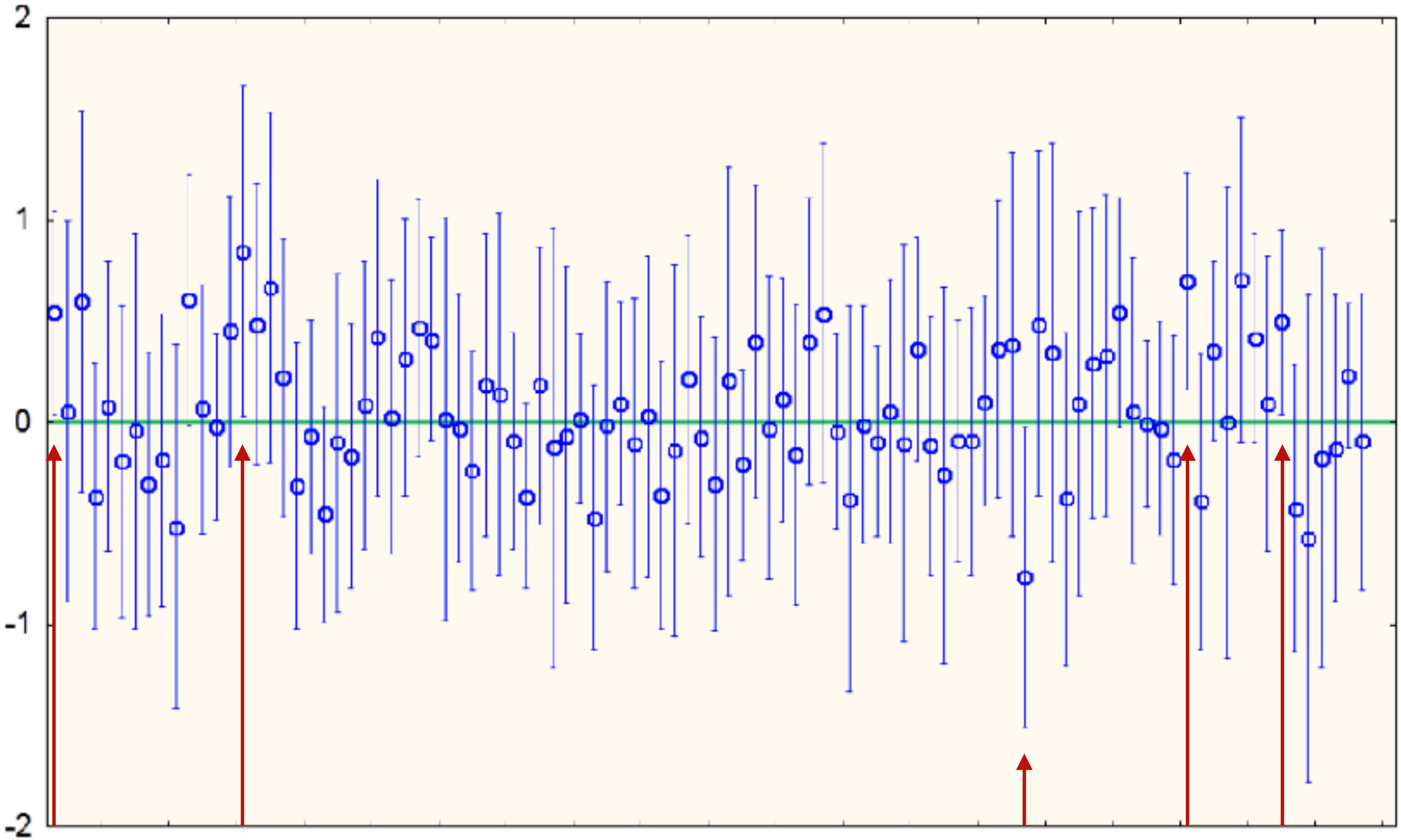


Intervalové odhady



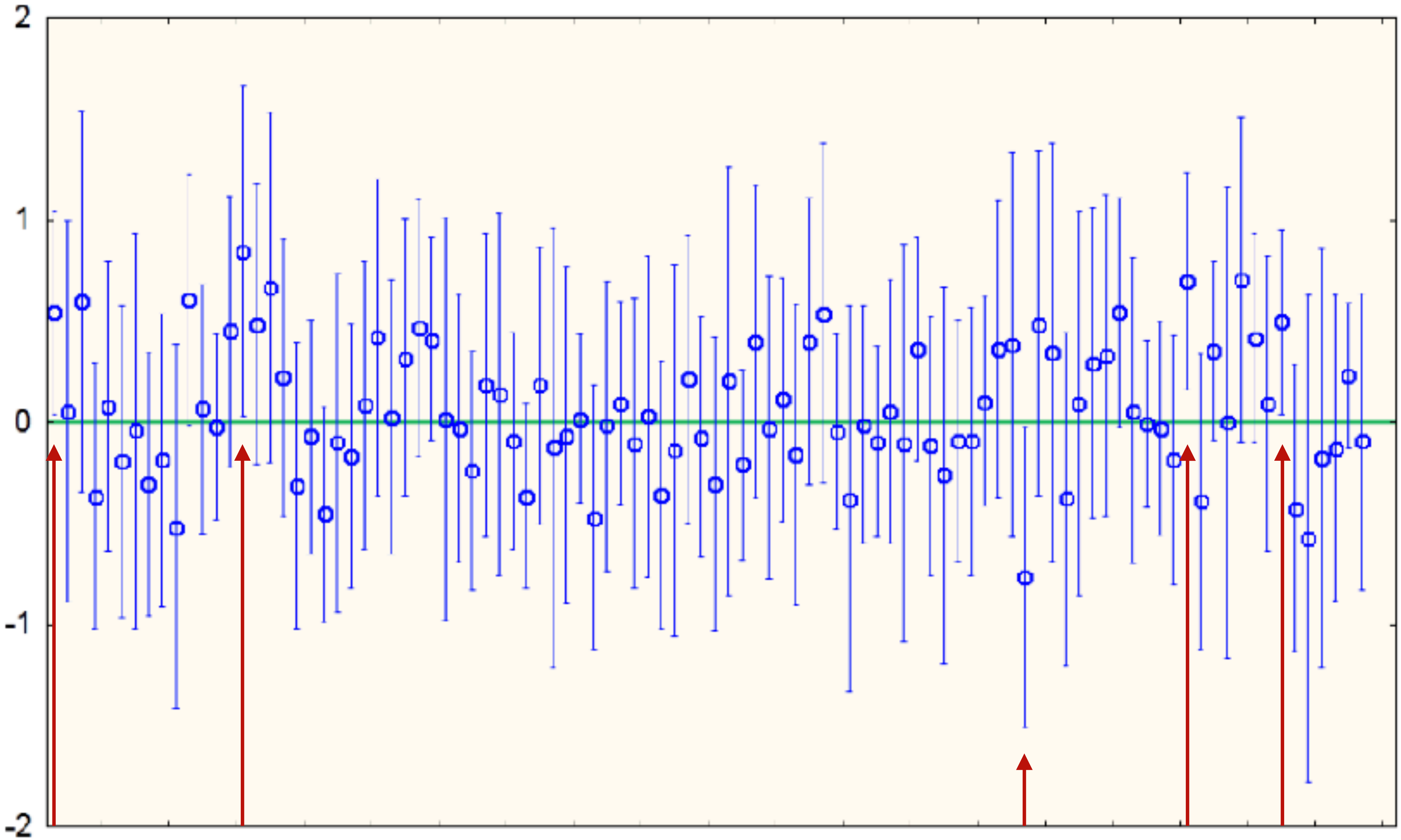
Simulační příklad: N=100, μ=0, α=0,05, (5 intervalů mimo)

Intervalové odhady



Simulační příklad: N=100, μ=0, α=0,05, (5 intervalů mimo)

Intervalové odhady



Simulační příklad: N=100, μ=0, α=0,05, (5 intervalů mimo)

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

$$SE = \sqrt{\frac{0,309}{14}}t_{0,95}(13) = 0,15.2,16 = 0,32$$

n	spotřeba (l/100)
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

$$SE = \sqrt{\frac{0,309}{14}} t_{0,95}(13) = 0,15.2,16 = 0,32$$

Tedy intervalový odhad je (13,59; 14,23).

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

$$SE = \sqrt{\frac{0,309}{14}}t_{0,95}(13) = 0,15.2,16 = 0,32$$

Tedy intervalový odhad je (13,59; 14,23).

Protože $12{,}5 \notin (13{,}59;\ 14{,}23)$, můžeme tvrdit, že naměřená spotřeba se od deklarované *statisticky významně liší*.

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Příklad: **Test spotřeby automobilu**

Deklarovaná průměrná spotřeba = 12,5l/100km

$$\bar{X} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{194,8}{14} = 13,914$$

$$s^2 = \frac{1}{13}\left[\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - 14.\bar{x}^2\right] = \frac{4,017}{13} = 0,309$$

$$SE = \sqrt{\frac{0,309}{14}} t_{0,95}(13) = 0,15.2,16 = 0,32$$

Tedy intervalový odhad je $(13{,}59;\ 14{,}23)$.

Protože $12{,}5 \notin (13{,}59;\ 14{,}23)$, můžeme tvrdit, že naměřená spotřeba se od deklarované *statisticky významně liší*.

n	*spotřeba (l/100)*
1	12,8
2	13,5
3	14,2
4	13,6
5	14,1
6	14,5
7	13,6
8	13,9
9	14,3
10	15,1
11	13,7
12	13,4
13	13,9
14	14,2

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \dots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 2: odhad rozptylu s^2

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 2: odhad rozptylu s^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 2: odhad rozptylu s^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 2: odhad rozptylu s^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P(\,(\,\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - provedeme posloupnost n nezávislých alternativních pokusů

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - provedeme posloupnost n nezávislých alternativních pokusů
  - spočteme relativní četnost p případů, v nichž nastal sledovaný jev

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - provedeme posloupnost n nezávislých alternativních pokusů
  - spočteme relativní četnost p případů, v nichž nastal sledovaný jev

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval ($\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$) takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - provedeme posloupnost n nezávislých alternativních pokusů
  - spočteme relativní četnost p případů, v nichž nastal sledovaný jev

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,u_{1-\alpha/2} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,u_{1-\alpha/2}$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P((\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - při šetření jsme zjistili, že ze 100 dotázaných respondentů 43 se chystá volit stranu mírného pokroku v mezích zákona
  - má tato strana šanci vyhrát ve volbách?

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$$

$$\bar{X} = 0,43$$
$$u_{0,975} = 1,96$$

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\,(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)))=1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - při šetření jsme zjistili, že ze 100 dotázaných respondentů 43 se chystá volit stranu mírného pokroku v mezích zákona
  - má tato strana šanci vyhrát ve volbách?

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} \le p \le \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$$

$\bar{X} = 0,43$

$u_{0,975} = 1,96$

Tedy intervalový odhad je (0,33; 0,53) => SMPvMZ má statisticky významnou šanci získat nadpoloviční většinu.

Intervalové odhady

Statistické charakteristiky: jsou spočteny na základě pozorování $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Intervalový odhad je interval $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ takový, že

$$P(\theta \in (\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))) = 1-\alpha$$

- Předpokládáme nějaké rozdělení výběru - zpravidla normální
- Příklad 3: odhad pravděpodobnosti p
  - při šetření jsme zjistili, že ze 100 dotázaných respondentů 43 se chystá volit stranu mírného pokroku v mezích zákona
  - má tato strana šanci vyhrát ve volbách?

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$$

$$\bar{X} = 0,43$$
$$u_{0,975} = 1,96$$

Tedy intervalový odhad je (0,33; 0,53) => SMPvMZ má statisticky významnou šanci získat nadpoloviční většinu.